

文章编号 : 1000-4750(2003)05-0048-05

分阶拟合直接配点无网格法

苗红宇, 张 雄, 陆明万

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘 要: 在子域插值的基础上提出了分阶拟合直接配点无网格方法。该方法通过分阶拟合使近似函数在节点的残差达到最小, 边界条件直接引入, 然后使用直接配点法求解方程。与其它插值或拟合方法相比, 分阶拟合避免了矩阵奇异产生的困难; 与最小移动二乘法(MLS)相比, 分阶拟合只需用六个点来构造二次基近似函数, 减小了计算量; 而与其它基于 Galerkin 法的无网格法相比, 分阶拟合直接配点无网格法计算量小。

关键词: 无网格法; 插值; 覆盖; 分阶拟合

中图分类号: O242.2 **文献标识码:** A

FIT BY ORDER COLLOCATION MESHLESS METHOD

MIAO Hong-yu, ZHANG Xiong, LU Ming-wan

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Fit By Order (FBO) method is developed to establish the meshless approximation function at a node, in which the approximation function is first fitted by the linear basis, and then fitted by the quadric basis to minimize the error. Collocation is used to discretize the governing equation. The proposed method has several advantages. Compared with other interpolation methods, such as MLS and PIM, FBO overcomes the difficulties arising from the singularity of matrix and only six nodes are required to establish the approximation, so that the computational effort required is reduced. Compared with Galerkin-based meshless method, the proposed method does not require any mesh, so that the computational cost is further reduced.

Key words: meshless method; interpolation; overlap; fit by order

1 引言

近年来兴起的无网格法在形成近似时不需要网格, 因此不仅避免了网格生成的复杂过程, 还克服了网格畸变带来的影响, 对于高速碰撞、超大变形、断裂破坏等问题的分析具有明显的优势。目前已提出了十余种无网格法^[1-2] 并已成功应用于动态裂纹扩展^[3]、加工成型^[4]、节理岩体分析^[5]等许多

领域中。

现有的无网格法基本上都是基于 Galerkin 法(如 DEM、EFG、RKPM、Hp-Clouds、PUM、MLPG 等)和配点法(SPH、Hp-meshless Clouds、FPM、RBF^[6])的。所有基于 Galerkin 法的无网格法都需要进行数值积分, 其中 MLPG 利用各节点的子域进行积分, 而其它方法则借助于背景网格进行积分。与有限元

收稿日期: 2002-05-08; 修改日期: 2002-05-21

作者简介: 苗红宇(1977), 男, 四川人, 硕士, 从事固体力学研究;

张 雄(1966), 男, 宁夏人, 副教授, 博士, 从事计算力学研究;

陆明万(1939), 男, 江苏人, 教授, 博士, 从事计算力学研究

法不同, 这些无网格法中使用的近似函数都不是多项式, 因此需要使用高阶高斯积分, 计算量很大。这类方法得到的系数矩阵是对称的, 且其实现过程与有限元法类似, 因而目前在无网格法中主要使用 Galerkin 法。基于配点法的无网格法不需要进行积分, 计算量小, 但这类方法稳定性差, 并且系数矩阵是不对称的。

文献[7]在配点法的基础上, 提出了加权最小二乘配点法。该方法直接使用最小二乘法来建立系统的变分格式。与配点法相比, 该方法对控制方程的残差不仅在节点处予以消除, 而且在辅助点处也予以消除, 精度高、稳定性好。

为了提高无网格法应力场的计算精度, 本文首先用变化平缓的多项式函数替代紧支函数, 采用强行截断的办法将近似函数的影响限制在局部域内。研究表明, 只有当影响域半径足够大时, 这种方法的计算结果精度才比较高, 但计算量大。分析其原因, 是由于各影响域之间搭接松散, 如果能保证节点被足够多的邻近节点的近似函数覆盖, 则可以改善搭接松散的状况, 本文采用均匀覆盖的方法来实现这一想法。进行子域插值时, 我们强制各影响域内的近似函数通过同一节点时取相同的值, 然后通过分阶拟合得到近似函数, 最后采用直接配点法建立无网格格式。

2 子域插值

和有限元插值不同, 本方法的插值是基于覆盖的, 因此不需要网格和固定单元。对于求解域内的每一个节点 x , 在其邻域 W_x 内的近似函数为 $u^h(x)$, 该近似函数覆盖邻近的节点, 同时该节点也被邻近节点的近似函数所覆盖。为使各覆盖域之间搭接紧密, 在本方法中需要达到均匀覆盖的要求: 节点被邻近的 m 个点的近似函数覆盖, 同时该节点的近似函数覆盖 m 个点。覆盖的方式有两种:

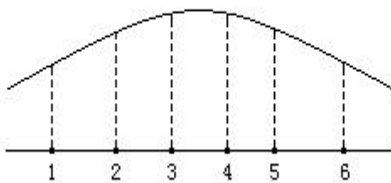


图 1 覆盖

Fig.1 Overlap

限定覆盖点个数和限定覆盖半径。本文中采用限定覆盖点个数的方法, 以每个节点的近似函数影响域覆盖 5 个其他节点且每个节点被均匀覆盖 6 次为例, 如图 1 所示。

在图 1 中, 结点 3 的近似函数 $u^h(x)$ 覆盖了点 1、2、3、4、5 和 6, 由于每个节点被均匀覆盖 6 次, 我们得到

$$\begin{cases} u^h(x_1) = u_1 / 6 \\ u^h(x_2) = u_2 / 6 \\ u^h(x_3) = u_3 / 6 \\ u^h(x_4) = u_4 / 6 \\ u^h(x_5) = u_5 / 6 \\ u^h(x_6) = u_6 / 6 \end{cases} \quad (1)$$

同时, 节点被邻近五个节点的近似函数所覆盖 (加上自身近似函数的覆盖, 一共是 6 次均匀覆盖), 如图 2 所示, 结点 4 被自身以及结点 1、2、3、5、6 的近似函数覆盖。

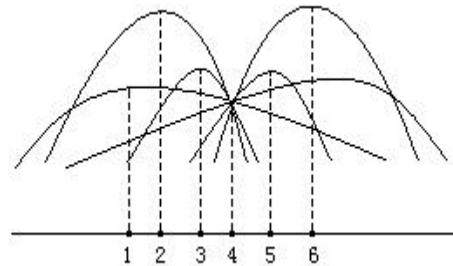


图 2 被覆盖

Fig.2 Being overlapped

均匀覆盖的实现一般需要两个步骤: 扫描、调整。第一步扫描的过程能够初步确定节点间覆盖和被覆盖的关系, 但是并没有达到均匀覆盖, 通过第二个步骤, 对没能实现均匀覆盖的节点进行再次扫描, 得到最终的覆盖方案。

设节点 x 在领域 W_x 内的近似函数 $u^h(x)$ 为

$$u^h(x) = \sum_{i=0}^m a_i \cdot p_i(x) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{p}(x) \quad (2)$$

其中 $p_i(x)$ 是基函数, m 是基函数的个数, a_i 是系数。对二维二次基 $\mathbf{p} = [1, x, y, x^2, xy, y^2]^T$, $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]^T$ 。

根据式(1)我们得到

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{u} \quad (3)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 \\ 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

式(3)实际上是 G.R.Liu 等提出的点插值法^[8]当插值节点数目为 6 时的特例。由于式(3)中矩阵 A 通常奇异, G.R.Liu 采用了节点随机扰动的办法来消除奇异性, 但是同时改变了节点位置, 改变了原先的布点方案。本文提出了分阶拟合方法来求解式(3), 消除了矩阵奇异性并且不改变布点方案。

首先采用常数项和线性基在覆盖域内六个点上对位移进行拟合。然后用二次基在一次拟合残差的基础上再次拟合, 达到使残差最小的目的。用线性基对函数 $u(x)$ 进行拟合, 也就是使拟合函数 $u^h(x)$ 在各节点处误差的平方和

$$J(a_1, a_2, a_3) = \sum_{i=1}^6 \left[\frac{u_i}{6} - \sum_{k=1}^3 a_k p_k(x_i) \right]^2 \quad (4)$$

取极小值, 即令

$$\frac{\partial J}{\partial a_k} = 0, \quad k=1,2,3 \quad (5)$$

根据式(5)可以得到求解系数 a_1, a_2, a_3 的方程:

$$A_1 \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1 \quad (6)$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & \sum_{i=1}^6 x_i & \sum_{i=1}^6 y_i \\ \sum_{i=1}^6 x_i & \sum_{i=1}^6 x_i^2 & \sum_{i=1}^6 x_i y_i \\ \sum_{i=1}^6 y_i & \sum_{i=1}^6 x_i y_i & \sum_{i=1}^6 y_i^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 u_i \\ \sum_{i=1}^6 x_i u_i \\ \sum_{i=1}^6 y_i u_i \end{bmatrix}$$

线性拟合在覆盖域各节点处的残差为:

$$\mathbf{U}_{res} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_5 & y_5 \\ 1 & x_6 & y_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

然后采用二次基通过类似的方法对残差进行拟合, 得到:

$$A_2 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2 \quad (8)$$

其中

$$A_2 = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 x_i^4 & \sum_{i=1}^6 x_i^3 y_i & \sum_{i=1}^6 x_i^2 y_i^2 \\ \sum_{i=1}^6 x_i^3 y_i & \sum_{i=1}^6 x_i^2 y_i^2 & \sum_{i=1}^6 x_i y_i^3 \\ \sum_{i=1}^6 x_i^2 y_i^2 & \sum_{i=1}^6 x_i y_i^3 & \sum_{i=1}^6 y_i^4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 & x_6^2 \\ x_1 y_1 & x_2 y_2 & x_3 y_3 & x_4 y_4 & x_5 y_5 & x_6 y_6 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & y_4^2 & y_5^2 & y_6^2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U}_{res}$$

令:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 & x_6^2 \\ x_1 y_1 & x_2 y_2 & x_3 y_3 & x_4 y_4 & x_5 y_5 & x_6 y_6 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & y_4^2 & y_5^2 & y_6^2 \end{bmatrix}$$

最终得到近似函数:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^6 \mathbf{f}_i u_i^h = \mathbf{\ddot{O}} \cdot \mathbf{u}^h \quad (9)$$

其中:

$$\mathbf{\ddot{O}} = \frac{1}{6} \mathbf{p} \cdot \begin{bmatrix} A_1^{-1} Q_1 \\ A_2^{-1} Q_2 (\mathbf{I} - Q_1^T A_1^{-1} Q_1) \end{bmatrix}$$

3 分阶拟合直接配点无网格法

下面以二维弹性静力问题为例, 给出分阶拟合直接配点无网格法的具体格式。对其它问题可类似推导。弹性静力问题的基本方程为

$$\mathbf{G}(u(x)) + \mathbf{f}(x) = 0 \quad x \in \dot{U} \quad (10a)$$

$$\mathbf{u}(x) = \bar{\mathbf{u}}(x) \quad x \in G_u \quad (10b)$$

$$\mathbf{T}(u(x)) = \bar{\mathbf{t}}(x) \quad x \in G_t \quad (10c)$$

其中 W 为求解域, G_u 为位移边界, G_t 为力边界; $u(x)$ 为待求位移场函数, $f(x)$ 、 $\bar{u}(x)$ 和 $\bar{t}(x)$ 分别为定义在域内、位移边界和力边界上的已知函数,

G 和 T 为微分算子，对平面问题有：

$$G = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial y} & l \cdot \nu \frac{\partial}{\partial y} + m \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \\ m \cdot \nu \frac{\partial}{\partial x} + l \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial y} & m \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中 l 、 m 为边界外法线的方向余弦， E 、 ν 分别为弹性模量和泊松比。求解式(10)的方法很多，目前在无网格法中主要使用 Galerkin 法和配点法。本文中采用直接配点法求解。

令平衡方程(10a)在域内节点处满足，位移边界条件(12b)在给定位移边界点处满足，力边界条件(12c)在给定位移边界点处满足，得：

$$K \cdot U = P \quad (12)$$

其中：

$$K = \begin{bmatrix} G(\ddot{O}) \\ \ddot{O} \\ T(\ddot{O}) \end{bmatrix}$$

$$U = [u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_N, v_N]^T, P = \begin{bmatrix} -f \\ \bar{u} \\ \bar{t} \end{bmatrix}$$

N 为节点总数。

4 数值算例

为了对误差进行比较和分析，这里使用了两种误差范数：位移误差范数 L_u 和应力误差范数 L_s ：

$$L_u = \sqrt{\sum_{I=0}^N (u_I^h - u_I)^T (u_I^h - u_I)} / \sqrt{\sum_{I=0}^N u_I^T u_I} \times 100\%$$

$$L_s = \sqrt{\sum_{I=0}^N (\sigma_I^h - \sigma_I)^T (\sigma_I^h - \sigma_I)} / \sqrt{\sum_{I=0}^N \sigma_I^T \sigma_I} \times 100\% \quad (13)$$

式中 u_I^h 和 σ_I^h 为节点 I 处的位移近似值和应力近似值， u_I 和 σ_I 为节点 I 处的位移精确值和应力精确值。

4.1 分片实验

在 2×2 的区域上进行分片实验。与常应变状态所对应的位移场为线性位移场，据此在区域的边界点指定位移。本文分别对均匀和非均匀两种布点方案进行了计算。

计算结果的误差为零，表明本文方法严格通过了分片实验。

4.2 悬臂梁

端部受集中载荷 P 的悬臂梁解析解见文献[7]。计算模型采用的悬臂梁参数为：长度 $L=12m$ ，高宽皆为 $D=2m$ ， $E=10000$ ， $\nu=1/3$ ，端部载荷 $P=6$ 。布点方案为 5×41 均匀布点，共 205 个点，如图 4 所示。悬臂梁左端为给定位移边界，上下表面为自由边界，右端为指定面力边界。

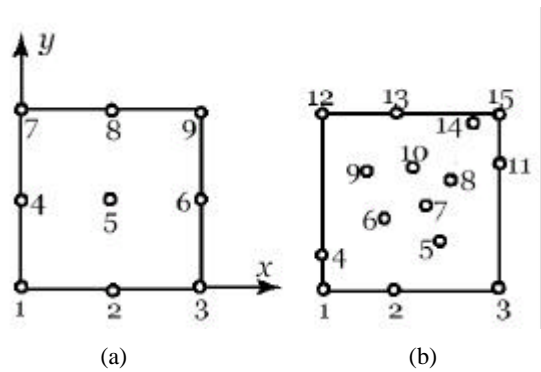


图 3 分片实验节点分布图

Fig.3 Distribution of nodes in patch test

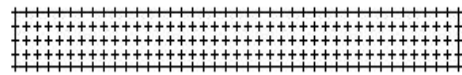


图 4 悬臂梁布点方案

Fig.4 Distribution of nodes of cantilever

表 1 给出了本文方法和 MLS 直接配点无网格方法的误差比较：

表 1 悬臂梁计算结果比较

Table 1 Comparison of the results of cantilever

方法	位移误差范数(%)	应力误差范数(%)
分阶拟合直接配点无网格法	1.166	2.894
MLS 直接配点无网格法	0.975	3.07

4.3 开孔方板

中心开孔的无限大方板在无穷远处承受水平均匀拉力 s_0 的作用，其解析解见文献[7]。坐标系原点取在圆孔中心，由于结构对称性，只取四分之一进行分析。开孔半径 $a=1.0$ ，材料参数取为 $E=1000$ ， $\nu=1/3$ 。布点方案采用 289 个点，如图 5 所示。

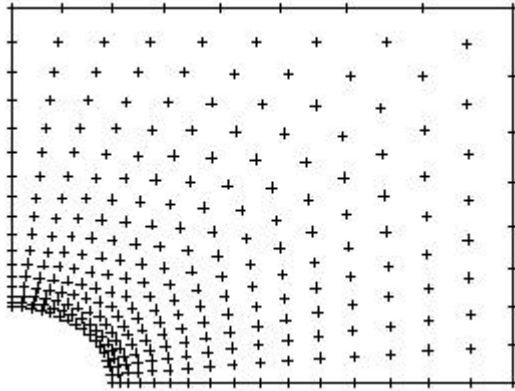


图 5 开孔板布点方案

Fig.5 Distribution of nodes of quadrate board with hole

表 2 给出了本文方法和 MLS 直接配点无网格方法的误差比较

表 2 开孔方板计算结果比较

Table 2 Comparison of the results of quadrate board with hole

方法	位移误差范数(%)	应力误差范数(%)
分阶拟合直接配点无网格法	4.01	9.238
MLS 直接配点无网格法	3.35	10.6

5 总结与讨论

本文利用子域插值结合分阶拟合给出位移近似函数,提出了分阶拟合直接配点无网格法。与 Galerkin 法相比,本方法不需要进行积分,计算量小;并且与 MLS 直接配点法等方法相比,分阶拟合避免矩阵奇异产生的困难,进一步减小了计算量并达到了相同的计算精度。

目前该方法要求均匀覆盖,需耗费较多的搜索时间。因此需要进一步改进搜索算法,提高搜索效率。

参考文献:

- [1] Belytschko T, Krongauz Y, et al. Meshless methods: An overview and recent developments[J]. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1996, 139: 3-47.
- [2] 张雄, 宋康祖, 陆明万. 无网格方法的研究进展及其应用[C]. 广州: 中国计算力学大会 2001 论文集, 2001. 112-121.
Zhang Xiong, Song Kangzu, Lu Mingwan. Research progress and application of meshless method[C]. *Guang Zhou: Colloquium of the 2001 Convention of Computational Mechanics*, 2001.112-121. (in Chinese)
- [3] Sukumar N, Moran B, et al. An element-free Galerkin method for three-dimensional fracture mechanics[J]. *Comput. Mech.*, 1997, 20:170-175.
- [4] Chen JS, Pan C, et al. A Lagrangian reproducing kernel particle method for metal forming analysis[J]. *Comput. Mech.*, 1998, 22:289-307.
- [5] Zhang Xiong, Lu Mingwan, Wegner JL. A 2D meshless model for jointed rock structures[J]. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2000, 47(10):1649-1661.
- [6] Zhang Xiong, Song Kangzu, Lu Mingwan. Meshless method based on collocation with radial basis functions[J]. *Comput. Mech.*, 2000, 26(4):333-343.
- [7] 张雄, 胡炜, 潘小飞, 陆明万. 加权最小二乘无网格法[C]. 广州: 中国计算力学大会 2001 论文集, 2001. 333-338.
Zhang Xiong, Hu Wei, Pan Xiaofei, Lu Mingwan. Weighted least-square meshless method[C]. *Guang Zhou: Colloquium of the 2001 Convention of Computational Mechanics*, 2001. 333-338. (in Chinese)
- [8] Liu GR, Gu YT. A point interpolation method for two-dimensional solids[J]. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2001, 50: 937-951.