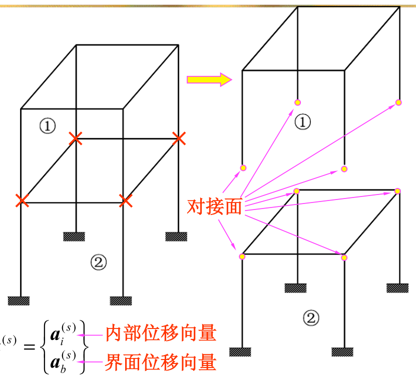
静力凝聚和静力子结构法

基本思想



$$\boldsymbol{a}^{(s)}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}_i^{(s)}\\ \boldsymbol{a}_b^{(s)}\end{Bmatrix}\begin{matrix}\text{内部位移向量}\\ \text{界面位移向量}\end{matrix}$$

静力凝聚和静力子结构法

$$\boldsymbol{a}^{(s)}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}_i^{(s)}\\ \boldsymbol{a}_b^{(s)}\end{Bmatrix}\qquad \boldsymbol{Q}^{(s)}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{Q}_i^{(s)}\\ \boldsymbol{Q}_b^{(s)}\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{R}^{(s)}=\begin{Bmatrix}0\\ \boldsymbol{R}_b^{(s)}\end{Bmatrix}$$

子结构s的平衡方程

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{ii}^{(s)} & \boldsymbol{K}_{ib}^{(s)}\\ \boldsymbol{K}_{bi}^{(s)} & \boldsymbol{K}_{bb}^{(s)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}_i^{(s)}\\ \boldsymbol{a}_b^{(s)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{Q}_i^{(s)}\\ \boldsymbol{Q}_b^{(s)}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ \boldsymbol{R}_b^{(s)}\end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{ii}^{(s)}\boldsymbol{a}_i^{(s)}+\boldsymbol{K}_{ib}^{(s)}\boldsymbol{a}_b^{(s)}=\boldsymbol{Q}_i^{(s)}\Rightarrow \boldsymbol{a}_i^{(s)}=\boxed{\boldsymbol{K}_{ii}^{(s)-1}\boldsymbol{Q}_i^{(s)}}-\boxed{\boldsymbol{K}_{ii}^{(s)-1}\boldsymbol{K}_{ib}^{(s)}\boldsymbol{a}_b^{(s)}}$$

$$\boldsymbol{K}_{bi}^{(s)}\boldsymbol{a}_i^{(s)}+\boldsymbol{K}_{bb}^{(s)}\boldsymbol{a}_b^{(s)}=\boldsymbol{Q}_b^{(s)}+\boldsymbol{R}_b^{(s)}$$

$$\Downarrow$$

$$[\boldsymbol{K}_{bb}^{(s)}-\boldsymbol{K}_{bi}^{(s)}\boldsymbol{K}_{ii}^{(s)-1}\boldsymbol{K}_{ib}^{(s)}]\boldsymbol{a}_b^{(s)}=\boldsymbol{Q}_b^{(s)}-\boldsymbol{K}_{bi}^{(s)}\boldsymbol{K}_{ii}^{(s)-1}\boldsymbol{Q}_i^{(s)}+\boldsymbol{R}_b^{(s)}$$

静力凝聚和静力子结构法

$$\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{(s)}\boldsymbol{a}_b^{(s)}=\bar{\boldsymbol{Q}}_b^{(s)}+\boldsymbol{R}_b^{(s)}$$

$$\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{(s)}=\boldsymbol{K}_{bb}^{(s)}-\boldsymbol{K}_{bi}^{(s)}\boldsymbol{K}_{ii}^{(s)-1}\boldsymbol{K}_{ib}^{(s)}$$

$$\bar{\boldsymbol{Q}}_b^{(s)}=\boldsymbol{Q}_b^{(s)}-\boldsymbol{K}_{bi}^{(s)}\boldsymbol{K}_{ii}^{(s)-1}\boldsymbol{Q}_i^{(s)}$$

两个子结构对接

$$\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{(1)}\boldsymbol{a}_b^{(1)}=\bar{\boldsymbol{Q}}_b^{(1)}+\boldsymbol{R}_b^{(1)}$$

$$\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{(2)}\boldsymbol{a}_b^{(2)}=\bar{\boldsymbol{Q}}_b^{(2)}+\boldsymbol{R}_b^{(2)}$$

$$\Rightarrow (\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{(1)}+\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{(2)})\boldsymbol{a}_b=\bar{\boldsymbol{Q}}_b^{(1)}+\bar{\boldsymbol{Q}}_b^{(2)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{a}_b$$

对接条件：

$$\boldsymbol{a}_b^{(1)}=\boldsymbol{a}_b^{(2)}=\boldsymbol{a}_b$$

$$\boldsymbol{R}_b^{(1)}+\boldsymbol{R}_b^{(2)}=0$$

$$\boldsymbol{a}_i^{(s)}=\boldsymbol{K}_{ii}^{(s)-1}\boldsymbol{Q}_i^{(s)}-\boldsymbol{K}_{ii}^{(s)-1}\boldsymbol{K}_{ib}^{(s)}\boldsymbol{a}_b^{(s)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{a}_i^{(1)},\ \boldsymbol{a}_i^{(2)}$$

$$\boldsymbol{a}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}_i^{(1)}\\ \boldsymbol{a}_i^{(2)}\\ \boldsymbol{a}_b\end{Bmatrix}$$

基本过程

- 分割总系统
- 子结构分析：界面自由度、内部自由度
- 静力凝聚：消除内部自由度
- 综合：界面协调条件
- 再现子结构

讨论

- 尽量割断较少的联系：减少界面自由度数
- 重复子结构
- 超级单元 $\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{(s)}\boldsymbol{a}_b^{(s)}=\bar{\boldsymbol{Q}}_b^{(s)}+\boldsymbol{R}_b^{(s)}\Leftrightarrow \boldsymbol{K}^e\boldsymbol{a}^e=\boldsymbol{P}^e$
- 单元内部自由度
- 质量缩减

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{11} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\boldsymbol{a}}_1\\ \ddot{\boldsymbol{a}}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12}\\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\end{Bmatrix}=0$$

$$\boldsymbol{a}_2=-\boldsymbol{K}_{22}^{-1}\boldsymbol{K}_{21}\boldsymbol{a}_1\Rightarrow \boldsymbol{a}_2$$

$$\boldsymbol{M}_{11}\ddot{\boldsymbol{a}}_1+[\boldsymbol{K}_{11}-\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{K}_{22}^{-1}\boldsymbol{K}_{21}]\boldsymbol{a}_1=0\Rightarrow \boldsymbol{a}_1$$

减缩了自由度的自由振动方程