误差估计

Tuesday, March 9, 2010

误差分析 — 标准特征值问题

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}-\lambda\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{0} \xrightarrow{\text{近似求解}} (\bar{\lambda},\bar{\boldsymbol{\phi}})$$

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda},\quad \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$$

方程残差 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{\phi}}-\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{\phi}}\neq 0$

$$=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\Lambda}-\bar{\lambda}\boldsymbol{I})\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\bar{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\Lambda}-\bar{\lambda}\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}$$

$$\|\bar{\boldsymbol{\phi}}\|_2=1$$

向量范数 $\|\bar{\boldsymbol{\phi}}\|_2=\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\Lambda}-\bar{\lambda}\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}\|_2$

$$\|\boldsymbol{\Phi}\|_2=\max_{\substack{\boldsymbol{x}\in R^n\\ \boldsymbol{x}\neq 0}}\frac{\|\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}=1$$

$$1\le\|(\boldsymbol{\Lambda}-\bar{\lambda}\boldsymbol{I})^{-1}\|_2\,\|\boldsymbol{r}\|_2$$

$$\|(\boldsymbol{\Lambda}-\bar{\lambda}\boldsymbol{I})^{-1}\|_2=\max_i\frac{1}{|\lambda_i-\bar{\lambda}|}$$

$$\min_i|\lambda_i-\bar{\lambda}|\le\|r\|_2$$

接近于那一阶特征值？

Sturm序列的性质

误差分析 — 广义特征值问题

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}=\lambda\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}$$

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{S}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}=\lambda\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}$$

$$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{S}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}=\lambda\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}$$

$$\tilde{\boldsymbol{K}}\tilde{\boldsymbol{\phi}}=\lambda\tilde{\boldsymbol{\phi}}\qquad \tilde{\boldsymbol{K}}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{S}^{-\mathrm{T}},\quad \tilde{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}$$

$$\boldsymbol{r}=\tilde{\boldsymbol{K}}\bar{\tilde{\boldsymbol{\phi}}}-\bar{\lambda}\bar{\tilde{\boldsymbol{\phi}}}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{S}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\phi}}-\bar{\lambda}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{r}_M$$

$$\boldsymbol{r}_M=\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{\phi}}-\bar{\lambda}\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\min_i|\lambda_i-\bar{\lambda}|\le\|S^{-1}r_M\|_2$$