特征解的性质

特征向量的正交性

Sturm序列

半正定矩阵的特征值问题

瑞利商

Tuesday, March 9, 2010

特征向量的正交性

$K\phi_i - \lambda_i M\phi_i = 0$ 与λ_i对应的特征向量不唯一

$\phi_i^{\mathrm{T}} M\phi_i = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ 正则振型

$K\phi_i - \lambda_i M\phi_i = 0 \Rightarrow \phi_j^{\mathrm{T}} K\phi_i - \lambda_i \phi_j^{\mathrm{T}} M\phi_i = 0$

$K\phi_j - \lambda_j M\phi_j = 0 \Rightarrow \phi_i^{\mathrm{T}} K\phi_j - \lambda_j \phi_i^{\mathrm{T}} M\phi_j = 0$

$\Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j)\phi_j^{\mathrm{T}} M\phi_i = 0 \xrightarrow{\lambda_i \neq \lambda_j} \phi_j^{\mathrm{T}} M\phi_i = 0$

$\phi_i^{\mathrm{T}} M\phi_j = \delta_{ij}$ 固有振型关于矩阵M正交归一

$\phi_i^{\mathrm{T}} K\phi_j = \lambda_j \delta_{ij}$

$\Phi^{\mathrm{T}} M\Phi = I$

$\Phi^{\mathrm{T}} K\Phi = \Lambda$

如果振型矩阵和谱矩阵中只包括系统的部分振型，则这两式是Φ为振型矩阵的必要条件，而不是充分条件。

Sturm序列

$K\phi = \lambda M\phi$

$p(\lambda) = \left|K - \lambda M\right| = \left|LDL^{\mathrm{T}}\right| = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$

$K^{(r)}\phi^{(r)} = \lambda^{(r)} M^{(r)}\phi^{(r)}$

$p^{(r)}(\lambda^{(r)}) = \left|K^{(r)} - \lambda M^{(r)}\right|$

Sturm序列：$p(\lambda), p^{(1)}(\lambda^{(1)}), \ldots, p^{(n-1)}(\lambda^{(n-1)})$组成的序列

由Sturm序列的性质可知，在K-μM的三角分解LDL^{T}中，对角阵D中负元素的个数等于$K\phi = \lambda M\phi$的小于μ的特征值的个数 — 证明见Bathe教材。

- 检验是否已经求得了某一区间的所有特征值
- 求解特征值问题

半正定矩阵的特征值问题

$\phi_i^{\mathrm{T}} K\phi_j = \lambda_j \delta_{ij}$

- 当K为正定对称矩阵时，特征值均为正实数；
- 当K为半正定对称矩阵时，其部分特征值为零，零特征值的数目等于n-r；
- 当对角质量阵存在零对角元：$m_{ii} = 0$

$K\phi = \lambda M\phi \Rightarrow M\phi = \mu K\phi \qquad \mu = \lambda^{-1}$

$\Downarrow (\infty, e_i) \qquad \Downarrow (0, e_i)$

- 某些问题中刚度阵K是奇异的

$(K - \alpha M)\phi = (\lambda - \alpha)M\phi$

移轴法

$\hat{K}\phi = \hat{\lambda} M\phi \Rightarrow (\hat{\lambda}_i, \phi_i)$

$\lambda_i = \hat{\lambda}_i + \alpha$

瑞利商

$K\phi = \lambda M\phi$

$\rho(\phi) = \lambda = \dfrac{\phi^{\mathrm{T}} K\phi}{\phi^{\mathrm{T}} M\phi}$ — 瑞利商

- 如果假设振型ϕ为第i阶主振型ϕ_i，则$\rho(\phi_i) = \lambda_i$;
- 一般假设振型ϕ不是实际模态

$\phi = \Phi a = \sum_{j=1}^{n} a_j \phi_j$

$$\rho(\phi) = \frac{a^{\mathrm{T}} \Lambda a}{a^{\mathrm{T}} a} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \lambda_j}{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} = \lambda_1 + \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j^2 (\lambda_j - \lambda_1)}{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}$$

$$\lambda_1 \le \rho(\phi) \le \lambda_n \qquad = \lambda_n + \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j^2 (\lambda_j - \lambda_n)}{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}$$

瑞利商

- 瑞利商在第1阶振型处取极小值
  - 用瑞利商估计系统的基频时，结果是实际基频的上限
  - 假设模态相当于对实际系统增加了约束，提高了系统的刚度
- 若假设模态接近于第k阶真实模态ϕ_k，即

$a_j = \varepsilon_j a_k$，$\varepsilon_j \ll 1, \ (j \neq k)$

$$\rho(\phi) = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \lambda_j}{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} = \lambda_k + \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j^2 (\lambda_j - \lambda_k)}{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} = \lambda_k + \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda_k)\varepsilon_j^2$$

瑞利商在系统的各阶主振型处取驻值！