

紧支试函数加权残值法¹⁾

张 雄 宋康祖 陆明万

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘要 将紧支函数引入加权残值法中, 提出了紧支试函数加权残值法, 其数值格式具有和有限元相似的窄带系数矩阵, 提高了加权残值法的计算效率. 在紧支试函数加权残值的基础上, 导出了紧支试函数直接配点法、紧支试函数 Hermite 配点法和紧支试函数最小二乘配点法的具体格式, 并且对几个典型算例进行了分析. 与配点法相比, 这些方法精度高, 稳定性好, 而与 Galerkin 法相比, 这些方法效率高.

关键词 加权残值法, 无网格方法, 紧支函数, 径向基函数, 数值方法

引 言

近几十年来, 有限元法已成为计算力学中解决工程问题的主要数值手段. 在用拉格朗日法求解金属冲压成形、高速撞击、流固耦合等涉及特大变形的问题时, 有限元网格可能会产生严重扭曲, 不仅需要网格重构, 而且严重地影响解的精度; 对高速冲击等动态问题, 显式时间积分的步长取决于有限元网格的最小尺寸, 因而网格的扭曲将使得时间积分步长过小, 大幅度地增加了计算工作量; 对裂纹的动态扩展问题, 由于裂纹的扩展方向不能事先确定, 因而在计算过程中需要不断地重新划分网格以模拟裂纹的动态扩展过程. 有限元近似基于网格, 因此必然难于处理与原始网格线不一致的不连续性和大变形. 鉴于这种缺陷, 近几年来国际上许多著名的计算力学学者, 如 Belytschko, Zienkiewicz, Atluri, Oden, Liu^[1~6] 等都对无网格方法进行了大量的研究工作. 无网格方法采用基于点的近似, 可以彻底或部分地消除网格, 不需要网格的初始划分和重构, 不仅可以保证计算的精度, 而且可以减小计算的难度. 然而, 由于目前的无网格近似一般没有解析表达式, 且大都基于伽辽金法, 因此计算量大; 另外, 无网格近似一般不具有插值特性, 因此对于位移边界的处理比较困难^[7,8], 目前多采用拉格朗日乘子法处理.

加权残值法^[9,10] 是广泛使用的一种近似求解方法, 它可以有效地求解微分方程、偏微分方程, 以及积分方程等. 现有的许多近似方法, 如有限单元法、

边界单元法、有限差分法等, 都可看成是加权余量法的特例. 考虑定解问题

$$\left. \begin{aligned} A(u) &= b, & \text{在域 } \Omega \text{ 内} \\ B(u) &= \bar{t}, & \text{在边界 } \Gamma_t \text{ 上} \\ u &= \bar{u}, & \text{在边界 } \Gamma_u \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 A 和 B 是微分算子, u 是待定函数. 求解控制方程 (1) 的加权残值方程为

$$\int_{\Omega} W_i \cdot (A(\hat{u}) - b) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{W}_i \cdot (B(\hat{u}) - \bar{t}) d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \bar{W}_i \cdot (\hat{u} - \bar{u}) d\Gamma = 0 \quad (2)$$

式中 W_i , \bar{W}_i 和 \bar{W}_i 为权函数, \hat{u} 是定解问题的近似解, 即试函数. 目前广泛使用的试函数有 20 多种, 如双三角函数、多项式幂级数、双调和函数、正交多项式等^[11]. 这些函数大都是定义在全求解域中, 因此所得方程的系数矩阵为满阵, 计算量较大. 对于残值的消除方法, 除了最小二乘法、配置法、伽辽金法、子域法和矩量法等基本方法外, 我国学者提出了许多有效的新方法^[11~13], 如样条加权残值法^[14]、摄动加权残值法、随机加权残值法^[15]、线性规划加权残值法^[16]、配线法、配面法、配域法^[17] 等, 极大地丰富了加权残值法的内容.

加权残值法使用的试函数大多定义在全求解域中, 其导出的系数矩阵为满阵. 有限元法在各单元中形成近似, 使用分片定义的试函数, 其刚度矩阵为稀疏矩阵, 大大地提高了求解效率. 紧支函数是定义

2001-05-23 收到第一稿, 2001-11-28 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助 (10172052).

在局部区域(支撑域)中的函数,它只在其支撑域中有定义,而在其支撑域外为零.在二维问题中,支撑域一般取为圆形域或矩形域,它与求解域 Ω 相比,是一个很小的区域.函数 $u(\mathbf{x})$ 可以用与一组离散节点 $\mathbf{x}_I(I=1,2,\dots,n_p)$ 相对应的紧支函数 $N_I(\mathbf{x})$ 的线性组合近似为

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_p} N_I(\mathbf{x}) \cdot u_I^h = \mathbf{N}^T \mathbf{u}^h \quad (3)$$

式中 n_p 是求解域 Ω 中节点的总数, u_I^h 是函数 $u(\mathbf{x})$ 在节点 \mathbf{x}_I 处的值,即 $u(\mathbf{x}_I) = u_I^h$.与有限元不同,各节点对应的紧支函数的支撑域是相互重叠的,因此这里 u_I^h 一般不再是试函数 $\hat{u}(\mathbf{x})$ 在节点 \mathbf{x}_I 处的值,即 $\hat{u}(\mathbf{x}_I) \neq u_I^h$,故 $N_I(\mathbf{x}_I) \neq \delta_{IJ}$.

使用紧支试函数构造近似函数有以下三个特点:其一,近似函数是基于求解域内的一系列点建立的,是一种无网格的近似方案;其二,近似具有较好的连续性、光滑性,不需要进一步的后处理;其三,节点未知量一般不是试函数的节点值,这一点为位移边界条件的处理带来了困难.

(1) 移动最小二乘近似

函数 $u(\mathbf{x})$ 在其插值域中可近似表示为

$$u(\mathbf{x}) \approx \hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) \cdot a_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

式中矢量 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 是由单项式 $1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots$ 等组成的可构成完全多项式的基矢量,系数矢量 $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = [a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \dots, a_m(\mathbf{x})]^T$ 通过要求下式定义的泛函取最小值确定

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \varphi_I(\mathbf{x}) (u_I^h - \mathbf{p}(\mathbf{x}_I)^T \mathbf{a}(\mathbf{x}))^2 \quad (5)$$

式中 n 是对插值点 \mathbf{x} (类似于有限元中的高斯点)有影响的节点(即该节点的支撑域能够覆盖点 \mathbf{x})的总数,一般有 $n \ll n_p$,为使式(6)中的矩阵 \mathbf{A} 非奇异,必须有 $n \geq m$; $\varphi_I(\mathbf{x}) = \varphi_I(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ 是与节点 \mathbf{x}_I 相对应的权函数,它是非负紧支函数,如截断高斯函数

$$\varphi_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{e^{-\beta^2 r^2} - e^{-\beta^2}}{1 - e^{-\beta^2}}, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (6)$$

其中 $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|/d_{mI}$, d_{mI} 为节点 \mathbf{x}_I 支撑域的半径; β 为常数,可取为2.0~5.0.由式(5)可解得

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u}^h \quad (7)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^n \varphi_I(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I)^T \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= [\varphi_1(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), \varphi_2(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, \\ &\quad \varphi_n(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] \\ \mathbf{u}^h &= [u_1^h \quad u_2^h \quad \dots \quad u_n^h]^T \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

这里系数矢量 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 是空间坐标 \mathbf{x} 的函数,因此本方法称为移动最小二乘近似(MLS).将式(7)代入式(4)中可得到形函数矩阵 \mathbf{N} 为

$$\mathbf{N}(\mathbf{x})^T = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

在移动最小二乘近似中,系数矢量 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 是空间坐标 \mathbf{x} 的函数,在每个子域 Ω_i 中不再是常量,此时近似函数 $\hat{u}(\mathbf{x})$ 将含有比矢量 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 的最高阶次更高的项.可以证明,函数 $\hat{u}(\mathbf{x})$ 至少可以准确近似矢量 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 中包括的所有阶次^[1].值得注意的是,在有限元法中形函数一般是多项式,可以用低阶高斯积分来准确地计算单元积分;但在MLS中,形函数不再是多项式,当使用伽辽金法和其它需要计算积分的加权残值法时必须使用较高阶的高斯积分以保证解的精度,因而计算量大.

引入符号 $\mathbf{r} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p}$,并对式(9)求导,可得到形函数的一阶和二阶导数为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N}_{,i}^T &= \mathbf{r}_{,i}^T \mathbf{B} + \mathbf{r}^T \mathbf{B}_{,i} \\ \mathbf{N}_{,ij}^T &= \mathbf{r}_{,ij}^T \mathbf{B} + \mathbf{r}_{,i}^T \mathbf{B}_{,j} + \mathbf{r}_{,j}^T \mathbf{B}_{,i} + \mathbf{r}^T \mathbf{B}_{,ij} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中 $\mathbf{B}_{,i}$ 表示导数 $\frac{d\mathbf{B}}{dx_i}$, $\mathbf{B}_{,ij}$ 表示导数 $\frac{d^2\mathbf{B}}{dx_i dx_j}$, x_1 表示 x , x_2 表示 y

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{,i} &= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{p}_{,i} - \mathbf{A}_{,i} \mathbf{r}) \\ \mathbf{r}_{,ij} &= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{p}_{,ij} - \mathbf{A}_{,i} \mathbf{r}_{,j} - \mathbf{A}_{,j} \mathbf{r}_{,i} - \mathbf{A}_{,ij} \mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(2) 积分核近似

在积分核函数方法中,函数 $u(\mathbf{x})$ 的近似 $\hat{u}(\mathbf{x})$ 由下式生成

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} w(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h) \cdot u(\mathbf{y}) d\Omega_y \quad (12)$$

式中 $w(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h)$ 为核函数, h 是其支撑域的大小.核函数应满足^[18]: ①在 Ω 的子域 Ω_i (即核函数的支撑

域) 中 $w(\mathbf{x}-\mathbf{y}, h) > 0$; ②在域 Ω_i 外 $w(\mathbf{x}-\mathbf{y}, h) = 0$; ③归一化条件 $\int_{\Omega} w(\mathbf{x}-\mathbf{y}, h) d\Omega = 1$; ④ $w(s, h)$ 是 $s = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ 的单调递减函数; ⑤当 h 趋于 0 时 $w(s, h)$ 趋于 $\delta(s)$. 如指数函数

$$w(\bar{s}) = \begin{cases} e^{-(\bar{s}/a)^2}, & \text{当 } \bar{s} \leq 1 \\ 0, & \text{当 } \bar{s} > 1 \end{cases} \quad (13)$$

式中, $s = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$, $\bar{s} = s/s_{\max}$. 在求求解问题的数值解时, 需要使用式 (12) 的离散形式, 即

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_I w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I, h) \cdot u_I \cdot \Delta V_I \quad (14)$$

其中 ΔV_I 是节点 \mathbf{x}_I 周围区域体积的大小的一种度量. 因此形函数 $N_I(\mathbf{x})$ 为

$$N_I(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I) \cdot \Delta V_I \quad (15)$$

(3) 紧支径向基函数近似

径向基函数 (RBF) 是一种特殊的函数, 具有形式简单、空间维数无关、各向同性等优点, 因此非常适合在数值计算中使用. 目前已有多种径向基函数可供选择^[19~22], 如 MQ 函数, 薄板样条函数、高斯分布函数等, 这些函数是定义在全域上的. 而对于具有紧支特性的径向基函数, 在计算中具有求解矩阵稀疏、带状分布的特点, 因此更有利于大型问题的求解.

以节点 \mathbf{x}_I 为中心的径向基函数可以表示为 $\psi(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_I\|)$. 近年来, 吴宗敏^[20]、Wendland^[21] 和 Buhmann^[22] 分别提出了各自的紧支径向基函数. 如

$$\psi(s) = \begin{cases} (1-s)_+^6 (6+36s+82s^2+72s^3+30s^4+5s^5) & \text{(吴宗敏)} \\ (1-s)_+^8 (32s^3+25s^2+8s+1) & \text{(Wendland)} \\ 1/15+19s^2/6-16s^3/3+3s^4-16s^5/15+s^6/6+2s^2 \ln s & \text{(Buhmann)} \end{cases} \quad (16)$$

(0 ≤ s ≤ 1)

式中

$$s = \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_I\|, (1-s)_+ = \begin{cases} 1-s, & \text{当 } 0 \leq s \leq 1 \\ 0, & \text{当 } s > 1 \end{cases}$$

函数 $u(\mathbf{x})$ 可以用径向基函数近似为

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_p} u_I \cdot \psi(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_I\|) \quad (17)$$

其中 n_p 为求解域中的节点总数, u_I 为待定系数.

本文将紧支函数引入加权残值法中, 提出了紧支试函数加权残值法, 其数值格式具有和有限元相似的窄带系数矩阵, 提高了加权残值法的计算效率. 紧支试函数加权残值法可以作为系统评述和归纳无网格法的统一理论基础, 目前现有的各种无网格方法都可以由紧支试函数加权残值法导出, 同时也可由此导出许多新的无网格格式. 在紧支试函数加权残值的基础上, 本文导出了紧支试函数直接配点法、紧支试函数 Hermite 配点法和紧支试函数最小二乘配点法的具体格式, 并且对几个典型算例进行了分析, 以说明本文方法的优势. 与配点法相比, 这些方法精度高, 稳定性好. 而与 Galerkin 法相比, 这些方法效率高.

1 紧支试函数直接配点法

将式 (3) 所示的试函数代入加权残值方程 (2) 中, 并选用不同的权函数 W_i, \hat{W}_i 和 \bar{W}_i 即可得到不同的紧支试函数加权残值方法. 如用 MLS 建立紧支试函数, 由伽辽金法即可得到 EFG 法^[1].

目前在无网格方法的研究中, 主要使用伽辽金法和配点法来对控制方程进行离散. 在使用伽辽金法时, 一般需在求解域中布置一背景网格以用于数值积分, 因此这种方法不是纯无网格方法. 另外由于形函数一般不再是多项式, 为了保证解的精度, 必须使用较高阶的高斯积分, 计算量很大. 而如果采用配点法, 可以得到简洁高效的纯无网格计算方法.

直接配点法要求方程及边界条件的残差在一些离散的节点上为零. 用 \mathbf{x}^* 表示域内节点, $\tilde{\mathbf{x}}^*$ 表示力边界节点, $\bar{\mathbf{x}}^*$ 表示位移边界节点. 对于控制方程 (1), 相应的配点格式为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{u}(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{b}(\mathbf{x}^*), & \mathbf{x}^* \in \Omega \\ \mathbf{B}\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}}^*) &= \bar{\mathbf{t}}(\tilde{\mathbf{x}}^*), & \tilde{\mathbf{x}}^* \in \Gamma_t \\ \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}^*) &= \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}^*), & \bar{\mathbf{x}}^* \in \Gamma_u \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

直接配点法是真正的无网格方法, 形成方程组步骤简单. 力边界条件、位移边界条件分别在力边界点、位移边界点严格满足, 平衡方程只在域内节

点处严格满足,而在其它位置甚至是边界节点处也不能满足.

2 紧支试函数 Hermit 配点法

利用紧支径向基函数进行函数近似时,近似函数在边界处的精度较差,因此在求解具有 Neumann 边界条件的问题时将会产生很大的误差.将边界点处函数的导数引入近似中,建立 Hermite 近似方案,可极大地提高计算精度^[23].在径向基函数 Hermite 近似方案中,函数 $u(\mathbf{x})$ 近似为^[23]

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_p} \psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|) \cdot u_I + \sum_{I=1}^{n_t} \mathbf{T} \cdot \psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|) \cdot \bar{u}_I \quad (19)$$

其中, n_t 为位于力边界上的节点数, u_I 和 \bar{u}_I 为待定系数,微分算子矩阵 \mathbf{T} 为

$$\mathbf{T} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial y} & l \cdot \nu \frac{\partial}{\partial y} + m \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \\ m \cdot \nu \frac{\partial}{\partial x} + l \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial y} & m \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (20)$$

相应控制方程 (1) 的 Hermite 配点格式为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}u(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{b}(\mathbf{x}^*), & \mathbf{x}^* &\in \Omega \\ \mathbf{A}u(\tilde{\mathbf{x}}^*) &= \mathbf{b}(\tilde{\mathbf{x}}^*), & \tilde{\mathbf{x}}^* &\in \Gamma_t \\ \mathbf{A}u(\bar{\mathbf{x}}^*) &= \mathbf{b}(\bar{\mathbf{x}}^*), & \bar{\mathbf{x}}^* &\in \Gamma_u \\ \mathbf{B}u(\tilde{\mathbf{x}}^*) &= \bar{\mathbf{t}}(\tilde{\mathbf{x}}^*), & \tilde{\mathbf{x}}^* &\in \Gamma_t \\ u(\bar{\mathbf{x}}^*) &= \bar{u}(\bar{\mathbf{x}}^*), & \bar{\mathbf{x}}^* &\in \Gamma_u \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

上式中第 1, 4 和 5 行与直接配点法相同,分别表示域内节点的平衡方程、力边界节点处的边界条件和位移边界节点处的边界条件.在 Hermite 近似中,将力边界节点处函数的导数也作为基本未知量,形成求解方程时在边界点处除满足边界条件外,还需满足偏微分方程.这个方法极大地改善了配点法的求解精度,并且保持了配点法简洁的优点.

3 紧支试函数最小二乘配点法

在直接配点法中,平衡方程只在域内节点处严格满足,而在其它位置甚至是边界节点处也不能满

足,因而可能会导致较大的误差.本文提出的最小二乘配点法^[24]不要求平衡方程在节点处严格满足,而是将各节点和另外引入的若干的辅助点处的平衡方程的残值在最小二乘的意义予以消除.首先在求解域中布置 n 个节点(其中位于边界上的点为 n_b 个),用来建立紧支试函数;除此之外,再在待求域中另外布置 m 个辅助点,平衡方程的残值在这 $n+m$ 个点上满足最小二乘条件,而边界条件则要求在边界节点处严格满足.

利用在求解域中布置的 n 个节点,可以建立紧支试函数 $\hat{u}(\mathbf{x})$,它具有式 (3) 给出的形式.要求边界条件在 n_b 个边界节点处满足,微分方程在 n 个节点和 m 个辅助点处满足,可建立方程

$$\mathbf{K}_{n_b+n+m} \mathbf{a} = \mathbf{F}_{n_b+n+m} \quad (22)$$

其中 $\mathbf{K}_{n_b+n+m} = [\mathbf{K}_{n_b}^T, \mathbf{K}_n^T, \mathbf{K}_m^T]^T$, $\mathbf{F}_{n_b+n+m} = [\mathbf{F}_{n_b}^T, \mathbf{F}_n^T, \mathbf{F}_m^T]^T$.上式共有 n 个未知数, n_b+n+m 个方程,其中前 n_b 个方程对应于边界条件,最后 $n+m$ 个方程分别对应于所有节点和辅助点处的平衡方程.

为保证解的精度,必须使边界条件精确满足,在此前提下要求平衡方程在所有节点和辅助点处的残值满足最小二乘条件.根据这种思想,将刚度阵 \mathbf{K}_{n_b+n+m} 写成分块的形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

其中 \mathbf{a}_1 为 n_b 阶列阵, \mathbf{a}_2 为 $n-n_b$ 阶列阵, \mathbf{K}_{11} 为 $n_b \times n_b$ 阶矩阵, \mathbf{K}_{12} 为 $n_b \times (n-n_b)$ 阶矩阵, \mathbf{K}_{21} 为 $(n+m) \times n_b$ 阶矩阵, \mathbf{K}_{22} 为 $(n+m) \times (n-n_b)$ 矩阵.将上式展开,有

$$\mathbf{K}_{11} \mathbf{a}_1 + \mathbf{K}_{12} \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_1 \quad (24)$$

$$\mathbf{K}_{21} \mathbf{a}_1 + \mathbf{K}_{22} \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_2 \quad (25)$$

式 (24) 包含了所有的边界条件,此式需要精确求解.由式 (24) 可得

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{K}_{11}^{-1} (\mathbf{F}_1 - \mathbf{K}_{12} \mathbf{a}_2) \quad (26)$$

代入式 (25), 整理得

$$\mathbf{A} \mathbf{a}_2 = \mathbf{b} \quad (27)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{21} \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{F}_2 - \mathbf{K}_{21} \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{F}_1 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

式 (27) 有 $n + m$ 个方程, $n - n_b$ 个未知量, 需用最小二乘方法求解. 目前有许多标准子程序可以使用, 如 LAPACK^[25]. 较之直接配点法, 最小二乘配点法中平衡方程的残值在域内节点、边界节点和另外引入的若干个辅助点处在最小二乘的意义上予以消除, 精度好于直接配点法. 同时, 最小二乘配点法也不像伽辽金法那样需要背景积分网格, 也不需要数值积分, 效率高, 并且是真正的无网格方法.

4 数值算例

4.1 算例 1

考虑在无穷远处承受水平拉力的具有中心圆孔 (半径为 1) 的无限大方板. 由于对称性, 可只取方板的 1/4 进行分析. 本文取中心右上方边长为 5 m 的方形区域, 其右边界和上边界的边界条件由解析解给出. 为了考察边界条件的影响, 本文对两种不同的边界条件进行了分析: 即区域的右边界和上边界分别取为给定位移边界和给定力边界. 在两种情况下, 区域的左边界和下边界均为给定位移边界, 中心孔边界为自由边界. 图 1 为计算模型的布点图. 图 2 给出了各边界均为位移边界时, 采用径向基函数直接近似配点法求解, 在 $x = 0$ 处应力 σ_{xx} 的计算结果及解析解对应的应力分布曲线. 图 3 给出了当区域的右边界和上边界为给定力边界时, 分别采用径向基函数直接近似配点法和 Hermite 近似配点法时, 在 $x = 0$ 处应力 σ_{xx} 的计算结果. 比较图 2 和图 3 的结果可以看出, 当用径向基函数直接近似配点法求解带有力边界条件的问题时, 将会产生很大误差, 而 Hermite 近似配点法则可以大幅度提高给定力边界问题的求解精度. 这是因为径向基函数直

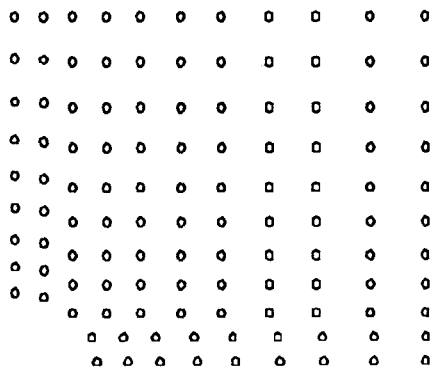


图 1 无限大带圆孔方板节点布置
Fig.1 Nodal arrangement of the infinite plate with a central circular hole

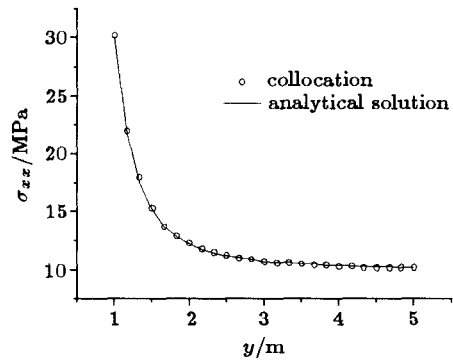


图 2 径向基近似计算结果 (无力边界)
Fig.2 Numerical results obtained by using RBF (without prescribed traction boundary)

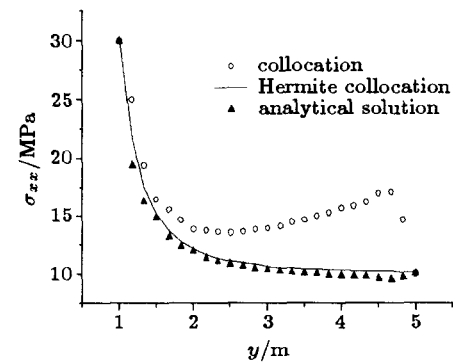


图 3 径向基近似计算结果 (含力边界)
Fig.3 Numerical results obtained by using RBF (with prescribed traction boundary)

接近似配点法得到的近似函数的导数在边界处的精度较差, 在求解带有力边界条件 (近似函数的导数的组合) 的问题时, 将会产生很大误差. 本文提出的紧支试函数 Hermite 近似配点法将边界处的导数也作为未知数, 可以大幅度提高近似函数在边界处的导数的精度, 因而大幅度提高了求解带有力边界条件的问题的精度, 如图 3 所示.

4.2 算例 2

考虑端部受集中载荷作用的悬臂梁 (如图 4 所示). 计算模型中取 $L = 12\text{ m}$, $D = 2\text{ m}$, $E = 1000\text{ MPa}$, $\nu = 1/3$, $P = 1\text{ MN}$. 计算中共使用了 107 个节点和 64 个辅助点 (如图 5 所示), 共计算了三种情况, 即最小二乘配点法 (214 个未知数)、直接配点法 (不含辅助点, 共 107 个节点, 214 个未知数) 和直接配点法 (将辅助点也作为节点, 共 171 个节点, 342 个未知数). 图 6 给出了悬臂梁下表面应力 σ_{xx} 的数值计算结果. 结果表明, 最小二乘配点法的精度和稳定性远高于直接配点法, 尤其是在第三种情况中, 虽然直接配点法的未知数比最小二乘法的未

知数多 60%，但最小二乘法计算结果的精度仍然高于直接配点法计算结果的精度，充分显示了最小二乘配点法的优势。

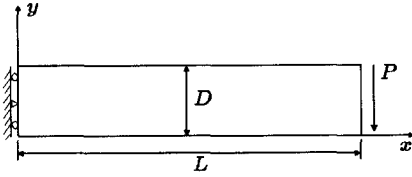


图 4 受端部载荷作用的悬臂梁

Fig.4 Cantilever beam

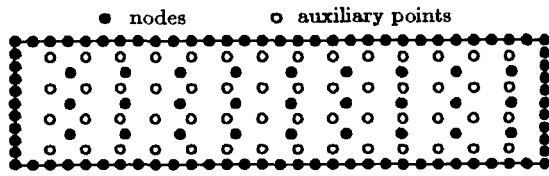


图 5 悬臂梁布点图

Fig.5 Nodal arrangement of the cantilever beam

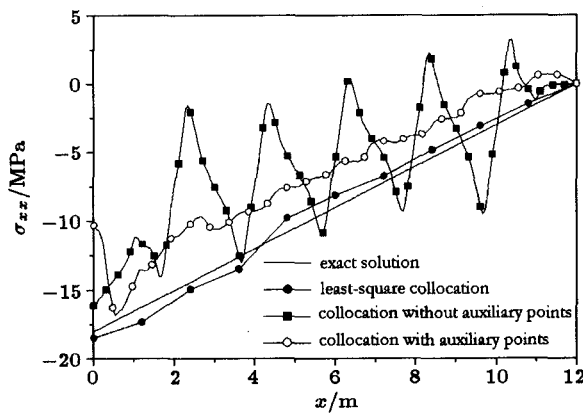


图 6 悬臂梁下表面正应力 σ_{xx} 分布

Fig.6 Stress σ_{xx} at stations along the upper surface of the cantilever beam

5 结束语

本文将紧支试函数引入加权残值法中，提出了紧支试函数加权残值法，其数值格式具有和有限元相似的窄带系数矩阵，提高了加权残值法的计算效率。紧支试函数加权残值法可以作为系统评述和归纳无网格法的统一理论基础，目前现有的各种无网格方法都可以由紧支试函数加权残值法导出，同时也可由此导出许多新的无网格格式。

目前无网格方法中，主要使用伽辽金法来对控制方程进行离散，一般需要布置背景网格进行数值积分，不仅计算量大，而且不是纯无网格方法。本文

在紧支试函数加权残值格式下给出了紧支试函数直接配点法、紧支试函数 Hermite 配点法和紧支试函数最小二乘配点法，都是完全的无网格方法，具有高效、简单的特点。与配点法相比，这些方法精度高，稳定性好。而与 Galerkin 法相比，这些方法效率高。

参 考 文 献

- 1 Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless methods: An overview and recent developments. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1996, 139(1-4): 3~47
- 2 Oñate E, Idelsohn S, Zienkiewicz OC, et al. A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow. *Int J Numer Methods Engrg*, 1996, 39(22): 3839~3866
- 3 Duarte CA, Oden JT. An h-p adaptive method using clouds. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1996, 139(1-4): 237~262
- 4 Atluri SN, Zhu TL. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach. In Atluri SN, O'Donoghue PE eds. *Modeling and Simulation Based Engineering*, USA: Tech Science Press, 1998. 2~10
- 5 Liu WK, Jun S, Zhang YF. Reproducing kernel particle methods. *Int J Numer Methods Fluids*, 1995, 20: 1081~1106
- 6 张雄, 宋康祖, 陆明万. 无网格法研究进展及其应用. 袁明武, 孙树主编. 中国计算力学大会论文集, 广州, 2001 (Zhang Xiong, Song Kangzu, Lu Mingwan. Progress and application of meshless methods. In: Yuan Mingwu et al eds. Chinese National Conference on Computational Mechanics '2001, Guangzhou, 2001 (in Chinese))
- 7 Zhang X, Liu X, Song KZ, et al. Imposition of essential boundary conditions by displacement constraint equations in meshless methods. *Comm Num Methods Engrg*, 2001, 17(3): 165~178
- 8 Zhang X, Lu MW, Wegner JL. A 2-D meshless model for jointed rock structures. *Int J Numer Methods Engrg*, 2000, 47(10): 1649~1661
- 9 Finlayson BA, Scriven LE. The method of weighted residuals—a review. *Applied Mechanics Reviews*, 1966, 19(9): 735~748
- 10 徐次达. 固体力学加权残值法. 上海: 同济大学出版社, 1987 (Xu Cida. Weighted residual method in solid mechanics. Shanghai: Tongji University Press, 1987 (in Chinese))
- 11 徐次达, 陈学潮, 郑瑞芬编著. 新计算力学加权残值法——原理、方法及应用. 上海: 同济大学出版社, 1997 (Xu Cida, Chen Xuechao, Zheng Ruifen eds. New Weighted Residual Method in Computational Mechanics: Principle, Method and Application. Shanghai: Tongji University Press, 1997 (in Chinese))
- 12 邱吉宝. 加权残值法的理论及应用. 北京: 宇航出版社, 1991 (Qiu Jibao. Theory and Application of Weighted Residual Method. Beijing: Aerospace Press, 1991 (in Chinese))
- 13 夏永旭主编. 板壳力学中的加权残值法. 西安: 西北工业大学出版社, 1994 (Xia Yongxu, ed: Weighted Residual Method in

- Plate and Shell Mechanics. Xi'an: Northwest Polytechnical University Press, 1994 (in Chinese))
- 14 秦荣. 结构力学的样条函数方法. 南宁: 广西人民出版社, 1985 (Qin Rong. Spline Function Method in Structural Mechanics. Nanning: Guangxi Peoples' Press, 1985 (in Chinese))
 - 15 陈虬, 李贤兴. 随机场分析的加权残值法. 徐次达编: 第三届全国加权残值法会议论文集, 峨嵋: 西南交通大学出版社, 1989 (Chen Qiu, Li Xianxing. Residual weighted method for random field analysis. In: Xu Cida ed. Proceedings of 3rd National Conference of Weighted Residual Method. Emei: Southwest Jiaotong University Press, 1989 (in Chinese))
 - 16 朱宝安, 力学问题优化计算——现代数学规划加权残值法, 天津: 天津科学技术出版社, 1992 (Zhu Baoan. Optimizing Computation in Mechanics—Modern Mathematical Programming Weighted Residual Method. Tianjin: Tianjin Science and Technology Press, 1992 (in Chinese))
 - 17 成鸿学, 郭建华, 包亦望. 加权残值法的配点、配线、配域. 第二届加权残值法会议论文集, 杭州: 浙江大学力学系, 1986 (Cheng Hongxue, Guo Jianhua, Bao Yiwang. Point collocation, line collocation and domain collocation in weighted residual method. In: Proceeding of the 2nd National Conference of Weighted Residual Method. Hangzhou: Zhejiang University, 1986 (in Chinese))
 - 18 Monaghan JJ. Why particle methods work. *SIAM J Sci Stat Comput*, 1982, 3(4): 422~433
 - 19 吴宗敏. 函数的径向基表示. 数学进展, 1988, 27(3): 202~208 (Wu Zongmin. Radial basis presentation of functions. *Advance in Mathematics*, 1988, 27(3): 202~208 (in Chinese))
 - 20 Wu ZM. Compactly supported positive definite radial functions. *Adv Comput Math*, 1995, 4: 283~292
 - 21 Wendland H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degrees. *Adv Comput Math*, 1995, 4: 389~396
 - 22 Buhmann MD. Radial functions on compact support. In: Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1998, 41: 33~46
 - 23 张雄, 宋康祖, 陆明万. Meshless methods based on collocation with radial basis functions. *Computational Mechanics*, 2000, 26(4): 333~343
 - 24 Zhang X, Liu XH, Song KZ, et al. Least-square collocation meshless method. *Int J Numer Methods Engrg*, 2001, 51(9): 1089~1100
 - 25 Anderson E, Bai Z, et al. LAPACK User's Guide — Release 2.0, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994

WEIGHTED RESIDUAL METHOD WITH COMPACTLY SUPPORTED TRIAL FUNCTIONS¹⁾

Zhang Xiong Song Kangzu Lu Mingwan

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract The Weighted Residual Method (WRM) is an effective method for solving Partial Differential Equations (PDEs). However, the trial functions used in WRM are usually globally supported so that the resultant stiffness matrix is a full matrix and significant computational effort is required. In this paper, WRM with compactly supported trial functions is developed, which may result in a banded sparse coefficient matrix so that the computational effort is reduced. WRM with compactly supported trial functions can be taken as the theoretical basis to summarize and investigate meshless methods systematically, from which all existing meshless methods can be obtained and new meshless methods can also be derived. As an example, the Direct Collocation, Hermite Collocation and Least-squares Collocation with compactly supported trial functions are established, whose coefficient matrices are banded and sparse so that the computational effort required is reduced significantly. Furthermore, the methods established are truly mesh-free and very efficient. Numerical examples, including a cantilever beam and an infinite plate with a central circular hole, are presented to illustrate the performance of the proposed methods.

Key words weighted residual method, meshless methods, compactly supported functions, radial basis function, numerical method

Received 23 May 2001, revised 28 November 2001.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10172052).