自由界面模态综合法

Tuesday, April 13, 2010

自由界面模态综合法

- 子结构的交界面自由
- 子结构模态分析时阶数高
- 总体系统方程阶数低（无界面自由度）

子结构模态分析

自由界面子结构s的自由振动方程

$$\boldsymbol{M}^{(s)}\ddot{\boldsymbol{a}}^{(s)}+\boldsymbol{K}^{(s)}\boldsymbol{a}^{(s)}=0 \Rightarrow \boldsymbol{\Lambda}^{(s)},\boldsymbol{\Phi}^{(s)}$$

模态展开

$$\boldsymbol{a}^{(s)}=\boldsymbol{\Phi}^{(s)}\boldsymbol{x}^{(s)}$$

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}_i^{(s)}\\ \boldsymbol{a}_b^{(s)}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_i^{(s)}\\ \boldsymbol{\Phi}_b^{(s)}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}^{(s)}$$

子结构s的自由振动方程

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{ii}^{(s)} & \boldsymbol{M}_{ib}^{(s)}\\ \boldsymbol{M}_{bi}^{(s)} & \boldsymbol{M}_{bb}^{(s)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\boldsymbol{a}}_i^{(s)}\\ \ddot{\boldsymbol{a}}_b^{(s)}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{ii}^{(s)} & \boldsymbol{K}_{ib}^{(s)}\\ \boldsymbol{K}_{bi}^{(s)} & \boldsymbol{K}_{bb}^{(s)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}_i^{(s)}\\ \boldsymbol{a}_b^{(s)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ \boldsymbol{R}_b^{(s)}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{R}^{(s)}$$

$$\boldsymbol{M}^{(s)}\ddot{\boldsymbol{a}}^{(s)}+\boldsymbol{K}^{(s)}\boldsymbol{a}^{(s)}=\boldsymbol{R}^{(s)}$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}}^{(s)}+\boldsymbol{\Lambda}^{(s)}\boldsymbol{x}^{(s)}=\boldsymbol{\Phi}^{(s)T}\boldsymbol{R}^{(s)}$$

对界面协调条件

$$\boldsymbol{a}_b^{(1)}=\boldsymbol{a}_b^{(2)} \Leftarrow \begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}_i^{(s)}\\ \boldsymbol{a}_b^{(s)}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_i^{(s)}\\ \boldsymbol{\Phi}_b^{(s)}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}^{(s)}$$

要求子结构1所取的主模态数大于界面自由度数

$$\boldsymbol{\Phi}_b^{(1)}\boldsymbol{x}^{(1)}=\boldsymbol{\Phi}_b^{(2)}\boldsymbol{x}^{(2)} \Leftarrow \boldsymbol{\Phi}_b^{(1)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{bb}^{(1)} & \boldsymbol{\Phi}_{br}^{(1)}\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}_b^{(1)}\\ \boldsymbol{x}_r^{(1)}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{bb}^{(1)} & \boldsymbol{\Phi}_{br}^{(1)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}_b^{(1)}\\ \boldsymbol{x}_r^{(1)}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{\Phi}_b^{(2)}\boldsymbol{x}^{(2)}$$

$n_b^{(1)}$阶非奇异对接模态方阵

$$\boldsymbol{x}_b^{(1)}=-\left(\boldsymbol{\Phi}_{bb}^{(1)}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}_{br}^{(1)}\boldsymbol{x}_r^{(1)}+\left(\boldsymbol{\Phi}_{bb}^{(1)}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}_b^{(2)}\boldsymbol{x}^{(2)}$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}^{(1)}\\ \boldsymbol{x}^{(2)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}_b^{(1)}\\ \boldsymbol{x}_r^{(1)}\\ \boldsymbol{x}^{(2)}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-\left(\boldsymbol{\Phi}_{bb}^{(1)}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}_{br}^{(1)} & \left(\boldsymbol{\Phi}_{bb}^{(1)}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}_b^{(2)}\\ \boldsymbol{I}_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_r^{(1)}\\ \boldsymbol{x}^{(2)}\end{bmatrix}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}_r^{(1)}\\ \boldsymbol{x}^{(2)}\end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{I}_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}_2\end{bmatrix} \qquad \begin{aligned}\boldsymbol{A}&=-\left(\boldsymbol{\Phi}_{bb}^{(1)}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}_{br}^{(1)}\\ \boldsymbol{B}&=\left(\boldsymbol{\Phi}_{bb}^{(1)}\right)^{-1}\boldsymbol{\Phi}_b^{(2)}\end{aligned}$$

综合子结构

$$\ddot{\boldsymbol{x}}^{(1)}+\boldsymbol{\Lambda}^{(1)}\boldsymbol{x}^{(1)}=\boldsymbol{\Phi}^{(1)T}\boldsymbol{R}^{(1)} \qquad \boldsymbol{x}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}^{(1)}\\ \boldsymbol{x}^{(2)}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{R}_b^{(1)}+\boldsymbol{R}_b^{(2)}=0$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}}^{(2)}+\boldsymbol{\Lambda}^{(2)}\boldsymbol{x}^{(2)}=\boldsymbol{\Phi}^{(2)T}\boldsymbol{R}^{(2)}$$

$$\begin{Bmatrix}\ddot{\boldsymbol{x}}^{(1)}\\ \ddot{\boldsymbol{x}}^{(2)}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Lambda}^{(1)} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\Lambda}^{(2)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}^{(1)}\\ \boldsymbol{x}^{(2)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_b^{(1)T}\boldsymbol{R}_b^{(1)}\\ \boldsymbol{\Phi}_b^{(2)T}\boldsymbol{R}_b^{(2)}\end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{y}=0 \Rightarrow \boldsymbol{y}$$

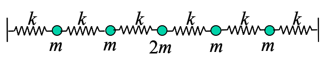
$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{T}^T\,\mathrm{diag}(\boldsymbol{\Lambda}^{(1)},\boldsymbol{\Lambda}^{(2)})\boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{a}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}^{(1)}\\ \boldsymbol{a}^{(2)}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}^{(1)} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\Phi}^{(2)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}^{(1)}\\ \boldsymbol{x}^{(2)}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}^{(1)} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\Phi}^{(2)}\end{bmatrix}\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$$

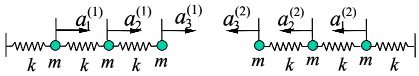
例4-2

用自由界面模态综合法确定图示系统的前3阶固有频率。



例4-2

将此系统左右等分为两个子结构



$$\boldsymbol{K}^{(1)}=k\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}^{(1)}=m\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}^{(1)}=\begin{Bmatrix}a_1^{(1)}\\a_2^{(1)}\\a_3^{(1)}\end{Bmatrix}$$

取前两阶模态参加综合

$$\boldsymbol{\Phi}^{(1)}=\begin{bmatrix}0.328&0.737\\0.591&0.328\\ \hdashline 0.737&-0.591\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}^{(1)}=\begin{bmatrix}0.198&0\\0&1.555\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=[x_b^{(1)}\quad x_r^{(1)}]^T$$

例4-2

利用结构的对称性：

$$\boldsymbol{a}^{(2)}=\begin{bmatrix}a_1^{(2)}&a_2^{(2)}&a_3^{(2)}\end{bmatrix}^T,\quad \boldsymbol{K}^{(2)}=\boldsymbol{K}^{(1)},\quad \boldsymbol{M}^{(2)}=\boldsymbol{M}^{(1)}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{(2)}=\boldsymbol{\Phi}^{(1)},\quad \boldsymbol{\Lambda}^{(2)}=\boldsymbol{\Lambda}^{(1)}\qquad \boldsymbol{x}^{(2)}=[x_b^{(2)}\quad x_r^{(2)}]^T$$

两个子结构的连续条件

$$a_3^{(1)}=-a_3^{(2)}\qquad \boldsymbol{\Phi}_b^{(1)}\boldsymbol{x}^{(1)}=-\boldsymbol{\Phi}_b^{(2)}\boldsymbol{x}^{(2)}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_b^{(1)}=\boldsymbol{\Phi}_b^{(2)}=\begin{bmatrix}0.737&-0.591\end{bmatrix}$$

$$x_b^{(1)}=\frac{0.591}{0.737}x_r^{(1)}-\frac{1}{0.737}\boldsymbol{\Phi}_b^{(2)}\boldsymbol{x}^{(2)}$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_b^{(1)}\\x_r^{(1)}\\x_b^{(2)}\\x_r^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.802&-1&0.802\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_r^{(1)}\\x_b^{(2)}\\x_r^{(2)}\end{bmatrix}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{y}$$

例4-2

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{y}=0$$

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1.643&-0.802&0.643\\-0.802&2&-0.802\\0.643&-0.802&1.643\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{T}^T\,\mathrm{diag}(\boldsymbol{\Lambda}^{(1)},\boldsymbol{\Lambda}^{(2)})\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1.682&-0.1588&0.1274\\-0.1588&0.396&-0.1588\\0.1274&-0.1588&1.682\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=0.198\qquad \lambda_2=1.0238\qquad \lambda_3=1.555$$

$$\lambda_{1o}=0.198\qquad \lambda_{2o}=1.0\qquad \lambda_{3o}=1.555$$

讨论

- 不需建立与物理坐标相对应的结构总刚度阵和总质量阵
- 平行地研究各子结构
- 可借助于实验获得子结构模态
- 需合理刨分子结构并确定参加综合的模态数
- 固定界面法：易于程序实现（超级单元）；界面自由度出现在最终方程中；不宜由试验确定模态
- 自由界面法：编程复杂；最终方程中无界面自由度；便于由试验获取模态