

无网格法的理论及应用

张雄^{1,†} 刘岩^{1,2} 马上¹

¹清华大学航天航空学院, 北京 100084

² Department of Mechanical Engineering, Northwestern University, U.S.A.

摘要 本文详细论述了近年来迅速发展的无网格法的理论基础及其在各个领域内的应用. 无网格法网格依赖性弱, 避免了传统的有限元、边界元等基于网格的数值方法中可能出现的网格畸变和扭曲, 在一些有限元、边界元等方法难以较好处理的领域体现出独特的优势. 本文以加权余量法为主线归纳了已有的30多种无网格法, 各类无网格法的主要区别在于使用了不同的加权余量法和近似函数. 本文详尽介绍了各种无网格近似方案(包括移动最小二乘近似、核近似和重构核近似、单位分解近似、径向基函数近似、点插值近似、自然邻接点插值近似等等)和无网格法中常用的各类加权余量法(伽辽金格式、配点格式、局部弱形式、加权最小二乘格式、边界积分格式等), 并讨论了数值积分方法和边界条件的处理等问题. 在此基础上本文较系统地总结了无网格法在冲击爆炸、裂纹传播、超大变形、结构优化、流固耦合、生物力学和微纳力学等领域的应用, 展示了无网格法相对于传统数值方法的优势.

关键词 无网格法, 无单元法, 高速冲击, 裂纹扩展, 大变形

1 引言

详细论述了近年来迅速发展的无网格法的理论基础及其在各个领域内的应用. 无网格法网格依赖性弱, 避免了传统的有限元、边界元等基于网格的数值方法中可能出现的网格畸变和扭曲, 在一些有限元、边界元等方法难以较好处理的领域体现出独特的优势. 本文以加权余量法为主线归纳了已有的30多种无网格法, 各类无网格法的主要区别在于使用了不同的加权余量法和近似函数. 本文详尽介绍了各种无网格近似方案(包括移动最小二乘近似、核近似和重构核近似、单位分解近似、径向基函数近似、点插值近似、自然邻接点插值近似等等)和无网格法中常用的各类加权余量法(伽辽金格式、配点格式、局部弱形式、加权最小二乘格式、边界积分格式等), 并讨论了数值积分方法和边界条件的处理等问题. 在此基础上本文较系统地总结了无网格法在冲击爆炸、裂纹传

播、超大变形、结构优化、流固耦合、生物力学和微纳力学等领域的应用, 展示了无网格法相对于传统数值方法的优势.

有限元法是目前公认的解决科学和工程问题的最有效的数值方法之一, 但它在求解某些特殊问题时也存在固有缺陷. 例如, 在用拉格朗日法求解金属冲压成形、高速冲击和爆炸、裂纹动态扩展、流固耦合、局部化等涉及特大变形或需要不断进行网格重构的问题时, 有限元网格可能会产生严重扭曲, 不仅需要网格重构, 而且严重地影响解的精度; 对高速冲击和爆炸等动态问题, 显式时间积分的步长取决于有限元网格的最小尺寸, 因而网格的扭曲将使得时间积分步长过小, 大幅度地增加了计算工作量; 对裂纹动态扩展问题, 裂纹的扩展方向不能事先确定, 因此在计算过程中需要不断地重新划分网格以模拟裂纹的动态扩展过程; 对于形状优化问题, 也需要不断重新划分网格以适应物体形状的变化; 有限元近似基于网格, 因

收稿日期 2008-01-15, 修回日期 2008-03-06

*国家自然科学基金(10672088)、新世纪优秀人才支持计划(NCET-04-0091)和计算物理实验室基金资助目

E-mail: xzhang@tsinghua.edu.cn

此必然难于处理与原始网格线不一致的不连续性和大变形,同时也难于有效地处理材料的破碎和熔化;另外,虽然商用有限元前后处理软件得到了长足的发展,但大型复杂三维结构的有限元网格自动生成仍然是极具挑战力的任务.其他一些基于网格的数值方法,如有限差分法、边界元法等也或多或少的存在上述问题.

鉴于有限元、边界元等基于网格的数值方法的这些缺陷,国际计算力学界从20世纪90年代开始兴起了无网格法的研究热潮^[1~5].与基于网格的有限元等方法不同,无网格法用一组点来离散求解区域,直接借助于离散点来构造近似函数,可以彻底或部分地消除网格,不需要网格的初始划分和重构,不仅可以保证计算的精度,而且可以减小计算的难度.然而,无网格法也存在一些固有缺陷.例如,无网格近似函数一般均很复杂,其计算量较大;大多数的无网格近似函数不具有插值特性,因此无网格法本质边界条件的施加比有限元法繁琐.

求解微分方程的数值方法可以分为两大类.第一类方法是直接求解微分方程和相应定解条件的近似解,如有限差分法;另一类方法是首先建立和原微分方程及定解条件相等效的积分弱形式,再在此基础上建立近似解法,如加权余量法.虽然无网格法的种类繁多,有30余种,但从加权余量法的角度来看,各类无网格法的主要区别在于采用什么样的加权余量法和试探函数(trial function).例如,无单元伽辽金法(element free galerkin method, EFGM)采用伽辽金法,而有限点法(finite point method, FPM)则采用配点(collocation)法,边界节点法(boundary node method)且他们都利用移动最小二乘近似(moving least square, MLS)来建立试探函数.本文以加权余量法^[6,7]为主线,系统地论述无网格法的基本理论及其在成形、裂纹扩展、冲击爆炸、流固耦合、形状优化等方面的应用研究进展.

2 无网格近似函数

与有限元法不同,无网格法的近似函数是直接通过一组离散点 $\mathbf{x}_I(I=1,2,\dots,N)$ 来建立的,不依赖于网格.函数 $u(\mathbf{x})$ 可以近似为

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n N_I(\mathbf{x})u_I = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (1)$$

其中 $u_I = u(\mathbf{x}_I)$ 是函数 $u(\mathbf{x})$ 在节点 \mathbf{x}_I 处的值,

$N_I(\mathbf{x})$ 为节点 \mathbf{x}_I 的形函数, n 为形函数在 \mathbf{x} 处不为0的节点总数, $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = [N_1(\mathbf{x}), N_2(\mathbf{x}), \dots, N_n(\mathbf{x})]$, $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$.

对于多维问题,近似函数式(1)可以改写为

$$u_i(\mathbf{x}) \approx u_i^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n N_I(\mathbf{x})u_{iI} = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2)$$

其中 $u_{iI} = u_i(\mathbf{x}_I)$, $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = [N_1(\mathbf{x})\mathbf{I}, N_2(\mathbf{x})\mathbf{I}, \dots, N_n(\mathbf{x})\mathbf{I}]$, $\mathbf{u} = [u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{12}, \dots, u_{3n}]^T$, \mathbf{I} 为单位矩阵.不同的无网格近似函数具有不同的形函数.与有限元法不同,大多数无网格近似函数不具有插值特性,因此 u_I 一般不再是试函数 $u^h(\mathbf{x})$ 在节点 \mathbf{x}_I 处的值,即 $u^h(\mathbf{x}_I) \neq u_I$, $N_I(\mathbf{x}_J) \neq \delta_{IJ}$.

2.1 移动最小二乘近似

待求函数 $u(\mathbf{x})$ 在计算点 \mathbf{x} 的邻域 Ω_x 内可以局部近似为

$$u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^m p_i(\bar{\mathbf{x}})a_i(\mathbf{x}) \quad (3)$$

其中 $\bar{\mathbf{x}}$ 是计算点 \mathbf{x} 的邻域 Ω_x 内各点的空间坐标, $p_i(\bar{\mathbf{x}})$ 是基函数, m 是基函数的个数, $a_i(\mathbf{x})$ 是待定系数.通常使用单项式作为基函数,也可以使用任何其它函数,如奇异函数和三角函数等.

在移动最小二乘近似(moving least squares, MLS)^[8]中,系数 $a_i(\mathbf{x})$ 的选取使得近似函数 $u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ 在计算点 \mathbf{x} 的邻域 Ω_x (称为计算点 \mathbf{x} 的定义域)内是待求函数 $u(\mathbf{x})$ 在某种最小二乘意义下的最佳近似.在每个节点 \mathbf{x}_I 处定义一个权函数(也称为窗函数) $w_I(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$,它只在节点 \mathbf{x}_I 周围的一个有限区域 Ω_I (称为权函数 $w_I(\mathbf{x})$ 的支撑域或节点 \mathbf{x}_I 的影响域)中大于零,而在该邻域外为零.若计算点 \mathbf{x} 的定义域 Ω_x 包括 n 个节点,近似函数 $u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ 在这些节点 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_I$ 处的误差加权平方和为

$$J = \sum_{I=1}^n w_I(\mathbf{x}) [u^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) - u(\mathbf{x}_I)]^2 = \sum_{I=1}^n w_I(\mathbf{x}) \left[\sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}_I)a_i(\mathbf{x}) - u_I \right]^2 \quad (4)$$

令 J 取最小值,解得待定系数 $a_i(\mathbf{x})$,再代入式(3)中,得

$$u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})\mathbf{u} \quad (5)$$

其中 $\mathbf{N}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ 的具体表达式可参见文献[4]的第2.2.1节.

近似函数 $u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ 是待求函数 $u(\mathbf{x})$ 在计算点 \mathbf{x} 的定义域 Ω_x 内的加权最小二乘意义下的局部

最佳近似. 对求解域 Ω 中的所有点 \mathbf{x} 都可以在其邻域 Ω_x 内建立待求函数 $u(\mathbf{x})$ 的局部最佳近似, 这些局部近似函数 $u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ 在点 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ 处的值的集合就构成了待求函数 $u(\mathbf{x})$ 在求解域 Ω 内的全局近似函数 $u^h(\mathbf{x})$ (如图1所示), 即

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})|_{\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{x}} = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (6)$$

其中形函数 $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})|_{\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{x}}$.

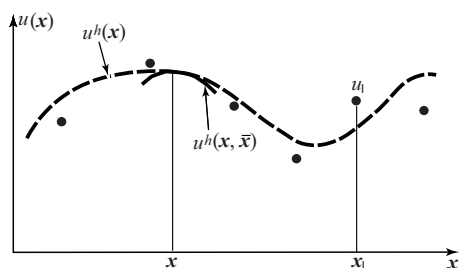


图1 局部近似和全局近似

当基函数中最高阶完备多项式的阶数 $k = 0$ 时, MLS形函数 $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ 为Shepard函数. 如果在MLS近似中将权函数 $w_I(\mathbf{x})$ 在域 Ω_I 内取为1, 在域 Ω_I 外取为0, 则MLS近似退化为标准的最小二乘近似(LSQ).

MLS近似可以精确地重构包含在基底中的任何函数 $p_i(\mathbf{x})$ (即 $\sum_{I=1}^n N_I(\mathbf{x})p_i(\mathbf{x}_I) = p_i(\mathbf{x})$), 因此可以将描述待求问题本质特征的解析函数包含在基底中, 从而提高解的精度和收敛率. 例如, 对于裂纹扩展问题, 基函数可以取为^[9]

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta] \quad (7)$$

其中 r 为某点距裂纹尖端的距离, θ 为该点与裂纹尖端的连线和裂纹线的夹角.

移动最小二乘近似要求近似函数在各节点处误差的平方和最小, 对近似函数导数的误差没有任何约束. Atluri等人^[10]在分析欧拉梁时, 要求近似函数及其导数在各点处误差的平方和最小, 建立了广义移动最小二乘近似(generalized moving least square, GMLS). 与移动最小二乘近似相比, 广义移动最小二乘近似可以提高近似函数的精度, 但对于欧拉梁问题其自变量的个数是原来的3倍. 在求解弹性力学问题等二维偏微分方程时, 可以

只将函数 $u(x, y)$ 在面力边界 Γ_t 上各节点处的导数作为自变量, 要求近似函数在所有节点处误差的平方和与近似函数导数在面力边界 Γ_t 上各点处误差的平方和之和最小.

2.2 核近似

函数 $u(\mathbf{x})$ 可以近似为

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} w(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})u(\bar{\mathbf{x}})d\Omega_{\bar{\mathbf{x}}} \quad (8)$$

其中函数 $w(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$ 称为核函数(kernel function)或光滑函数(smoothing function). 在数值计算中, 需采用式(8)的离散形式. 对式(8)右端进行数值积分即可建立其离散形式, 一般可写为

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^n w_J(\mathbf{x})u_J\Delta V_J = \sum_{J=1}^n N_J(\mathbf{x})u_J \quad (9)$$

其中 ΔV_J 是节点 \mathbf{x}_J 所对应的面积(体积), $w_J(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_J)$, $N_J(\mathbf{x}) = w_J(\mathbf{x})\Delta V_J$ 为核近似的形函数. 一般情况下 $u_J \neq u^h(\mathbf{x}_J)$, 因此节点参数 u_J 并不代表近似函数在节点 \mathbf{x}_J 处的值.

使用核近似式(9)时, 高维问题中各节点所对应的面积(体积) ΔV_J 的计算较为困难. 在光滑质点流体动力学(SPH)方法中, 将流体剖分成 N 个小体积元, 各体元的质心 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ 取为节点. 把各体元的质量 m_J 赋予节点 \mathbf{x}_J , 就可以将这些节点视为质点或粒子(particle). 各质点所对应的体积为 $\Delta V_J = m_J/\rho_J$, 其中 $\rho_J = \rho(\mathbf{x}_J)$ 为质点 \mathbf{x}_J 处的密度, 因此式(9)可写为

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^n w_J(\mathbf{x})\frac{m_J}{\rho_J}u_J \quad (10)$$

可见, SPH的形函数其实就是Shepard函数, 与MLS近似相比其计算量很小. 流体的密度函数 $\rho(\mathbf{x})$ 也可以用核近似式(10)来近似, 即

$$\rho^h(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^n w_J(\mathbf{x})m_J \quad (11)$$

上式表明, 连续密度场可以通过一组质点的质量经过核光滑化得到. 特别地, 质点 \mathbf{x}_I 的密度

$$\rho_I \approx \rho^h(\mathbf{x}_I) = \sum_{J=1}^n w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_J)m_J \quad (12)$$

是通过对它有影响的所有质点的质量光滑化而得到的, 这就是本方法称为“光滑质点”(smoothed particle)的原因.

在求解域边界附近, 核函数将被截断, 核近似不满足零阶一致性要求. 对节点非均匀分布的情

况,核近似不满足零阶和一阶一致性要求,因而不能保证收敛^[1],因此在使用核近似时应尽可能使节点均匀分布,并且在边界附近需要做特殊处理^[11].

2.3 重构核近似

尽管离散形式的核近似一般不满足一致性要求,SPH仍然在天体物理中给出了很好的数值模拟结果.Liu等人^[12]发现,将SPH法用于求解有限区域问题时,数值解不仅在边界附近恶化,而且具有幅度和相位误差.Liu等人认为这是由于离散形式的核近似不满足一致性条件引起的,并将式(8)修正为

$$u^h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} C(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) w(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) u(\bar{\mathbf{x}}) d\Omega_{\bar{\mathbf{x}}} \quad (13)$$

式中 $C(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ 称为校正函数(correction function),它可通过令式(13)满足一致性条件确定.Liu等人将校正函数 $C(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ 取为 k 阶完备多项式基函数 p_i 的线性组合,然后令式(13)满足 k 阶一致性条件,即可求得待定系数.式(13)给出的核近似能够精确重构 k 阶多项式,因此Liu等人将其称为重构核近似(reproducing kernel approximation, RK),将 $C(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})w(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$ 称为重构核函数(reproducing kernel function).对式(13)进行节点积分,可得到形如式(1)的离散形式的重构核近似,其中形函数为

$$N_I(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \Delta V_I \quad (14)$$

在多维问题中,各节点所对应的面积(体积) ΔV_I 很难精确确定.不论 ΔV_I 如何选取,重构核近似都具有 k 阶一致性.为了简单起见,可取 $\Delta V_I = 1$.

可以证明,RK和MLS是等价的^[1, 13].与MLS类似,通过在校正函数 $C(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ 中引入非多项式基函数,可以使RK具有重构任何非多项式函数的能力.Liu等人将小波分析引入重构核近似中,建立了多尺度重构核近似^[14](multiple scale reproducing kernel method).

2.4 单位分解函数

单位分解法使用一些以节点 \mathbf{x}_I 为中心、半径为 h_I 的子域 $\Omega_I (\Omega_I := \{\mathbf{y} \in R^n : \|\mathbf{x}_I - \mathbf{y}\|_{R^n} < h_I\})$ 来覆盖整个求解区域 $\Omega \in R^n : n = 1, 2, \text{或} 3$,即 $\Omega \subset \bigcup_{I=1}^N \Omega_I$.在每个子域 Ω_I 上定义一个仅在该子域内非零的函数 $\phi_I(\mathbf{x})$,并且要求它们满足单位分解条件

$$\sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x}) = 1 \quad (15)$$

函数集 $\{\phi_I(\mathbf{x})\}_{I=1}^N$ 称为属于开覆盖 $\{\Omega_I\}_{I=1}^N$ 的单位分解^[15, 16].构造单位分解 $\{\phi_I(\mathbf{x})\}_{I=1}^N$ 的方法很多,MLS的形函数、有限元形函数、Shepard函数等都是单位分解函数.

设函数 $V_I(\mathbf{x})$ 为函数 $u(\mathbf{x})$ 在子域 Ω_I 内的局部近似,则函数 $u(\mathbf{x})$ 在求解域 Ω 的全局近似可取为

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x}) V_I(\mathbf{x}) \quad (16)$$

在单位分解法中,任何能够在子域 Ω_I 中逼近 $u(\mathbf{x})$ 的函数都可以取为局部近似函数.例如,局部近似函数 $V_I(\mathbf{x})$ 可以取为以节点 \mathbf{x}_I 为中心的泰勒多项式,也可以取为多项式(或任何其它函数)的线性组合.与MLS近似类似,任何能够反映待求微分方程特性的函数都可以用来构造局部近似函数,以提高解的精度和收敛率.

Babuska和Melenk^[17]采用拉格朗日插值函数 $L_{Ij}(x)$ 来构造局部近似函数,它在节点 \mathbf{x}_I 处的值为1,在子域 Ω_I 内其它节点处的值为0.在高维问题中构造拉格朗日插值函数比较困难.Duarte和Oden^[18, 15]取 k 阶MLS形函数 $N_I^k(\mathbf{x})$ 为单位分解函数,并将局部近似函数取为

$$V_I(\mathbf{x}) = u_I + \sum_{j=1}^m b_{Ij} q_{Ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \quad (17)$$

其中 u_I 是函数 $u(\mathbf{x})$ 在节点 \mathbf{x}_I 处的值, $q_{Ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ 是高于 k 阶的单项式基函数.为了改善矩阵的条件数,他们采用勒让得(Legendre)多项式作为基函数.系数 u_I 和 b_{Ij} 是待求的未知量.Duarte和Oden将这种近似方法称为hp云团法(hp cloud).由式(17)可看出,在这类方法中一个节点所对应的未知量个数可以多于节点的自由度数,因此可很容易实现 p 自适应分析.

Duarte, Babuska和Oden等人^[16, 17, 19, 20, 21, 22]在式(16)中将单位分解函数取为有限元形函数,并将此方法称为广义有限元法(generalized finite element method, GEEM)或单位分解有限元法(partition of unity finite element method, PUFEM).除了形函数不同外,广义有限元法的程序实现和传统有限元法的程序实现基本相同.求解区域仍然用有限单元剖分,因此广义有限元法仍然可以使用单元进行积分,避免了无网格法的积分困难问题.另外采用有限元形函数使得本质边界条件的施加非常方便.

扩展有限元法(Extended Finite Element Method, XFEM)^[23, 24, 25, 26, 27]是GFEM和PUFEM的一种特例, 它采用带符号的距离函数(signed distance functions)来描述不连续面. XFEM的近似函数取为式(17)的一种简化形式

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_I N_I(\mathbf{x})(u_I + a_I \phi_I(\mathbf{x})) \quad (18)$$

其中 a_I 是与局部加强函数 $\phi_I(\mathbf{x})$ 相对应的附加节点自由度. 为了提高计算效率, 一般只对那些裂纹贯穿了其支撑域的节点引入附加自由度, 对其他节点仍然采用传统的有限元形函数.

如果裂纹完全贯穿了节点 \mathbf{x}_I 的支撑域(由与节点 \mathbf{x}_I 相连的所有单元组成), 则该节点的局部加强函数取为

$$\phi_I(\mathbf{x}) = H(f_\alpha(\mathbf{x})) \quad (19)$$

其中 $H(x)$ 为阶跃函数, 当 $x > 0$ 时 $H(x) = 1$, 否则 $H(x) = 0$. $f_\alpha(\mathbf{x}) = \min_{\bar{\mathbf{x}} \in \Gamma_\alpha} \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| \text{sign}(\mathbf{n}^+ \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}))$ 为带符号的距离函数, 其中 $\bar{\mathbf{x}}$ 是在不连续面 Γ_α 上距 \mathbf{x} 最近的点, \mathbf{n}^+ 为不连续面的外法向单位矢量.

如果裂纹只是部分贯穿了节点 \mathbf{x}_I 的支撑域, 即裂纹尖端处于节点 \mathbf{x}_I 的支撑域中, 则该节点的局部加强函数取为

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \sum_{\beta} a_{I\beta} b_{\beta}(\mathbf{x}) \quad (20)$$

式中 $b_{\beta}(\mathbf{x})$ 为不连续界面附近的分支函数, 对于线弹性断裂问题可以取为裂纹尖端附近的渐近解(式(7)中的最后4项).

在扩展有限元法中, 可以将描述奇异性和不连续性的函数引入到局部近似函数中 $V_I(\mathbf{x})$, 使得全局近似函数 $u^h(x)$ 具有描述奇异性和不连续性的能力. 此时, 在生成广义有限元的计算网格时不需要考虑结构的裂纹、空洞和不均匀性, 只需要按照结构的几何外形生成网格, 然后在局部近似函数中引入附加函数以体现裂纹、孔洞和不均匀性的存在. 因此网格不需要沿着材料内部边界(裂纹、材料界面、空洞等)划分, 一套网格即可模拟并捕捉材料界面和裂纹的扩展过程, 而不需要不断地重分网格.

2.5 径向基函数

径向基函数(radial basis function, 简记为RBF)是一类以点 \mathbf{x} 到节点 \mathbf{x}_I 的距离 $d_I =$

$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I|$ 为自变量的函数. 用径向基函数进行插值在多变量逼近理论中已成为一种强有力的工具, 它具有形式简单、空间维数无关、各向同性等优点. 常见的定义在全域上的以节点 \mathbf{x}_I 为中心的全局径向基函数有

$$\text{Multiquadrics(MQ): } \phi_I(\mathbf{x}) = (c^2 + d_I^2)^{1/2} \quad (21)$$

$$\text{Gaussians: } \phi_I(\mathbf{x}) = \exp(-cd_I^2) \quad (22)$$

$$\text{Thin-plate splines(TPS): } \phi_I(\mathbf{x}) = d_I^{2\beta} \log d_I \quad (23)$$

式中 c 为大于零的常数, β 为整数.

式(21)~(23)是定义在全求解域上的, 因此求解方程的系数矩阵是满阵, 且条件数很高. 近年来提出的正定紧支径向基函数^[28, 29, 30]具有系数矩阵稀疏、带状分布的特点, 利于求解大型问题.

函数 $u(\mathbf{x})$ 在域 Ω 中的近似函数 $u^h(\mathbf{x})$ 可以用以各节点 \mathbf{x}_I 为中心的径向基函数 $\phi_I(\mathbf{x})$ 表示为

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^N a_J \phi_J(\mathbf{x}) \quad (24)$$

其中 a_J 为待定系数. 式(24)有 N 个未知数, 令近似函数 $u^h(\mathbf{x})$ 在节点 \mathbf{x}_I 处的值等于函数 $u(\mathbf{x})$ 在该节点处的值 u_I , 给出 N 个线性方程($u^h(\mathbf{x}_I) = u_I$), 从中解得待定系数 a_J 后代入式(24)中, 可得到形如式(1)的近似函数. 径向基函数插值满足条件 $u^h(\mathbf{x}_I) = u(\mathbf{x}_I) = u_I$, $N_I(\mathbf{x}_J) = \delta_{IJ}$, 因此很容易施加本质边界条件. 这一特性是MLS和RK所不具备的.

Micchelli从理论上证明TPS是正定的, 而MQ是条件正定的^[31]. 增加线性多项式基后, MQ插值即变为正定的, 并可提高多项式类函数的插值精度. 引入多项式基后, 径向基函数插值可表示为^[32]

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^N a_J \phi_J(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m b_i p_i(\mathbf{x}) \quad (25)$$

其中 $p_i(\mathbf{x})$ 是多项式基函数, b_i 是待定系数. 如果式(25)中包含了常数基和线性基, 则插值具有一阶一致性.

式(25)的插值是在整个求解域中进行的, 其系数矩阵是高阶满阵, 且其条件数很大. Wang等人^[33]建议采用局部形式, 即点 \mathbf{x} 的近似函数仅由其邻域 Ω_x 中的节点来构造, 即

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^n a_J \phi_J(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m b_i p_i(\mathbf{x}) \quad (26)$$

其中 n 为点 \mathbf{x} 的邻域 Ω_x 中的节点总数. 由式(26)建立的近似函数是局部的, 基于它的无网格法的系数

矩阵将是稀疏阵. Wang等人将此方法称为径向基点插值法(radial point interpolation method).

用径向基函数插值时, 近似函数的导数在区域边界处的误差很大, 因此用径向基函数求解带有Neumann边界条件的微分方程将会产生较大的误差. 采用Hermite插值可以很好地解决这一问题^[34]. 假设已给定各节点处的函数值 $u(\mathbf{x}_I)$ 和区域边界节点处的函数一阶导数值 $u_{,\mathbf{x}}(\mathbf{x}_I)$, Hermite插值函数可以写为

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^N a_J \phi_J(\mathbf{x}) + \sum_{J=1}^{N_b} b_J \frac{\partial \phi_J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (27)$$

其中 N 是节点总数, N_b 是边界上的节点总数. 令 $u^h(\mathbf{x})$ 在所有节点处等于函数 $u(\mathbf{x})$ 在这些节点处的值 u_I , $u_{,\mathbf{x}}^h(\mathbf{x})$ 在所有边界节点处等于函数 $u_{,\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ 在这些节点处的值 $u_{,\mathbf{x}}$, 可得到 $N + N_b$ 个线性方程, 从中可解出待定系数 a_J 和 b_J , 代入式(27)中可得到形如式(1)的近似函数.

2.6 点插值法

在MLS近似中, 点 \mathbf{x} 的定义域 Ω_x 内的节点数 n 大于基函数的个数 m . 如果直接令(3)中的近似函数 $u^h(\mathbf{x})$ 在各节点 \mathbf{x}_I 处的值 $u^h(\mathbf{x}_I)$ 等于函数 $u(\mathbf{x})$ 在各节点处的值 u_I , 即 $u^h(\mathbf{x}_I) = u_I$, 则方程数 n 大于未知数 m , 需要用加权最小二乘法求解, 由此得到的近似函数不满足 $u^h(\mathbf{x}_I) = u_I$. 因此在基于MLS近似的无网格法中, 本质边界条件的施加较为困难.

刘桂荣等人^[35]令点 \mathbf{x} 的定义域 Ω_x 内所包含节点数和基函数的个数恰好相等, 即 $n = m$, 因而方程数等于未知数, 可以直接求解待定系数 a_i , 然后代入到式(3)中并令 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$, 可得到形如式(1)的近似函数, 其形函数满足条件 $N_I(\mathbf{x}_J) = \delta_{IJ}$, 即 $u^h(\mathbf{x}_I) = u_I$, 因此很容易施加本质边界条件. 刘桂荣等人将此方法称为点插值法(point interpolation method, PIM).

2.7 自然邻接点插值

自然邻接点插值包括Sibson插值^[36, 37]和非Sibson插值^[38], 他们都利用计算几何中的Voronoi图来建立近似函数, 且都满足Kronecker δ 条件, 因此以其为试函数可以很方便地施加本质边界条件.

以二维问题为例, 求解区域 Ω 可以用 N 个与节点 \mathbf{x}_I 相关联的凸多边形 T_I 离散, 多边形 T_I 中的所有点距节点 \mathbf{x}_I 比距其他任何节点 $\mathbf{x}_J (J \neq I)$ 更近(如

图2(a)所示). 多边形 T_I 称为节点 \mathbf{x}_I 的Voronoi多边形, 多边形 $T_I (I = 1, 2, \dots, N)$ 的集合称为节点集 $\mathbf{x}_I (I = 1, 2, \dots, N)$ 的Voronoi图(或一阶Voronoi图). 类似地也可构造节点集的高阶Voronoi图, 例如, 节点集的二阶Voronoi图将区域 Ω 剖分成与相邻节点对 \mathbf{x}_I 和 \mathbf{x}_J 相关联的多边形 T_{IJ} . 对多边形 T_{IJ} 中所有点来说, 节点 \mathbf{x}_I 和 \mathbf{x}_J 分别是距他们最近和次最近的节点. 可见, 只有当节点 \mathbf{x}_I 和 \mathbf{x}_J 的Voronoi多边形 T_I 和 T_J 相邻时 T_{IJ} 才不为空.

为构造计算点 \mathbf{x} 上的插值函数, 将点 \mathbf{x} 加入图2(a)中的节点集, 并重新生成新节点集的Voronoi图(如图2(b)所示), 其中多边形 $ABCD$ 即为点 \mathbf{x} 的Voronoi多边形 T_x . 将与 T_x 相邻的多边形所包含的节点称为点 \mathbf{x} 的自然邻接点, 则在图2(b)中点 \mathbf{x} 共有4个自然邻接点. 显然, 多边形 $ABFE$ 就是点 \mathbf{x} 和 \mathbf{x}_I 的二阶Voronoi多边形 T_{xI} , 它也是原节点集的Voronoi多边形 T_I 和新节点集的Voronoi多边形 T_x 的重叠区域.

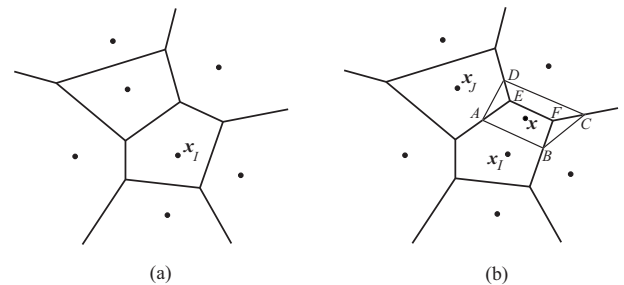


图2 Voronoi图示意

Sibson插值^[36]采用自然邻接点坐标作为插值函数. 令 $\kappa(\mathbf{x})$ 为 T_x 的Lebesgue测度(在一维、二维和三维中分别为长度、面积和体积, 在图2(b)中为四边形 $ABCD$ 的面积), $\kappa_I(\mathbf{x})$ 为 T_{xI} 的Lebesgue测度(图2(b)中四边形 $ABFE$ 的面积), 则将

$$N_I(\mathbf{x}) = \frac{\kappa_I(\mathbf{x})}{\kappa(\mathbf{x})} \quad (28)$$

称为点 \mathbf{x} 相对于其自然邻接点 \mathbf{x}_I 的自然邻接点坐标. 显然 $\sum_{I=1}^n N_I(\mathbf{x}) = 1$, 其中 n 为点 \mathbf{x} 的自然邻接点数.

Sibson插值形函数除了在节点上是 C^0 连续的, 在其他点上都是 C^∞ 连续的^[36, 39]. 节点的支持域由Voronoi图自动确定, 适合节点密度变化剧烈的情况. 对于一维问题, Sibson插值和线性有限元等价^[40]. Sibson插值只可以重构线性基, 当

求解高阶偏微分方程时或处理不可压材料等需要不同阶插值的情况时, 常需要高阶一致性, 这时需要对Sibson插值进行改造. Farin^[39, 41]提出了具有 C^1 连续性的Sibson插值, Gonzalez等^[42]提出在近似中加入扩充基函数, 以克服体积锁死问题;

非Sibson插值^[38]是由Belikov等人提出的. 令 t_{IJ} 表示 $\bar{T}_I = T_I \cup \partial T_I$ 和 $\bar{T}_J = T_J \cup \partial T_J$ 的交集, 则有

$$\sum_{J \neq I} \frac{|t_{IJ}| \mathbf{x}_J}{d(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_J)} = \mathbf{x}_I \left[\sum_{J \neq I} \frac{|t_{IJ}|}{d(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_J)} \right] \quad (29)$$

其中 $|t_{IJ}|$ 是 t_{IJ} 的Lebesgue测度. 非Sibson插值形函数定义为

$$N_I(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_I(\mathbf{x})}{\sum_{J=1}^n \alpha_J(\mathbf{x})}, \quad \alpha_J(\mathbf{x}) = \frac{|t_{xJ}|}{d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J)} \quad (30)$$

其中 $|t_{xI}|$ 是 t_{xI} 的Lebesgue测度. 对于二维问题, $|t_{xI}|$ 为图2(b)中 AB 边的长度.

与Sibson插值比较, 非Sibson插值采用空间维数低一维的测度建立近似函数, 计算量更小; 另外, Sibson插值在施加本质边界条件时, 如果为非凸边界, 则由于内部节点形函数在边界上不为零, 会造成一定的误差, 而非Sibson形函数在边界上是严格线性的, 适用于凸边界和凹边界.

除上面讨论的各种近似函数外, 无网格法中还采用Kriging插值^[43, 44, 45]和非均匀有理B样条(non uniform rational B-spline, NURBS)^[46, 47]等.

3 加权余量法

以弹性力学问题为例, 其控制方程为:

$$\text{平衡方程: } \sigma_{ij,j} + \bar{f}_i = 0, \text{ 在 } \Omega \text{ 内} \quad (31)$$

$$\text{力边界条件: } \sigma_{ij} n_j - \bar{t}_i = 0, \text{ 在 } \Gamma_t \text{ 上} \quad (32)$$

$$\text{位移边界条件: } u_i = \bar{u}_i \text{ 在 } \Gamma_u \text{ 上} \quad (33)$$

$$\text{几何方程: } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \text{ 在 } \Omega \text{ 内} \quad (34)$$

$$\text{物理方程: } \sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \text{ 在 } \Omega \text{ 内} \quad (35)$$

式中 \bar{f}_i 为域 Ω 中给定的体力, Γ_t 为给定面力边界, \bar{t}_i 为给定面力, n_j 为边界 Γ_t 的外法线方向余弦, Γ_u 为给定位移边界, \bar{u}_i 为给定位移. D_{ijkl} 为本构张量.

对复杂问题而言, 式(31)无法精确求解, 只能近似求解. 设 $u_i^h(\mathbf{x})$ 为式(31)的一个近似解, 称为试探函数(trial function). 显然, 近似解 $u_i^h(\mathbf{x})$ 一般不能

精确满足微分方程(31). 为得到未知场函数 $u_i(\mathbf{x})$ 的最佳近似解, 应以某种方式使微分方程(31)的残差为零. 加权余量法要求方程余量的加权平均为零, 即

$$\int_{\Omega} w_i(\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i) \, d\Omega = 0 \quad (36)$$

式中函数 w_i 称为检验函数(test function), 不同的加权余量法采用不同的检验函数.

3.1 伽辽金法型无网格法

伽辽金法的检验函数和试探函数取自同一函数空间. 取 $w_i = \delta u_i$, 由式(36)得

$$\delta \Pi(u) = \int_{\Omega} \delta u_i(\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i) \, d\Omega = 0 \quad (37)$$

对上式进行分部积分, 并引入物理方程(35)和边界条件(32), 同时考虑到 $\delta u_i|_{\Gamma_u} = 0$, 得

$$\begin{aligned} \delta \Pi(u) &= \int_{\Omega} (-\delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} + \delta u_i \bar{f}_i) \, d\Omega + \\ &\int_{\Gamma_t} \delta u_i \bar{t}_i \, d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

将无网格近似函数(1)代入上式, 并考虑到 $\delta u_i|_{\Gamma_u}$ 的任意性, 得:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (39)$$

式中 $\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega$, $\mathbf{P} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{f}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma$, \mathbf{B} 为应变矩阵, \mathbf{D} 为弹性矩阵.

伽辽金型无网格法的刚度矩阵 \mathbf{K} 是对称的. 许多无网格法都采用伽辽金法来建立求解方程, 如无单元伽辽金法(EFG)^[48, 49]、重构核点法(RKPM)^[12, 50]、HP云团法^[15, 51]、单位分解法(PUM)^[16, 17]、自然单元法^[37, 52, 53, 54]、点插值法(PIM)^[35, 33]等. 物质点法(material point method, MPM)^[55, 56]也基于加权残量法, 但采用质点和网格的双重描述, 有一些特殊的处理. 在MPM中, 试探函数基于网格, 同有限元的线性形函数一样. 积分在物质点上计算, 类似于节点积分. 物质点跟踪物体变形, 携带了所有的物理量, 而背景网格通常是规则的, 在每一时间步计算后抛弃并重新布置. Bardenhagen等扩展了MPM中试探函数和检验函数的选择范围, 以Petrov-Galerkin离散方案描述包含MPM的一族方法, 提出广义插值的物质点法(Generalized Interpolation Material Point, GIMP)^[57].

3.1.1 积分方法

伽辽金型无网格法的格式与有限元法非常相似. 有限元法将域 Ω 离散成一系列单元, 因此可以将刚度矩阵 \mathbf{K} 和载荷向量 \mathbf{P} 中对域 Ω 的积分转化为对各单元积分的和, 且被积函数在各单元中是多项式, 可以用高斯积分精确计算. 但是, 无网格法将域 Ω 用节点离散, 不存在网格, 而且无网格法的近似函数一般也不再是多项式, 难以用高斯积分精确计算. 因此在伽辽金型无网格法中需要采用特殊的方案计算积分.

1. 背景网格积分

Belytschko等人^[49]用规则网格覆盖域 Ω , 将对域 Ω 的积分转化为对各规则格子的积分之和, 然后在每个格子中使用高斯积分. 如果某个格子与区域边界相交, 则在计算积分时只计入域内高斯点的贡献, 而丢弃域外高斯点的贡献, 因此该方法在计算这些与域边界相交的格子的积分时, 可能产生较大的误差. Kaljević等人^[58]采用计算几何的方法, 判断格子是否完全位于域 Ω 内. 如果某个格子完全位于域 Ω 内, 则采用上述方法计算积分. 如果某个格子只有部分位于域 Ω 内, 则将位于域 Ω 内的部分重新分成若干个四边形子格子, 然后在每个子格子中使用高斯积分.

刚度阵 \mathbf{K} 的元素 \mathbf{K}_{IJ} 与 $\int_{\Omega} N_{I,i} N_{J,j} d\Omega$ 成正比. 无网格法的形函数 $N_I(\mathbf{x})$ 只在节点 I 的影响域内不等于零, 因此在计算刚度阵 \mathbf{K} 的各元素时只需在某一个局部区域中积分. 例如, 在计算 \mathbf{K}_{II} 时, 只需在节点 I 的影响域 Ω_I 内积分; 在计算 \mathbf{K}_{IJ} 时, 只需在节点 I 的影响域 Ω_I 和节点 J 的影响域 Ω_J 的交界区域内积分, 因此背景网格并不是计算 \mathbf{K}_{IJ} 的最佳局部积分区域, 采用背景网格积分可能会产生较大的误差. Dolbow等人^[59]建议所有节点均使用矩形支撑域, 并根据各节点的支撑域来构造背景网格, 由此得到计算 \mathbf{K}_{IJ} 的最佳局部积分区域.

2. 节点积分

Beissel等人^[60]采用节点积分方案来近似计算刚度矩阵 \mathbf{K} 和载荷向量 \mathbf{P} 中的积分. 任意函数 $f(\mathbf{x})$ 在域 Ω 中的积分可以近似地表示为

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega = \sum_{I=1}^N f(\mathbf{x}_I) \Delta V_I \quad (40)$$

式中 N 是域 Ω 中节点的总数, $f(\mathbf{x}_I)$ 为该函数 $f(\mathbf{x})$ 在节点 \mathbf{x}_I 处的值, ΔV_I 为该点所代表的面积(体积).

与有限元法的单点高斯积分类似, 节点积分存在零能模态, 是不稳定的. 以一维问题为例, 如

果节点等间距分布, 则对于波长等于2倍的节点间距的简谐振荡变形模式, 位移的一阶导数(应变)在节点处均等于零, 因此该振荡模式对系统的总能量没有任何贡献, 使得该模式的运动不受任何限制, 产生不稳定现象. 这种振荡模式称为零能模态, 需要采用一定的方法来抑制零能模态, 消除不稳定性. Beissel等人^[60]建议在泛函中增加平衡方程残差的平方项来消除零能模态. Kucherov等^[61]采用一阶导数在节点处不连续的形函数, 并将能量积分转化为各节点周围的子域积分, 从而消除了由零能模态产生的不稳定性.

Chen等人提出用光滑应变稳定化的方法来消除节点积分的不稳定性^[62]. 在该方法中, 节点 \mathbf{x}_L 处的应变不是直接用几何方程式(34)计算的, 而是取为节点 \mathbf{x}_L 的邻域 Ω_L 内应变的加权平均. 如果将权函数在节点 \mathbf{x}_L 的邻域 Ω_L 内取为 $1/\Delta\Omega_L$ (其中 $\Delta\Omega_L$ 为节点 \mathbf{x}_L 的邻域 Ω_L 的面(体)积, 可以用Voronoi图来生成), 在邻域 Ω_L 外取为零, 则平均应变为

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\Delta\Omega_L} \int_{\Omega_L} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\} d\Omega = \frac{1}{2\Delta\Omega_L} \int_{\Gamma_L} (u_i n_j + u_j n_i) \\ & d\Gamma = \frac{1}{\Delta\Omega_L} \int_{\Gamma_L} N_I u_i n_j d\Gamma \end{aligned} \quad (41)$$

式中 Γ_L 为节点 \mathbf{x}_L 的邻域 Ω_L 的边界, 对边界 Γ_L 的积分可以用数值积分计算. 由式(4)可见, 光滑应变稳定化方法不需要计算近似函数的导数, 因此在构造近似函数时只需要采用线性基即可, 从而极大地减小了构造近似函数的工作量.

3. 应力点积分

应力点积分最早是由Dyka等人^[63, 64]为解决SPH的拉伸不稳定问题而提出的, Randles等人^[65]将其推广到多维问题中. 该方法除了普通节点外, 又引入了一组辅助点, 称为应力点. 应力、内能和密度等物理量只在应力点处计算, 并由应力点携带, 而位移、速度和加速度等物理量则只在节点处计算, 并由节点携带, 因此这两组点也分别称为应力点和速度点或分别称为从节点和主节点. 应力点仅用于积分, 而动量方程仍然只在各节点处求解.

引入辅助点的方法有多种. 例如, 可以按照一定的规则将各节点相连接, 将求解域剖分成一系列的三角形, 在每个三角形的形心处布置一个辅

助点. 一般情况下, 应力点的总数和节点的总数相当.

采用应力点积分方案后, 任意函数 $f(\mathbf{x})$ 在域 Ω 中的积分可以近似地表示为该函数在所有节点和应力点 \mathbf{x}_I 处的值 $f(\mathbf{x}_I)$ 乘以该点所代表的面积(体积) ΔV_I 的和, 即

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})d\Omega = \sum_{I=1}^{N+N_s} f(\mathbf{x}_I)\Delta V_I \quad (42)$$

式中 N_I 为域 Ω 内的节点的总数, N_s 为应力点的总数.

Fries等人^[66]分析了采用应力点积分时伽辽金型无网格法的收敛性和稳定型, 数值结果表明, 如果节点规则分布, 采用应力点积分可得到很好的收敛率. 但如果节点非规则分布, 采用应力点积分将可能得到振荡的结果. 引入与节点积分类似的稳定项(平衡方程残差的平方项)可以显著地提高收敛率和稳定性.

4. 单位分解积分

背景网格积分需要将区域分解成一系列子区域, 而节点积分存在稳定性问题, 需要采用各种方法消除其不稳定性. Carpinteri等人^[67, 68]和Dufloot等人^[69]提出采用基于单位分解的方法计算积分. 利用单位分解函数 $\psi_k(\mathbf{x})$ 可以将函数 $f(\mathbf{x})$ 在域 Ω 上的积分写成

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})d\Omega = \sum_{k=1}^l \int_{\Omega \cap \Omega_k} \psi_k(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\Omega \quad (43)$$

利用上式可以通过计算函数 $\psi_k(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$ 在子域 $\Omega \cap \Omega_k$ 上的积分来得到函数 $f(\mathbf{x})$ 在域 Ω 中的积分. 子域 Ω_k 的形状应该尽可能地简单, 以便能很容易地在其上计算积分. 传统的积分方案可以看成是本方法的特例: Ω_k 为互不覆盖的背景网格, 当 $\mathbf{x} \in \Omega_k$ 时, $\psi_k(\mathbf{x}) = 1$, 否则 $\psi_k(\mathbf{x})$ 为零. 此时式(43)就退化为函数 $f(\mathbf{x})$ 在所有格子 Ω_k 中的积分之和. 移动最小二乘形函数也是一种单位分解函数, 因此可以将其做为式(43)中的函数 $\psi_k(\mathbf{x})$ 以计算函数 $f(\mathbf{x})$ 在域 Ω 中的积分, 这种方法称为移动最小二乘积分^[69]. 为了提高计算效率, Dufloot等采用Shepard函数, 并将子域取为矩形.

3.1.2 本质边界条件的处理

伽辽金弱形式(37)要求试探函数 $u_i(\mathbf{x})$ 预先满足位移边界条件(33). 有限元法的近似函数为插值函数, 其形函数满足 $N_I(\mathbf{x}_J) = \delta_{IJ}$, 因此很容易施

加本质边界条件. 无网格法的近似函数大都不是插值函数, u_{iI} 不是待求近似函数 $u_i^h(\mathbf{x})$ 在节点 \mathbf{x}_I 处的值 $u_i^h(\mathbf{x}_I)$, 因此伽辽金型无网格法需要采取特殊的措施来施加本质边界条件(33).

1. 边界配点法

Lu^[70, 71]和Mukherjee等人^[72]直接令边界 Γ_u 上的节点 \mathbf{x}_I 的节点参数 u_{iI} 等于该节点的给定位移 \bar{u}_{iI} , 以近似地施加位移边界条件. 该方法最简单, 但在无网格法中, 节点参数 u_{iI} 并不等于近似函数在该节点处的值 $u_i^h(\mathbf{x}_I)$, 因而通过令 $u_{iI} = \bar{u}_{iI}$ 来施加给定位移边界条件是不恰当的, 在某些情况下可能会产生较大的误差.

在求解方程式(39)时, 解向量 \mathbf{d} 必须满足给定位移边界 Γ_u 上的位移约束方程式(33), 因此解向量 \mathbf{d} 中只有部分元素是独立的. Zhu等人^[73]将解向量 \mathbf{d} 划分为由独立变量组成的子向量 \mathbf{d}_1 和由不独立变量组成的子向量 \mathbf{d}_2 , 即 $\mathbf{d} = [\mathbf{d}_1^T, \mathbf{d}_2^T]^T$, 然后由位移约束方程式(33)将不独立的子向量 \mathbf{d}_2 用独立的子向量 \mathbf{d}_1 表示, 进而从方程(39)中消除不独立的子向量 \mathbf{d}_2 , 得到关于独立子向量 \mathbf{d}_1 的线性方程组. 该方法是施加位移边界条件的精确方法, 但其系数矩阵是非对称的. 张雄等人^[74]也将解向量 \mathbf{d} 划分为由独立变量组成的子向量 \mathbf{d}_1 和由不独立变量组成的子向量 \mathbf{d}_2 , 建立关于独立子向量 \mathbf{d}_1 的线性方程组后对其进行变换, 最终得到的线性方程组的系数矩阵是对称的带状正定矩阵, 可以高效求解.

Lu等人^[75]将位移边界条件的弱形式

$$\int_{\Gamma_u} N_{Ii}u_i d\Gamma = \int_{\Gamma_u} N_{Ii}\bar{u}_i d\Gamma, \quad \forall \mathbf{x}_I \in \Gamma_u \quad (44)$$

引入引入近似函数中, 使得位移边界条件在加权平均意义下满足. Lu等人证明, 对于静力学问题, 只要拉格朗日乘子形函数和近似函数的形函数相同, 则边界条件的弱形式与拉格朗日乘子法等价.

2. 拉格朗日乘子法^[49, 76]

用拉格朗日乘子法将约束条件式(33)引入到伽辽金弱形式(38)中, 得

$$\delta \Pi_{\lambda}(u, \lambda) = \delta \Pi(u) + \int_{\Gamma_u} \delta \lambda_i (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta u_i \lambda_i d\Gamma = 0 \quad (45)$$

式中 λ_i 为拉格朗日乘子, 它是 C^{-1} 函数. 将 λ_i 离散为 $\lambda_i = N_I^{\lambda} \lambda_{iI}$, 并代入式(45)中, 考虑到 $\delta \lambda_{iI}$ 的任意性, 得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad (46)$$

式中 \mathbf{A} 是由拉格朗日乘子 λ_{iI} 组成的拉格朗日乘子向量, \mathbf{G} 、 \mathbf{Q} 和 \mathbf{A} 的具体表达式可参见文献[4]的第3.3.1节. 拉格朗日乘子法是施加位移边界条件的精确方法, 但它增加了未知量的总数, 系数矩阵也不再是带状和正定的, 不能用现有的求解带状对称正定矩阵的高效算法来求解.

Chen等人^[77, 78, 79]利用形函数矩阵对式(46)进行变换以对其进行解耦, 使得 \mathbf{d} 和 \mathbf{A} 可以各自独立地求解, 但得到的系数矩阵是非对称的.

3.修正变分原理^[70, 72]

可以证明, 拉格朗日乘子 λ_i 的物理意义是边界 Γ_u 上的面力 t_i 的负值, 即 $\lambda_i = -t_i$, 因此式(45)可以改写为

$$\delta \Pi_t(u) = \delta \Pi(u) - \int_{\Gamma_u} \delta t_i (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta u_i t_i d\Gamma = 0 \quad (47)$$

将无网格法近似函数(1)代入式(47), 得

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_t)\mathbf{u} = \mathbf{P} + \mathbf{P}_t \quad (48)$$

式中 \mathbf{K}_t 和 \mathbf{P}_t 的具体表达式可参见文献[4]的3.3.2节. 修正变分原理没有增加未知量的总数, 系数矩阵 $(\mathbf{K} + \mathbf{K}_t)$ 是对称带状矩阵, 但它是施加边界条件的近似方法.

4.罚函数法^[73, 80, 81]

将约束条件式(33)用罚函数法引入到伽辽金弱形式(38)中, 得

$$\delta \Pi_p(\mathbf{u}) = \delta \Pi(\mathbf{u}) + \alpha \int_{\Gamma_u} \delta u_i (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma = 0 \quad (49)$$

式中 α 为罚函数, 可取为弹性模量的 $10^3 \sim 10^7$ 倍. 将无网格法近似函数(1)代入式(49), 得

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_p)\mathbf{d} = \mathbf{P} + \mathbf{P}_p \quad (50)$$

式中 \mathbf{K}_p 和 \mathbf{P}_p 的具体表达式可参见文献[4]的3.3.3节. 罚函数法的系数矩阵 $(\mathbf{K} + \mathbf{K}_p)$ 是对称的正定带状矩阵, 其带状结构与 \mathbf{K} 的带状结构完全相同, 程序实现较为简单, 但需要仔细选取罚函数值.

5.与有限元耦合法

Belytschko等人^[82]通过无网格区域和有限元区域之间引入界面单元, 将MLS近似和有限元近似相耦合, 实现了EFG和有限元的耦合. Krongauz^[83]和Hegen^[84]等采用与有限元耦合的方法, 将边界附近区域用有限元离散, 以借助于有限元法施加本质边界条件. 该方法在EFG和FE的过

渡区域需做特殊处理, 以保证全局近似函数满足协调条件.

Alves和Rossi等^[85, 86]在本质边界附近的节点上利用单位分解有限元法(PUFEM)建立MLS的权函数, 由此得到的MLS形函数具有插值特性, 因而可以方便地施加本质边界条件. 该方法不需要对过渡区域做特殊处理, 近似函数自然满足协调条件.

6.奇异权函数法

Lancaster等人的工作^[8]表明, 采用具有奇异性的权函数可以使MLS具有插值特性, 即 $N_I^k(\mathbf{x}_J) = \delta_{IJ}$. 奇异权函数 $\tilde{w}_I(\mathbf{x})$ 可以利用普通权函数 $w_I(\mathbf{x})$ 来构造, 例如取 $\tilde{w}_I(\mathbf{x}) = w_I(\mathbf{x})/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|^{\alpha_I}$ (其中 α_I 为正偶数). 权函数 $\tilde{w}_I(\mathbf{x})$ 在节点 \mathbf{x}_I 处是奇异的, 因此需通过一定的变换消除计算MLS形函数及其导数的表达式中的奇异性^[8]. 也可以通过在分母中引入一小量来克服奇异性, 即取 $\tilde{w}_I(\mathbf{x}) = w_I(\mathbf{x})/(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|^{\alpha_I} + \epsilon)$ (其中 ϵ 为一很小的量, 例如取 $\epsilon = 10^{-5}$). Kaljevic等人^[58]在所有节点处都采用奇异函数, 而Chen等人^[87]只在要施加本质边界条件的节点处采用奇异权函数, 以便于在这些节点处施加本质边界条件.

7.边界变换法

Liu等人^[12, 88, 89, 90]采用边界变换方法, 将解向量 \mathbf{d} 分为由边界 Γ_u 上节点位移参数组成的向量 \mathbf{d}^b 和由其它节点位移参数组成的向量 \mathbf{d}^n , 然后利用位移边界方程式(33), 将位移参数向量 \mathbf{d}^b 用位移参数向量 \mathbf{d}^n 和由边界给定位移 \bar{u}_{iI} 组成的向量 $\bar{\mathbf{d}}^b$ 表示, 从而将各节点的位移近似函数 $u_i^h(\mathbf{x})$ 用位移参数向量 \mathbf{d}^n 及边界给定位移向量 $\bar{\mathbf{d}}^b$ 表示. 变换后的近似函数预先满足给定位移边界条件, 即 $u_i^h(\mathbf{x}_I) = \bar{u}_{iI}$, 因此可以很方便地施加给定位移边界条件. 在该方法中, 只需对那些定义域内包含了边界 Γ_u 上的节点的点 \mathbf{x} 计算变换后的近似函数, 而对于其它点仍然按原来的方式计算近似函数. 边界变换法是在伽辽金型无网格法中施加给定位移边界条件的一种很有效的方法.

除了上面讨论各种方法外, 还有相容近似法^[91, 92]、达朗贝尔(d'Alembert)原理^[93]和边界通量配点法^[94]等方法.

3.2 配点型无网格法

配点法取 δ 函数作为检验函数, 其实质是强迫微分方程(31)的余量 \mathbf{R} 在域内一组离散点上等于

零, 强迫边界条件(32)和(33)的余量在边界上一组离散点上为零, 即

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}_I) + \bar{f}_i(\mathbf{x}_I) = 0 \forall \mathbf{x}_I \in \Omega \quad (51)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}_I)n_j = \bar{t}_i(\mathbf{x}_I) \forall \mathbf{x}_I \in \Gamma_t \quad (52)$$

$$u_i(\mathbf{x}_I) = \bar{u}_i(\mathbf{x}_k) \forall \mathbf{x}_I \in \Gamma_u \quad (53)$$

当配点数等于节点数时, 配点法的方程数和未知数相等, 可以求出试探函数中的待定系数. 此时残量在 n 个配点处等于零, 但在这些点之间可能存在较大的振荡. 如果配点数大于节点数, 得到的方程数将大于未知数, 需要利用最小二乘法求解^[95], 即令域内各配点的方程残量的平方和取最小. 此时通常不可能求得一组系数 \mathbf{u}_i 使得残量在所有配点处等于零.

光滑质点流体动力学方法(SPH)^[96, 97]、有限点法(FPM)^[98, 99, 100]、HP无网格云法^[101]、最小二乘配点无网格法^[95]等都是基于配点法的. 由配点法得到的方程组一般是病态的, 因此其解是不稳定的, 需要引入特殊的稳定化方案. 大多数稳定化方案都是基于在方程(51)和(52)中增加与控制方程有关的残差项, 以避免方程组病态. 例如, Onate等人^[99, 100]在有限点法中采用如下的稳定格式

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}_I) + \bar{f}_i(\mathbf{x}_I) - \frac{1}{2}h_k(\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i)_{,k} = 0 \quad (54)$$

$$\forall \mathbf{x}_I \in \Omega$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}_I)n_j - \frac{1}{2}h_k n_k(\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i) = \bar{t}_i(\mathbf{x}_I) \quad (55)$$

$$\forall \mathbf{x}_I \in \Gamma_t$$

$$u_i(\mathbf{x}_I) = \bar{u}_i(\mathbf{x}_k) \forall \mathbf{x}_I \in \Gamma_u \quad (56)$$

其中 n_k 是边界 Γ_t 的外法向单位矢量, h_k 是无量纲的特征长度参数. 式(54)和(55)中的稳定项分别需要计算位移的3阶和2阶导数, 在选用近似函数时应特别注意. Onate等人的研究工作表明, 对弹性静力学问题, 在给定面力边界条件式(55)中引入与平衡方程的残差有关的稳定项是最关键的, 而微分方程式(54)中的稳定项可以忽略, 此时在稳定项中只需要计算位移的2阶导数.

在配点法中, 不稳定性和误差主要来源于Neumann边界条件. Sadeghirad等^[102]通过在Neumann边界的线段上对平衡微分方程进行积分来施加Neumann边界条件, 提高了配点法的稳定性和精度. 刘桂荣等人^[103, 104]在区域内部节点和本质边界节点处用配点法, 而在Neumann边界(给定面力边界, 包括自由边界)节点处用局部彼

得洛夫-伽辽金法(见第3.3节), 建立了无网格强弱耦合方法(meshfree weak-strong, MWS), 只需要在Neumann边界节点的局部域中进行积分.

配点型无网格法是纯无网格法, 它不需要任何背景网格, 效率高. 然而, 在配点型无网格法中, 平衡方程只在域 Ω 内的各节点处严格满足, 而在其余部分均不满足, 因此可能会产生较大的误差. 张雄等人^[95]除了节点外又在域 Ω 内引入了 N_a 个辅助点. 近似函数仍然只通过节点构造, 但要求平衡方程在所有节点(包括域 Ω 内的节点和边界上的节点)和辅助点上满足. 此时方程数大于未知数, 需要用最小二乘方法求解, 因此将该方法称为最小二乘配点无网格法. 与配点法相比, 最小二乘配点法要求平衡方程在所有节点(包括边界 Γ_t 和 Γ_u 上的节点)和辅助点处在最小二乘意义下满足, 也就是说面力边界 Γ_t 上各点平衡方程的残量已经在最小二乘意义下予以消除, 相当于在原配点法中引入了稳定项.

配点法需要计算近似函数的2阶导数, 因而在建立MLS近似时需要采用二次基. 对二维问题, MLS近似函数的定义域中至少需要6个节点, 增加了构造MLS近似的计算量. Breitkopf等人^[105]将近似函数的2阶导数转换成对近似函数求两次一阶导数, 因此减少了构造近似函数所需的节点数. 他们引入了两组点: 节点 \mathbf{x}_I 和计算点 \mathbf{x}_k^e . 在第1步中, 给定待求函数 $u(\mathbf{x})$ 在各节点处的值 $u_I = u(\mathbf{x}_I)$, 采用线性基MLS近似可求得计算点处近似函数的梯度(应变), 再利用本构关系即可得到计算点处的应力. 在第2步中, 通过各计算点的应力, 利用线性基MLS近似可得到各节点处应力的一阶导数, 并在各节点处用配点法列写平衡方程. 在每一步中构造的都是一阶导数, 因此对二维问题只需要4个点即可. 在这两步中使用的是不同的点, 因此该方法称为双重网格配点法.

配点法对所有位于自由边界上的节点都需要显式地施加面力为零的边界条件, 生成相应的方程. 潘小飞和张雄等^[106]将伽辽金法和配点法相结合, 建立了伽辽金配点无网格法. 该方法将求解区域划分为两个区域, 即内部区域(配点区域) Ω_1 和边界区域(伽辽金区域) Ω_2 . 在内部区域中采用直接配点法, 而在边界区域中采用伽辽金法, 因此只需要在伽辽金域 Ω_2 中计算积分. 一般情况下, 只需在区域边界附近设置一很薄的伽辽金区域(只包含一层背景网格), 伽辽金域 Ω_2 比配点域 Ω_1 要小的多, 因此

该方法的计算量远小于伽辽金法, 接近于直接配点法, 而边界条件的施加法却和伽辽金法完全相同.

3.3 局部弱形式无网格法

伽辽金型无网格法是基于全局弱形式的, 它需要使用背景网格进行积分, 计算量大. 方程(531)的残差也可以在域 Ω 的各子域 Ω_s 上消除, 即

$$\int_{\Omega_s} w_{ki}(\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i) d\Omega = 0 \quad (57)$$

式中 w_{ki} 为第 k 组检验函数的第 i 个分量. 对于二维问题, 需要取两组线性无关的检验函数, 而对于三维问题, 则需要取3组线性无关的检验函数. 一般可取 $w_{ki} = w\delta_{ki}$. 对于每个子域, 式(57)给出了2个(对于二维问题)或3个(对于三维问题)方程, 因此子域数应该和节点数相等.

对上式进行分部积分, 并引入给定面力边界条件(32), 得

$$\int_{L_s} \sigma_{ij} n_j w_{ki} d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} \sigma_{ij} n_j w_{ki} d\Gamma + \int_{\Gamma_{st}} \bar{t}_i w_{ki} d\Gamma - \int_{\Omega_s} (\sigma_{ij} w_{ki,j} - \bar{f}_i w_{ki}) d\Omega = 0 \quad (58)$$

式中 n_j 是子域 Ω_s 的边界 $\partial\Omega_s$ 的外法线单位矢量, $\Gamma_{su} = \partial\Omega_s \cap \Gamma_u$ 为子域边界与给定位移边界 Γ_u 相重合的部分, $\Gamma_{st} = \partial\Omega_s \cap \Gamma_t$ 为子域边界与给定面力边界 Γ_t 相重合的部分, $L_s = \partial\Omega_s - \Gamma_{su} - \Gamma_{st}$ 为子域边界的其余部分. 如果子域 Ω_s 完全位于求解域 Ω 内, 则 $L_s = \partial\Omega_s$, 式(58)中的第2项和第3项为零. 式(58)对任意形状的子域 Ω_s 均成立. 对三维问题, 子域 Ω_s 一般可取为球、椭球和立方体. 对二维问题, 子域 Ω_s 可取为圆、椭圆和矩形.

彼得洛夫-伽辽金法中检验函数和近似函数取自不同的函数空间, 因此可以适当地选取检验函数 w_{ki} 使得它在边界 L_s 上为零, 从而进一步简化式(58). 例如, 可以将MLS近似中的权函数取为检验函数, 且将权函数的支撑域半径取为子域 Ω_s 的半径, 从而使检验函数在边界 L_s 上为零. 此时式(58)可简化为

$$\int_{\Omega_s} \sigma_{ij} w_{ki,j} d\Omega - \int_{\Gamma_{su}} \sigma_{ij} n_j w_{ki} d\Gamma = \int_{\Gamma_{st}} \bar{t}_i w_{ki} d\Gamma + \int_{\Omega_s} \bar{f}_i w_{ki} d\Omega \quad (59)$$

本方法中微分方程的残差是在一系列子域上消除的, 且检验函数和近似函数选自不同的函数空间, 因此称为局部彼得洛夫-伽辽金法(Local

Petrov-Galerkin). Atluri等人^[107, 108]利用MLS近似来构造近似函数, 将子域取为以各节点为中心的球形区域, 建立了无网格局部彼得洛夫-伽辽金法(Meshless Local Petrov-Galerkin, MLPG).

与Galerkin法不同, 彼得罗夫-伽辽金法的检验函数和试探函数取自不同的函数空间, 因此最终得到的求解方程的系数矩阵一般是不对称的. 局部Petrov-Galerkin法中积分是在每个规则子域 Ω_j 中进行的, 不需要引入背景网格. Atluri等人^[107, 108]在子域 Ω_s 中采用 5×8 或 6×9 高斯积分, 而在边界 Γ_{su} 和 Γ_{st} 上采用9点高斯积分. 另外, 与伽辽金法类似, MLPG也需要用罚函数等方法施加本质边界条件.

Atluri等^[109, 110, 5]比较了5种近似函数(MLS近似、Shepard函数、PU近似、RK近似和RBF近似)和六种检验函数(MLS权函数、Dirac δ 函数、误差函数、微分方程的基本解、单位阶跃函数和近似函数), 并根据所使用的检验函数将MLPG进一步分为MLPG1、MLPG2、MLPG3、MLPG4、MLPG5和MLPG6, 其中MLPG4和局部边界积分方程(local boundary integral equation, LBIE)^[111, 112]等价, MLPG6和伽辽金型无网格法等价. MLPG5不需要子域内积分, 因此其计算量远小于MLPG的其他几种形式. Zhou等^[113]通过Voronoi区域剖分法形成各节点的子域, 用重构核(RK)近似建立近似函数, 采用MLPG5(检验函数在各子域中为常数)分析了弹性力学问题.

3.4 加权最小二乘法无网格法

加权最小二乘法要求控制方残量的加权平方和取最小值, 即

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_{\Omega} \delta\sigma_{ik,k}(\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i) d\Omega + \\ & \int_{\Gamma_u} \lambda_u \delta u_i (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_t} \lambda_t \delta\sigma_{ik} n_k (\sigma_{ij} n_j - \bar{t}_i) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (60)$$

式中 λ_u 和 λ_t 分别为用以施加给定位移边界条件和给定面力边界条件的罚函数.

类似于伽辽金法, 式(60)需要在求解域 Ω 中积分, 计算量很大. 在伽辽金法中, 泛函为系统的总势能, 需要尽可能准确地积分, 以提高解的精度. 而在最小二乘法中, 泛函为控制方程残量的加权平方和, 积分只是用来消除控制方程残量的, 因而在最小二乘法中解的精度对泛函积分精度的敏感程度远低于伽辽金法^[114]. 张雄等人^[115]将式(60)中

的积分转化为各节点处的求和形式, 并采用MLS构造近似函数, 建立了加权最小二乘无网格法, 其效率远高于伽辽金型无网格法.

可以证明, 最小二乘法的欧拉方程不再是原微分方程, 而是其高阶导数, 因此采用不恰当的边界条件将可能得到虚假的解答^[6]. 为了克服这一问题, 潘小飞和张雄等^[116]将伽辽金法和最小二乘法结合起来, 建立了伽辽金-最小二乘无网格法(MGLS). 该方法将求解域划分为两个区域, 即内部区域(最小二乘域) Ω_1 和边界区域(伽辽金域) Ω_2 . 在内部区域中采用最小二乘法, 而在边界区域中采用伽辽金法. 伽辽金-最小二乘无网格法只需在伽辽金域 Ω_2 中计算积分. 一般情况下, 只需在区域边界附近设置一很薄的伽辽金区域(只包含一层背景网格), 伽辽金域 Ω_2 比最小二乘域 Ω_1 要小得多, 因此该方法的计算量远小于伽辽金法, 接近于配点法, 而边界条件的施加方法却和伽辽金法完全相同.

与伽辽金法相比, 最小二乘法通常要求试函数具有更高阶的连续性. Park、Kwon和Youn等人^[114, 117]利用对偶变量将二阶微分方程转化为一阶微分方程组, 然后再利用最小二乘法求解. 该方法只要求试函数具有 C_0 连续性, 但其自变量数远大于原方程的自变量数. 例如, 对于三维弹性力学问题, 自变量数为原方程的3倍.

3.5 边界型无网格法

将式(36)分部积分两次, 得

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i w_i d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{f}_i w_i d\Omega \quad (61)$$

其中 $\sigma_{ij}^* = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}^*$, $\varepsilon_{kl}^* = \frac{1}{2}(w_{k,l} + w_{l,k})$, $t_i^* = \sigma_{ij}^* n_j$. 若将检验函数 w_i 取为无限弹性体内一点(称为源点)受单位集中力的Kelvin解(即弹性静力问题的基本解 u_i^*), 则检验函数 w_i 满足条件

$$\sigma_{ij,j}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e_i = 0 \quad (62)$$

其中 $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 为狄拉克 δ 函数, e_i 为作用于源点 \mathbf{y} 沿 i 方向的单位集中力. 记 u_{ki}^* 和 t_{ki}^* 为集中力沿 k 方向时

在 i 方向所产生的位移和面力分量, 将其代入(61), 并考虑到(62), 有

$$c_{ij}(\mathbf{y}) u_i(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{f}_j(\mathbf{x}) d\Omega \quad (63)$$

上式即为线弹性静力学问题全局形式的边界积分方程. 当源点位于求解域内时, 系数 $c_{ij}(\mathbf{y}) = 1$, 当源点位于边界时, 系数 $c_{ij}(\mathbf{y})$ 和源点所在的边界形状有关. 类似地, 可以得到局部形式的边界积分方程:

$$c_{ij}(\mathbf{y}) u_i(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega_s} u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\partial\Omega_s} t_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Omega_s} u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{f}_j(\mathbf{x}) d\Omega \quad (64)$$

Zhu和Atluri^[111, 112]等人基于局部边界积分方程提出了局部边界积分方程方法(local boundary integral equation method, LBIE). 基于边界积分方程的边界元法也是一种重要而应用广泛的数值方法, 但其也有网格依赖性. 一些学者将无网格近似的思想与边界积分方程相结合, 先后提出了(boundary node method, BNM)^[118, 119]、(boundary particle method, BPM)^[120]等无网格方法; 张见明等人^[121]将修正变分原理和无网格近似结合, 提出了杂交边界点法, 是一种只需在边界上布点的纯无网格法.

4 无网格法小结

目前已经提出了30余种无网格法, 并且还将会出现更多的新的无网格法. 从加权余量法的角度来看, 绝大多数无网格法的主要区别在于采用什么样的加权余量法和试探函数. 表1总结了目前已有的大部分无网格方法, 列出了各类方法所使用的加权余量法和试探函数, 便于从总体上认识无网格法.

表2 各类无网格法小结

	伽辽金法	配点法	局部彼得罗夫-伽辽金法	加权最小二乘法	边界积分方程
MLS	DEM ^[48] ; EFG ^[49]	FPM ^[98, 100] ; DAM ^[122] ; LSCM ^[95] ; MPCM ^[123, 124] ; Kim ^[125]	MLPG ^[10, 107, 108] ; PGDEM ^[126]	WLSM ^[115, 116, 127] ; LSMM ^[114, 117]	BNM ^[118, 119] ; BCM ^[128] ; LBIE ^[111, 112] ; HBNM ^[121]
核近似		SPH ^[96, 97]			
重构核近似	RKPM ^[12, 50, 77]	FCM ^[129, 130] ; HCM ^[131, 132]			
单位分解	PUM ^[16] ; GFEM ^[19, 133] ; XFEM ^[23, 24, 26]	hp – Meshless Cloud ^[101]	Finite spheres ^[134, 135]		
径向基函数	Wendland ^[136]	Kansa ^[137] ; Franke ^[138] ; Zhang ^[34]			BPM ^[120]
点插值	PIM ^[35] ; RPIM ^[33]	RPCM ^[139] ; PICM ^[140]	LRPIM ^[141]	Tan ^[142]	BRPIM ^[143]
Sibson插值	NEM ^[37, 40]		PGNE ^[144]		
非Sibson插值	NNGM ^[52]		NNPG ^[145]		
Kriging插值			Lam ^[44] ; Gu ^[45]		
NURBS	Shaw ^[47]				

5 无网格法的应用

无网格法是通过加权余量法选择不同的检验函数和试探函数而得到的, 因此可以用有限元法求解的问题都可以用无网格法求解. 有鉴于此, 本节将着重论述无网格法的优势应用领域, 而对于那些有限元法能够很好解决的应用领域不再赘述, 读者可以参考相关文献[2,4].

5.1 冲击爆炸问题

高速冲击以及爆炸问题在航空航天工程、汽车工程、兵器工业中有很重要的应用. 这类问题的特点是载荷强度极高、作用时间短、能量迅速转化, 材料在高应变率下经历极大变形, 会出现不同机理的断裂和破坏失效现象. 冲击爆炸问题涉及到几何非线性、材料非线性和边界条件非线性, 非常复杂, 对数值方法提出了很大的挑战. 和传统的基于网格的拉格朗日有限元相比, 无网格方法将连续体离散成质点, 没有网格约束, 避免了大变

形下网格畸变的问题. 另外, 由于网格的限制, 有限元很难处理高速冲击和爆炸问题中出现的材料断裂失效, 结构破碎等现象. 尽管在有限元中应用侵蚀(erosion)算法可以将失效的单元抛弃, 但同时也带来质量损失等新的问题. 而无网格方法中离散的质点可对材料的破坏和结构的破碎提供更自然的描述.

在无网格法中, 发展最早的SPH首先被用于模拟高速冲击问题^[11, 146, 147, 148], 以SPH为代表的粒子型无网格法公式较为简单, 效率较高, 在这一领域具有较好的应用前景.

在固体和流体模拟中都发现SPH存在拉伸不稳定性问题, 即当材料在拉伸应力作用下, 质点往往倾向于聚集成团, 有时会造成数值断裂^[149]. Swegle等^[150]和Balsara^[151]对SPH进行了稳定性分析, 寻找拉伸不稳定性原因. 另外SPH中插值函数不具完备性的问题也被认为是某些情况下精度下降的原因. 许多学者针对这些问题对SPH提出了改

进方案. Dyka等^[64]提出增加应力点的方法解决拉伸不稳定性问题. Randles等^[65]结合正则化和应力点获得更好的精度和稳定性. Chen等提出修正的CSPH^[152], 改进了拉伸不稳定性及边界精度问题. Monaghan^[153]提出增加人工应力的办法解决拉伸不稳定性. 在许多高速冲击问题的SPH模拟中, 特别是针对脆性材料, 拉伸不稳定性问题往往并不凸显, 主要原因是在高速下材料损伤成长的速率会大于拉伸不稳定性发展的速率^[65].

接触问题是冲击碰撞过程中的一个重要问题. SPH中一个质点的影响点可以在本物体上也在另一个物体上, 因此对两物体的接触可以不加特殊考虑, 但SPH并不保证速度场单值, 因此接触面有可能发生质点穿透. Campbell等^[154]提出了基于罚函数的粒子-粒子接触算法. Vignjevic等^[155]提出的接触算法不需要专门建立接触面, 被应用于液体晃动和超高速冲击中.

Johnson等应用和改进SPH方法, 针对高速冲击问题进行了一系列工作^[149, 156]. Johnson等提出了与SPH类似的广义粒子算法(generalized particle algorithm, GPA)^[157], 用于高速冲击问题. Johnson等结合有限元和无网格方法, 将冲击变形过程中扭曲的有限单元转化成质点^[158, 159], 用于超高速冲击层裂破坏以及长杆弹斜侵彻. Beissel等^[160]成功地将这种方法应用于空间碎片防护的超高速冲击的模拟中. Rabczuk等^[161]采用改进的SPH方法—MLSPH模拟混凝土在冲击爆炸载荷下的破坏问题. SPH已经成为高速冲击领域的重要方法, 被加入到Autodyn、LS-DYNA等商业软件中, 并用于空间碎片防护等问题的分析^[162, 163]中.

物质点法(material point method, MPM)也是非常适用于高应变率大变形问题的粒子型无网格法, 它被用于模拟冲击^[56, 164]、材料破坏^[165]问题, 取得了良好的效果. MPM中粒子速度场具有单值性, 因此可以自动满足无滑移的接触, 便于在超高速冲击问题中的应用. 张雄等提出显式物质点有限元法^[166], 在大变形区域布置背景网格, 使用物质点法, 其他区域使用有限元法. 这种方法被用于解决超高速碰撞问题, 解决了显式有限元中网格畸变的问题, 具有很高效率. 和SPH相比, MPM借助背景网格搜索影响点并计算导数, 对超高速冲击问题在保证精度的前提下, 具有更高效率^[167].

爆炸问题, 特别是爆炸载荷下结构的响应问题, 和高速冲击问题具有相似的特点, 也是粒子型

无网格法的优势领域. Swegle等^[168]用SPH模拟水下爆炸, Randles等在综述^[11]中分析了SPH模拟爆炸问题的算例, Liu等^[169]将SPH用于爆炸问题的模拟. Lee等^[170]用改进的质点网格法(particle in cell, PIC)方法模拟聚能射流和穿甲问题. Hu等^[171]将MPM用于模拟爆炸及其对混凝土墙的破坏, Guilkey等^[172]利用欧拉描述的多物质有限体积法和拉格朗日描述的MPM耦合计算圆筒爆炸以及爆炸作用下外壳破坏问题.

Han等^[173]采用速度与速度梯度分别插值的MLPG混合方法计算高速侵彻问题, 体现了无网格法相对有限元的优势. 美国德州大学奥斯汀分校的Fahrenthold研究组一直致力于超高速碰撞问题数值模拟方法的研究, 他们结合有限元的特点和质点类方法的思想提出杂交的质点单元方法^[174], 同时利用质点和单元离散连续体, 并分别用质点和单元模拟不同的物理量, 模拟空间碎片防护问题^[175].

5.2 断裂力学问题

断裂问题的数值模拟一直是具有挑战性的问题, 除了其复杂的力学和物理本质之外, 如何精确描述带有强不连续性的裂纹表面及其传播过程也对数值方法提出了很高要求. 传统有限元法很难在单元内部包含裂纹, 模拟裂纹传播问题一般需要随计算过程不断进行网格重构, 对于任意裂纹的生成和连接等复杂问题的模拟更加困难, 有些问题中计算结果甚至会产生网格依赖性^[176]. 另外, 裂尖应力场常常带有奇异性, 需要在裂尖附近布置大量节点, 大大增加了计算量.

无网格法避免了网格给裂纹描述带来的问题, 可以包含任意方向的裂纹, 裂纹传播过程不需要网格重构, 降低了计算量; 无网格法中增减节点或改变基函数都很容易, 需要对某一局部区域(如裂尖区域)进行精确描述时, 无网格法可以方便地进行 h 或 p 自适应计算; 因此断裂问题的无网格法研究一直是无网格法最主要的应用领域之一.

无网格法的近似函数一般在全域上是连续的, 且往往具有较高的连续性, 因此为处理断裂问题需对其进行必要的改造. 最直接的方法是可视准则, 即如果节点和计算点连线与裂纹相交, 则节点对计算点不具有影响. 这里借鉴了光学的概念, 即假设裂纹表面是不透明的, 把节点和计算点的连线看成光线. 但对于裂尖区域和孔洞等非凸区域边界, 可视准则会在支撑域内导致额外的形函数

不连续面. 透明准则可以用于非凸区域边界, 该准则认为这些不连续面是完全透明的. 作为可视准则的改进, 衍射准则和半透明准则常用于裂尖区域, 它们都假设不连续面是不完全透明的. 计算形函数值时, 节点和计算点的距离用等效距离代替, 等效距离中含有节点和裂尖距离、计算点和裂尖距离的影响. 这两种准则可以在保证形函数在节点支撑域内除裂纹表面外均连续, 但准则中有参数需要事先确定. Belytschko和Fleming^[177]详细总结了这些准则; Lee和Yoon^[178]对衍射准则参数的影响进行了详细讨论, 他们还提出对离裂尖较远的节点采用缩小支撑域的方法. Duflot和Nguyen-Dang也提出了一种准则, 其中等效距离在形式上较为简单^[179, 180].

无网格法当然也可以通过增加裂尖节点密度的方法提高裂尖场的计算精度, 但更常用的方法是扩充基函数, 增加与裂尖奇异场相关的函数(如式(7)), 也可以类似式(16)利用单位分解的概念将这些函数直接加入近似函数中. 式(7)中基函数数量较多, 在MLS或RK近似中会涉及高阶矩阵求逆, 可以只保留裂尖距离函数 \sqrt{r} , 舍弃与夹角 θ 相关的函数^[177]. Rao和Rahman在研究非线性断裂问题时, 还建议在基底中引入Hutchinson-Rice-Rosengren解中的函数^[181, 182].

广义有限元法、单位分解有限元法、扩展有限元法基于单位分解的概念, 实现了有限单元内部包含裂纹; 扩展有限元法采用的阶跃函数提供了简单而有效的描述裂纹两侧位移不连续的方法. Ventura等^[183]将阶跃函数引入MLS形函数中, 用以描述位移的不连续性. 阶跃函数也为裂纹产生、裂纹分叉、多裂纹连接等情况提供了有效的处理手段. Rabczuk和Belytschko^[184]基于阶跃函数提出了粒子断裂法(cracking particles), 用节点表示一段离散裂纹, 所有离散裂纹的集合就是所要描述的裂纹, 他们用这种方法模拟了裂纹的产生和分叉过程. Rabczuk和Zi^[185, 186]又基于这种处理方式提出了扩展无单元伽辽金法(XEFGM).

裂纹通常可以用相连接的平面(三维)^[187]或线段(二维)^[71]集合来描述, 裂纹传播时在传播方向增加平面或线段. Lee和Yoon^[188]提出了一种利用节点-裂纹连线、计算点-裂纹连线与裂纹线段夹角判定节点和计算点是否在裂纹同侧的方法. 另一种处理裂纹面扩展的方式是使用水平集(level set)方法, 这种方法在其他带移动界面问题(如流固耦

合)中也经常使用, 但水平集方法一般需多求解一个偏微分方程. Ventura等^[183]提出使用向量水平集, 只利用节点信息就可以描述裂纹, 而且避免了额外求解偏微分方程.

裂纹传播的判定可以通过动态能量释放率^[187]、最大周向应力准则^[189, 190], 也可以用Rankine准则^[191], 或者控制方程双曲性缺失的方法^[184, 192]判断. 应力强度因子一般由交互作用积分/J积分得到, 也有研究者用外插的方式^[193]得到渐进解答.

Belytschko和Tabbara^[71]首先用EFGM对动态断裂问题进行了研究, Krysl和Belytschko^[187]、Sukumar等^[194]将其扩展到三维线弹性断裂问题中. Rao和Rahman也用EFGM^[189]和EFGM-FEM耦合方法^[190]对线弹性断裂问题进行了研究. Liu等^[195]用多尺度RKPM求解了带有裂纹的大变形问题, 应变局部化等区域可用细尺度解答捕捉, 计算结果显示无网格法可以有效避免裂尖附近高应力区的网格畸变.

混凝土是非常重要的建筑材料, 混凝土断裂的研究有着重要的理论和工程意义. Tiago和Leitao^[196]用EFGM对钢混梁断裂进行了研究. Rabczuk和Belytschko^[191]也用EFGM和FEM耦合方法研究了钢混结构的断裂, 模拟了钢筋从混凝土中抽出, 以及钢混梁弯曲断裂过程等非线性问题. 混凝土部分用EFGM模拟, 钢筋部分用FEM模拟, 两者通过Lagrange乘子法相耦合. 他们^[192]进一步用前述断裂粒子法对钢混梁失效、混凝土中裂纹分叉、混凝土结构受冲击或爆裂作用等问题进行了模拟, 计算规模达到了上百万自由度.

功能梯度材料(FGM)是一种材料性质随空间坐标连续变化的新型材料. Rao和Rahman^[197]将EFGM用于FGM断裂问题的模拟, 并提出了一种正交FGM中用交互作用积分计算应力强度因子的方法^[198], 可以与无网格法结合使用. Sladek等^[193, 199]用LBIE研究了FGM断裂问题, 推导中使用了均匀弹性体的基本解.

在延性断裂方面, Chen等^[200]用EFGM研究了弹塑性断裂问题; Simkins和Li^[201]基于热力耦合方程, 用RKPM对延性断裂过程进行了模拟.

另外, Rao和Rahman借助EFGM对随机断裂力学问题进行了研究^[182, 202, 203]; Chen等^[204]基于非局部理论和EFGM研究了断裂问题, 发现在非局部理论中裂尖不再具有奇异性; 他们^[205]还利用多相

材料的数字图像对实际试件的裂纹传播进行了模拟; Lee和Yoon^[123]用散射近似和配点法模拟裂纹传播; Batra和Zhang^[206]提出了一种用于SPH的搜索算法, 该算法不采用均匀盒子, 盒子边长和局部光滑核长度相关, 可以节省70%的计算量. Daphalapurkar等^[207]在GIMP中加入内聚区模型研究不同冲击速度和内聚强度下动态裂纹扩展速度.

5.3 结构超大变形问题

很多工程实际问题中结构要经历大变形过程. 如金属成形是工业生产的重要手段, 成形过程中试件变形很大, 加之材料进入塑性阶段、金属坯和模具之间发生接触, 因此成形过程对数值模拟具有较大的挑战性. 有限元等基于网格的方法, 在处理超大变形过程时难免会遇到网格畸变的问题. 再如橡胶材料也是工业生产中广泛使用的材料, 橡胶超弹性大变形问题的有限元模拟也会遇到网格畸变的问题, 而橡胶的近不可压性质可能产生体积锁死等问题, 增加了数值模拟的难度. 在解决上述问题方面无网格法提供了一条有效的途径.

结构大变形问题计算时需要确定用何种坐标建立近似函数, 理论上可以采用变形前坐标(Lagrange形函数), 也可以采用空间坐标(Euler形函数). 采用Lagrange形函数时, 在整个变形过程中, 计算点的影响节点不变, 不会因影响节点数量过少而发生计算困难; 采用Euler形函数时, 影响节点不断发生变化, 需要随时搜索影响节点, 而且可能产生计算困难. 目前大部分无网格法文献中使用的是Lagrange形函数.

Chen JS研究组首先对RKPM求解橡胶超弹性大变形问题^[77, 78, 208]和金属成形问题^[209, 210]进行了详细研究. 他们利用直接变换法施加边界条件, 而摩擦接触边界条件则通过罚函数法加入泛函变分方程. 他们计算了橡胶梁的大转动、橡胶棒超大变形、橡胶圆盘的膨胀, 以及冲压、锻造、墩粗等典型金属成形过程, 计算结果显示橡胶棒拉伸至10倍原长或压缩至1/10原长, 无网格法仍然能给出稳定合理的解答. 为减少计算量, Yoon和Chen^[211, 212]还采用了节点积分方案, 并使用应变光滑化方法稳定节点积分, 模拟了冲压、挤压和折边弹回过程. Wu等^[213]还用RKPM模拟了地质材料的大变形问题.

RKPM也被其他研究者广泛用于超大变形问题. Liu等^[214]提出了4种多尺度RKPM计算方案, 用

来分析大变形应变局部化问题. Song等^[215]对折边操作的弹回角度进行了预测. Lu等^[216]针对成形过程中的金属板屈曲过程, 提出了自适应扩充RKPM. 他们基于应力指示预测可能发生屈曲的区域, 利用无网格法增减节点方便的特点, 在屈曲区域增加带有扩充函数的粒子, 从而成功地捕捉了屈曲模态和后屈曲行为. Xiong等^[217, 218]利用弱可压刚塑性模型和RKPM模拟稳态和瞬态金属成形过程, 工件和模具界面的位移连续条件通过罚函数加入泛函变分, 他们用该方法分析了平板卷曲和锻造等过程. Liew和Ng^[219]考察了RKPM在弹塑性大变形问题中的表现. Liew等^[220, 221]基于一阶剪切理论对带加强肋的波纹板和壳体大变形问题进行了研究, 其中波纹板等价成均匀板来计算, 并使用了von Karman理论. Wang^[222]研究了金属成形过程的并行RKPM方法.

与RKPM等价的EFGM也在大变形问题中有很多应用. Ren和Liew^[223, 224, 225]用显式EFGM分析了形状记忆合金在热力耦合作用下的超弹性响应, 研究表明应变/应力解答的高连续性有利于相变转化的确定和迭代过程的收敛. Guan等^[226]用EFGM和刚-粘塑性材料模型分析金属成形问题, 文中通过非完全广义变分原理和罚函数方法施加不可压性质, 避免了体积锁死和压力振荡问题. 潘小飞等^[227]提出了一种高效的Gakerlin无网格方法, 该方法中除节点外还布置了应力点以稳定计算结果, 通过节点和应力点积分降低数值积分计算量, 成功的分析了金属成形等大变形问题.

Guo和Nakanishi^[228, 229, 230, 231]基于刚塑性本构模型对金属体成形过程进行了分析. 为获得较高的计算效率, 包括接触边界条件在内的所有控制方程和边界条件均通过配点法离散. 他们模拟了锻造和挤压等金属成形问题. Mahadevan等^[232]也利用RBF配点法对轴对称锻造问题进行了计算.

胡炜等^[233]用加权最小二乘法求解了大变形问题, 计算中采用离散点残差和代替积分形式的最小二乘泛函, 提高了计算效率, 计算结果表明这种方法在显式分析中可以使用比有限元或EFGM大的时间步长. Kwon等^[234, 235]也采用最小二乘格式建立大变形问题的无网格求解方案, 有所不同的是他们基于原微分方程等价的一阶微分方程组, 以避免产生虚假边界条件^[116], 造成虚

假数值解答. 在Kwon等的研究中, 积分点通过节点支撑域自动形成, 并在接触面附近调整节点支撑域, 以避免严重局部变形带来的数值困难, 这种调整方式和有限元中的网格重构有相似之处, 但显然比网格重构要简单得多.

Sladek和Sladek^[236]用LBIE分析了薄板大变形问题, 计算中非线性Burgers积分微分方程拆分成一个 Poisson 方程和一个 Helmholtz 方程进行求解. Han等^[237]和Hu等^[238]分别对大变形问题的MLPG方法进行了研究, 他们分别采用速度压力混合插值和压力投影方法处理不可压问题. Zhang和Yao等^[239]利用MLPG对超弹性-塑性大变形过程进行了研究, 成功地模拟了空洞生长等问题.

还有其他一些无网格方法用于超大变形问题的模拟. Gu等^[45]用局部Kriging方法重点分析微机电系统中的大变形问题; Hu等^[240]和Wang等^[241]分别研究了用并行RPIM模拟金属成形过程; Li等^[242]用修正SPH方法模拟了金属环的锻造过程; Naffa和Al-Gahtani^[243]用RBF配点法求解薄板大变形问题. 基于完全Lagrange格式^[244, 144]和更新Lagrange格式^[245, 246, 247]的自然单元法也被用于求解金属成形问题, Alfano等^[245, 246]利用NEM中的Voronoi图, 通过节点的 α 型描述试件表面, 可以自动确定自接触表面, 不必通过额外计算步骤进行判断.

5.4 优化问题

优化问题, 特别是拓扑优化问题, 由于涉及到被优化对象形状的改变, 基于网格的方法极有可能出现网格的扭曲、纠缠或者网格移动, 采用无网格法的优化方法可以避免网格重构.

Grindeanu等^[248]首先将RKPM用于结构形状优化设计. 他们采用基于连续介质的设计灵敏度分析(DSA)方法研究了超弹性大变形结构的优化问题, 并利用压力投影方法避免了近不可压材料可能带来的体积锁死^[249]. Kim等^[250, 251]分析了带摩擦接触问题的形状设计和优化问题, 并将其应用于薄板冲压的模具形状设计. Yi等^[252]将该方法扩展到壳结构有限变形优化问题. Cho和Kwak^[253]也基于RKPM对几何非线性结构的拓扑优化进行了研究, 文中通过去除低密度子域的方法避免密度方法的收敛困难. Zhang等^[254]则利用RKPM和多种群遗传算法结合的方法求解优化问题, 他们还对比了RKPM形

函数计算方式进行了改进, 以降低计算量^[255]. Grindeanu等^[256]进一步将该方法与CAD工具结合, 达到结构分析、模拟和设计的完全集成, 他们用该方法分析了二维和三维的线弹性和超弹性问题. Kim等^[257]则从优化分析的角度出发, 对无网格法中的本质边界条件处理、形函数和设计变量的依赖关系等问题进行了详细讨论.

Bobaru和Mukherjee^[258]基于EFGM对二维弹性形状设计灵敏度分析和形状优化问题进行了研究, 他们的研究中位移灵敏度采用基于连续介质的变分方程, 由此避免了对形函数的求导. 他们^[259]还进一步对热弹性形状优化进行了研究, 发现在散热片算例中, EFGM可以得到FEM漏掉的优化结果. Bobaru和Rachakonda^[260, 261]讨论了散热片阵列的优化以及材料热导率对优化结果的影响. 他们发现, 高热导率散热片的优化形状是尖而窄的, 而对于低热导率材料钝而宽的形状更好, 该结论和自然界中的一些物体, 如肠绒毛和剑龙背部骨板的实际形状符合. 由于散热片阵列的最初形状和优化结果相差可以很大, 无网格法体现出应用上的优势. Goupee和Vel^[262]基于EFGM和遗传算法分析金属/陶瓷功能梯度材料在热力耦合过程中的优化问题. Lacroix和Bouillard^[263]提出了用于优化分析的FEM-EFGM耦合方法, 以解决设计变量扰动时可能产生的网格退化问题. 在该文中, 需要计算结构响应灵敏度的区域用EFGM节点代替原有的有限单元, 数值算例表明该方法能够分析有限元方法不能得到正确结果的问题.

另外, Renken和Subbarayan^[264]利用非均匀有理B样条函数对流体静力学中的反问题进行了分析, 他们主要研究任意形状固体表面限制下的液滴形状, 这对于微电子器件的设计很有用, 因为液滴是微电子器件中常见的开关形式. Zou等^[265]利用单位分解法研究了形状优化问题.

5.5 流固耦合和自由表面流动问题

流固耦合和自由表面流动问题常涉及到移动边界, 用传统的Lagrange和Euler格式有限元法模拟都存在一定的缺点. Lagrange格式可以很好地模拟界面变化, 但变形很大时会导致网格畸变; Euler格式不存在网格畸变问题, 但难以精确捕捉界面移动, 且对流项一般需要额外的稳定方案. Lagrange型无网格法在处理流固耦合和自由表面流动问题中具有优势, 其具有Lagrange格式的所有优点, 又不存在网格畸变问题.

Idelsohn等^[266]用Lagrange格式的粒子法模拟了无粘不可压的自由表面流动问题, 其中压力项用投影法处理, 而对流项则由于采用Lagrange格式而不需要特殊处理. Idelsohn和Onate等在2003年提出无网格有限元法^[267, 268], 该方法基于Voronoi图, 可以达到 $O(N)$ 的计算量, 他们用这种方法计算了一系列流固耦合问题. 他们又进一步提出粒子有限元法^[269, 270], 并将其与ALE格式结合以使用更大的时间步长和适应更大的变形. Hao等^[271]提出了移动粒子有限元法(MPFEM)并将其用于流固耦合问题中.

在模拟自由表面流动时, 准确跟踪捕捉表面是重要的问题. Martinez等^[272]基于自然单元法中使用的Voronoi图, 用一组节点的 α 型描述自由表面, 能够简单有效地捕捉自由表面的变化. Martinez等用该方法模拟了短纤维在流体中的悬浮问题^[273], Gonzalez等^[274]则侧重用该方法解决低雷诺数的流动. Daneshmand和Niroomandi^[275]用自然单元法分析了流固耦合系统的振动, 包括充满液体的弹性空腔以及充液开放容器的振动问题.

还有一些研究者将Euler格式和Lagrange格式结合起来模拟流固耦合问题. Yoon等^[276]将半隐式移动粒子法(MPS)和ALE格式相结合, 模拟气液两项流. 移动界面用Lagrange格式模拟, 固定边界如入口、出口等采用Euler格式, 他们用该方法模拟了过热液体的空洞产生过程以及粘性流体中的气泡生长过程. Chikazawa等^[277]等用MPS模拟了弹性/粘塑性结构与流体间的相互作用, 其中固体结构用一组粒子代替, 粒子之间用弹簧等器件模拟其相互作用. Heo等^[278]采用MPS研究了沸腾过程中气泡的生长与气泡初始半径之间的依赖关系.

无网格法还常常和有限元等方法结合起来研究流固耦合问题. 在研究气动弹性问题时, Sarigul-Klijn^[279]用无网格法处理界面位移和气动载荷的计算. Wang和Liu^[280]进一步发展了浸入边界法, 提出了增强浸入边界法(EIBM). 在EIBM中, 流体部分采用Euler格式有限元、固体部分采用Lagrange格式有限元计算, 而流体与固体之间的相互作用等价成相应的分布体力. 浸入边界法中的 δ 函数用重构核函数代替, 提高了连续性, EIBM非常适合模拟固体在流体中的移动过程. Zhang和Gay^[281]进一步提出了浸入有限元法(IFEM). Chew等^[282]将广义有限差分法和普通有限差分法结合, 模拟固体在流体中的运动, 其中广

义有限差分法用来处理固体及其所对应的流体区域, 而普通有限差分法处理其他区域, 该研究中使用了ALE格式.

在浇铸过程中, 金属液体不断固化, 固液界面不断发生移动, 也给数值模拟带来了困难. Zhang等^[283, 284]用有限点法模拟了连续浇铸过程中的金属固化过程, 他们研究了固化过程中的热传输和固体中的应力分布, 其中固体部分采用MLPG方法计算. Vertnik等^[285]用RBF方法模拟了铝合金急冷浇铸过程.

无网格法还被用于求解带有移动界面的非线性浅水波方程. Zhou等^[286]用RBF和ALE格式模拟了大坝坍塌和行波到达海滩等浅水波问题. Ata和Soulaimani^[287]用稳定化SPH模拟了大坝断裂问题. Roubtsova和Kahawita^[288]用SPH方法成功地模拟了1963年意大利北部大坝倒塌的灾难性事故, 结果和定性观察结果以及专家报告相吻合, 该研究中用Riemann求解器处理初始界面不连续的断裂. Wu等^[289]用基本解方法模拟了单色波经过浸没的障碍物, 以及高陡度的周期有限幅度波的生成过程.

此外, Li等^[290]用Hermite云法模拟了海底管道在海流作用下的失效问题, 结果显示变形受管道海床间距离和海流速度影响很大, 而海流速度还决定管道的失效模式. Iske和Kaser用基于自适应Lagrange格式和局部无网格插值的AMMoC方法^[291]模拟石油储藏, 这实质是多孔介质中的两相流问题. York等^[292]利用MPM自动满足无滑移接触的特点, 用MPM模拟气囊膨胀等流体和薄膜的相互作用的问题.

5.6 生物力学中的应用

数值模拟在生物力学研究中的作用越来越重要. 由于生命活动涉及到复杂的物理和化学过程, 因此对数值方法的要求很高, 特别是生物力学中很多问题涉及到超大变形、断裂损伤、移动边界、接触穿透等等, 无网格法在这一领域也有着广泛的应用前景.

人体骨骼的变形、断裂和损伤过程是受关注的问题, 数值模拟有利于理解骨折、骨质疏松和骨骼老化的机制. Doblare等^[293]对自然单元法在生物力学中的应用进行了总结, 给出了自然单元法模拟骨骼各种力学行为的算例, 结果显示自然单元法适于模拟具有复杂几何和大变形的骨力学问题, 对节点分布不敏感, 易于进行自适应计算.

Lee等^[294]基于人体骨CT扫描影像,用无网格法分析了骨质疏松过程,对所研究的骨骼提出了断裂准则并模拟了断裂过程.模拟结果显示断裂应力在断裂过程中并非单调递减,而骨中微结构有利于防止失效发展.Liew等^[295]利用RKPM对人体股骨在梗塞和老化情况下的应力分布进行了分析,结果表明RKPM适于处理此类具有非凸边界和材料属性不连续的问题.

在血管等人体组织研究方面,Guilkey等^[296]对拉伸作用下的多细胞血管结构的准静态大变形过程进行了模拟,离散区域包括血管片段及其细胞外基体,共使用了1360万节点,在200个处理器的并行机上运行,计算前通过检查应力和反力分布情况确定优化的离散粒子分布.结果发现反力对于微血管的弹性模量敏感,而对于总体模型的泊松比较不敏感,该算例表明可以通过模拟的方法估计微血管的弹性模量.Ionescu等^[297]还利用MPM对软组织材料失效进行了模拟,以期改善软组织损伤的诊断和治疗提供素材.该文模拟了子弹穿透心肌材料做成的靶板的过程,模拟结果中入口到出口的伤口半径增加,这与实际结果相吻合.Liu等^[298]利用浸入有限元法对血液的流变学性质进行了研究.由于研究中涉及到红细胞的大变形、细胞间的接触和细胞-血液的流固耦合作用,很适合用无网格法计算.该文成功的再现了3种血液流变学现象,并验证了红细胞间相互作用和红细胞变形能力对血液流变性质有显著影响.

一些研究者对生物材料在多物理场作用下的响应进行了模拟.Hon等^[299]利用RBF配点法对二维三相带电水凝软组织进行了模拟,计算中采用轴对称力电耦合模型,为扩大问题求解规模还采用了区域分解算法.他们还利用该方法模拟了酸性溶液中的水凝胶条在外电场作用下的膨胀和收缩行为^[300].Li等^[301, 302, 303, 304]利用无网格Hermite云法对水凝胶的电-化学-力学耦合行为进行了一系列的研究.他们基于多相混合理论,对水凝胶在电激励^[301, 303]和pH值激励作用^[302, 304]下的膨胀等力学响应进行了模拟.Li等^[305]还用无网格Hermite云法对药物释放过程进行了模拟,分析了物理参数对药物释放的影响.

实时手术虚拟环境是临床医学练习的有效方法,由于实时图像显示的更新频率需达30Hz,而实时力反馈频率甚至可以要求达到1kHz之高,因此要求用于虚拟环境的计算方法有很高的计算效率.

De等^[306]将有限球法和有限元软件ADINA相结合,建立了视觉和触觉多感官交互作用手术模拟环境.他们还发展了三维软组织微创手术的实时虚拟环境^[307],可以集成到手术模拟器中.Lim和De^[308]进一步采用多解析度方案和快速重分析方案,提高计算效率.在这些文献中都采用配点法作为离散方案,以保证计算方法的高效率.

在医学影像学方面,von Ellenrieder^[309]用无网格法分析了脑电图正问题,即根据体内的电活动计算身体表面的电势分布,该模拟中采用了多层模型,每层可以具有不同的电导率;Li等^[310]用无网格有限元法分析了心电图正问题,该模拟基于单层躯干模型;Wang和Rudy^[311]则利用基本解方法求解心电图反问题,即从测量得到的心电图数据求解心脏外膜的电势;这些研究可能拓展脑、心电图的临床诊断作用,无网格法的应用避免了对复杂的人体外形进行网格划分的工作量,而且研究表明比边界元等方法计算效率高.另外,Liu和Shi^[312]将无网格法应用于医学图像的分析,各幅图像之间需要区域映射,由于人体心脏运动带来较大的形状改变,有限元网格可能产生畸变,会导致精度下降,而无网格法很好的避免了这个问题.

5.7 微纳米力学中的应用

Aluru及其研究组首先将无网格法用于微机电系统分析.Aluru最先将RKPM方法用于MEMS器件的分析,获得了较好的结果^[313].Li和Aluru首先将有限云法用于静电驱动梁问题^[314],并根据计算结果提出几何线性和非线性分析相结合的方法,即在某一临界电压下使用线性分析、在其上改用几何非线性分析,在研究MEMS器件的电-力耦合变形过程中^[315],他们用有限云法进行结构分析,用边界云法分析部件外部电场的分布,以达到快速计算的目的.Aktes和Aluru^[316]还发展了FCM与直接模拟蒙特卡罗(DSMC)方法相耦合的多尺度方法,分析微过滤器中的流动.无网格法的特点使得该耦合方法在处理过渡区时非常方便.

MEMS器件的模拟常可以简化成静电驱动梁的静/动力学问题,该问题的求解在MEMS的模拟中具有重要地位.Li等^[317]将基于局部Petrov-Galerkin离散方案和点插值近似的 μ LPI方法用于MEMS器件的数值分析,他们计算了静电驱动悬臂梁、两端固支梁的临界电压,以及由静电驱动的微镜反射角度随电压的变化情况.Gu和Liu^[318]研

究强弱形式无网格法求解时间相关问题时, 以及Li等^[319]研究局部Kriging方法求解动力学问题时, 都用静电驱动梁动力学问题对方法进行了验证. Wang等^[320]还进一步用局部Kriging方法分析了两端固支静电驱动梁等结构的静动力学性质. 刘岩等^[321]将径向基函数无网格法用于静电驱动梁的分析, 并详细讨论了计算参数的影响. Wang等^[322]用最小二乘无网格法对一维和二维MEMS部件模型进行了分析, 计算中最小二乘泛函取值点可异于节点.

Liu等^[323]用自适应SPH方法(ASPH)研究了带有表面张力效应的微管道不可压流动, 他们模拟了二维Poiseuille流动和晶片封装中的流动过程. 与原始SPH不同, ASPH中光滑核长度随方向而变, 即由标量改为2阶张量, 因此沿管长方向不必布置过多的节点, 降低了计算量.

纳米粒子的自动筛选, 是生物科学中的重要技术, 一种有效的筛选方法是在极板上布置一系列的电极, 各电极上循环交替赋以相位不同的交流电压. 此问题的模拟可以简化成交流电压的实部和虚部在矩形区域上分别满足泊松方程. Li等^[324]和Chen等^[325]用加权最小二乘有限差分法计算了不同相位数量和不同电压下的结果.

王东东等^[326]研究磁致伸缩粒子填充弹性基体的均匀化问题时, 提出了界面加强RKPM方法(Interface-enriched RKPM)以处理夹杂和基体界面间的不连续问题, 他们用这种方法分析了单位元胞微结构在拉伸和剪切作用下的变形. Chen等^[327]将这种方法进一步用于多晶材料的晶粒生长模拟中. 由于晶粒生长涉及到移动界面(晶界移动)和拓扑改变(晶粒几何)问题, 单独使用Lagrange、Euler甚至任意Lagrange-Euler有限元方法模拟都很困难. Chen等采用了双重网格的思想, 晶粒用高维RKPM离散, 晶界用一维有限元离散, 他们用这种方法较好地模拟了各种多晶结构在拉伸作用下的演化过程. Missoum-Benziane等^[328]用双尺度NEM模拟了微结构的演化, 与普通均匀化方法不同, 他们将超过95%的节点布置在小于5%的关键区域内, 从而能够精确的描述微结构的变化. Singh和Tanaka等^[329, 330, 331, 332]用EFGM和基于连续介质力学的方法对纳米管复合材料的等效热导率进行了系统研究. 他们假定基体和纳米管的热导率是温度的某种函数, 通过研究代表体元确定

复合材料的热学性质. 计算结果表明纳米管长度、半径以及界面性质对等效热导率都有重要影响, 加入少量的纳米管即可使整体热导率增加3倍.

无网格法还被用于量子力学中de Broglie-Bohm方程的求解^[333, 334, 335]. 研究发现在节点平均分布情况下, 波包演化的么正性大大提高. 为保证精确而稳定的计算, 在求解中使用了ALE格式, 而且充分利用无网格法的特点, 随着计算的进行不断增减节点, 以保证计算过程中节点布置尽量均匀. 他们用这种方法模拟了一维化学反应模型, 成功地重建了散射系统中的共振结构. Jun^[336]用RKPM求解Schrodinger方程以计算晶体的电子结构, 他对形函数进行了必要修改, 以适合周期性的需要. Quek和Liu^[337]用EFGM求解量子点表面扩散方程, 以确定量子岛外形.

无网格法的另一重要应用是将其与分子模拟方法相结合, 建立多尺度计算方法. 除前面已经提到的FCM-DSMC耦合方法外, Wagner和Liu提出了桥接尺度方法(bridging scale method, BSM)^[338], 该方法基于尺度分解和在以RKPM形函数构建的粗尺度空间上的映射. 为防止高频声子在边界上的反射, 他们在边界附近布置虚原子, 并采用了卷积的方法. Qian等用这种方法模拟碳纳米管的屈曲行为^[339]. Shen和Atluri也提出了MLPG与分子动力学/分子静力学的耦合方法^[340]. 在Gu和Zhang提出的RPIM和分子动力学耦合方法中^[341], 用罚函数方法保证过渡区域的连续介质和原子的位移以及梯度相协调. 作为一种粒子型方法, MPM也被用以与MD结合的多尺度方法. Ayton等^[342]和Chen等^[343, 344]都使用了MD和MPM串行耦合的方法, 即用MD模拟获得宏观物性参数, 再使用MPM求解宏观问题. Chen等^[343]在模拟中还使用了在边界上施加虚拟应力的方法抵消应力波在界面上的反射, 以使有限区域能够处理应力波向无穷远的传播. 郭增才等^[345]和Lu等^[346]都对MPM和MD并行耦合的方法进行了研究, 他们的耦合方法都要求MPM粒子在MD区附近布置在晶格点上, MPM区域采用线弹性模型.

5.8 其他方面的应用

无网格法也用于其他一些固体力学问题的计算. 如对于应变梯度理论, 需要高阶连续性近似函数, 在无网格法中相对容易构造. Pamin等^[347]将EFGM与两种塑性梯度理论相结合,

他们在计算中发现高阶梯度的正则性质对于计算结果的不敏感性很重要,这和有限元方法一致; Tang等^[348]将MLPG用于Fleck-Hutchison应变梯度理论的计算,显示出无网格近似函数在处理4阶椭圆方程时相对于有限元具有一定优势; Manzari和Regueiro^[349]用应变梯度塑性理论研究了地质材料失效前后的行为,方程的离散化需要位移 C^2 连续,塑性乘子 C^1 连续,无网格近似函数很好地满足了要求. Yeon和Youn^[350]研究弹塑性固体的软化行为时,指出有限元结果依赖于网格,其原因是求解的边值问题不具备椭圆性. 他们用双尺度无网格法进行了研究,细尺度解答指示局部化现象,同时采用自适应方法,可以得到与离散点布置无关的计算结果. Sladek和Sladek^[351]则将MLPG用于微极弹性理论. Li等^[352]用MLPG方法分析了带有奇异性和不连续面的三维弹性问题; Hagihara等^[353]用EFGM研究了蠕变问题,为加快节点搜索速度,他们利用了有向图和Delauney三角化技术. Rahman和Rao^[354, 355]还用EFGM分析了线弹性可靠性问题,该问题中的材料性质在空间上随机分布.

岩土力学问题一般涉及到复杂的材料和几何非线性,而且常需要处理移动界面,无网格法在这方面也得到了广泛应用. Wang等^[356]用EFGM研究了海床不稳定性,研究了波长、孔隙流体的可压缩性、渗透性、孔隙介质刚度等参数的影响. Wang和Liu等^[357, 358]用(径向)点插值法对固化过程进行了研究,计算中采用了Biot模型, Wang等^[359]则使用了局部径向点插值法和Terzaghi固化理论. 张雄等^[80]将完整岩石用EFGM离散,节理用夹层单元模拟,对节理岩体进行了研究,避免了将岩石细分为单元. 比例边界有限元法(SBFEM)是一种处理无限区域的有效方法, Deeks和Augarde^[360, 361]将MLPG的思想引入SBFEM,并发现新方法收敛性更好. Murakami等^[362]用EFGM对土壤-水耦合作用进行了模拟,计算中用更新Lagrange格式处理土壤的有限变形,并利用不同阶近似避免压力结果的振荡.

在传热问题的数值模拟方面, Sadat等用散射近似和配点法分析了二维^[122]和三维^[363]自然对流问题,并把这种方法扩展到辐射传热问题中^[364]. Singh等对EFGM求解传热问题进行了一系列的工作,他们用EFGM求解了二维和三维线性和非线性热传导问题^[365, 366, 367],并详细讨论了计算参数

的影响. Singh^[368]还发展了传热问题的并行EFGM. 杨海天和刘岭^[369]基于并行EFGM和精细积分对带有周期对称性的热传导问题进行了研究. 刘岩和张雄等^[370]发展了热传导问题的加权最小二乘无网格法,计算结果表明具有较高的精度和计算效率. 刘林华及其合作者^[371, 372, 373]将最小二乘无网格法扩展到辐射传热、辐射与传导耦合传热问题中,他们还用MLPG方法求解了辐射传热问题^[374, 375].

无网格法还在一些化学问题中得到了应用. Rocca和Power等^[376, 377, 378]利用Hermite RBF配点法对电解液中的传输过程以及过饱和溶液中晶体的生长进行了一系列的研究. 晶体生长时相界面不断发生变化,他们根据计算情况只移动界面上的相应节点,其他节点和微分方程的配置点保持不动. 晶体生长过程很不稳定,他们的研究表明计算结果可以捕捉这种不稳定现象,而该现象并非由数值不稳定引起. Rocca和Power^[379]还研究了食物冷藏过程中的非线性传热问题.

无网格法甚至还用于计量经济学中, Fasshauer等^[380]和Tsai等^[381]分别用RBF和基本解方法求解了Black-Scholes方程,以预测美国和欧洲期权市场的演变.

6 结 论

本文以加权余量法为主线,归纳总结了已有的30多种无网格法,介绍了包括移动最小二乘近似、核近似和重构核近似、单位分解近似、径向基函数近似、点插值近似、自然邻接点插值近似在内的常用无网格近似方案和包括伽辽金格式、配点格式、局部弱形式、加权最小二乘格式、边界积分格式在内无网格法常用的加权余量法,并讨论了各种数值积分方法和本质边界条件处理问题. 在此基础上,本文较系统地总结了无网格法在冲击爆炸、裂纹传播、超大变形、结构优化、流固耦合和自由表面流动问题、生物及微纳米力学问题中的应用,展示了无网格法所具有的独特优势,分析了无网格法在这些领域成功应用的原因.

无网格法的研究历史较短,在严格的数学论证、计算效率、边界条件处理和工程应用实例等方面还不能与成熟的有限元法相媲美,更未形成有效的通用软件. 但是与有限元等基于网格的数值方法相比,无网格法具有许多独特的优势:

(1)只需要将求解域用一组节点来离散,不需要节点间的连接信息,因此避免了复杂三维结构网格生成的困难,便于分析复杂的三维结构;

(2)无网格近似函数的网格依赖性很弱,因此在分析特大变形、移动界面和不连续面的变动(产生、移动、消失)等问题时,不会出现网格畸变,更不需要网格重构,是分析冲击爆炸、裂纹扩展、金属加工成形和流固耦合等问题的有效工具;

(3)无网格法的近似函数一般具有高阶连续性,后处理简单方便,且在求解高阶偏微分方程方面具有优势;

(4)无网格法中增减节点和自由度都非常方便,易于进行自适应分析;

(5)无网格法可以将描述待求问题特征的解析函数引入近似函数基底中,以提高结果精度和收敛率。

目前, SPH方法已经被嵌入到LS-DYNA、AUTODYN等商用软件中,用以分析冲击爆炸问题.可以预见在不远的将来,更多的无网格法将被引入到商用有限元软件中,成为分析冲击爆炸、裂纹扩展、金属加工成形、流固耦合等问题的有效工具。

参 考 文 献

- Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1-4): 3~47
- Li S, Liu W K. Meshfree and particle methods and their applications. *Applied Mechanics Reviews*, 2002, 55(1): 1~34
- 张雄, 宋康祖, 陆明万. 无网格法研究进展及其应用. *计算力学学报*, 2003, 20(6): 730~742
- 张雄, 刘岩. 无网格法. 清华大学出版社/Springer, 2004
- Atluri S N. *The Meshless Method (MLPG) for Domain & BIE Discretizations*. Tech. Science Press, 2004
- Zienkiewicz O C, Taylor R L. *The Finite Element Method (5th Edition)*. Butterworth-Heinemann, 2000
- 张雄, 宋康祖, 陆明万. 紧支试函数加权残值法. *力学学报*, 2003, 35(1): 43~49
- Lancaster P, Salkauskas K. Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of Computation*, 1981, 37(155): 141~158
- Fleming M, Chu Y A, Moran B, et al. Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40(8): 1483~1504
- Atluri S N, Cho J Y, Kim H G. Analysis of thin beams, using the meshless local Petrov-Galerkin method, with generalized moving least squares interpolations. *Computational Mechanics*, 1999, 24(5): 334~347
- Randles P W, Libersky L D. Smoothed particle hydrodynamics: some recent improvements and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139: 375~408
- Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing Kernel Particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1995, 20: 1081~1106
- Jin X Z, Li G, Aluru N R. On the equivalence between least-squares and kernel approximations in meshless methods. *Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2001, 2(4): 447~462
- Liu W K, Chen Y J. Wavelet and Multiple Scale Reproducing Kernel Methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1995, 21(10): 901~931
- Duarte C A, Oden J T. Hp clouds: a h-p meshless method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 1996, 12: 673~705
- Melenk J M, Babuska I. The partition of unity finite element methods: Basic theory and application. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139: 263~288
- Babuska I, Melenk J M. The partition of unity finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40(4): 727~758
- Duarte C A, Oden J T. Hp clouds: a meshless method to solve boundary-value problems. Technical Report 95-05. Technical report, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, University of Texas at Austin, 1995
- Duarte C A, Babuska I, Oden J T. Generalized finite element methods for three dimensional structural mechanics problems. *Computers & Structures*, 2000, 77: 215~232

- 20 Babuska I, Caloz G, Osborn J E. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM J Numerical Analysis*, 1994, 31(4): 745~981
- 21 Oden J T, Duarte C A M, Zienkiewicz O C. A new cloud-based hp finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, 153(1-2): 117~126
- 22 Strouboulis T, Copps K, Babuska I. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 190(32-33): 4081~4193
- 23 Belytschko T, Moes N, Usui C Sand Parimi. Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50: 993~1013
- 24 Moes N, Dolbow J, Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 46: 131~150
- 25 Stazi F, Budyn E, Chessa T Jand Belytschko. An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks. *Computational Mechanics*, 2003, 31(1-2): 38~48
- 26 Belytschko T, Zi G, Xu J, et al. The extended finite element method for arbitrary discontinuities. In K M Mathisen, T Kvamsdal, K M Okstad, editors, *Computational Mechanics - Theory And Practice*, Barcelona, Spain: CIMNE. 2003
- 27 李录贤. 扩展有限元法(XFEM)及其应用. *力学进展*, 2005, 35(1): 5~20
- 28 Wu Z M. Compactly supported positive definite radial functions. *Advances in Computational Mathematics*, 1995, 4: 283~292
- 29 Buhmann M D. Radial functions on compact support. In *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*. volume 41, 1998 pages 3~46
- 30 Wendland H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degrees. *Advances in Computational Mathematics*, 1995, 4: 389~396
- 31 Micchelli C A. Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions. *Constructive Approximation*, 1986, 2: 11~22
- 32 Powell M J D. The theory of radial basis function approximation in 1990. In F W Light, editor, *Advances in Numerical Analysis*, Clarendon Press, Oxford, volume 2, pages 105~210. 1992
- 33 Wang J G, Liu G R. A point interpolation meshless method based on radial basis functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 54(11): 1623~1648
- 34 Zhang X, Song K Z, Lu M W, et al. Meshless methods based on collocation with radial basis functions. *Computational Mechanics*, 2000, 26(4): 333~343
- 35 Liu G R, Gu Y T. A point interpolation method for two-dimensional solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50(4): 937~951
- 36 Sibson R. A vector identity for the Dirichlet tessellation. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1980, 87: 151~155
- 37 Braun J, Sambridge M. A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids. *Nature*, 1995, 376: 655 ~ 660
- 38 Belikov V V, Kontorovich V K, Kontorovich V K. The non Sibson interpolation: A new method of interpolation of the values of a function on an arbitrary set of points. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1997, 37(1): 9~15
- 39 Farin G. Surface over Dirichlet tessellation. *Computer Aided Geometry Design*, 1990, 7(1-4): 281 ~ 292
- 40 Sukumar N, Moran B, Belytschko T. The natural element method in solid mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, 43: 839~887
- 41 Sukumar N, Moran B. C1 natural neighbour interpolant for partial differential equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 1999, 15(4): 417~447
- 42 Gonzalez D, Cueto E, Doblare M. Volumetric locking in natural neighbour Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 61(4): 611~632
- 43 Krige D G. A review of the development of geostatistics in south Africa. In M David, C Huijbregts, editors, *Advanced Geostatistics in the Mining Industry*, Holland, pages 279 ~ 293. 1976

- 44 Lam K Y, Wang Q X, Li H. A novel meshless approach - Local Kriging (LoKriging) method with two-dimensional structural analysis. *Computational Mechanics*, 2004, 33(3): 235~244
- 45 Gu Y T, Wang Q X, Lam K Y. A meshless local Kriging method for large deformation analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 196(9-12): 1673~1684
- 46 Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194: 4135~4195
- 47 Shaw A, Roy D. A NURBS-based error reproducing kernel method with applications in solid mechanics. *Computational Mechanics*, 2007, 40(1): 127~148
- 48 Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 1992, 10: 307~318
- 49 Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37: 229~256
- 50 Liu W K, Chen Y, Jun S. Overview and applications of the reproducing kernel particle methods. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 1996, 3(1): 3~80
- 51 Duarte C A, Oden J T. An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139: 237~262
- 52 Sukumar N, Moran B, Semenov A Y, et al. Natural neighbour Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50(1): 1~27
- 53 Cueto E, Sukumar N, Calvo B, et al. Overview and recent advances in natural neighbour Galerkin methods. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2003, 10(4): 307~384
- 54 王兆清, 冯伟. 自然单元法研究进展. *力学进展*, 2004, 34(4): 437~445
- 55 Sulsky D, Chen Z, Schreyer H L. A Particle Method for History-Dependent Materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1994, 118(1-2): 179~196
- 56 Sulsky D, Zhou S J, Schreyer H L. Application of a Particle-in-Cell Method to Solid Mechanics. *Computer Physics Communications*, 1995, 87(1-2): 236~252
- 57 Bardenhagen S G, Kober E M. The generalized interpolation material point method. *Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2004, 5(6): 477~495
- 58 Kaljevic I, Saigal S. An improved element free Galerkin formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40: 2953~2974
- 59 Dolbow J, Belytschko T. Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods. *Computational Mechanics*, 1999, 23(3): 219~230
- 60 Beissel S, Belytschko T. Nodal integration of the element-free Galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1-4): 49~74
- 61 Kucherov L, Tadmor E B, Miller R E. Umbrella spherical integration: A stable meshless method for non-linear solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, 69(13): 2807~2847
- 62 Chen J S, Wu C T, Yoon S. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin meshfree methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50: 435~466
- 63 Dyka C T, Ingel R P. An approach for tension instability in smoothed particle hydrodynamics. *Computers & Structures*, 1995, 57: 573~580
- 64 Dyka C T, Randles P W, Ingel R P. Stress points for tension instability in SPH. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40: 2325~2341
- 65 Randles P W, Libersky L D. Normalized SPH with stress points. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 48(10): 1445~1462
- 66 Fries T P, Belytschko T. Convergence and stabilization of stress-point integration in mesh-free and particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, Published online in Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com)
- 67 Carpinteri A, Ferro G, Ventura G. The partition of unity quadrature in meshless methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 54(7): 987~1006

- 68 Carpinteri A, Ferro G, Ventura G. The partition of unity quadrature in element-free crack modelling. *Computers & Structures*, 2003, 81(18-19): 1783~1794
- 69 Duflot M, Hung N D. A truly meshless Galerkin method based on a moving least squares quadrature. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2002, 18(6): 441~449
- 70 Lu Y Y, Belytschko T, Gu L. A new implementation of the element free Galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1994, 113: 397~414
- 71 Belytschko T, Tabbara M. Dynamic fracture using element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, 39(6): 923~938
- 72 Mukherjee Y X, Mukherjee S. On boundary conditions in the element free Galerkin method. *Computational Mechanics*, 1997, 19: 267~270
- 73 Zhu T, Atluri S N. A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method. *Computational Mechanics*, 1998, 21: 211~222
- 74 Zhang X, Liu X, Lu M W, et al. Imposition of essential boundary conditions by displacement constraint equations in meshless methods. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2001, 17(3): 165~178
- 75 Lu Y Y, Belytschko T, Tabbara M. Element-free Galerkin methods for wave propagation and dynamic fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1995, 126: 131~153
- 76 Krysl P, Belytschko T. Analysis of thin plates by the element-free Galerkin method. *Computational Mechanics*, 1995, 17(1-2): 26~35
- 77 Chen J S, Pan C, Wu C T. Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of nonlinear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139: 195~227
- 78 Chen J S, Pan C H, Wu C T. Large deformation analysis of rubber based on a reproducing kernel particle method. *Computational Mechanics*, 1997, 19: 211~227
- 79 Chen J S, Wang H P. New boundary condition treatments in meshfree computation of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 187(3-4): 441~468
- 80 Zhang X, Lu M W, Wegner J L. A 2-D meshless model for jointed rock structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 47(10): 1649~1661
- 81 Gavete L, Benito J J, Falcon S, et al. Implementation of essential boundary conditions in a meshless method. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2000, 16(6): 409~421
- 82 Belytschko T, Organ D, Krongauz Y. A coupled finite element - Element-free Galerkin method. *Computational Mechanics*, 1995, 17(3): 186~195
- 83 Krongauz Y, Belytschko T. Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 131(1-2): 133~145
- 84 Hegen D. Element-free Galerkin methods in combination with finite element approaches. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 135: 143~166
- 85 Alves M K, Rossi R. A modified element-free Galerkin method with essential boundary conditions enforced by an extended partition of unity finite element weight function. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 57(11): 1523~1552
- 86 Rossi R, Alves M K. On the analysis of an EFG method under large deformations and volumetric locking. *Computational Mechanics*, 2007, 39(4): 381~399
- 87 Chen J S, Wang H P, Yoon S, et al. Some recent improvements in meshfree methods for incompressible finite elasticity boundary value problems with contact. *Computational Mechanics*, 2000, 25(2-3): 137~156
- 88 Liu W K, Jun S, Li S F. Reproducing kernel particle methods for structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995, 38: 1655~1679
- 89 Jun S, Liu W K, Belytschko T. Explicit reproducing kernel particle methods for large deformation problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, 41(1): 137~166
- 90 Li S, Hao W, Liu W K. Numerical simulations of large deformation of thin shell structures using meshfree

- methods. *Computational Mechanics*, 2000, 25(2-3): 102~116
- 91 Gosz J, Liu W K. Admissible approximations for essential boundary conditions in the reproducing kernel particle method. *Computational Mechanics*, 1996, 19(2): 120~135
- 92 Kang M S, Youn S K. Kinematically admissible meshless approximation using modified weight function. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50(8): 1993~2006
- 93 Gunther F C, Liu W K. Implementation of boundary conditions for meshless methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, 163(1-4): 205~230
- 94 Wu C K C, Plesha M E. Essential boundary condition enforcement in meshless methods: boundary flux collocation method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 53(3): 499~514
- 95 Zhang X, Liu X H, Song K Z, et al. Least-squares collocation meshless method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 51(9): 1089~1100
- 96 Lucy L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The Astron. J.*, 1977, 8(12): 1013~1024
- 97 Gingold R A, Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and applications to non-spherical stars. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 1977, 18: 375~389
- 98 Onate E, Idelsohn S, Zienkiewicz O C, et al. A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, 39(22): 3839~3866
- 99 Onate E, Idelsohn S, Zienkiewicz O C, et al. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1-4): 315~346
- 100 Onate E, Perazzo F, Miquel J. A finite point method for elasticity problems. *Computers & Structures*, 2001, 79(22-25): 2151~2163
- 101 Liszka T J, Duarte C A M, Tworzydło W W. hp-Meshless cloud method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1-4): 263~288
- 102 Sadeghirad A, Mohammadi S. Equilibrium on line method (ELM) for imposition of Neumann boundary conditions in the finite point method (FPM). *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, 69(1): 60~86
- 103 Liu G R. A meshfree method: meshfree weakstrong (MWS) form method, for 2-D solids. *Computational Mechanics*, 2003, 33: 2~14
- 104 LIU G R, Ding H, Ding H. Meshfree weak-strong method for fluid mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2004, 10: 1025~1047
- 105 Breiẗkopf P, Touzot G, Villon P. Double grid diffuse collocation method. *Computational Mechanics*, 2000, 25: 199~206
- 106 Pan X F, Zhang X, Lu M W. Galerkin Collocation Meshless Method. In *Sixth World Congress on Computational Mechanics in conjunction with the Second Asian-Pacific Congress on Computational Mechanics*. Beijing, China, 2004
- 107 Atluri S N, Zhu T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 1998, 22(2): 117~127
- 108 Atluri S N, Zhu T L. The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics. *Computational Mechanics*, 2000, 25(2-3): 169~179
- 109 Atluri S N, Shen S. *The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) Method*. Tech. Science Press, Encino, 2002
- 110 Atluri S N, Shen S P. The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple & Less-costly Alternative to the Finite Element and Boundary Element Methods. *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2002, 3(1): 11~51
- 111 Zhu T, Zhang J D, Atluri S N. A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach. *Computational Mechanics*, 1998, 21(3): 223~235
- 112 Atluri S N, Sladek J, Sladek V, et al. The local boundary integral equation (LBIE) and its meshless implementation for linear elasticity. *Computational Mechanics*, 2000, 25(2-3): 180~198
- 113 Zhou J X, Li M E, Zhang Z Q, et al. A subdomain collocation method based on Voronoi domain parti-

- tion and reproducing kernel approximation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 196(13-16): 1958~1967
- 114 Park S H, Youn S K. The least-squares meshfree method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 52(9): 997~1012
- 115 张雄, 胡炜, 潘小飞, 陆明万. 加权最小二乘无网格法. *力学学报*, 2003, 35(4): 425~431
- 116 Pan X F, Zhang X, Lu M W. Meshless Galerkin least-squares method. *Computational Mechanics*, 2005, 35(3): 182~189
- 117 Kwon K C, Park S H, Jiang B N, et al. The least-squares meshfree method for solving linear elastic problems. *Computational Mechanics*, 2003, 30(3): 196~211
- 118 Mukherjee Y X, Mukherjee S. The boundary node method for potential problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40(5): 797~815
- 119 Kothnur V S, Mukherjee S, Mukherjee Y X. Two-dimensional linear elasticity by the boundary node method. *International Journal of Solids and Structures*, 1998, 36(8): 1129~1147
- 120 Chen W. Meshfree boundary particle method applied to Helmholtz problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2002, 26(7): 577~581
- 121 Zhang J M, Yao Z H, Li H. A hybrid boundary node method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 53(4): 751~763
- 122 Sadat H, Couturier S. Performance and accuracy of a meshless method for laminar natural convection. *Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals*, 2000, 37(4): 455~467
- 123 Lee S H, Yoon Y C. Meshfree point collocation method for elasticity and crack problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 61(1): 22~48
- 124 Yoon Y C, Lee S H, Belytschko T. Enriched meshfree collocation method with diffuse derivatives for elastic fracture. *Computers & Mathematics with Applications*, 2006, 51(8): 1349~1366
- 125 Kim D W, Liu W K, Yoon Y C, et al. Meshfree point collocation method with intrinsic enrichment for interface problems. *Computational Mechanics*, 2007, 40(6): 1037~1052
- 126 Krongauz Y, Belytschko T. A Petrov-Galerkin diffuse element method (PG DEM) and its comparison to EFG. *Computational Mechanics*, 1997, 19(4): 327~333
- 127 Pan X F, Sze K Y, Zhang X. An assessment of the meshless weighted least-square method. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2004, 17(3): 270~282
- 128 Li G, Aluru N R. Boundary cloud method: a combined scattered point/boundary integral approach for boundary-only analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, 191(21-22): 2337~2370
- 129 Aluru N R, Li G. Finite cloud method: a true meshless technique based on a fixed reproducing kernel approximation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50(10): 2373~2410
- 130 Aluru N R. A point collocation method based on reproducing kernel approximations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 47(6): 1083~1121
- 131 Li H, Ng T Y, Cheng J Q, et al. Hermite-Cloud: a novel true meshless method. *Computational Mechanics*, 2003, 33(1): 30~41
- 132 Lam K Y, Li H, Yew Y K, et al. Development of the meshless Hermite-Cloud method for structural mechanics applications. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2006, 48(4): 440~450
- 133 Duarte C A, Hamzeh O N, Liszka T J, et al. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 190(15-17): 2227~2262
- 134 De S, Bathe K J. The method of finite spheres. *Computational Mechanics*, 2000, 25(4): 329~345
- 135 De S, Bathe K J. Towards an efficient meshless computational technique: the method of finite spheres. *Engineering Computations*, 2001, 18(1-2): 170~192
- 136 Wendland H. Meshless Galerkin methods using radial basis functions. *Mathematics of Computation*, 1999, 68(228): 1521~1531
- 137 Kansa E J. Multiquadrics ~ a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics. *Computers & Mathematics with Applications*, 1990, 19(8/9): 127~161

- 138 Franke C, Schaback R. Solving partial differential equations by collocation using radial basis functions. *Applied Mathematics and Computation*, 1998, 93: 73~82
- 139 Liu G R, Kee B B T, Chun L. A stabilized least-squares radial point collocation method (LS-RPCM) for adaptive analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195(37-40): 4843~4861
- 140 Liu X, Tai K. Point interpolation collocation method for the solution of partial differential equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2006, 30(7): 598~609
- 141 Wu Y L, Liu G R. A meshfree formulation of local radial point interpolation method (LRPIM) for incompressible flow simulation. *Computational Mechanics*, 2003, 30(5-6): 355~365
- 142 Tan J Y, Liu L H, Li B X. Least-squares radial point interpolation collocation meshless method for radiative heat transfer. *Journal of Heat Transfer-Transactions of the Asme*, 2007, 129(5): 669~673
- 143 Liu G R, Gu Y T. Boundary meshfree methods based on the boundary point interpolation methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2004, 28(5): 475~487
- 144 Cho J R, Lee H W. A Petrov-Galerkin natural element method securing the numerical integration accuracy. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2006, 20(1): 94~109
- 145 Wang K, Zhou S J, Shan G J. The natural neighbour Petrov-Galerkin method for elasto-statics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 63(8): 1126~1145
- 146 Libersky L, Petschek A G, Carney T C, et al. High strain lagrangian hydrodynamics a three-dimensional SPH code for dynamics material response. *Journal of Computational Physics*, 1993, 109: 67~75
- 147 Stellingwerf R, Wingate C. Impact modeling with smooth particle hydrodynamics. *International Journal of Impact Engineering*, 1993, 14: 707~718
- 148 Benz W, Asphaug E. Simulations of Brittle Solids Using Smooth Particle Hydrodynamics. *Computer Physics Communications*, 1995, 87(1-2): 253~265
- 149 Johnson G R, Stryk R A, Beissel S R. SPH for high velocity impact computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1-4): 347~373
- 150 Sweigle J W, Hicks D L, Attaway S W. Smoothed Particle Hydrodynamics Stability Analysis. *Journal of Computational Physics*, 1995, 116(1): 123~134
- 151 Balsara D S. Von-Neumann Stability Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics - Suggestions for Optimal-Algorithms. *Journal of Computational Physics*, 1995, 121(2): 357~372
- 152 Chen J K, Beraun J E, Jih C J. An improvement for tensile instability in smoothed particle hydrodynamics. *Computational Mechanics*, 1999, 23(4): 279~287
- 153 Monaghan J J. SPH without a tensile instability. *Journal of Computational Physics*, 2000, 159: 290~311
- 154 Campbell J, Vignjevic R, Libersky L. A contact algorithm for smoothed particle hydrodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 184(1): 49~65
- 155 Vignjevic R, De Vuyst T, Campbell J C. A frictionless contact algorithm for meshless methods. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2006, 13(1): 35~47
- 156 Johnson G R, Beissel S R. Normalized smoothing functions for SPH impact computations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, 39(16): 2725~2741
- 157 Johnson G R, Beissel S R, Stryk R A. A Generalized Particle Algorithm for high velocity impact computations. *Computational Mechanics*, 2000, 25(2-3): 245~256
- 158 Johnson G R, Stryk R A, Beissel S R, et al. An algorithm to automatically convert distorted finite elements into meshless particles during dynamic deformation. *International Journal of Impact Engineering*, 2002, 27(10): 997~1013
- 159 Johnson G R, Stryk R A. Conversion of 3D distorted elements into meshless particles during dynamic deformation. *International Journal of Impact Engineering*, 2003, 28(9): 947~966
- 160 Beissel S R, Gerlach C A, Johnson G R. Hypervelocity impact computations with finite elements and

- meshfree particles. *International Journal of Impact Engineering*, 2006, 33(1-12): 80~90
- 161 Rabczuk T, Areias P. A meshfree thin shell for arbitrary evolving cracks based on an extrinsic basis. *Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2006, 16(2): 115~130
- 162 Riedel W, Nahme H, White D M, et al. Hypervelocity impact damage prediction in composites: Part II - experimental investigations and simulations. *International Journal of Impact Engineering*, 2006, 33(1-12): 670~680
- 163 Michel Y, Chevalier J M, Durin C, et al. Hypervelocity impacts on thin brittle targets: Experimental data and SPH simulations. *International Journal of Impact Engineering*, 2006, 33(1-12): 441~451
- 164 Sulsky D, Schreyer H L. Axisymmetric form of the material point method with applications to upsetting and Taylor impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1-4): 409~429
- 165 Chen Z, Feng R, Xin X, et al. A computational model for impact failure with shear-induced dilatancy. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 56(14): 1979~1997
- 166 Zhang X, Sze K Y, Ma S. An explicit material point finite element method for hyper-velocity impact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, 66(4): 689~706
- 167 Ma S, Zhang X, Qiu X M. Comparison study of MPM and SPH in modeling hypervelocity impact problems. *International Journal of Impact Engineering*, 2008, (under review)
- 168 Swegle J W, Attaway S W. On the feasibility of using smoothed particle Hydrodynamics for underwater explosion calculations. *Computational Mechanics*, 1995, 17(3): 151~168
- 169 Liu M B, Liu G R, Zong Z, et al. Computer simulation of high explosive explosion using smoothed particle hydrodynamics methodology. *Computers & Fluids*, 2003, 32(3): 305~322
- 170 Lee W H, Painter J W. Material void-opening computation using particle method. *International Journal of Impact Engineering*, 1999, 22: 1~22
- 171 Hu D A, Long S Y, Liu K Y, et al. A modified meshless local Petrov-Galerkin method to elasticity problems in computer modeling and simulation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2006, 30(5): 399~404
- 172 Guilkey J E, Harman T B, Banerjee B. An Eulerian-Lagrangian approach for simulating explosions of energetic devices. *Computers & Structures*, 2007, 85(11-14): 660~674
- 173 Han Z D, Liu H T, Rajendran A M, et al. The applications of meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approaches in high-speed impact, penetration and perforation problems. *Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2006, 14(2): 119~128
- 174 Fahrenthold E P, Horban B A. An improved hybrid particle-element method for hypervelocity impact simulation. *International Journal of Impact Engineering*, 2001, 26(1-10): 169~178
- 175 Park Y K, Fahrenthold E P. A kernel free particle-finite element method for hypervelocity impact simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 63(5): 737~759
- 176 Falk M L, Needleman A, Rice J R. A critical evaluation of cohesive zone models of dynamic fracture. *Journal of Physics IV*, 2001, 11: 43~50
- 177 Belytschko T, Fleming M. Smoothing, enrichment and contact in the element-free Galerkin method. *Computers & Structures*, 1999, 71(2): 173~195
- 178 Lee S H, Yoon Y C. An improved crack analysis technique by element-free Galerkin method with auxiliary supports. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 56(9): 1291~1314
- 179 Dufflot M, Nguyen-Dang H. A meshless method with enriched weight functions for fatigue crack growth. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 59(14): 1945~1961
- 180 Dufflot M, Nguyen-Dang H. Fatigue crack growth analysis by an enriched meshless method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2004, 168(1-2): 155~164
- 181 Rao B N, Rahman S. An enriched meshless method for non-linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 59(2): 197~223
- 182 Rao B N, Rahman S. Stochastic meshless analysis of elastic-plastic cracked structures. *Computational Mechanics*, 2003, 32(3): 199~213

- 183 Ventura G, Xu J X, Belytschko T. A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by EFG. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 54(6): 923~944
- 184 Rabczuk T, Belytschko T. Cracking particles: a simplified meshfree method for arbitrary evolving cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 61(13): 2316~2343
- 185 Rabczuk T, Bordas S, Zi G S. A three-dimensional meshfree method for continuous multiple-crack initiation, propagation and junction in statics and dynamics. *Computational Mechanics*, 2007, 40(3): 473~495
- 186 Rabczuk T, Zi G S. A meshfree method based on the local partition of unity for cohesive cracks. *Computational Mechanics*, 2007, 39(6): 743~760
- 187 Krysl P, Belytschko T. The Element Free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 44(6): 767~800
- 188 Lee S H, Yoon Y C. Numerical prediction of crack propagation by an enhanced element-free Galerkin method. *Nuclear Engineering and Design*, 2004, 227(3): 257~271
- 189 Rao B N, Rahman S. An efficient meshless method for fracture analysis of cracks. *Computational Mechanics*, 2000, 26(4): 398~408
- 190 Rao B N, Rahman S. A coupled meshless-finite element method for fracture analysis of cracks. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2001, 78(9): 647~657
- 191 Rabczuk T, Belytschko T. Application of particle methods to static fracture of reinforced concrete structures. *International Journal of Fracture*, 2006, 137(1-4): 19~49
- 192 Rabczuk T, Belytschko T. A three-dimensional large deformation meshfree method for arbitrary evolving cracks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 196(29-30): 2777~2799
- 193 Sladek J, Sladek V, Zhang C Z. An advanced numerical method for computing elastodynamic fracture parameters in functionally graded materials. *Computational Materials Science*, 2005, 32(3-4): 532~543
- 194 Sukumar N, Moran B, Black T, et al. An element-free Galerkin method for three-dimensional fracture mechanics. *Computational Mechanics*, 1997, 20: 170~175
- 195 Liu W K, Hao S, Belytschko T, et al. Multiple scale meshfree methods for damage fracture and localization. *Computational Materials Science*, 1999, 16(1-4): 197~205
- 196 Tiago C M, Leitao V M A. Development of a EFG formulation for damage analysis of reinforced concrete beams. *Computers & Structures*, 2004, 82(17-19): 1503~1511
- 197 Rao B N, Rahman S. Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 2003, 70(1): 1~27
- 198 Rao B N, Rahman S. An interaction integral method for analysis of cracks in orthotropic functionally graded materials. *Computational Mechanics*, 2003, 32(1-2): 40~51
- 199 Sladek J, Sladek V, Zhang C Z. A meshless local boundary integral equation method for dynamic anti-plane shear crack problem in functionally graded materials. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2005, 29(4): 334~342
- 200 Chen Y, Eskandarian A, Oskard M, et al. Meshless analysis of plasticity with application to crack growth problems. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2004, 41(1-3): 83~94
- 201 Simkins D C, Li S. Meshfree simulations of thermo-mechanical ductile fracture. *Computational Mechanics*, 2006, 38(3): 235~249
- 202 Rao B N, Rahman S. Probabilistic fracture mechanics by Galerkin meshless methods - part I: rates of stress intensity factors. *Computational Mechanics*, 2002, 28(5): 351~364
- 203 Rahman S, Rao B N. Probabilistic fracture mechanics by Galerkin meshless methods - part II: reliability analysis. *Computational Mechanics*, 2002, 28(5): 365~374
- 204 Chen Y P, Lee J D, Eskandarian A. Dynamic meshless method applied to nonlocal crack problems. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2002, 38(3): 293~300
- 205 Chen Y P, Eskandarian A, Oskard M, et al. Meshless simulation of crack propagation in multiphase materials. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2006, 45(1): 13~17

- 206 Batra R C, Zhang G M. Search algorithm, and simulation of elastodynamic crack propagation by modified smoothed particle hydrodynamics (MSPH) method. *Computational Mechanics*, 2007, 40(3): 531~546
- 207 Daphalapurkar N P, Lu H, Coker D, et al. Simulation of dynamic crack growth using the generalized interpolation material point (GIMP) method. *International Journal of Fracture*, 2007, 143(1): 79~102
- 208 Chen J S, Pan C H, Wu C T. Application of reproducing kernel particle method to large deformation contact analysis of elastomers. *Rubber Chemistry and Technology*, 1998, 71(2): 191~213
- 209 Chen J S, Pan C, Roque C M O L, et al. A Lagrangian reproducing kernel particle method for metal forming analysis. *Computational Mechanics*, 1998, 22(3): 289~307
- 210 Chen J S, Roque C M O L, Pan C H, et al. Analysis of metal forming process based on meshless method. *Journal of Materials Processing Technology*, 1998, 80-1: 642~646
- 211 Yoon S P, Wu C T, Wang H P, et al. Efficient meshfree formulation for metal forming simulations. *Journal of Engineering Materials and Technology-Transactions of the Asme*, 2001, 123(4): 462~467
- 212 Yoon S, Chen J S. Accelerated meshfree method for metal forming simulation. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2002, 38(10): 937~948
- 213 Wu C T, Chen J S, Chi L Q, et al. Lagrangian mesh-free formulation for analysis of geotechnical materials. *Journal of Engineering Mechanics-Asce*, 2001, 127(5): 440~449
- 214 Liu W K, Hao S, Belytschko T, et al. Multi-scale methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 47(7): 1343~1361
- 215 Song N, Qian D, Cao J, et al. Effective models for prediction of springback in flanging. *Journal of Engineering Materials and Technology-Transactions of the Asme*, 2001, 123(4): 456~461
- 216 Lu H S, Cheng H S, Cao J, et al. Adaptive enrichment meshfree simulation and experiment on buckling and post-buckling analysis in sheet metal forming. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(21-24): 2569~2590
- 217 Xiong S W, Liu J W K Cao, Rodrigues J M C, et al. On the utilization of the reproducing kernel particle method for the numerical simulation of plane strain rolling. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 2003, 43: 89~102
- 218 Xiong S W, Li C S, Rodrigues J M C, et al. Steady and non-steady state analysis of bulk forming processes by the reproducing kernel particle method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2005, 41(6): 599~614
- 219 Liew K M, Ng T Y, Wu Y C. Meshfree method for large deformation analysis - a reproducing kernel particle approach. *Engineering Structures*, 2002, 24(5): 543~551
- 220 Liew K M, Peng L X, Kitipornchai S. Nonlinear analysis of corrugated plates using a FSDT and a mesh-free method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 196(21-24): 2358~2376
- 221 Zhao X, Yang Y, Liew K M. Geometrically. nonlinear analysis of cylindrical shells using the element-free kp-Ritz method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2007, 31(9): 783~792
- 222 Wang H, Li G Y, Han X, et al. Development of parallel 3D RKPM meshless bulk forming simulation system. *Advances in Engineering Software*, 2007, 38(2): 87~101
- 223 Ren J, Liew K M, Meguid S A. Modelling and simulation of the superelastic behaviour of shape memory alloys using the element-free Galerkin method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2002, 44(12): 2393~2413
- 224 Ren J, Liew K M. Meshfree modelling and characterisation of thermomechanical behaviour of NiTi alloys. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2005, 29(1): 29~40
- 225 Ren J, Liew K M. Meshfree modelling and simulation of the thermomechanical behaviour of shape memory alloys. *Smart Materials & Structures*, 2005, 14(5): S302~S311
- 226 Guan Y J, Zhao G Q, Wu X, et al. Massive metal forming process simulation based on rigid/viscoplastic element-free Galerkin method. *Journal of Materials Processing Technology*, 2007, 187: 412~416
- 227 潘小飞. 高效稳定的无网格法若干问题的研究. 清华大学, 博士学位论文, 北京, 2006

- 228 Guo Y M, Nakanishi K. A rigid-plastic meshless method for forming simulations. *Engineering Plasticity from Macroscale to Nanoscale Pts 1 and 2*, 2003, 233-2: 341~346
- 229 Guo Y M, Nakanishi K. A backward extrusion analysis by the rigid-plastic integralless-meshless method. *Journal of Materials Processing Technology*, 2003, 140: 19~24
- 230 Guo Y M, Yokouchi Y. An axisymmetric forging analysis by using the rigid-plastic point collocation method. *Advances in Engineering Plasticity and Its Applications, Pts 1 and 2*, 2004, 274-276: 439~444
- 231 Guo Y M, Nakanishi K, Yokouchi Y. A nonlinear rigid-plastic analysis for metal forming problem using the rigid-plastic point collocation method. *Advances in Engineering Software*, 2005, 36(4): 234~242
- 232 Mahadevan P, Dixit U S, Robi P S. Analysis of cold rigid-plastic axisymmetric forging problem by radial basis function collocation method. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2007, 34(5-6): 464~473
- 233 胡炜. 波动与碰撞问题的最小二乘无网格法. 清华大学, 硕士学位论文, 北京, 2003
- 234 Kwon K C, Park S H, Youn S K. The least-squares meshfree method for elasto-plasticity and its application to metal forming analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 64(6): 751~788
- 235 Kwon K C, Youn S K. The least-squares meshfree method for rigid-plasticity with frictional contact. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43(25-26): 7450~7481
- 236 Sladek J, Sladek V. A meshless method for large deflection of plates. *Computational Mechanics*, 2003, 30(2): 155~163
- 237 Han Z D, Rajendran A M, Atluri S N. Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approaches for solving nonlinear problems with large deformations and rotations. *Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2005, 10(1): 1~12
- 238 Hu D A, Long S Y, Han X, et al. A meshless local Petrov-Galerkin method for large deformation contact analysis of elastomers. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2007, 31(7): 657~666
- 239 Zhang X, Yao Z H, Zhang Z F. Application of MLPG in large deformation analysis. *Acta Mechanica Sinica*, 2006, 22(4): 331~340
- 240 Hu W, Yao L G, Hua Z Z. Parallel point interpolation method for three-dimensional metal forming simulations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2007, 31(4): 326~342
- 241 Wang H, Li G Y, Zhong Z H. Parallel point interpolation method for three-dimensional metal forming simulations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2007, 31: 326~342
- 242 Li C S, Liu X H, Wang G D. Ring upsetting simulation by the meshless method of corrected smooth particle hydrodynamics. *Journal of Materials Processing Technology*, 2007, 183(2-3): 425~431
- 243 Naffa M, Al-Gahtani H J. RBF-based meshless method for large deflection of thin plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2007, 31(4): 311~317
- 244 Calvo B, Martinez M A, Doblare M. On solving large strain hyperelastic problems with the natural element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 62(2): 159~185
- 245 Alfaro I, Bel D, Cueto E, et al. Three-dimensional simulation of aluminium extrusion by the alpha-shape based natural element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195(33-36): 4269~4286
- 246 Alfaro I, Gonzalez D, Bel D, et al. Recent advances in the meshless simulation of aluminium extrusion and other related forming processes. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2006, 13(1): 3~43
- 247 Alfaro I, Yvonnet J, Cueto E, et al. Meshless methods with application to metal forming. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195(48-49): 6661~6675
- 248 Grindeanu I, Chang K H, Choi K K, et al. Design sensitivity analysis of hyperelastic structures using a meshless method. *Aiaa Journal*, 1998, 36(4): 618~627
- 249 Grindeanu I, Choi K K, Chen J S, et al. Shape design optimization of hyperelastic structures using a meshless method. *Aiaa Journal*, 1999, 37(8): 990~997
- 250 Kim N H, Choi K K, Chen J S, et al. Meshless shape design sensitivity analysis and optimization for con-

- tact problem with friction. *Computational Mechanics*, 2000, 25(2-3): 157~168
- 251 Kim N H, Choi K K, Chen J S. Die shape design optimization of sheet metal stamping process using meshfree method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 51(12): 1385~1405
- 252 Yi K Y, Choi K K, Kim N H, et al. Continuum-based design sensitivity analysis and optimization of nonlinear shell structures using meshfree method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, 68(2): 231~266
- 253 Cho S H, Kwak J. Topology design optimization of geometrically non-linear structures using meshfree method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195(44-47): 5909~5925
- 254 Zhang Z Q, Zhou J X, Wang X M, et al. h-adaptivity analysis based on multiple scale reproducing kernel particle method. *Applied Mathematics and Mechanics-English Edition*, 2005, 26(8): 1064~1071
- 255 Zhou J X, Li M E. Solving phase field equations using a meshless method. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2006, 22(11): 1109~1115
- 256 Grindeanu L, Kim N H, Choi K K, et al. CAD-based shape optimization using a meshfree method. *Concurrent Engineering-Research and Applications*, 2002, 10(1): 55~66
- 257 Kim N H, Choi K K, Botkin M E. Numerical method for shape optimization using meshfree method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2003, 24(6): 418~429
- 258 Bobaru F, Mukherjee S. Shape sensitivity analysis and shape optimization in planar elasticity using the element-free Galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 190(32-33): 4319~4337
- 259 Bobaru F, Mukherjee S. Meshless approach to shape optimization of linear thermoelastic solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 53(4): 765~796
- 260 Bobaru F, Rachakonda S. Optimal shape profiles for cooling fins of high and low conductivity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2004, 47(23): 4953~4966
- 261 Bobaru F, Rachakonda S. Boundary layer in shape optimization of convective fins using a meshfree approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 60(7): 1215~1236
- 262 Goupee A J, Vel S S. Two-dimensional optimization of material composition of functionally graded materials using meshless analyses and a genetic algorithm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195(44-47): 5926~5948
- 263 Lacroix D, Bouillard P. Improved sensitivity analysis by a coupled FE-EFG method. *Computers & Structures*, 2003, 81(26-27): 2431~2439
- 264 Renken F P, Subbarayan G. NURBS-based solutions to inverse boundary problems in droplet shape prediction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 190(11-12): 1391~1406
- 265 Zou W, Zhou J X, J Q Zhang Q L. A truly meshless method based on partition of unity quadrature for shape optimization of continua. *Computational Mechanics*, 2007, 39: 357~365
- 266 Idelsohn S R, Storti M A, Onate E. Lagrangian formulations to solve free surface incompressible inviscid fluid flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 191(6-7): 583~593
- 267 Idelsohn S R, Onate E, Calvo N, et al. The meshless finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 58(6): 893~912
- 268 Idelsohn S R, Onate E, Del Pin F. A Lagrangian meshless finite element method applied to fluid-structure interaction problems. *Computers & Structures*, 2003, 81(8-11): 655~671
- 269 Idelsohn S R, Onate E, Del Pin F. The particle finite element method: a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 61(7): 964~989
- 270 Idelsohn S R, Onate E, Del Pin F, et al. Fluid-structure interaction using the particle finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195(17-18): 2100~2123
- 271 Hao S, Park H S, Liu W K. Moving particle finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 53(8): 1937~1958
- 272 Martinez M A, Cueto E, Alfaro I, et al. Updated Lagrangian free surface flow simulations with natural neighbour Galerkin methods. *International Journal*

- for *Numerical Methods in Engineering*, 2004, 60(13): 2105~2129
- 273 Martinez M A, Cueto E, Doblare M, et al. Natural element meshless simulation of flows involving short fiber suspensions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2003, 115(1): 51~78
- 274 Gonzalez D, Cueto E, Chinesta F, et al. A natural element updated Lagrangian strategy for free-surface fluid dynamics. *Journal of Computational Physics*, 2007, 223(1): 127~150
- 275 Daneshmand F, Niroomandi S. Natural neighbour Galerkin computation of the vibration modes of fluid-structure systems. *Engineering Computations*, 2007, 24(3-4): 269~287
- 276 Yoon H Y, Koshizuka S, Oka Y. A mesh-free numerical method for direct simulation of gas-liquid phase interface. *Nuclear Science and Engineering*, 1999, 133(2): 192~200
- 277 Chikazawa Y, Koshizuka S, Oka Y. A particle method for elastic and visco-plastic structures and fluid-structure interactions. *Computational Mechanics*, 2001, 27(2): 97~106
- 278 Heo S, Koshizuka S, Oka Y. Numerical analysis of boiling on high heat-flux and high subcooling condition using MPS-MAFL. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2002, 45(13): 2633~2642
- 279 Sarigul-Klijn N. Efficient interfacing of fluid and structure for aeroelastic instability predictions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 47(1-3): 705~728
- 280 Wang X D, Liu W K. Extended immersed boundary method using FEM and RKPM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193(12-14): 1305~1321
- 281 Zhang L T, Gay M. Immersed finite element method for fluid-structure interactions. *Journal of Fluids and Structures*, 2007, 23(6): 839~857
- 282 Chew C S, Yeo K S, Shu C. A generalized finite-difference (GFD) ALE scheme for incompressible flows around moving solid bodies on hybrid meshfree-Cartesian grids. *Journal of Computational Physics*, 2006, 218(2): 510~548
- 283 Zhang L, Rong Y M, Shen H F, et al. Solidification modeling in continuous casting by finite point method. *Journal of Materials Processing Technology*, 2007, 192: 511~517
- 284 Zhang L, Shen H F, Rong Y M, et al. Numerical simulation on solidification and thermal stress of continuous casting billet in mold based on meshless methods. *Materials Science and Engineering a-Structural Materials Properties Microstructure and Processing*, 2007, 466(1-2): 71~78
- 285 Vertnik R, Sarler B. Meshless local radial basis function collocation method for convective-diffusive solid-liquid phase change problems. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2006, 16(5): 617~640
- 286 Zhou X, Hon Y C, Cheung K F. A grid-free, nonlinear shallow-water model with moving boundary. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2004, 28(8): 967~973
- 287 Ata R, Soulaïmani A. A stabilized SPH method for inviscid shallow water flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2005, 47(2): 139~159
- 288 Roubtsova V, Kahawita R. The SPH technique applied to free surface flows. *Computers & Fluids*, 2006, 35(10): 1359~1371
- 289 Wu N J, Tsay T K, Young D L. Meshless numerical simulation for fully nonlinear water waves. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2006, 50(2): 219~234
- 290 Li H, Cheng J Q, Ng T Y, et al. A meshless Hermite-Cloud method for nonlinear fluid-structure analysis of near-bed submarine pipelines under current. *Engineering Structures*, 2004, 26(4): 531~542
- 291 Iske A, Kaser M. Two-phase flow simulation by AM-MoC, an adaptive meshfree method of characteristics. *Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2005, 7(2): 133~148
- 292 York A R, Sulsky D, Schreyer H L. Fluid-membrane interaction based on the material point method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 48(6): 901~924
- 293 Doblare M, Cueto E, Calvo B, et al. On the employ of meshless methods in biomechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(6-8): 801~821
- 294 Lee J D, Chen Y P, Zeng X W, et al. Modeling and simulation of osteoporosis and fracture of trabecular

- bone by meshless method. *International Journal of Engineering Science*, 2007, 45(2-8): 329~338
- 295 Liew K M, Wu H Y, Ng T Y. Meshless method for modeling of human proximal femur: treatment of nonconvex boundaries and stress analysis. *Computational Mechanics*, 2002, 28(5): 390~400
- 296 Guilkey J E, Hoying J B, Weiss J A. Computational modeling of multicellular constructs with the material point method. *Journal of Biomechanics*, 2006, 39(11): 2074~2086
- 297 Ionescu I, Guilkey J E, Berzins M, et al. Simulation of soft tissue failure using the material point method. *Journal of Biomechanical Engineering-Transactions of the Asme*, 2006, 128(6): 917~924
- 298 Liu Y L, Liu W K. Rheology of red blood cell aggregation by computer simulation. *Journal of Computational Physics*, 2006, 220(1): 139~154
- 299 Hon Y C, Lu M W, Xue W M, et al. Numerical algorithm for triphasic model of charged and hydrated soft tissues. *Computational Mechanics*, 2002, 29(1): 1~15
- 300 Zhou X, Hon Y C, Sun S, et al. Numerical simulation of the steady-state deformation of a smart hydrogel under an external electric field. *Smart Materials & Structures*, 2002, 11(3): 459~467
- 301 Li H, Chen J, Lam K Y. Multiphysical modeling and meshless simulation of electric-sensitive hydrogels. *Journal of Polymer Science Part B-Polymer Physics*, 2004, 42(8): 1514~1531
- 302 Li H, Yew Y, Lam K Y, et al. Numerical simulation of pH-stimuli responsive hydrogel in buffer solutions. *Colloids and Surfaces a-Physicochemical and Engineering Aspects*, 2004, 249(1-3): 149~154
- 303 Li H, Yuan Z, Lam K Y, et al. Model development and numerical simulation of electric-stimulus-responsive hydrogels subject to an externally applied electric field. *Biosensors & Bioelectronics*, 2004, 19(9): 1097~1107
- 304 Li H, Ng T Y, Yew Y K, et al. Modeling and simulation of the swelling behavior of pH-stimulus-responsive hydrogels. *Biomacromolecules*, 2005, 6(1): 109~120
- 305 Li H, Yan G P, Wu S N, et al. Numerical simulation of controlled nifedipine release from chitosan microgels. *Journal of Applied Polymer Science*, 2004, 93(4): 1928~1937
- 306 De S, Hong J W, Bathe K J. On the method of finite spheres in applications: towards the use with ADINA and in a surgical simulator. *Computational Mechanics*, 2003, 31(1-2): 27~37
- 307 De S R, Kim J, Lim Y J, et al. The point collocation-based method of finite spheres (PCMFS) for real time surgery simulation. *Computers & Structures*, 2005, 83(17-18): 1515~1525
- 308 Lim Y J, De S. Real time simulation of nonlinear tissue response in virtual surgery using the point collocation-based method of finite spheres. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 196(31-32): 3011~3024
- 309 von Ellenrieder N, Muravchik C H, Nehorai A. A meshless method for solving the EEG forward problem. *Ieee Transactions on Biomedical Engineering*, 2005, 52(2): 249~257
- 310 Li Z S, Zhu S A, He B. Solving the ECG forward problem by means of a meshless finite element method. *Physics in Medicine and Biology*, 2007, 52(13): N287~N296
- 311 Wang Y, Rudy Y. Application of the method of fundamental solutions to potential-based inverse electrocardiography. *Annals of Biomedical Engineering*, 2006, 34(8): 1272~1288
- 312 Liu H F, Shi P C. Meshfree representation and computation: Applications to cardiac motion analysis. *Information Processing in Medical Imaging, Proceedings*, 2003, 2732: 560~572
- 313 Aluru N R. A reproducing kernel particle method for meshless analysis of microelectromechanical systems. *Computational Mechanics*, 1999, 23(4): 324~338
- 314 Li G, Aluru N R. Linear, nonlinear and mixed-regime analysis of electrostatic MEMS. *Sensors and Actuators a-Physical*, 2001, 91(3): 278~291
- 315 Li G, Aluru N R. A boundary cloud method with a cloud-by-cloud polynomial basis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2003, 27(1): 57~71
- 316 Aktes O, Aluru N R. A Combined Continuum/DSMC Technique for Multiscale Analysis of Microfluidic Filters. *Journal of Computational Physics*, 2002, 178: 342~372

- 317 Li H, Wang Q X, Lam K Y. A variation of local point interpolation method (nu LPIM) for analysis of microelectromechanical systems (MEMS) device. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2004, 28(10): 1261~1270
- 318 Gu Y T, Liu G R. A Meshfree Weak-Strong (MWS) Form Method for Time Dependent Problems. *Computational Mechanics*, 2004, 35: 134~145
- 319 Li H, Wang Q X, Lam K Y. Development of a novel meshless Local Kriging (LoKriging) method for structural dynamic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193(23-26): 2599~2619
- 320 Wang Q X, Hua L, Lam K Y, et al. Analysis of microelectromechanical systems (MEMS) by meshless local kriging (Lokriging) method. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 2004, 27(4): 573~583
- 321 Liu Y, Liew K M, Hon Y C, et al. Numerical simulation and analysis of an electroactuated beam using a radial basis function. *Smart Materials & Structures*, 2005, 14(6): 1163~1171
- 322 Wang Q X, Li H, Lam K Y. Analysis of microelectromechanical systems (MEMS) devices by the meshless point weighted least-squares method. *Computational Mechanics*, 2007, 40(1): 1~11
- 323 Liu M B, Liu G R, Lam K Y. Constructing smoothing functions in smoothed particle hydrodynamics with applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2003, 155(2): 263~284
- 324 Li W H, Du H, Chen D F, et al. Analysis of dielectrophoretic electrode arrays for nanoparticle manipulation. *Computational Materials Science*, 2004, 30(3-4): 320~325
- 325 Chen D F, Du H, Li W H, et al. Numerical modeling of dielectrophoresis using a meshless approach. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2005, 15(5): 1040~1048
- 326 Wang D D, Chen J S, Sun L Z. Homogenization of magnetostrictive particle-filled elastomers using an interface-enriched reproducing kernel particle method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2003, 39(8): 765~782
- 327 Chen J S, Kotta V, Lu H, et al. A variational formulation and a double-grid method for meso-scale modeling of stressed grain growth in polycrystalline materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193(12-14): 1277~1303
- 328 Missoum-Benziane D, Ryckelynck D, Chinesta F. A new fully coupled two-scales modelling for mechanical problems involving microstructure: The 95/5 technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 196(21-24): 2325~2337
- 329 Singh A, Singh I V, Prakash R. Meshless element free Galerkin method for unsteady nonlinear heat transfer problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2007, 50(5-6): 1212~1219
- 330 Singh A, Singh I V, Prakash R. Numerical analysis of fluid squeezed between two parallel plates by meshless method. *Computers & Fluids*, 2007, 36(9): 1460~1480
- 331 Singh I V, Tanaka M, Endo M. Thermal analysis of CNT-based nano-composites by element free Galerkin method. *Computational Mechanics*, 2007, 39(6): 719~728
- 332 Singh I V, Tanaka M, Endo M. Nonlinear thermal analysis of carbon nanotube composites by element free Galerkin method. *Numerical Heat Transfer Part a-Applications*, 2007, 51(11): 1087~1102
- 333 Kendrick B K. A new method for solving the quantum hydrodynamic equations of motion. *Journal of Chemical Physics*, 2003, 119(12): 5805~5817
- 334 Pauler D K, Kendrick B K. A new method for solving the quantum hydrodynamic equations of motion: Application to two-dimensional reactive scattering. *Journal of Chemical Physics*, 2004, 120(2): 603~611
- 335 Derrickson S W, Bittner E R, Kendrick B K. Quantum hydrodynamics: Capturing a reactive scattering resonance. *Journal of Chemical Physics*, 2005, 123(5): ~
- 336 Jun S. Meshfree implementation for the real-space electronic-structure calculation of crystalline solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 59(14): 1909~1923
- 337 Quek S S, Liu G R. Simulation of surface evolution of quantum dot using meshfree approximation. *Thin Solid Films*, 2005, 479(1-2): 297~309
- 338 Wagner G J, Liu W K. Coupling of Atomistic and Continuum Simulation Using a Bridging Scale Decomposition. *Journal of Computational Physics*, 2003, 190: 249~274

- 339 Qian D, Wagner G J, Liu W K. A multiscale projection method for the analysis of carbon nanotubes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193(17-20): 1603~1632
- 340 Shen S P, Atluri S N. Multiscale simulation based on the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method. *Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2004, 5(3): 235~255
- 341 Gu Y T, Zhang L C. A concurrent multiscale method based on the meshfree method and molecular dynamics analysis. *Multiscale Modeling & Simulation*, 2006, 5(4): 1128~1155
- 342 Ayton G, Smondyrev A M, Bardenhagen S G, et al. Interfacing molecular dynamics and macro-scale simulations for lipid bilayer vesicles. *Biophysical Journal*, 2002, 83(2): 1026~1038
- 343 Shen L M, Chen Z. A silent boundary scheme with the material point method for dynamic analyses. *Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2005, 7(3): 305~320
- 344 Shen L M, Chen Z. A multi-scale simulation of tungsten film delamination from silicon substrate. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(18-19): 5036~5056
- 345 郭增才. 超高速碰撞的跨尺度数值模拟. 清华大学, 硕士学位论文, 北京, 2005
- 346 Lu H, Daphalapurkar N P, Wang B, et al. Multiscale simulation from atomistic to continuum-coupling molecular dynamics (MD) with the material point method (MPM). *Philosophical Magazine*, 2006, 86(20): 2971~2994
- 347 Pamin J, Askes H, de Borst R. Two gradient plasticity theories discretized with the element-free Galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, 192(20-21): 2377~2403
- 348 Tang Z, Shen S, Atluri S N. Analysis of materials with strain-gradient effects: A Meshless Local Petrov-Galerkin(MLPG) approach, with nodal displacements only. *Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2003, 4(1): 177~196
- 349 Manzari M T, Regueiro R A. Gradient plasticity modeling of geomaterials in a meshfree environment. Part I: Theory and variational formulation. *Mechanics Research Communications*, 2005, 32(5): 536~546
- 350 Yeon J H, Youn S K. Meshfree analysis of softening elastoplastic solids using variational multiscale method. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(14): 4030~4057
- 351 Sladek J, Sladek V. Application of local boundary integral equation method into micropolar elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2003, 27(1): 81~90
- 352 Li Q, Shen S, Han Z D, et al. Application of meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) to problems with singularities, and material discontinuities, in 3-D elasticity. *Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2003, 4(5): 571~585
- 353 Hagihara S, Tsunori M, Ikeda T, et al. Application of meshfree method to elastic-plastic fracture mechanics parameter analysis. *Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2007, 17(2): 63~72
- 354 Rahman S, Rao B N. A perturbation method for stochastic meshless analysis in elastostatics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50(8): 1969~1991
- 355 Rahman S, Rao B N. An element-free Galerkin method for probabilistic mechanics and reliability. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(50-51): 9313~9330
- 356 Wang J G, Karim M R, Lin P Z. Analysis of seabed instability using element free Galerkin method. *Ocean Engineering*, 2007, 34(2): 247~260
- 357 Wang J G, Liu G R, Wu Y G. A point interpolation method for simulating dissipation process of consolidation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 190(45): 5907~5922
- 358 Wang J G, Liu G R, Lin P. Numerical analysis of Biot's consolidation process by radial point interpolation method. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39(6): 1557~1573
- 359 Wang J G, Yan L, Liu G R. A local radial point interpolation method for dissipation process of excess pore water pressure. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2005, 15(5-6): 567~587
- 360 Deeks A J, Augarde C E. A meshless local Petrov-Galerkin scaled boundary method. *Computational Mechanics*, 2005, 36(3): 159~170

- 361 Deeks A J, Augarde C E. A hybrid meshless local Petrov-Galerkin method for unbounded domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 196(4-6): 843~852
- 362 Murakami A, Setsuyasu T, Arimoto S. Mesh-free method for soil-water coupled problem within finite strain and its numerical validity. *Soils and Foundations*, 2005, 45(2): 145~154
- 363 Sophy T, Sadat H, Prax C. A meshless formulation for three-dimensional laminar natural convection. *Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals*, 2002, 41(5): 433~445
- 364 Sadat H. On the use of a meshless method for solving radiative transfer with the discrete ordinates formulations. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 2006, 101(2): 263~268
- 365 Singh I V, Sandeep K, Prakash R. Heat transfer analysis of two-dimensional fins using a meshless element free Galerkin method. *Numerical Heat Transfer Part a-Applications*, 2003, 44(1): 73~84
- 366 Singh I V. Meshless EFG method in three-dimensional heat transfer problems: A numerical comparison, cost and error analysis. *Numerical Heat Transfer Part a-Applications*, 2004, 46(2): 199~220
- 367 Singh A, Singh I V, Prakash R. Numerical solution of temperature-dependent thermal conductivity problems using a meshless method. *Numerical Heat Transfer Part a-Applications*, 2006, 50(2): 125~145
- 368 Singh I V. Parallel implementation of the EFG method for heat transfer and fluid flow problems. *Computational Mechanics*, 2004, 34(6): 453~463
- 369 Yang H T, Liu L. Solving transient heat conduction problems with cyclic symmetry via a paralleled EFGM and a precise algorithm. *Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals*, 2004, 46(5): 479~495
- 370 Liu Y, Zhang X, Lu M W. A meshless method based on least-squares approach for steady- and unsteady-state heat conduction problems. *Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals*, 2005, 47(3): 257~275
- 371 Tan J Y, Liu L H, Li B X. Least-squares collocation meshless approach for coupled radiative and conductive heat transfer. *Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals*, 2006, 49(2): 179~195
- 372 Tan J Y, Liu L H, Li B X. Least-squares collocation meshless approach for transient radiative transfer. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 2006, 20(4): 912~918
- 373 Liu L H, Tan J Y. Least-squares collocation meshless approach for radiative heat transfer in absorbing and scattering media. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 2007, 103(3): 545~557
- 374 Liu L H. Meshless method for radiation heat transfer in graded index medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2006, 49(1-2): 219~229
- 375 Liu L H, Tan J Y, Li B X. Meshless approach for coupled radiative and conductive heat transfer in one-dimensional graded index medium. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 2006, 101(2): 237~248
- 376 La Rocca A, Power H. Free mesh radial basis function collocation approach for the numerical solution of system of multi-ion electrolytes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 64(13): 1699~1734
- 377 La Rocca A, Power H. A Hermite radial basis function collocation approach for the numerical simulation of crystallization processes in a channel. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2006, 22(2): 119~135
- 378 Rosales A H, La Rocca A, Power H. Radial basis function Hermite collocation approach for the numerical simulation of the effect of precipitation inhibitor on the crystallization process of an over-saturated solution. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2006, 22(2): 361~380
- 379 La Rocca A, Power H, La Rocca V, et al. A meshless approach based upon radial basis function hermite collocation method for predicting the cooling and the freezing times of foods. *Cmc-Computers Materials & Continua*, 2005, 2(4): 239~250
- 380 Fasshauer G E, Khaliq A Q M, Voss D A. Using meshfree approximation for multi-asset American options. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 2004, 27(4): 563~571
- 381 Tsai C C, Young D L, Chiang J H, et al. The method of fundamental solutions for solving options pricing models. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 181(1): 390~401

MESHFREE METHODS AND THEIR APPLICATIONS*

ZHANG Xiong¹ LIU Yan^{1,2} MA Shang¹

¹ School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084

² Department of Mechanical Engineering, Northwestern University, U.S.A.

Abstract Meshfree methods, both the theoretical foundation and their applications in a variety of fields, are reviewed in detail. Much less mesh-dependency exists in meshfree methods, which can avoid possible mesh distortion and entanglement in mesh-based numerical methods such as finite element method or boundary element method. Meshfree methods show particular advantages in some fields where finite element method or boundary element method encounter difficulties. More than 30 kinds of meshfree methods are concluded in this paper in the light of weighted residual method. The main differences between different meshfree methods are the different forms of weighted residual method and approximation functions. All kinds of meshfree approximate schemes, including moving least square approximation, kernel and reproducing kernel approximation, partition of unity approximation, radial basis approximation, radial point interpolation, natural neighbor interpolation are reviewed in detail. Different forms of weighted residual method, such as Galerkin form, collocation form, local weak form, weighted least-square form, boundary integral form are also described. The numerical quadrature algorithms and implementation of boundary conditions are discussed. Furthermore, the applications of meshfree methods in the fields of impact and explosion, crack propagation, hyper large deformation, structural optimization, fluid-solid interaction, biomechanics and micro- and nano-mechanics are reviewed, which demonstrates their advantages over the conventional numerical methods.

Keywords Meshfree methods, Element free Galerkin method, Hyper velocity impact, Crack propagation, Large deformation

* The project was supported financially by the Natural Science Foundation of China (10672088)

† E-mail: xzhang@tsinghua.edu.cn