

---

板壳问题的三维无网格伽辽金  
直接分析法  
3D Element Free Galerkin Method Direct Approach  
for Analysis of Plate and Shell

(申请清华大学工学硕士学位论文)

院(系、所): 清华大学工程力学系  
专    业 : 力学  
研    究    生 : 张  伟  
指    导    教    师 : 张  雄  教  授

二零零四年六月

---

板壳问题的三维无网格伽辽金直接分析法

请将中文封面左边沿涂上胶水后对齐此基线粘贴，注意封面应将基线刚好盖住

张伟

---

## 关于论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文的复印件，允许该论文被查阅和借阅；学校可以公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存该论文。

**(涉密的学位论文在解密后应遵守此规定)**

签 名： \_\_\_\_\_ 导师签名： \_\_\_\_\_ 日 期： \_\_\_\_\_

## 摘 要

近年来，无网格法得到了迅速发展，受到了国际计算力学界的高度重视。不同于有限元法，无网格方法的近似函数是建立在一系列离散点上的，不需要借助网格，克服了有限元法对于网格的依赖性。

对于板壳问题，共有三种数值模拟方案：线性或非线性的板壳理论、退化连续体方案和直接三维连续体方案。Kirchhoff-Love 板壳理论适用于薄板壳，但需要构造  $C_1$  连续的形函数在二维问题中相当繁琐，而无网格法的近似函数可以很容易构造出  $C_1$  甚至更高连续性的近似函数，因此适于处理 Kirchhoff 板壳问题。Mindlin-Reissner 理论考虑了剪切的影响，可用于中厚板壳。但当板壳变得很薄的时候，会遇到锁死的困扰。无网格法也会遇到同样的问题，它一般用提高移动最小二乘基函数的阶次（四次完全基或者双三次基）或者加大计算点支撑域大小来减弱或者试图消除锁死，而这将大幅度增加计算费用。另一种处理 Mindlin 板壳数值锁死的方法称作匹配近似函数法，但也存在一些缺陷。对比之下，三维连续体方案是最简单，最精确但并不常用的一种方案。有限单元法的自身问题限制了它在板壳方面的应用。由于无网格法近似函数具有高度光滑性，在板壳的厚度方向仅布置 2~5 层点就可以很好的捕捉此方向场的梯度，因此弥补了有限单元法的一些限制。同时还可以在一定的参数范围内避免剪切和体积锁死，在可以同时计算厚薄板壳，处理复杂本构关系、非线性板壳等问题中更是优于板壳理论。

笔者在二维配点法，最小二乘法，无网格伽辽金法程序的基础上编制了三维程序，并选用无网格伽辽金法 (EFG) 和三维连续体方案分析了线性板壳问题，跟板壳理论的结果作了对比。并跟有限单元法在精度上，使用方便程度上，对数值锁死的免疫力等方面作了对比。通过这些研究总结了 EFG 和三维连续体方案在处理板壳时的优势和适用范围。

**关键词：**无网格伽辽金法，板壳，三维连续体方案，数值锁死

## Abstract

Recently, so called meshfree methods developed quickly, and have been paid much attention in international computational field. The approximation function of Meshfree method is built on a series of points, independent on mesh like traditional finite element method, so overcome this drawback of the latter method..

There are three approaches in numerical simulation of plate and shell structures, plate and shell theory approach, degenerated continuum approach, and direct three-dimensional (3D) continuum approach. Kirchhoff- Love are suitable for thin plate and shell. But it is hard to construct  $C_1$  continuous approximation function when applying in two or high dimensional problem - just like plate and shell. Since meshfree method could easily construct  $C_1$  or even higher continuity approximation function, it are widely used in Kirchhoff plate and shell. Mindlin – Reissner shell theory consider the influence of shear stress, so could analyze thick shell. Unfortunately, when shell turns into extremely thin, numerical locking arises. When meshfree method applying in Mindlin theory, it also meet the same dilemma. Some one enhanced the order of basis function (Quartic or Bi-cubic) in MLS to alleviate or to eliminate numerical locking, but it also increase computational expense in the same time. Another method to eliminating numerical locking is so called “match of approximation functions”, but it is not perfect neither. Among these three approaches, direct 3D continuum approach is the simplest and most accurate one in principle. However, it is the least popular one in practice because of innate drawbacks of FEM. Because of the high order of continuity of approximation functions, meshfree method could deploy only 2~5 layers of particles to capture the field gradient in the thickness direction, and at the same time, it also could alleviate locking in some ranges of factors. Compared with shell theory, this approach shows great advantages when treating with materials with complicated constitutive law, and nonlinear shell.

In this paper, the author upgraded the program of collocation, WLSM, EFG from 2D to 3D. Element free Galerkin method and direct 3D continuum approach are

employed to analyze the problems of linear plate and shell, and numerical results are compared with results computed by shell theory. And we compared our method with finite element method in precision, convenience, and the ability of immunity to numerical locking. Through those researches, we got the advantage, some drawbacks of 3D EFG direct analysis for beam and shell.

**Key words:** Element free Galerkin method, Plate and shell, Direct three-dimensional continuum approach, Numerical locking

## 目 录

摘要 .....	I
Abstract (英文摘要) .....	II
目 录 .....	IV
第一章 引言 .....	1
1.1 理论背景 .....	1
1.2 无网格法的基本原理 .....	2
1.2.1 无网格法的近似函数 .....	2
1.2.2 无网格法的离散原理—加权残量法 .....	8
1.2.3 现有比较成熟的无网格法 .....	10
1.3 梁、板壳问题的数值模拟方案 .....	12
1.3.1 板壳问题的数值模拟方案 .....	12
1.3.2 无网格法处理梁、板壳问题的一些探讨 .....	15
第二章 面向对象的无网格法程序设计 .....	24
2.1 引言 .....	24
2.2 OMLL程序介绍 .....	24
2.3 实现三维MLS近似的类介绍 .....	26
2.3.1 近似函数基类Approximation .....	26
2.3.2 权函数Weight .....	30
2.3.3 移动最小二乘近似类MLSBasis .....	31
第三章 三维无网格伽辽金法的讨论 .....	34
3.1 引言 .....	34
3.2 移动最小二乘近似 (MLS) 的进一步讨论 .....	34
3.2.1 移动最小二乘近似 (MLS) 的连续性与一致性 .....	34
3.2.2 移动最小二乘近似 (MLS) 的数值应用: 曲面拟合 .....	35
3.3 三种无网格法 (三维) 的对比研究 .....	38

---

3.3.1 三维分片实验 .....	38
3.3.2 单拉问题 .....	40
3.4 本章小结 .....	43
<b>第四章 板壳问题的三维无网格伽辽金直接分析法 .....</b>	<b>44</b>
4.1 EFG直接分析法与板壳理论对比 .....	44
4.1.1 薄板壳和厚板壳 .....	44
4.1.2 具有复杂本构关系的板壳 .....	46
4.1.3 小结 .....	47
4.2 EFG直接分析法和有限单元直接分析法对比 .....	47
4.2.1 EFG法与有限单元法前处理对比 .....	47
4.2.2 EFG与有限单元法精度对比 .....	50
4.2.3 EFG与有限元法对数值锁死的免疫力对比 .....	53
4.2.4 小结 .....	54
<b>结 论 .....</b>	<b>55</b>
<b>参考文献 .....</b>	<b>56</b>
<b>致谢、声明 .....</b>	<b>59</b>
<b>个人简历、在学期间的研究成果及发表的学术论文 .....</b>	<b>60</b>

## 第一章 引言

### 1.1 理论背景

近年来，对建立大型、轻重量的板壳及空间结构的需求逐渐增大，例如汽车中的金属薄板，飞机的机舱、机翼和风向舵，能量池，展览厅的圆形屋顶，充气膨胀的空间结构等。总体上而言，梁、板壳结构的数值模拟有三种方案：线性或非线性的板壳理论、退化连续体或者称作基于连续体的方案和直接三维连续体方案。前两种属于结构单元，后一种在有限单元法中应用较少。

自 1994 年美国西北大学的 T. Beletshko<sup>[1]</sup>教授提出无网格伽辽金法 (EFG) 以来，无网格法(mesh-free method)受到计算力学界的高度重视。无网格法的提出避免了复杂繁琐的三维结构网格划分，同时在特大变形（如加工成型、高速碰撞、流固耦合）奇异性或裂纹动态扩展等问题中占有优势。但后来人们发现，利用它近似函数光滑性好的特点可以处理各种  $C_1$  问题，当然也包括 Kirchhoff 薄板理论应用中的难题。用于 Mindlin 板壳单元时，它能通过直观的方案来减轻或消除数值锁死的困扰。

结构单元在有限单元法中得到了更大的发展，这是因为连续体单元模拟梁，壳构件需要大量的单元，从而导致非常昂贵的费用。采用六面体单元模拟一根梁沿厚度也需要五个单元 (T.Beletshko<sup>[35]</sup>)，此外，用连续体单元模拟薄壁结构常常导致较高的宽厚比，从而降低了方程的适应条件和解答的精度。美国 Berkley 大学的 Shaofan L<sup>[36]</sup>利用发现如果利用 RKPM 窗函数构造近似函数，可以成功地利用三维连续体理论处理非线性板壳问题。

诸多的研究给了我们一个提示，无网格法具有一些独特的优点，利用这些优点和三维连续体离散结合，我们可以探讨一些梁、板壳结构单元难以实现的问题，同时也可以与有限单元法做对比。

## 1.2 无网格法的基本原理

无网格法的近似函数主要有：核函数近似、重构核近似、移动最小二乘近似（MLS）、单位分解函数、径向基函数（RBF）等。根据加权残量法选用不同的权函数可以得到不同的离散方案，主要包括 Galerkin 法、配点法、局部 Petrov-Galerkin 法、最小二乘配点法和加权最小二乘法等。选择不同的近似方案配合不同的离散方案就得到了各种不同的无网格方法。

现在应用比较广泛的无网格法有很多种。1977 年 Lucy 和 Gingold 等分别提出的光滑质点流体动力学方法 (smoothed Particle Hydrodynamics, 简称 SPH)<sup>[2][3]</sup> 是最早的无网格法, 它是基于配点性质的。之后, Belytschko 等提出了无单元的 Galerkin 法 (The Element-free Galerkin Method, 简称 EFG)<sup>[1]</sup>。WK Liu 等根据积分变换的思想, 基于 Galerkin 法提出了重构核点法 (Reproducing Kernel Particle Method, 简记为 RKPM)<sup>[4]</sup>。Oden 等利用移动最小二乘法建立单位分解函数, 由此构造权函数和试函数, 再通过 Galerkin 法建立离散格式, 提出了 Hp 云团 (Clouds) 法<sup>[5]</sup>; Atluri 等提出了局部边界积分方程法 (Local boundary integral equation method, 简称 LBIE)<sup>[6]</sup> 和无网格局部 Petrov-Galerkin 法 (Methods Local Petrov-Galerkin Method, 简称 MLPG)<sup>[7]</sup>。距离基函数 (Radial Basis Functions, 简称 RBF) 具有形式简单, 各项同性等优点, 张雄等将距离函数应用于配点法中, 建立了相应的无网格法<sup>[8][9]</sup>。B. Jumarhon 等把 RBF 用于 Hermite 配点法解决了系数矩阵的对称性和奇异性问题<sup>[10]</sup>。

### 1.2.1 无网格法的近似函数

目前在无网格法中使用的近似函数主要有：核函数近似、重构核近似、最小二乘近似、单位分解函数和径向基函数等。

#### (1) 核函数近似

考虑函数  $u(x)$ , 利用核函数进行近似如下:

$$u^h(x) = \int_{\Omega} w(\|x-y\|, h) \cdot u(y) d\Omega_y \quad (1-1)$$

其中  $w(\|x-y\|, h)$  为核函数,  $h$  是紧支域尺寸的一个度量。

核函数必须满足以下条件:

- (1)  $w(\|x-y\|, h) > 0$ , 当  $y$  在  $x$  对应的子域内
- (2)  $w(\|x-y\|, h) = 0$ , 当  $y$  在  $x$  对应的子域外
- (3)  $\int_{\Omega} w(\|x-y\|, h) d\Omega = 1$
- (4)  $w(s, h)$  是关于  $s$  的单调递减函数
- (5) 当  $h \rightarrow 0$  时,  $w(s, h) \rightarrow \delta(s)$

其中条件(2)是最为关键的条件, 它使得近似具有局部意义, 即  $u^h(x)$  仅仅取决于那些紧支子域包含  $x$  的节点。通常使用的权函数是指数型函数和样条函数, 它们的紧支域为圆形或球形(三维)。

对于近似计算, 必须建立相应的离散形式。一旦我们选取了一种积分离散的方案, 则有

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^{n_N} \Phi_I(x) \cdot u_I \quad (1-2)$$

$$\Phi_I(x) = w(\|x-y\|) \cdot \Delta v_I \quad (1-3)$$

其中  $\Phi_I$  为形函数。一般说来, 这里的形函数不是插值函数。

## (2) 移动最小二乘近似 (MLS)

函数  $u(x)$  在求解区域  $\Omega$  内的近似函数  $u^h(x)$  为

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) \cdot a_i(x) = p^T(x) a(x) \quad (1-4)$$

其中  $p_i(x)$  是基函数,  $m$  是基函数的个数,  $a_i(x)$  是相应的系数。基函数通常使用单项式, 也可使用其它函数, 如三角函数, 奇异函数等。对于二维二次基有  $p = [1, x, y, x^2, xy, y^2]^T$ ,  $a = [a_1(x), a_2(x), \dots, a_6(x)]^T$ 。

式(1-4)中的系数根据加权最小二乘法来确定, 即要求对函数  $u(x)$  的近似在各点的误差的加权平方和

$$J = \sum_{I=1}^N w_I(x) [u^h(x_I) - u(x_I)]^2 = \sum_{I=1}^N w_I(x) \cdot \left[ \sum_{i=1}^m p_i(x) \cdot a_i(x) - u_I \right]^2 \quad (1-5)$$

取最小值。其中,  $u_I = u(x_I)$  是函数  $u(x)$  在节点  $x_I$  对应的权函数, 并且它是以  $x_I$  为中心的紧支函数。权函数有很多种取法, 如高斯型权函数, 即

$$w_l(\bar{r}) = \frac{e^{-\bar{r}^2\beta^2} - e^{-\beta^2}}{1 - e^{-\beta^2}}, \quad \bar{r} \leq 1 \quad (1-6)$$

其中,  $\bar{r} = r/r_{ml}$ ,  $r_{ml}$  为权函数支撑域的半径,  $\beta$  为常数。

除此之外, 权函数还可以采用样条函数, 如:

三次样条函数:

$$w(\bar{s}) = \begin{cases} 2/3 - 4\bar{s}^2 + 4\bar{s}^3 & \bar{s} \leq 1/2 \\ 4/3 - 4\bar{s} + 4\bar{s}^2 - 4\bar{s}^3/3 & 1/2 \leq \bar{s} \leq 1 \\ 0 & \bar{s} > 1 \end{cases} \quad (1-7)$$

四次样条函数:

$$w(\bar{s}) = \begin{cases} 1 - 6\bar{s}^2 + 8\bar{s}^3 - 3\bar{s}^4 & \bar{s} \leq 1 \\ 0 & \bar{s} > 1 \end{cases} \quad (1-8)$$

很容易验证, 四次样条形式简洁且具有  $C_2$  的连续性, 所以从后面的讨论可以看到, 它在处理板问题中得到青睐。

$w_i(x - x_i)$  是空间坐标的函数, 因此在插值时, 由于每个插值点位置的不同, 权函数形式也不同, 这样在每点都需要计算  $J$ , 即每个插值点的插值函数都不同, 故称插值函数是移动的。这样的好处是对每一个插值点都可以令权函数在其上取最大值, 提高计算精度。

式 (1-5) 可以写成矩阵的形式

$$J = (Pa - u)^T W(x)(Pa - u) \quad (1-9)$$

这里,

$$u^T = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (1-10)$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_n) & p_2(x_n) & \cdots & p_m(x_n) \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

$$W(x) = \begin{bmatrix} w(x-x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w(x-x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w(x-x_n) \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

为了求得系数  $a(x)$ ，对  $J$  取极小值，可得

$$\frac{\partial J}{\partial a} = A(x)a(x) - B(x) = 0 \quad (1-13)$$

$$A = P^T W(x) P, \quad B = P^T W(x) \quad (1-14)$$

从式 (1-13) 可以得到

$$a(x) = A^{-1}(x) B(x) u \quad (1-15)$$

代入式(1-4)可以得到  $u(x)$  的近似函数为

$$a(x) = A^{-1}(x) B(x) u \quad (1-16)$$

其中形函数为：

$$\phi^k = [\phi_1^k(x) \quad \cdots \quad \phi_n^k(x)] = p^T(x) A^{-1}(x) B(x) \quad (1-17)$$

式 (1-16) 即为 MLS 近似表达式。由于权函数具有紧支性，因此对于任一点  $\mathbf{x}$ ，以上各式的计算只需对  $\mathbf{x}$  点的定义域内的节点（权函数  $w_l(x)$  在  $\mathbf{x}$  处不为零的那些节点  $\mathbf{x}_l$ ）进行。由于在计算系数时涉及系数矩阵  $A$  的求逆，因此必须保证在所有计算点处矩阵  $A$  都为非奇异的。矩阵  $A$  非奇异的必要条件是  $x$  邻域内的节点数必须大于基函数  $p_i(x)$  的个数  $m$ 。

为了计算形函数的导数，可以将式(1-17)改写成为

$$\phi(x)^T = r^T(x) B(x) \quad (1-18)$$

式中，

$$r^T(x) = p(x)^T \cdot A^{-1}(x), \quad \text{即 } Ar = p \quad (1-19)$$

由式(1-18)可以得到形函数的导数为

$$\phi_{,j}^T = r_{,j}^T \cdot B + r^T \cdot B_{,i}, \quad \phi_{,ij}^T = r_{,ij}^T \cdot B + r_{,j}^T \cdot B_{,i} + r^T \cdot B_{,ij} \quad (1-20)$$

其中  $r$  的导数可由式(1-19)得到

$$r_{,j} = A^{-1}(p_{,i} - A_{,i}r), \quad r_{,ij} = A^{-1}(p_{,ij} - A_{,i}r_{,j} - A_{,j}r_{,i} - A_{,ij}r) \quad (1-21)$$

使用同样的方法, 求得的形函数的三次导数形式为:

$$\phi_{,ijk} = r_{,ijk}B + r_{,ij}B_{,k} + r_{,jk}B_{,i} + r_{,i}B_{,jk} + r_{,j}B_{,ik} + r_{,k}B_{,ij} + rB_{,ijk} \quad (1-22)$$

其中  $r$  的偏导数

$$r_{,i} = A^{-1}(P_{,i} - A_{,i}r) \quad (1-23)$$

$$r_{,ij} = A^{-1}[P_{,ij} - (A_{,i}r_{,j} + A_{,j}r_{,i} + A_{,ij}r)] \quad (1-24)$$

$$r_{,ijk} = A^{-1}[P_{,ijk} - (A_{,i}r_{,jk} + A_{,j}r_{,ik} + A_{,k}r_{,ij} + A_{,ij}r_{,k} + A_{,ik}r_{,j} + A_{,jk}r_{,i} + A_{,ijk}r)] \quad (1-25)$$

从上面的表达式可以看出  $\phi_{,j,xyy}$ ,  $\phi_{,j,xyy}$ ,  $\phi_{,j,yyy}$ ,  $\phi_{,j,xxx}$  的表达式十分复杂和繁琐。对于配点格式的无网格方法处理板壳问题, 由于强形式离散而需要求解四次导数, 变得极为繁琐, 所以往往改采用 RBF 近似<sup>[23]</sup>。

考察移动最小二乘近似的构造, 可以看出有如下特点:

1. 包含于基函数组中的任何函数都可以被 MLS 精确地模拟。
2. 近似过程中使用的权函数为紧支函数, 所以近似具有局部近似的特点。
3. 其中的系数函数是空间的函数, 也就是说在每点的形函数都得分别计算。

MLS 近似方法和有限元近似主要有以下区别:

1. MLS 近似函数定义在全求解域, 而且仅取决于节点空间分布和所选取的权函数, 而在有限元中插值函数定义于网格内部。
2. MLS 由于插值函数定义在全求解域, 所以具有较好的连续性和光滑性。而有限元插值函数定义在各个网格内, 这样插值函数的连续性和光滑性必然受到网格分界的限制, 计算后还得进行后处理。

3. MLS 近似是一种拟合近似, 处理边界条件时没有有限元中方便。

### (3) 单位分解近似

考虑一个求解域  $\Omega$ , 利用一系列相互交叉的子域  $\Omega_I$  来覆盖, 并且要求所有的子域能够完全覆盖整个求解区域。在每一个子域内定义一个仅在子域内非零的函数  $\Phi_I(x)$ , 它们满足单位分解条件, 即

$$\sum_I \Phi_I(x) = 1 \quad (1-26)$$

利用前面讨论的 MLS 形函数  $\Phi_I(x)$  来构造单位分解近似函数如下:

$$u^h(x) = \sum_I \Phi_I(x) \cdot (u_I + \sum_{i=1}^m b_{iI} \cdot q_i(x)) \quad (1-27)$$

其中  $q_i(x)$  一般为单项式。从上式可以看出, 单位分解法中一个节点对应的未知量个数可以多于节点的自由度数。

### (4) 再生核粒子方案近似 (RKPM)

考虑函数  $u(x)$ , 与核函数近似方案相似, 有

$$u^h(x) = \sum_I \Phi_I(x) \cdot (u_I + \sum_{i=1}^m b_{iI} \cdot q_i(x)) \quad (1-28)$$

其中  $C(a_0, x, x_i)$  为边界校正函数,  $\Phi(\frac{x-x_i}{a_0})$  为包含有伸缩系数  $a_0$  的紧支函数。

校正函数的引入是为了修正边界处权函数积分时截断误差。

结合以上过程, 并且引入小波的概念, 可以实现求解多分辨率分析和自适应分析。

### (5) 径向基函数

径向基函数(Radial Basis Function, 简记为 RBF)是一类以函数定义点到节点的距离为自变量的函数, 以每个离散节点  $x_i$  为中心定义一组径向基函数记为  $\phi_i(\|x - x_i\|)$ , 则函数  $u(x)$  可以近似为

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \cdot \phi(\|x - x_i\|) \quad (1-29)$$

其中  $N$  为节点总数,  $u_i$  为待定系数。RBF 具有形式简单、空间维数无关、各向同性等适于数值计算的优点, 受到计算数学界的关注。目前已有多种定义在全域上的径向基函数可供选择, 如 MQ 函数, 薄板样条函数, 高斯分布函数等。

Multiquadrics (MQ) :  $(c^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}, c > 0$

Reciprocal multiquadrics (RMQ) :  $(c^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}}, c > 0$

Gaussians:  $\exp(-cr^2), c > 0$

Thin-plate splines (TPS) :  $r^{2\beta} \log r, \beta \in N$

近年提出的紧支径向基函数, 也具有系数矩阵稀疏、带状分布的特点, 有利于求解大型问题。文献<sup>[11]</sup>总结的紧支正定的 RBFs 如下:

$$\text{CSRBF1: } (1-r)_+^4 (4+16r+12r^2+3r^3) \in C^2 \cap PD_3$$

$$\text{CSRBF2: } (1-r)_+^6 (6+36r+82r^2+72r^3+30r^4+5r^5) \in C^4 \cap PD_3$$

$$\text{CSRBF3: } \frac{1}{3} + r^2 - \frac{4}{3}r^3 + 2r^2 \ln r \quad \text{if } 0 \leq r \leq 1$$

$$\text{CSRBF4: } \frac{1}{15} + \frac{19}{6}r^2 - \frac{16}{3}r^3 + 3r^4 - \frac{16}{15}r^5 + \frac{1}{6}r^6 + 2r^2 \ln r \quad \text{if } 0 \leq r \leq 1$$

$$\text{CSRBF5: } (1-r)_+^6 (35r^2+18r+3) \in C^4 \cap PD_3$$

$$\text{CSRBF6: } (1-r)_+^8 (32r^3+25r^2+8r+1) \in C^6 \cap PD_3$$

这里,  $r = \|x\|$ ,  $PD_d$  代表着径向基函数是在  $R^d$  是正定的,  $(1-r)_+$  由下式定义:

$$(1-r)_+ = \begin{cases} (1-r) & \text{if } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

### 1.2.2 无网格法的离散原理—加权残量法

考虑弹性力学问题

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + b_i = 0 & \text{in } \Omega \\ \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i & \text{on } \Gamma_t \\ u_i = \bar{u}_i & \text{on } \Gamma_u \end{cases} \quad (1-30)$$

其中  $b_i$  为体力矢量,  $n_j$  为边界  $\Gamma_t$  的外法线单位矢量,  $\bar{t}_i$  为  $\Gamma_t$  上的指定面力矢量,  $\bar{u}_i$  为  $\Gamma_u$  上的指定位移矢量,  $\sigma_{ij}$  为应力张量,  $u_i$  为位移矢量。用于求解控制方程的加权残量方程为:

$$\int_{\Omega} v_i \cdot (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{v}_i \cdot (\sigma_{ij} n_j - \bar{t}_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \bar{\bar{v}}_i \cdot (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma = 0 \quad (1-31)$$

式中  $v_i$ 、 $\bar{v}_i$  和  $\bar{\bar{v}}_i$  为权函数。将前面讨论的近似函数  $u_i(x) = u_i^h(x)$  代入加权残量方程(1-30)中，并选用不同的权函数即可得到不同的无网格方法。

### (1) Galerkin 法

在 Galerkin 法中，权函数和近似函数取自同一函数空间，即(1-30)式中取  $v_i(x) = \sum_{l=1}^N \phi_l(x) v_l$ ， $\bar{v}_i(x) = -v_i(x)$ ， $\bar{\bar{v}}_i = 0$ 。Galerkin 法计算精度高，但需要布置背景网格进行数值积分，为了保证精度必须使用高斯积分，因而计算量大。

### (2) 配点法(Collocation)

在配点法中，权函数取为  $\delta$  函数，即  $v_i = \delta(x - x_i)$ ， $i = 1, 2, \dots, N$ ，此时仅要求平衡方程在域内节点处严格满足，边界条件在边界节点处严格满足。由配点法导出的无网格法不需要背景网格，是一种纯无网格法，且计算量小，但精度低，稳定性差。

### (3) 局部 Petrov-Galerkin 法

在局部 Petrov-Galerkin 法中，要求方程的残差在一些子域内消除，即

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) v_i d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_{su}} (u_i - \bar{u}_i) v_i d\Gamma = 0 \quad (1-32)$$

式中  $v_i$  为权函数， $\alpha$  是用于引入位移边界条件的罚函数， $\Gamma_{su}$  是子域  $\Omega_s$  的边界  $\partial\Omega_s$  上指定本质边界条件的部分， $\partial\Omega_s$  上指定自然边界条件的部分称为  $\Gamma_{st}$ ，其它部分称为  $L_s$ ，即  $\partial\Omega_s = L_s \cup \Gamma_{su} \cup \Gamma_{st}$ ， $L_s = \partial\Omega_s - \Gamma_{su} - \Gamma_{st}$ 。考虑到关系式  $\sigma_{ij,j} v_i = (\sigma_{ij} v_i)_{,j} - \sigma_{ij} v_{i,j}$ ，并利用散度定理，(1-31)式可写为

$$\int_{L_s} \sigma_{ij} n_j v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} \sigma_{ij} n_j v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{st}} \bar{t}_i v_i d\Gamma - \int_{\Omega_s} (\sigma_{ij} v_{i,j} - b_i v_i) d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_{su}} (u_i - \bar{u}_i) v_i d\Gamma = 0 \quad (1-33)$$

当某子域完全处于求解域内部时有  $\partial\Omega_s = L_s$ ，上式中沿  $\Gamma_{su}$  和  $\Gamma_{st}$  的积分为零。子域  $\Omega_s$  一般取以节点为中心的球形（三维问题）或圆形（二维问题）区域。

与 Galerkin 法不同，Petrov-Galerkin 法的权函数和近似函数取自不同的函数空间。为了简化上式，可以取在  $L_s$  上等于零的权函数，如在 MLS 中使用的权函数，(1-33)式最终可写为

$$\int_{\Omega_e} \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{su}} u_i v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{du}} \sigma_{ij} n_j v_i d\Gamma = \int_{\Gamma_{st}} \bar{t} v_i d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}} \bar{u}_i v_i d\Gamma + \int_{\Omega_e} b_i v_i d\Omega \quad (1-34)$$

局部 Petrov-Galerkin 法中积分是在每个规则子域  $\Omega_s$  中进行的，不需要引入背景网格，是一种纯无网格方法。

#### (4) 最小二乘配点法(LSC)

在配点法中，控制方程只在所有域内节点处严格满足，而没有在边界节点处和域内其它点处满足。最小二乘配点无网格法要求控制方程不但在所有节点处“满足”，而且要在  $N_a$  个指定的辅助点处“满足”，即权函数取为  $v_i = \delta(x - x_i), i = 1, 2, \dots, N + N_a$ 。在该方法中，方程数多于未知数，需要用最小二乘法求解，因此控制方程的残差实际上是在最小二乘的意义上予以消除的。为了保证解的精度，边界条件必须在边界点处严格满足。跟配点法相比，该方法提高了解的精度，并且继承了配点法高效的优点。

#### (5) 加权最小二乘法(WLSM)

在加权最小二乘法中，方程和边界条件的残差是在加权最小二乘意义上消除的，权函数为  $v_i = \partial(\sigma_{ij,j} + b_j) / \partial u_i$ ， $\bar{v}_i = \alpha \partial(u_i - \bar{u}_i) / \partial u_i$ ， $\bar{v}_i = \beta \partial(\sigma_{ij} n_j - \bar{t}) / \partial u_i$ ，其中  $\alpha$  和  $\beta$  为用于施加边界条件的罚函数，对弹性力学问题可取为  $\beta = 10^5$ ， $\alpha = \beta[E/(1-\nu^2)]^2$ 。为了避免数值积分，提高计算效率，可用被积函数在一些离散点处值之和来代替式(1-31)中的积分，即

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \left[ \sum_{i=1}^{N+N_a} (\sigma_{ij,j} + b_i)^2 + \sum_{i=1}^{N_t} (\sigma_{ij} n_j - \bar{t}_i)^2 + \sum_{i=1}^{N_u} (u_i - \bar{u}_i)^2 \right] = 0 \quad (1-35)$$

其中  $N$  为节点总数， $N_a$  为辅助点总数， $N_t$  为边界  $\Gamma_t$  上的节点数， $N_u$  为边界  $\Gamma_u$  上的节点数。

### 1.2.3 现有比较成熟的无网格法

只要建立近似函数时不需要借助网格，无论是否需要背景网格计算积分，这种积分都是无网格方法。目前已提出的无网格法有 10 余种，它们都可以由加权残量法导出，见表 1-1 所示。

表 1-1 主要无网格方法

名称	代表学者	近似方案	离散方案	背景网格
SPH (光滑质点流体动力学法)	Lucyt	核函数	配点	无
DEM (散射单元法)	Nayrdes	移动最小二乘	Galerkin	有
EFG (无单元伽辽金法)	Belytschko	移动最小二乘	Galerkin	有
FPM (有限点法)	Onate	移动最小二乘	配点	无
RKPM (重构核粒子法)	Liu	重构核近似	Galerkin	有
PCM (无网格配点法)	Aluru	重构核近似	配点	无
Hp-Clouds (HP 云法)	Oden	移动最小二乘	Galerkin	有
Hp-Meshless Clouds (HP 无网格云法)	Liszka	移动最小二乘	配点	无
PUM (单位分解法)	Babuska	单位分解	Galerkin	有
LBIE (局部边界积分法)	Atluri	移动最小二乘	Petrov-Galerkin	无
MLPG (局部 Petrov-Galerkin 无网格法)	Atluri	移动最小二乘	Petrov-Galerkin	无
紧支径向基函数无网格法	张雄等	紧支径向基	配点	无
LSC (最小二乘配点无网格法)	张雄等	移动最小二乘	最小二乘配点	无
WLSM (加权最小二乘无网格法)	张雄等	移动最小二乘	加权最小二乘	无

建立近似函数时不借助网格、基于函数逼近近似（而非插值）以及采用不同的形函数是无网格法与有限元法的主要区别。采用定义在离散节点上（通常具有紧支特性）的一组权函数和基函数来构造近似函数。而不定义在全域上的级数展开形式是无网格法与经典加权残量法的主要区别。

已有的各种无网格方法并非完全不同，而是有一定联系的。对于需要背景积分网格的方法，在一定程度上破坏了无网格方法的特性，不是真正的无网格方法。但是由于背景网格仅用于积分计算，场函数的近似仍然采用无网格的基本方法，因此还是要比有限元的网格划分简单。使用配点法的无网格方法虽然计算稳定性和精度都不如 Galerkin 方法，但是计算简单，效率高，通过引入其他数值方法进行改进后，仍然有很大的潜力。

无网格方法相对有限元方法具有以下优势：

- (1) 处理简单，尤其在三维问题中，不必进行复杂的网格划分。

(2) 处理大变形、冲击和断裂问题时，由于不存在网格，所以就没有网格畸变等问题，即使在一些无网格方法中需要使用背景网格进行积分，但这些网格仅用于积分计算，所以也没有以上的畸变问题。

(3) 进行自适应分析中，无网格方法不必涉及细分网格，因此更加容易实现高梯度、奇异性等问题的自适应分析。

(4) 网格方法的结果是光滑且连续的，后处理简单，而有限元的结果通常是不光滑的，还需进行相应的后处理。

### 1.3 梁、板壳问题的数值模拟方案

本章将讨论现有的三种处理板壳问题的方案，有限单元法应用在三种方案中的特点，以及无网格法在其中的应用。对于 Kirchhoff 板壳，无网格法很容易地构造出了  $C_1$  甚至更高连续性的近似函数。对 Mindlin 板壳，无网格法的研究重点在于如何消除剪切和薄膜锁死，其解决方案较有限元法简洁，直接，但各种手段也都未完美地解决这一问题。RKPM 用于三维连续体方案虽然以一部分计算费用为代价，但也同时获得了其他板壳理论难以实现的优点。

#### 1.3.1 板壳问题的数值模拟方案

板壳问题的三种数值模拟方案：

一般来说，对于梁，板壳结构的数值模拟主要有三种方案：

- (1) 线性或非线性的板壳理论 (linear/nonlinear plate-shell theory)
- (2) 退化连续体 (degenerated continuum approach) 或者称作基于连续体 (continuum based approach) 的方案
- (3) 直接三维 (3-D) 连续体 (direct three – dimensional continuum approach) 方案 (梁为 2 维)

广泛应用的梁理论有两种：Euler-Bernoulli 梁理论和 Timoshenko 梁理论。这些理论的运动学假设是：

**Euler-Bernoulli 梁理论：**假设中线的法平面保持平面和法向。这也称为工程梁理论，而相应的壳理论称为 Kirchhoff-Love 壳理论。

Timoshenko 梁理论：假设中线的法平面保持平面，但是不一定是法向。这也称为剪切梁理论，并且相应的壳理论称为 Mindlin-Reissner 壳理论。

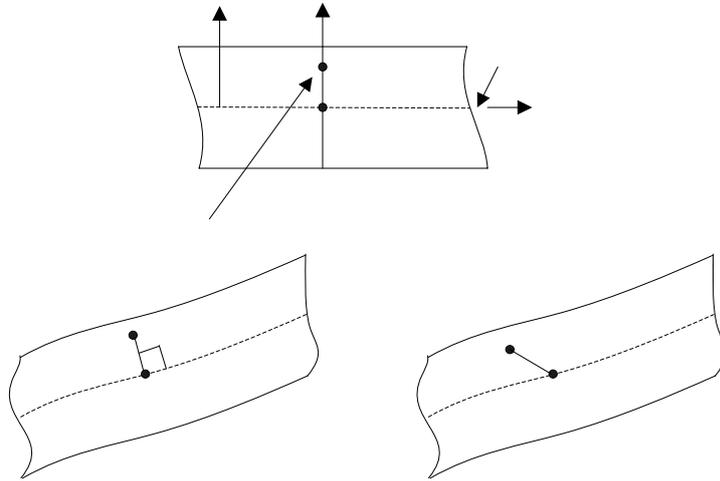


图 1-1 Euler-Bernoulli 梁和 Timoshenko 梁的运动学假设

(左下为 Euler-Bernoulli (Kirchhoff)假设，右下为 Timoshenko(Mindlin)假设)

以板为例，和承受均布荷载板的微分方程及其边界条件等效的最小位能原理的泛函表达式如下：

$$\Pi_p = \iint_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \kappa^T D \kappa - q w \right) dx dy - \int_s M_n \frac{\partial w}{\partial n} dS \quad (1-36)$$

其中  $w$  为板的弯曲挠度， $q$  为均布荷载大小， $M_n$  为边界给定力矩。 $\kappa$  为曲率和扭率，定义如(1-37)式， $D$  为板的弹性关系矩阵，对于各向同性材料(1-38)。

$$\kappa = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial x y} \right\}^T \quad (1-37)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1-38)$$

最小位能原理泛函中出现的横向挠度  $w$  的导数最高阶次是 2，根据收敛准则，在单元交界面上必须保持  $w$  及其一阶导数的连续性，即要求插值函数具有  $C_1$  连

续性。这种要求是 Euler-Bernoulli 和 Kirchhoff-Love 理论的最大缺陷,因为在多维空间中  $C_1$  近似是很难构造的。正是由于这个原因,在软件中,除了针对梁之外很少应用  $C_1$  构造理论。

由于其形函数的高度光滑性,很容易实现  $C_1$  甚至更高的连续性,所以无网格法成为很理想的解决 Kirchhoff 板壳问题的方案。P Krysl 和 T Belytschko 首次将 EFG 法分别用于解决薄板<sup>[13]</sup>和薄壳<sup>[14]</sup>问题,并且后者给出了消除薄壳薄膜锁死问题的解决方案和算例;国内的张建辉等采用 EFG 法分析了置于 Winkler 地基上的自由边界的薄板弯曲问题<sup>[15]</sup>; G R Liu 等将 EFG 用于复杂形状薄板<sup>[16]</sup>以及空间薄壳结构的静态分析和自由振动<sup>[17]</sup>,并用 MLPG 法计算了薄板结构的静态分析和自由振动<sup>[18]</sup>; Shuyao Long 等将 LBIE 方法用于薄板弯曲问题<sup>[19]</sup>; J Sladek 等把四阶微分方程分解为一个 Poisson 方程和一个 Helmholtz 方程,并用 LBIE 方法解决了薄板弯曲问题<sup>[20]</sup>,置于 Pasternak 双参数弹性地基上的薄板弯曲问题<sup>[21]</sup>,及薄板大变形问题<sup>[22]</sup>,但以上三种情况仅限于固支和简支边界; Vitor L 等则用 RBF 近似, Heimate 配点法离散,成功处理了 Kirchhoff 板弯曲问题<sup>[23]</sup>。

相比之下, Timoshenko 梁(板壳)理论主要的运动学假设是法平面保持平面,即平的,并且在平面内没有变形发生。板截面变形如图 1-1。因此,垂直于中线的平面转动视为刚体。在有限元方法中,位移和转动是独立的场函数,即板壳单元是  $C_0$  型单元。表达格相当简单。基本和平面应力单元表达格式类似。但在梁、板壳变得很薄时,可能会出现剪切锁死;对于曲梁和壳问题则还有薄膜锁死的问题。有限元法中解决锁死问题往往借助于假设应变<sup>[24][25]</sup>,杂交元<sup>[26]</sup>,选择或者减缩积分<sup>[27]</sup>等手段。然而这些方法在较为粗糙的网格上往往精度很差,而且十分繁琐。由于厚板壳中,剪切变形充当了重要的不可替代的角色,否则精度无法保证,所以怎么处理各种数值锁死是求解厚梁、板壳的一个关键问题。

在无网格方法求解 Mindlin 梁、板壳问题中,方电新等用 EFG 法分析基于 Mindlin 理论的板弯曲<sup>[28]</sup>,但并未尝试解决各种数值锁死的困扰; Donning 和 W K Liu 基于点的基数样条函数(cardinal splines)构造近似函数, Galerkin 法离散,计算了带有剪切变形的梁和板<sup>[29]</sup>,同时初步揭示了可以消除数值锁死的一种很有价值的方案。W K Nukulchai 将 Donning 的思想进一步深化,讨论了剪切锁死的根源,将这一方案用于 EFG 法计算了大量厚板算例<sup>[30]</sup>; Noguchi 等用 EFG 方法

[31], Garcia 等用 hp-clouds 方法<sup>[32]</sup>都计算了 Mindlin 板问题, Noguchi 还采用映射技术 (mapping technique) 将壳曲面映射到二维平面, 在二维平面内完成离散, 计算了壳及空间结构, 给出了很好的结果<sup>[33]</sup>, 并详细讨论了剪切锁死和薄膜锁死问题。Nam Ho Kim 等用可以剪切变形的壳模型来分析板壳结构优化问题<sup>[34]</sup>, 采用的无网格法显示了对此领域的传统方法—有限差分法的优势。

基于连续体(CB)方法又称退化连续体方案, 在 Belytschko T 等的著作“连续体和结构的非线性有限元”<sup>[35]</sup>中做了详尽的总结和细致的讨论。处理非线性问题时, 相对于普通的板壳理论, 它直观和简单的多, 而且能得到很好的解答, 适用于任意的大变形问题。然而对于非弹性壳的非线性大变形问题, CB 法也很繁琐, 正如 Shaofan L<sup>[36]</sup>指出的, 它的不足在于剪切锁死和薄膜锁死的缺陷, 要想解决这些问题, 必须引入一些复杂的手段, Beletschko<sup>[35]</sup>详细讨论了假设应变场或者一点积分的壳单元。同时, 在 CB 法中引入复杂的本构关系也是相当麻烦的事情。这跟直接 3-D 连续体方案的直接简单、精确不可比拟。所以 CB 法虽然在有限单元法中获得了不少应用, 目前仍未见在无网格法中利用其解决板壳问题的文献。

在这三种方案中, 直接 3D 连续体方案是最简单也最精确的。尽管如此, 它同时也是最不常用的一种。因为在有限元方法中, 对于薄板壳结构采用低阶单元则必须在厚度方向布置多层点才能获得合理的梯度场, 这使得离散系统过于刚硬, 降低了离散系统的条件数, 从而降低了求解场的精度。尽管如此, 仍然有一些方案来改善这些缺陷, W K Liu 等<sup>[37]</sup>用多层积分的 8 结点六面体单元处理板壳大变形的弹塑性分析就是这方面的一个尝试。当然, 直接 3-D 方法的另外一个问题是费时相对较高, 比板壳理论或者退化连续体方案需要更多的单元(大约 3~5 倍)。Shaofan L 等<sup>[38]</sup>利用无网格法窗函数 (RKPM) 近似的高度光滑性的优势, 发现在板壳的厚度方向仅布置 2~4 层点就可以很好的捕捉此方向场的梯度, 而且同时还可以在一定的参数范围内避免剪切和体积锁死。成功地用无网格法处理了大量薄板壳问题的非线性大变形问题。

### 1.3.2 无网格法处理梁、板壳问题的一些探讨

#### (1) 基于梁、板壳理论的无网格处理方案

这是在有限元法当中讨论时间比较长,研究比较透彻的一种方案。如前面所述,在无网格方法计算板壳问题中也是应用相当多的一种。由于 Kirchhoff-Love 板壳和 Mindlin-Reissner 板壳遇到的困难有很大不同,所以下面分开讨论。

### ① 基于 Kirchhoff-Love 假设的薄板壳

对于那些要求高连续性形函数的边值问题的数值求解(Kirchhoff 板壳弯曲问题只是其中一个),无网格法可以直接简单地构造近似函数,显示了很大的潜力。

单从离散形式来看,基于 Galerkin 原理的弱形式,如 EFG, MLPG, 只需要形函数的  $C_1$  连续性,MLS 近似很容易满足。而对于强形式的配点法,最小二乘配点法等离散方案,则至少需要  $C_3$  的连续性,需要求解形函数的四次导数。对于 MLS 近似来说, $C_3$  连续要求基函数至少需要总项数为 10 的 3 次完全多项式,计算费用比较高,并且四阶导数的形式相当复杂,当然尽管不是不可能求解的。所以配点格式的无网格法计算板壳问题,例如对于 Hermite 配点法,则乐于选择 RBF 作为近似函数。但因为求解高阶偏导数很容易丧失近似精度,往往不得不采用很大的支撑域,甚至不得不采用全局支撑的 RBF<sup>[23]</sup>,这丢弃了系统矩阵带状稀疏的特点,计算量很大,这使得配点法格式不需要积分,计算量小的优势消失。所以对于强形式的离散方案计算板壳问题,一般并不推荐采用。

对于想获得  $C_1$  连续性甚至更光滑的 MLS 近似函数而言,大部分都选择二次完全基(Quadratic)作为基函数(可以同时满足一致性要求)和四次样条函数作为权函数,近似函数能达到  $C_2$  连续,这对于薄板壳问题是足够的。后面我们也采用了这两个参数进行板壳的分析。

很直观地解决了连续性的要求,Kirchhoff 板弯曲问题剩余的难点在于如何选择最优支撑域的大小和合适的积分阶次。这些问题也是自 Galerkin 形式的无网格法诞生以来一直在讨论和研究的。过小的影响域因为没有足够的点对场函数进行拟合,必然导致很差的精度;然而过大的影响域则消弱系统的局部特性,增加计算费用。一直被认为存在一个最优影响域大小。P. Krysl 等<sup>[13]</sup>用 EFG 求解薄板弯曲问题,G. R. Liu<sup>[18]</sup>采用 MLPG 求解薄板弯曲和自由振动问题时,都对这两个问题做了较为详细的讨论,并给出了类似问题的推荐结论。在论文后面的第二章中我们也给出了一个较为常用的最佳支撑域大小。

在曲梁和壳中,当薄膜变形和弯曲变形耦合在一起,特别是壳变得很薄的时候

候，往往容易出现薄膜锁死。薄膜锁死的根源在于薄膜应变和弯曲应变近似阶次的不匹配。P. Krysl<sup>[14]</sup>，Noguchi H<sup>[33]</sup>提出可以通过高阶的基函数来消除薄膜锁死。而扩大影响域也可以缓解薄膜锁死的困扰，当然提高基函数阶数本身也必须同时增大影响域。

为了消除薄膜锁死，MLS 近似一般可以选择四次完全基（ $m = 16$ ）<sup>[14][33]</sup>，或者双三次基（ $m = 15$ ）<sup>[33]</sup>。

四次基（Quartic）：

$$p = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4]^T \quad (1-39)$$

双三次基（Bi-cubic）：

$$p = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad x^3y^2 \quad x^2y^3 \quad x^3y^3]^T \quad (1-40)$$

下面是 P. Krysl<sup>[14]</sup>给出的算例：

模型为无支撑的短壳承受对夹的集中力，采用规则的  $9 \times 9$  的 EFG 点。  $Q = 3$ ， $Q = 4$  为积分点数。

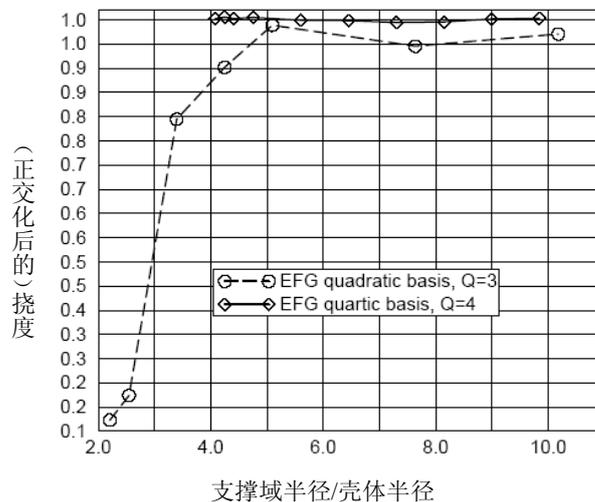


图 1-2 基函数次数和影响域大小对薄膜锁死的影响<sup>[14]</sup>

从图 1-2 可以看出，对于二次基  $p_j$ ，增大影响域可以减轻薄膜锁死的影响。采用四次完全基则基本完全消除了锁死。

## ② 基于 Mindlin-Reissner 假设的厚板壳

同有限元法一样，无网格法在 Mindlin-Reissner 梁、板壳理论中形式简单，而且考虑了剪切变形的影响，可以同时计算厚板壳，薄壳；但是也必须面对剪切锁死和曲梁/壳的薄膜锁死的困扰。

虽然剪切锁死在根源上跟薄膜锁死都是由于近似不同场函数的阶次不匹配，但把剪切锁死放在这一节讨论是因为它只出现在 Mindlin-Reissner 板壳中，对于 Kirchhoff 板壳则不存在类似问题。

剪切锁死的原因跟薄膜锁死是类似的。即转角  $\theta$  和横向变形近似函数  $w$  阶次的不匹配。它在板壳变得很薄，剪切应变和弯曲应变耦合在一起的时候容易发生。有两种方法可以缓解或者完全消除剪切锁死。

第一种方法跟上一节消除薄膜锁死的技术是一样的。在有限元法当中，剪切锁死往往出现在低阶单元中（如线性单元），如果采用合适的高阶单元（如 16 结点 Lagrangian 单元），剪切锁死将会减弱甚至消除。由于低阶单元无法描述零剪切（对于梁板指纯弯）状态，导致虚假的附加剪切应变，虚假剪切应变对挠度的影响随着梁，板变薄而增大，以致最后“锁死”。但如果采用高阶单元，这种影响就会减小。

无网格方法采用了类似的思路。Noguchi H<sup>[31][33]</sup>通过提高基函数阶次，如采用双三次基(Bi-cubic)和四次基(Quartic)，以及扩大影响域的技术来消除剪切锁死。

下面是 Noguchi<sup>[33]</sup>给出的算例：

计算模型为 Mindlin 板，由于对称性取 1/4 分析，布置 5×5 的 EFG 点。表 1-2 是基函数次数对剪切锁死的影响。其中  $t$  是板厚， $L$  为板长， $c$  是最近的点的距离。

表 1-2 基选择不同 Mindlin 板弯曲分析， $t/L = 1000$ <sup>[31]</sup>

$m$	基函数种类	工况 1	工况 2	工况 3
3	Linear	锁死	—	—
10	Cubic	轻微锁死	锁死	锁死
15	Quartic	无锁死	轻微锁死	锁死
16	Bi-cubic	无锁死	无锁死	无锁死

其中， $m$ ：基函数的项数，工况 1：简支，均布荷载，工况 2：简支，中央集中荷载， $t/L$  工况 3：固支，均布荷载。

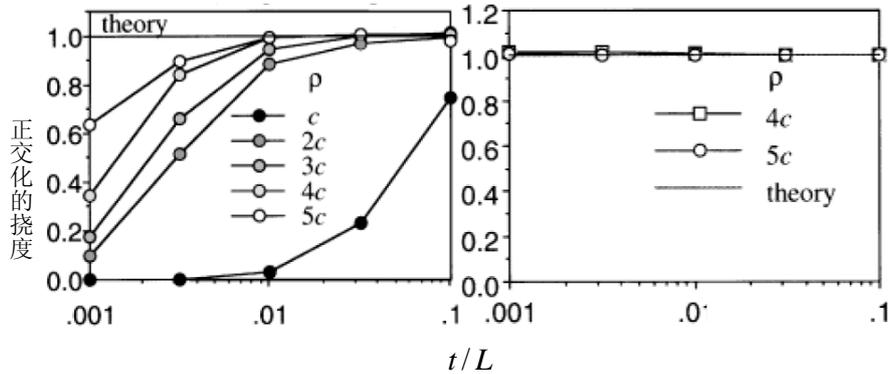


图 1-3 影响域大小（左）和基函数阶次（右）对剪切锁死的影响<sup>[31]</sup>

（工况：简支均压；左边为线性基结果，右边为双三次基结果）

从 Nouguchi H 的结果可以看到，只要影响域不是太小（应至少  $>2c$ ），当  $t/L=0.01$  时，所有的基函数都给出了不错的精度。当  $t/L=0.001$  时，则只有四次基和双三次基得到了精确的结果，在各种边界条件下避免了剪切锁死问题。同时，当采用不规则布点时，也仅有采用四次基和双三次基的精度不受影响。

第二种方法是 Donning 等<sup>[29]</sup>提出的，并且经 W. Kanok-Nukulchai<sup>[30]</sup>做了进一步深入的讨论。如上面所述，提高基函数次数和扩大影响域的技术可以很直观地消除剪切锁死。当然这往往意味着大大增大了系统方程的带宽，必须付出比较昂贵的计算费用。不仅如此，由于不能在极薄的情况下满足 Kirchhoff 约束条件，虽然可给出精确的位移解，但剪切应力会出现振荡的现象<sup>[30]</sup>。虽然当加大影响域的时候，四次基（Quartic）可以减弱这种振荡，如图 1-4，图 1-5 所示。但收敛率也会因为不能满足 Kirchhoff 约束条件而受到影响。

Donning<sup>[29]</sup>提出对转角  $\theta$  采用比  $w$  近似低一阶的基数样条函数近似来保证  $\theta$  和  $w$  同阶，从而达到改善剪切锁死现象。虽然有限元方法可以采用类似的技术，但是其  $C_0$  插值的本质使得  $\theta$  的连续性降为  $C_{-1}$ ，这会导致应力场的不连续。对比之下，无网格法可以很容易得取得  $C_1$  以及更高连续性的近似场。

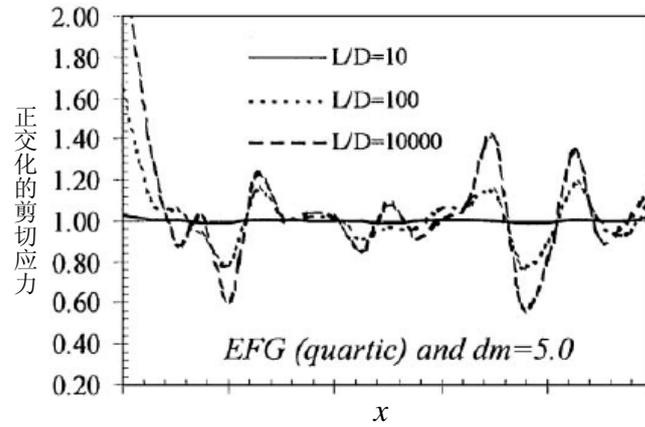


图 1-4 四次基下剪切应力的振荡<sup>[30]</sup>

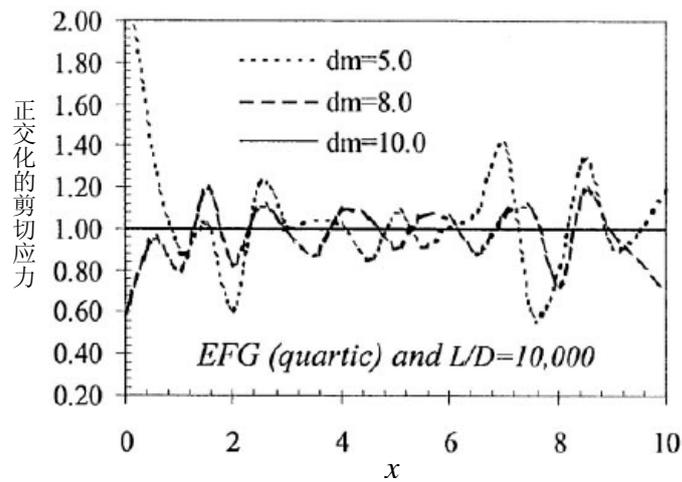


图 1-5 加大影响域对剪切应力振荡的影响<sup>[30]</sup>

对于一维的梁问题:

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^n \phi_I(x) u_I, \quad \theta^h(x) = \sum_{I=1}^n \eta_I(x) \theta_I \quad (1-42)$$

跟第一种方法不同,  $\eta_I(x)$  并不是独立构造, 而是基于  $\phi_I(x)$  的导数构造:

$$\eta_I(x) = \frac{\partial \phi_I(x)}{\partial x} \quad (1-42)$$

从式(1-42)也可以看出,  $\phi_I(x)$  至少是  $C_1$  连续的。它可以任何满足条件的近似函数, 如采用标准的 MLS 近似<sup>[30]</sup>, RKPM 近似, 或者基数样条函数近似<sup>[29]</sup>。

对 Mindlin 板也可以采取类似的方案。

$$\begin{aligned} u^h(x, y) &= \sum_{I=1}^n \phi_I(x, y) u_I \\ \theta_x^h(x, y) &= \sum_{I=1}^n \eta_I(x, y) \theta_{xI} \\ \theta_y^h(x, y) &= \sum_{I=1}^n \xi_I(x, y) \theta_{yI} \end{aligned} \quad (1-43)$$

同样的,  $\eta_I(x, y)$ ,  $\xi_I(x, y)$  基于  $\phi_I(x, y)$  的导数构造, :

$$\eta_I(x, y) = \frac{\partial \phi_I(x, y)}{\partial x}, \quad \xi_I(x, y) = \frac{\partial \phi_I(x, y)}{\partial y} \quad (1-44)$$

这里也要求  $\phi_I(x, y)$  至少是  $C_1$  连续的。

下面是 Nukulchai<sup>[30]</sup>给出的算例:

求解固支承受均布荷载的 Mindlin 方板。S-EFG 为标准 EFG 方法, M-EFG 是采用上述近似函数匹配的结果。由于使用同样的影响域大小(3.4 倍的点距), S-EFG 的高阶基函数近似(Cubic/Quartic)的结果精确性受到影响。标准对比结果采用是 Kirchhoff 板理论的计算结果。

由于此种方法在求解厚板时能够同 Kirchhoff 板结果符合地很好, 而且可以完全避免剪切锁死的困扰, 同时不必大量增加计算费用, 是一种有前途的方法。虽然 Donning<sup>[29]</sup>曾采用这种匹配近似场函数的思路来解决曲梁的薄膜锁死, 但是笔者认为并不比前述第一种方案划算。也未曾有文献把这种思路用于板壳分析。

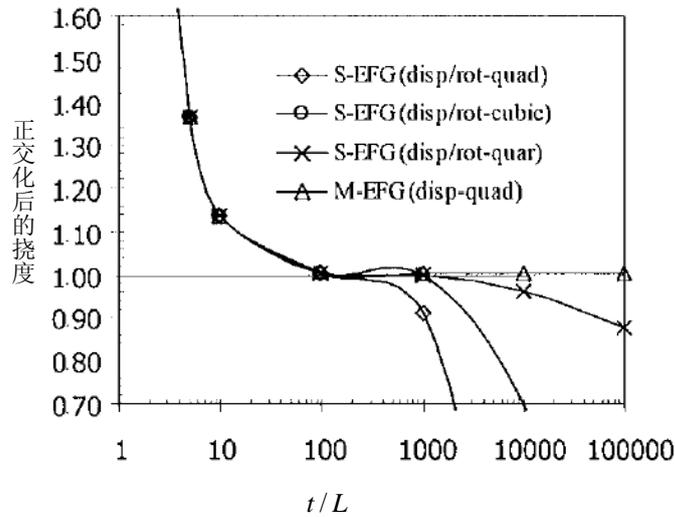


图 1-6 匹配近似函数方法对 Mindlin 方板剪切锁死的影响<sup>[30]</sup>

## (2) 基于三维连续体模型的无网格处理方案

就原理而言，直接 3-D 连续体方案（direct three-dimensional continuum approach）是最简单也是最精确的。但有限元方法中，相比板壳理论（plate-shell theory）和 CB（continuum based approach）理论，3-D 连续体方案实际应用少的多。

在有限元方法中，对于薄板壳结构采用低阶单元则必须在厚度方向布置多层点才能获得合理的梯度场，这使得离散系统过于刚硬，降低了离散系统的条件数，从而降低了求解场的精度。这是有限元方法中，3-D 连续体方案不受欢迎的主要原因。另外一个原因是它比板壳理论和 CB 方案需要更多的单元，计算费用高。但是无网格法的 3-D 连续体方案相对有限元法具有如下优点<sup>[38]</sup>：

- (1) 能够减弱剪切锁死和体积锁死。
- (2) 可以减弱由于厚度小和大方向比而导致的系统条件数差。
- (3) 用很少的点（2 层/3 层）就可以捕捉厚度方向的场梯度变化。

上面这些优点归功于无网格法近似函数的高度光滑性，同时无网格法由于采用影响域的概念，如果把它比作有限元方法中的“网格”，则采用相对大一些的影响域可以缓解大变形中上述“网格”的畸变，所以就不需要再借助像有限元那样的繁琐的网格重划分技术。

换句话说，虽然有限元可以通过高阶单元来获得类似的连续性，但是这同时意味着需要在厚度方向布置更多的点，而这又会降低系统条件数。有限元方法固有的缺陷使得它在 3-D 连续体方案中应用甚少。

鉴于板壳理论和 CB 方案在处理诸如非弹性壳的非弹性变形问题，以及引入复杂本构关系等的困难，原理简单的直接 3-D 连续体方案在此类问题上具有很大优势。Shaofan Li<sup>[38]</sup>利用无网格法 RKPM 窗函数构造高度光滑的近似函数，计算了大量非线性薄壳结构的大变形问题。图 1-7 是最大方向比为 20 的粘塑性薄片拉伸问题，在厚度方向仅布置 5 层点，16165 个点的计算结果。

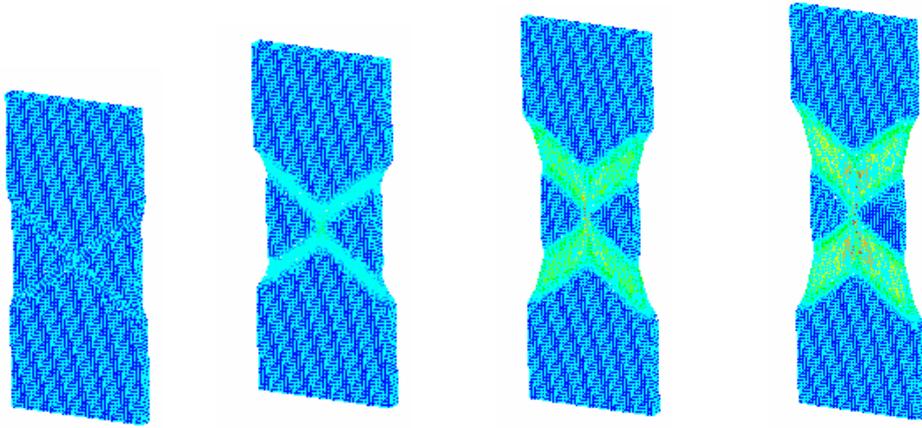


图 1-7 粘塑性薄片的拉伸变形<sup>[38]</sup>

## 第二章 面向对象的无网格法程序设计

### 2.1 引言

传统的结构化语言（如FORTRAN 77、PASCAL和C等）都是采用面向过程的方法来解决问题的，其代码和数据是分离的，因此程序的可维护性较差。面向对象（Object Oriented）程序设计方法则是把数据及处理这些数据的函数封装到一个类中，只有属于该对象（声明为类类型的变量称为对象）的成员函数才可能存取该对象的数据成员，这样其它函数就不会无意中破坏其内容，从而达到保护和隐藏数据的效果。与传统的面向过程的程序设计方法相比，面向对象的程序设计方法有三个优点<sup>[41]</sup>：

1. 程序的可维护性好。面向对象程序易于阅读和理解，程序员只需了解必要的细节，因此降低了程序的复杂性。
2. 程序的易修改性好，即程序员可以通过添加或删除对象很容易修改、添加或删除程序的代码。
3. 程序的可用性好。程序员可以根据需要将类和对象保存起来，随时插入到应用程序中，无需做什么修改。

作者在以前 OMLL(Object MeshLess Library)二维程序的基础上编制了三维程序，并以此分析了各种无网格法，最后选用无网格伽辽金进行了板壳问题的分析。下面我们将简单地介绍一下面向对象地无网格法程序的设计。

### 2.2 OMLL程序介绍

与常规程序设计方法不同，OMLL采用宏语言设计方法，它提供了一批宏命令，用户可在输入数据文件中使用宏命令来控制程序的运行，包括控制所采用的近似函数、无网格方法、系数矩阵的存储方法、程序的流程以及数据输出方法等。采用宏语言设计方法的最大优点是，用户不需要对程序作任何修改，只需采用OMLL提供的宏命令即可完成各种不同的研究任务，使用非常方便。

下面是一个典型的OMLL输入数据文件，依据模型为一个方板承受中央集中荷载(见4.2.2节算例)：

## 第二章 面向对象的无网格法程序设计

```

RESULTFILE PLATE.RES % 定义并打开输出数据文件为“PLATE.RES”
OMLL *** Problem of a Beam(LX=10.0, LY= 10.0, T=1.0) *** % 定义本问题的标题
NDM 3 % 空间的维数
NUMNP 363 % 节点总数
NUMEV 363 % 计算点总数
NDISP 120 % 给定位移边界点总数
NLOAD 1 % 给定集中力的边界总数
NUMMAT 1 % 材料组总数
MATERIAL % 材料性质数据
% 定义Generic材料-各向同性线弹性材料
ISOELASTIC Generic 10000.0 0.3 6.8
NODE % 节点数据
NODE
# PointID          x              y              z
1      0.0000000000      10.0000000000      0.0000000000
... ..
363    9.0000000000      9.0000000000      0.5000000000

BOUNDARY % 给定位移边界点数据
## Essential boundary conditions at nodes
## PointID  material  idx  idy  idz  u  v  w
2  Generic      0   0   0      0.000  0.0000  0.0000
... ..
142 Generic      0   1   1      0.000  0.0000  0.0000

LOAD
% Load bounday in each point
254  Generic      0   0   0      0.0000  0.0000  1.0000  0.0000  0.0000  -100.00

EVPOINT
COPY ALL Generic  1.0 % 取所有节点作为计算点
ENDEVPOINT

EFGDATA % 伽辽金型无网格法背景网格数据
NCELL 200 % 背景网格总数
NINTX 3 % x方向的积分点数
NINTY 3 % y方向的积分点数
NINTZ 3 % z方向的积分点数
CELL NODE % 用节点号来输入背景网格
Generic  2    32   41   11  243  245  283  265
... ..
Generic  363  282  254  264  242  142  133  144
ENDEFGDATA

ENDDATA % 结束求解域数据的输入
ECHO OFF % 不在输出设备上输出宏命令
BATCH % 进入批处理求解模式
CHECK % 检查位移边界和面力边界条件数据是否正确
MLS % 建立MLS近似函数
BASIS QUADRIC % 采用二次基
WEIGHTFUNCTION SLS234 3 % 使用四次样条权函数，后面的参数无效
SINCHECK % 检查MLS近似中矩阵A是否奇异，如奇异则替换最后一个影响点，直至A成为非奇异的
INFLENCEDOMAIN Fix 2.01 2.01 1.01 % 各节点支撑域半径相等，设为2.0

```

*BAND ON* % 使用一维变带宽存储技术  
*EFGM* % 使用EFG法求解  
*Penalty* 1.0e5 % 设置罚函数的值  
*TIMER START* % 开始计时  
*TANGENT* % 计算并组装计算点处的系数矩阵和向量  
*SOLVE* % 求解方程  
*OUTPUT* % 输出结果  
*PRINT Solving finished.* % 在屏幕上显示“Solving finished.”  
*TIMER PRINT* % 输出本次计算所消耗的CPU时间  
*END* % 结束批处理模式  
*STOP* % 停止程序的运行

在上面的文件中，斜体字部分为OMLL定义的宏命令，其后的内容为该宏命令的参数。符号“%”和“#”后面的所有内容均为注释，不影响程序的运行。OMLL程序将逐行读入此文件中的数据，根据所输入的宏命令执行相应的操作。在这个示例文件中，采用了MLS近似，使用四次样条函数(1-8)，各节点支撑域半径相同，均为[2.01,2.01,1.01]。采用无网格伽辽金法求解，系数矩阵使用一维变带宽方式存储。如果要使用加权最小二乘无网格法求解，只需将宏命令“*EFGM*”换为“*LeastSquare*”。如果要取高斯函数(1-6)作为权函数，只需将宏命令“*WEIGHTFUNCTION*”的参数“SL234”换为“GAUSS”即可，并选择GAUSS权函数的参数。

OMLL程序采用Visual C++设计，其类结构如图2-1~图2-3所示，粗体为编制三维程序需要改动的类。图中单箭头“↓”表示建立对象，双箭头“⇓”表示继承。例如，主程序OMLL建立了求解域类Domain和主控类Run的对象，类Domain又建立了Point等类的对象，而类Node和EvPoint都继承了点类Point。

下一节将节选OMLL的几个MLS近似实现的几个类做介绍，从中可以看出面向对象的无网格法程序设计跟面向过程的程序设计有何不同。

## 2.3 实现三维MLS近似的类介绍

### 2.3.1 近似函数基类Approximation

无论是哪一种近似函数，它们都有一些共同的属性，如影响域半径、影响域中的节点、形函数及其导数等等。OMLL定义了近似函数基类Approximation,

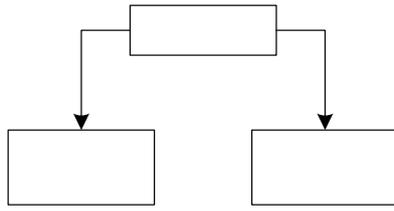


图 2-1 OMLL 程序的结构

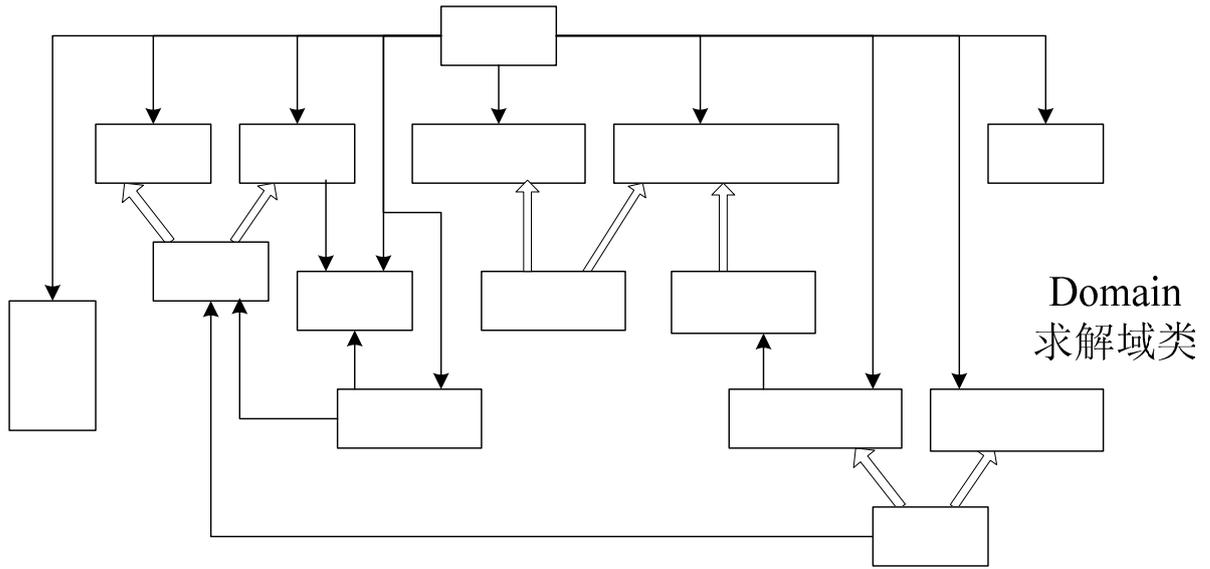


图 2-2 求解域类 Domain 的结构

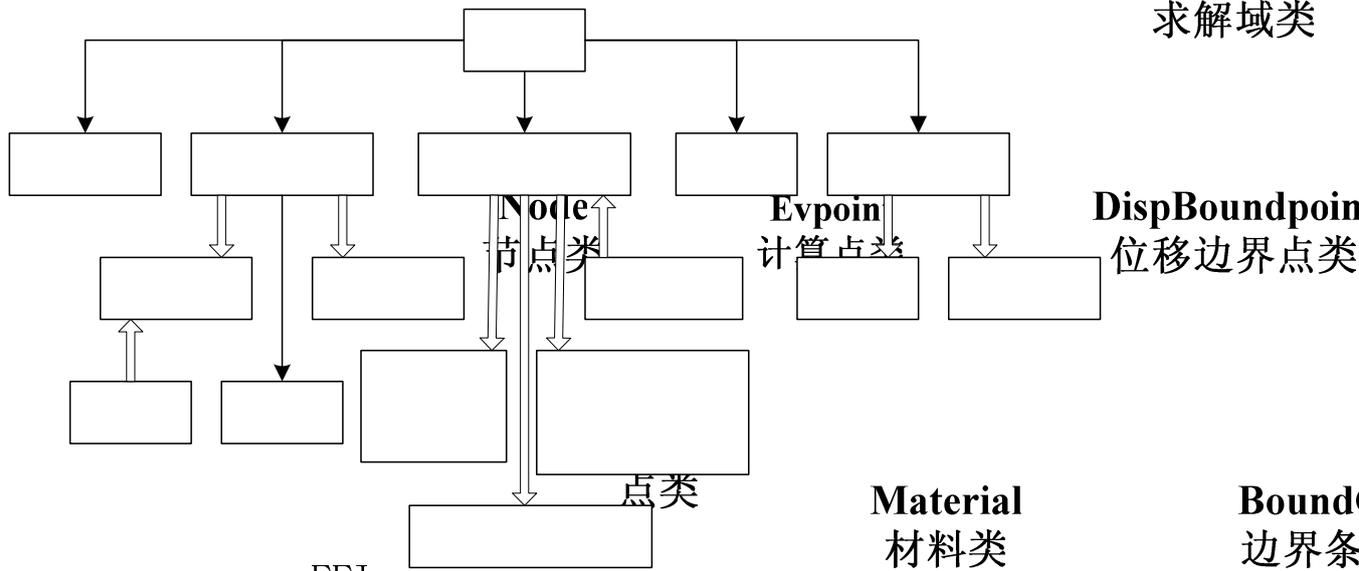


图 2-3 主控类 Run 的结构

FFI  
自由格式  
输入  
文件类

Cell  
背景网格类

Domain  
求解域类

DispBoundpoint  
位移边界点类

Material  
材料类

Bound  
边界条

Node  
节点类

Evpoint  
计算点类

点类

OM

以描述各类近似函数的共同属性。其数据成员为：

```

int Dim_; // 问题的空间维数(1~3)
Array<Node> *pts_; // 指向节点数组的指针
char ApproxType_[40]; // 近似函数的类型，如MLS、RBF等
char InflType_[10]; // 确定计算点定义域的方法，见后面的讨论
double Radius_[nDIMENSION]; // 当ApproxType = "RBF"或InflType =
// "VAR"// 时权函数支撑域的的半径
Vector<double> *SupportSize_; // 各节点支撑域的半径数组
int InitPtsNb_; // 计算点定义域中节点的初始个数
double Scale_; // 计算节点支撑域半径时的放大系数（只
// 用于移动最小二乘近似）
int MaxInflPtsNb_; // 计算点定义域中节点的最大个数，如果某计
// 算点定义域中的节点数大于MaxInflPtsNb_，
// 则只保留据该计算点最近的MaxInflPtsNb_各
//节点
int InflPtsNb_; // 计算点定义域中节点的个数
Vector<int> *InflPts_; // 计算点定义域中节点号数组
bool ReGenerateInflPts_; // 是否需要重新搜索计算点定义域中的节点
int MaxDerOrder_; // 所需计算的形函数导数的最高阶数
static int DEBUG_; // 是否输出调试信息
ofstream cdeb; // 调试信息输出文件
Vector<double>* N_; // 当前点的形函数向量
GenMatrix<double>* D1N_; // 当前点的形函数向量的一阶偏导数
GenMatrix<double>* D2N_; // 当前点的形函数向量的二阶偏导数
数据成员InflType_表示确定计算点定义域的方法，共有四种可能性：

```

1. “SELECT”：只取支撑域覆盖了该计算点且距其最近的InitPtsNb\_个节点作为其定义域中的点。
2. “ALL”：取支撑域覆盖了该计算点的所有节点作为其定义域中的点，各节点的支撑域半径取为(\*SupportSize\_)(I) = Scale×s(InitPtsNb\_)，其中

$s(\text{InitPtsNb}_i)$  为节点 $I$ 与距其最近的第 $\text{InitPtsNb}_i$ 个节点之间的距离。

3. “FIXED”：各点支撑域半径相等，由用户指定。长方体域目前只能用FIX指定。
4. “VARIABLE”：与前面几种方法不同，此时权函数是定义在计算点 $x$ 处的，而不是定义在节点 $x_i$ 处的，即权函数为 $\omega_x(x_i)$ 。计算点的定义域与权函数的支撑域重合，为以计算点为圆心的圆，其半径取为 $\text{Scale} \times (s(\text{InitPtsNb}_i))$ 。当 $\text{Scale}_i > 1$ 时，权函数支撑域覆盖的节点数大于 $\text{InitPtsNb}_i$ ，但此时只取距该计算点最近的 $\text{InitPtsNb}_i$ 个节点作为其定义域中的节点。

在基类Approximation中定义了一些成员函数，完成与近似函数相关的操作。主要有：

#### 1. 近似函数的计算

- `char* ApproxType()`返回近似函数的类型`ApproxType_`；
- `void ApproxType(char* type)`设置近似函数的类型`ApproxType_`；
- `void ShapeFun(Point* pX, int DerOrder, char DerKind[])`为纯虚函数，求解点（`Point* pX`）的形函数及其导数，其具体实现需要在其派生类中给出。参数`int DerOrder`（ $\leq 2$ ）表示所需计算的形函数的导数的最高阶数，缺省值为2。`DerKind`表示计算导数的方法，当`DerKind = "FULL"`时计算MLS近似的全导数，否则计算MLS近似的漫射（Diffuse）导数；
- `void ApproxAtEvPoint(EvPoint* pX, int DerOrder, char DerKind[])`通过调用函数`ShapeFun`求解计算点（`EvPoint* pX`）的近似函数。
- `void ApproxAtPoint(Point* pX, int DerOrder, char DerKind[])`通过调用函数`ShapeFun`求解点（`Point* pX`）的近似函数；
- `Vector<double>* Shape()`返回指向形函数数组的指针`N_`。调用函数`ShapeFun`后，即可通过函数`Shape`得到指向形函数数组的指针；
- `GenMatrix<double>* D1Shape()`返回指向形函数一阶导数数组的指针`D1N_`；
- `GenMatrix<double>* D2Shape()`返回指向形函数二阶导数数组的指针`D2N_`；

#### 2. 计算点定义域的确定

- `char* InflDomainType()`返回当前使用的确定计算点定义域的方法,即基类 `Approximation`的数据成员 `InflType_`;
- `void InflDomainType(char* type)`设置当前使用的确定计算点定义域的方法;
- `void MaxInflPtsNb(int n)`设置计算点定义域内节点的最大个数 `MaxInflPtsNb_`,并改变定义域内节点数组 `MaxInflPtsNb_`的大小。当 `n=0`时,将 `MaxInflPtsNb_`设置为节点的总数;
- `int MaxInflPtsNb(void)`返回计算点定义域内节点的最大个 `MaxInflPtsNb_`;
- `int InflPtsNb()`返回该计算点定义域内节点的个数 `InflPtsNb_`;
- `vector<int>* InflPts()`返回指向该计算点定义域内节点数组的指针 `InflPts_`;
- `void Radius(double* size)`设置固定支撑域的半径 `Radius_`;
- `double* Radius(void)`返回固定支撑域的半径 `Radius_`;
- `vector<double> *SupportSize()`返回各节点支撑域的半径数组;
- `double SupportSize(int i)`返回节点 `i`的支撑域半径;
- `void InitSupportSize(void)`为纯虚函数,计算各节点支撑域的半径,其具体定义需要在其派生类(如移动最小二乘类 `MLSBasis`)

### 2.3.2 权函数类 Weight

权函数类 `Weight`用来定义无网格法近似函数中的权函数,其数据成员为:

```
static double Eps_;// 用于奇异权函数中的小量,取为1.0E-5
```

```
static double Weight_a_;// 权函数中的常数
```

```
char WeightType_[20];// 权函数的类型(可取为GAUSS、SL345、SL234
```

分别对应于(1-6)~(1-8)各式)

```
char SupportRegion_[10];// 支撑域的形状: RECTANGLE - 矩形; CIRCLE - 圆形
```

```
bool SingularWeight_;// 是否使用奇异权函数以生成插值型形函数
```

其成员函数有:

- `double WeightFun(Point *pCenterPt, double* Radius, Point*pEvPoint, int DerOrder)`求解点 (`Point *pEvPoint`) 处的权函数及其导数,其中 `Radius`表示定义域半径数组, `pCenterPt`为该权函数的中心点, `DerOrder = 0`时 `WeightFun`返回权函数

的值, DerOrder = 1-3时WeightFun分别返回权函数对 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 的一阶导数值, DerOrder = 4-9时WeightFun分别返回权函数对 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 、 $xy$ 、 $yz$ 、 $xz$ 的二阶导数值。

- char\* WeightType()返回权函数的类型WeightType\_;
- void WeightType(char\* type)设置权函数的类型WeightType\_;
- bool SingularWeight()返回使用奇异权函数以生成插值型形函数的标志量SingularWeight\_;
- void SingularWeight(bool s)设置使用奇异权函数以生成插值型形函数的标志量SingularWeight\_;
- void SupportRegion( char \*str )设置支撑域形状参数SupportRegion\_;
- char\* SupportRegion()返回支撑域形状参数SupportRegion\_;
- double WeightPara()返回权函数中的常数Weight\_a\_;
- void WeightPara(double a)设置权函数中的常数Weight\_a\_;

### 2.3.3 移动最小二乘近似类MLSbasis

移动最小二乘近似类MLSbasis是近似函数基类Approximation和权函数类Weight的派生类(图2-2), 继承了这两个基类的所有成员, 并定义了一些移动最小二乘近似所特有的私有数据成员:

```
bool CenteredBasis_;// 是否使用中心基函数
char BasisType_[20];// 基函数的类型(线性基或二次基)
int BasisNb_;// 基函数的个数(线性基: 4; 二次基: 10)
bool SingularCheck_;// 是否检查矩阵A的奇异性
SymmMatrix<double>* A_;// 当前计算点的A矩阵
SymmMatrix<double>* Ax_;// A矩阵对x的偏导数
SymmMatrix<double>* Ay_;// A矩阵对y的偏导数
SymmMatrix<double>* Az_;// A矩阵对z的偏导数
SymmMatrix<double>* Axx_;// A矩阵对xx的偏导数
SymmMatrix<double>* Ayy_;// A矩阵对yy的偏导数
SymmMatrix<double>* Azz_;// A矩阵对zz的偏导数
```

```

SymmMatrix<double>* Axy_; // A矩阵对xy的偏导数
SymmMatrix<double>* Axz_; // A矩阵对xz的偏导数
SymmMatrix<double>* Ayz_; // A矩阵对yz的偏导数
GenMatrix<double>* B_; // 当前点的B矩阵
GenMatrix<double>* Bx_; // B矩阵对x的偏导数
GenMatrix<double>* By_; // B矩阵对y的偏导数
GenMatrix<double>* Bz_; // B矩阵对z的偏导数
GenMatrix<double>* Bxx_; // B矩阵对xx的偏导数
GenMatrix<double>* Byy_; // B矩阵对yy的偏导数
GenMatrix<double>* Bzz_; // B矩阵对zz的偏导数
GenMatrix<double>* Bxy_; // B矩阵对xy的偏导数
GenMatrix<double>* Bxz_; // B矩阵对xz的偏导数
GenMatrix<double>* Byz_; // B矩阵对yz的偏导数
Vector<double>* P_; // 当前点的基向量
GenMatrix<double>* D1P_; // P向量的偏导数
GenMatrix<double>* D2P_; // P向量的二阶偏导数

```

只有移动最小二乘近似类MLSbasis的成员函数才能存取其私有数据成员，其它函数只能通过类MLSbasis提供的公有成员函数来存取它们。类MLSbasis提供的公有成员函数有：

- void ShapeFun(Point\* pX, int DerOrder, char DerKind[])定义了MLS近似的形函数及其导数的计算方法，它给出了近似函数基类Approximation定义的纯虚函数ShapeFun的具体实现。
- void InfluentsPoints(Point\* pX)定义了搜索点（Point\* pX）的定义域中节点的方法，它给出了近似函数基类Approximation定义的纯虚函数InfluentsPoints的具体实现。
- void InitSupportSize(void)定义了MLS近似中各节点支撑域半径的确定方法，它给出了近似函数基类Approximation定义的纯虚函数InitSupportSize的具体实现。调用InitPtsNb、Scale或InflDomainType后必须调用InitSupportSize以重新计算各节点支撑域的半径。

- void CenteredBasis(bool c)设置是否采用中心基函数的标志CenteredBasis\_
- bool CenteredBasis()返回是否采用中心基函数的标志CenteredBasis\_。
- int BasisNb(void)返回基函数的个数。
- char\* BasisType()返回基函数的类型，“LINEAR”表示线性基，“QUADRIC”表示二次基。
- void BasisType(char\* type)设置基函数的类型。
- void SingularCheck(bool check)设置是否检查矩阵A的奇异性的标志SingularCheck\_。
- void SingularCheck(Point\* pX)检查矩阵A的奇异性，如奇异，则重新选取点(\*pX)定义域中的最后一个节点，直至消除A的奇异性。

## 第三章 三维无网格伽辽金法的讨论

### 3.1 引言

在第一章中，我们讨论了 MLS 近似的基本形式，以及各种无网格方法的基本原理—加权参量法导出。这一章我们对 MLS 近似的一些性质和应用做进一步的讨论；并对无网格配点法，无网格最小二乘法 and EFG 方法做一些对比，选定下一步求解板壳问题 EFG 方法的一些计算参数设置，为下一章求解板桥问题奠定基础。同时这些简单算例能够验证我们程序的正确性。

### 3.2 移动最小二乘近似 (MLS) 的进一步讨论

#### 3.2.1 移动最小二乘近似 (MLS) 的连续性与一致性

由于无网格法用于板壳问题除了其固有的不存在网格依赖性之外，一个很大的优势就在于它近似函数的良好的光滑性。对于薄板壳问题，它很容易构造  $C_1$  甚至更高连续性的近似函数；厚板壳问题可以通过构造较高阶的近似场函数而部分甚至全部消除剪切和薄膜锁死问题；直接 3-D 连续体模型则由于高度光滑的近似函数，很容易捕捉板壳厚度方向的场梯度，从而不像有限元那样在此类方案上容易导致系统矩阵过于刚硬。

从形函数的表达式(1-17)可以看出，形函数的连续性  $n$  由基函数和权函数决定，假设记权函数的连续性阶次为  $l$ ，则  $n = \min(k, l)$ ， $k$  为前面所述单项式的阶数。例如采用完全二次基和四次样条函数， $m = 6$ ， $l = 2$ ， $n = 2$ ，则形函数  $\phi$  就是  $C_2$  连续的。

可见 MLS 近似构造具有高度连续性的形函数非常直观，不需要有限元构造具有完备性的高阶单元形函数那样繁琐。单从直觉上来说，采用四次基( $m = 15$ )，采用八次样条函数作为权函数可以构造  $C_4$  连续的形函数，不过影响域将随之加大，高斯积分阶次也需要提高很多。由于在每个积分点都需要一个  $m$  阶矩阵  $A$  的逆，导致计算量大幅度提升。

再讨论一下 MLS 近似的一致性。如前面，假设基函数为  $k$  次完备单项式，则

MLS 近似就是  $k$  次一致的。例如：如果基函数是线性的，那么形函数  $\phi^k$  就满足线性一致。推广一步说，任何在基函数中出现的函数都可以用 MLS 重构出来<sup>[39]</sup>。如在基函数中包含奇异函数，则可以很方便地用于裂纹扩展计算中。

对于板壳问题的近似函数的一致性要求，需要包含刚体位移和常应变，所以至少基函数包含二次完全基。由于 MLS 近似并不是单纯的多项式拟合，一致性要求并不意味着线性基就一定会获得很差的精度。

### 3.2.2 移动最小二乘近似 (MLS) 的数值应用：曲面拟合

用来验证无网格近似函数 (MLS) 近似正确性的最简单方法是曲面拟合。下面将分别对

多项式函数

$$u = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6z^2 + a_7xy + a_8xz + a_9yz \quad (3-1)$$

其中  $a_0 \dots a_9$  为常系数。

正弦函数

$$u = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z \quad (3-2)$$

在区间  $x=[0,2]$ ， $y=[0,2]$ ， $z=[0,2]$  的封闭区间上做曲面拟合。并检验不同的基函数，不同形状的支撑域，影响域大小这些参数对精度的影响做，这些设置对下一步求解弹性力学问题和板壳问题是有用处的。

先定义几个相对误差衡量参数，作为曲面拟合精度的衡量。 $err_U$ ， $err_{DU}$ ， $err_{DDU}$  分别用来横向函数本身，函数一阶导数，函数二阶导数的误差。

$$err_U = \sqrt{\sum_{I=1}^N (u_I^h - u_I)^2} / \sqrt{\sum_{I=1}^N u_I^2} \quad (3-3)$$

$$err_{DU} = \sqrt{\sum_{I=1}^N [(u_{I,x}^h - u_{I,x})^2 + (u_{I,y}^h - u_{I,y})^2 + (u_{I,z}^h - u_{I,z})^2]} / \sqrt{\sum_{I=1}^N (u_{I,x}^2 + u_{I,y}^2 + u_{I,z}^2)} \quad (3-4)$$

$$err_{DDU} = \sqrt{L_{DDU}} / \sqrt{E_{DDU}} \quad (3-5)$$

其中

$$L_{DDU} = (u_{I,xx}^h - u_{I,xx})^2 + (u_{I,yy}^h - u_{I,yy})^2 + (u_{I,zz}^h - u_{I,zz})^2 + (u_{I,xy}^h - u_{I,xy})^2 + (u_{I,xz}^h - u_{I,xz})^2 + (u_{I,yz}^h - u_{I,yz})^2$$

$$L_{DDU} = u_{I,xx}^2 + u_{I,yy}^2 + u_{I,zz}^2 + u_{I,xy}^2 + u_{I,xz}^2 + u_{I,yz}^2$$

再定义一个参量  $\kappa$  来描述支撑域大小。

$$\kappa_i = \frac{s_i}{h_i} \tag{3-6}$$

其中  $s_i$  为固定支撑域半径， $h_i$  为布点间距。对于笛卡尔坐标系下的长方体支撑域,  $i = x, y, z$  (图 3-2)。

### (1) 二次多项式函数的曲面拟合

选定支撑域形状为长方体，布点方案  $8 \times 8 \times 8$ ，即布点间距  $h_i = 0.25$ ， $\kappa_i = 2.5$  ( $i = x, y, z$ )，并取其支撑域覆盖了该计算点的所有节点作为其定义域中的点。线性基和二次基的拟合误差如表 3-1 所示：

表 3-1 二次多项式曲面拟合误差

基函数	$err_U$ (%)	$err_{DU}$ (%)	$err_{DDU}$ (%)
线性基	0.703988	2.3386	118.165
二次基	$2.62567 \times 10^{-12}$	$1.48426 \times 10^{-10}$	$1.18928 \times 10^{-8}$

如 3.2.1 中所述，任何在基函数中出现的函数都可以由 MLS 近似重构出来，所以对于二次多项式函数，MLS 采用二次基函数则基本无误差。而对比之下，线性基则只有函数，函数的一阶导数精度较高，二阶导数误差就变得很大。对于三维问题，三次基  $m = 19$ ，这要求高阶的高斯积分，特别是需要很大的支撑域（对长方体支撑域保证矩阵  $A$  不奇异至少需要包含 64 个点！），这大大增加了计算费用。所以本文后面的计算都选择二次基， $m = 10$ 。

### (2) 正弦函数曲面的曲面拟合

#### ① 支撑域大小的影响以及最佳支撑域半径

采用  $10 \times 10 \times 10$  的布点方案。设置长方体支撑域大小分别为  $\kappa_i = 2, 3, 4, 5$ （防止截断误差影响，实际计算中支撑域半径应该设置为  $s_i + \Delta_i$ ， $\Delta_i$  为任一小量）。并取其支撑域覆盖了该计算点的所有节点作为其定义域中的点，图 3-1 表示了随支撑域半径大小而误差参数  $err_U$ ， $err_{DU}$ ， $err_{DDU}$  的变化（ $\kappa = 1.0$  时由于  $A$  矩阵

奇异，所以为虚拟值）。

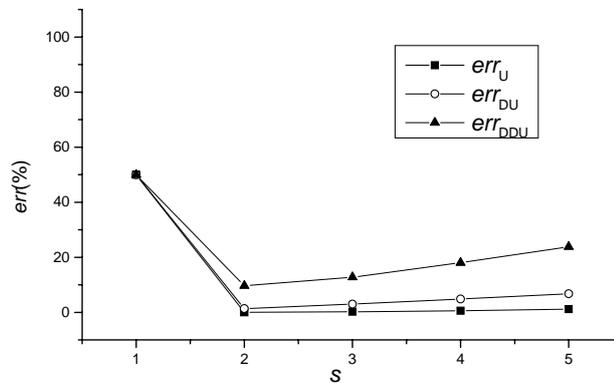


图 3-1 支撑域大小对 MLS 近似误差的影响

当没有足够的点来近似场函数时，MLS 近似中的矩阵  $A$  变得奇异，因此精度会很差。而随着定义域的增加，近似场和近似场的导数精度也随之上升，并且计算费用也会显著增加。所以一般认为存在一个最优的支撑域半径。在后面的计算中我们一般取定义域大小为  $\kappa = 2.0$ 。

$\kappa$  虽然是一个重要的参量，但根据不同的问题，最优的  $\kappa$  值往往并不相同。所以并不存在一个真正的普适的最优。例如 Krysl<sup>[13]</sup> 在求解 Kirchoff 板问题时给出的最优值（二维，圆形支撑域， $\kappa$  的定义类似）为  $\kappa = 3.4$  和  $\kappa = 3.9$ 。

### ② 支撑域形状的影响

球形支撑域(图 3-2)适应范围广，对于复杂的布点方式，复杂的形状都可以适应。但在计算形状规则的板问题时，特别是超薄板，长方体形(图 3-2)的支撑域往往是合意的。单就精度而言，在其他参数相同的情况下，对于同一个问题两者差异不大。

由于在计算系数时涉及系数矩阵  $A$  ( $m \times m$  阶) 的求逆，因此必须保证在所有计算点处矩阵  $A$  都为非奇异的。矩阵  $A$  非奇异的必要条件是  $x$  定义域内的节点数必须大于基函数  $p_i(x)$  的个数  $m$ ，同时这些点不能在一条直线上排列。对于长方体影响域而言，图 3-3 的排列就将造成  $A$  矩阵奇异，所以每个笛卡尔坐标方向都应至少包含 3 个点，即  $\kappa_i \geq 2.0 (i = x, y, z)$ 。

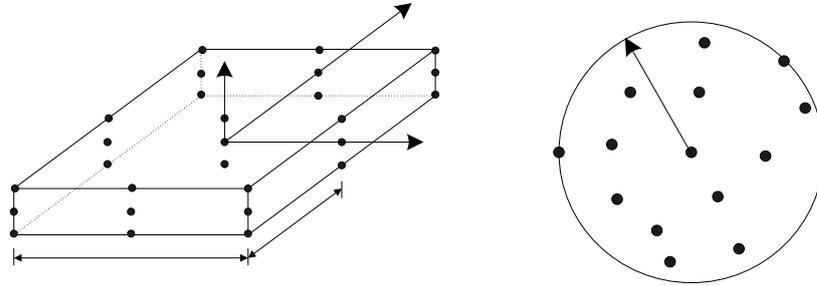


图 3-2 长方体支撑域和球（二维为圆）形支撑域

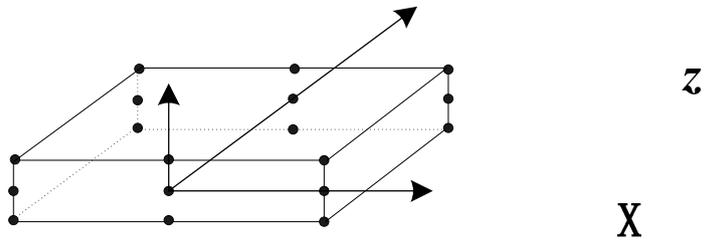


图 3-3 A 矩阵奇异的长方体支撑域

表 3-2 给出的是布点方案  $10 \times 10 \times 10$ ，方长方体支撑域 ( $\kappa_i = 2, i = x, y, z$ ) 和球形支撑域 ( $\kappa_i = 2.5, i = r$ ) 曲面拟合的误差结果。

表 3-2 不同形状的支撑域对 MLS 近似误差的影响

支撑域形状	$err_U$ (%)	$err_{DU}$ (%)	$err_{DDU}$ (%)
长方体	0.0565552	1.38615	9.67008
球形	0.0682873	1.80665	9.56222

### 3.3 三种无网格法（三维）的对比研究

从第一章我们知道，无网格方法有很多种，大体上分为两类，一类是基于

弱形式的 Galerkin 方法（局部 Petro-Glaerkin 法），一类是基于强形式的配点法和最小二乘配点法（加权最小二乘法）。Galerkin 方法精度高，稳定，但计算费用相对较高，而且有的方法需要背景网格积分。当然现代社会计算工具的飞速发展部分弥补了这一缺陷。基于配点格式无网格法精度差，但计算量小，也不需要背景网格。最小二乘配点格式无网格法介于两者之间，精度好于配点，也比配点法稳定，计算费用也相对 Galerkin 方法较低。

下面用两个简单的算例来对比这三种方法。以探究这三种方法的优缺点，确定再应用到板壳问题中该采用哪种方法，也同时验证我们的程序是否正确。

### 3.3.1 三维分片试验

在  $1 \times 1 \times 1$  的区域上进行分片试验。与常应变状态对应的位移场为：

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3z \\ v &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3z \\ w &= c_0 + c_1x + c_2y + c_3z \end{aligned} \quad (3-7)$$

其中  $a_0$ 、 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$ 、 $b_0$ 、 $b_1$ 、 $b_2$ 、 $b_3$ 、 $c_0$ 、 $c_1$ 、 $c_2$  和  $c_3$  均为常数。区域所有的边界点均按式(3-7)指定位移。分片实验要求由无网格法计算得到的所有内部节点的位移与式(3-7)相一致，并且得到所有的应力和应变在区域内为常数，并且必须与式(3-8)计算出来的结果相同：

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2Ga_1 + \lambda(a_1 + b_2 + c_3) \\ \sigma_{yy} &= 2Gb_2 + \lambda(a_1 + b_2 + c_3) \\ \sigma_{zz} &= 2Gc_3 + \lambda(a_1 + b_2 + c_3) \\ \tau_{xy} &= G(a_2 + b_1) \\ \tau_{xz} &= G(a_3 + c_1) \\ \tau_{yz} &= G(b_3 + c_2) \end{aligned} \quad (3-8)$$

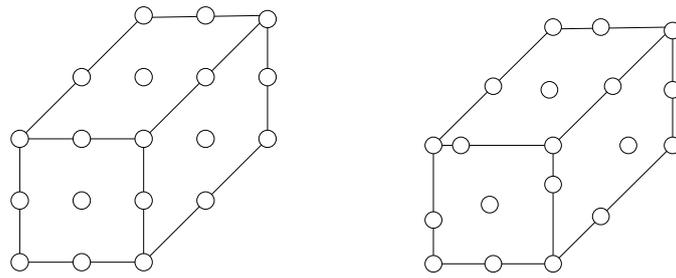


图 3-4 分片实验节点布置图

(左: 均匀布点, 右: 非均匀布点)

25

27

26

16

24

分别对均匀和非均匀两种布点方案 (图 3-4) 进行了分析。计算结果表明, 三维 EFG 法, 三维配点法, 三维加权最小二乘法严格通过了上述分片试验。

17

18

21

7

8

9

15

### 3.3.2 单拉问题

如图 3-5 所示单拉杆, 矩形截面, 尺寸为  $4 \times 2 \times 2$ 。材料参数  $E = 10000$ ,  $\nu = 1/3$ 。采用  $13 \times 5 \times 5$  的布点方案, 如图 3-6 所示。三种无网格方法都采用长方体支撑域, 大小设置为  $\kappa_i = 2$  ( $i = x, y, z$ )。

1

2

3

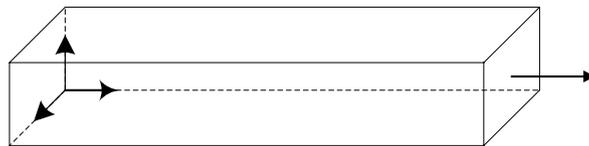


图 3-5 矩形截面单拉杆结构图

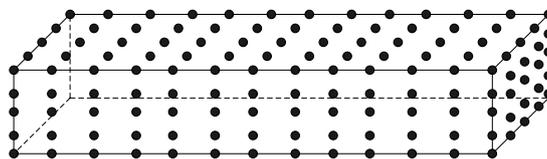


图 3-6 单拉杆布点方案

我们分为两种情况来分别分析这个问题。一种情况是按照对称条件放松左端约束, 这在有限单元法中是常用的手段。即如图 3-7 所示:  $z=1$  (实线) 上的节

点  $u_z = 0$ ,  $y = 1$  (虚线) 上的节点  $u_y = 0$ , 同时截面 ( $x = 0$ ) 上的全部节点  $u_x = 0$ 。  
 另一种情况是左端完全按照固支设置边界条件。

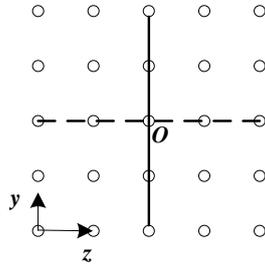


图 3-7 放松的位移边界约束

对于第一种情况, 图 3-8~3-10 列出了三维 EFG, 配点, 加权最小二乘法的位移  $u_x$ ,  $u_y$ , 应力  $\sigma_x$  的计算结果, 他们都得到了与精确解完全一致的解答, 运算时间 EFG > 加权最小二乘 > 配点。

对于第二种边界条件, 拉应力  $\sigma_x$  沿轴向  $x = [0, 12]$  的变化曲线如图 3-11 所示。无论配点法还是加权最小二乘法精度都不能满足要求。由于实际工程中大部分的情况下位移边界条件不能按照解析解指定, 或者比较复杂无法确定放松约束。而配点法和加权最小二乘法又对边界条件很敏感, 因此我们在直接三维连续体方案中采用了 EFG 方法。尽管付出了计算费用的代价, 而且需要背景网格。但它更稳定, 精度更高, 而且前处理简单。这尤其对于超薄板壳等问题具有另两种方法无法替代的优势。

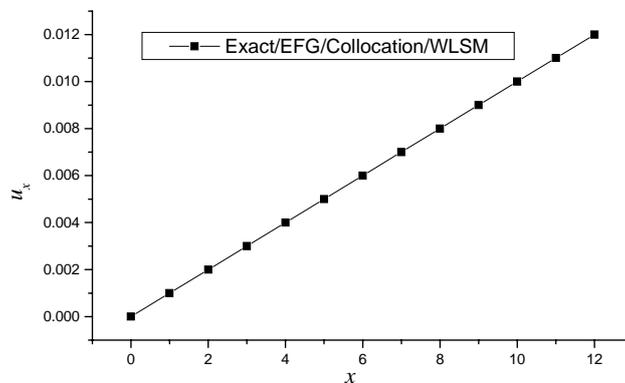


图 3-8 轴向位移  $u_x$  在区间  $x = [0, 12]$  上的变化曲线

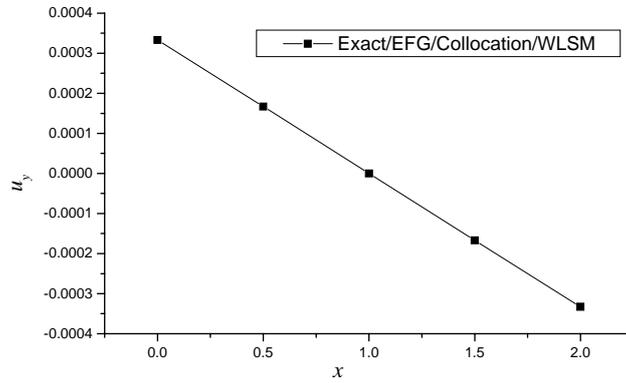


图 3-9  $y$  向收缩位移  $u_y$  在区间  $y = [0, 2]$  上的变化曲线

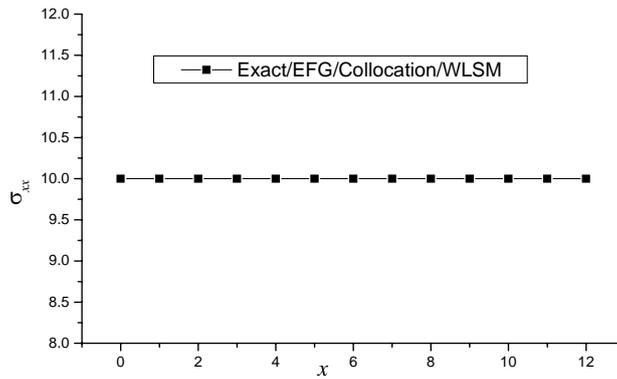


图 3-10 放松约束（或指定位移边界）情况下拉应力  $\sigma_x$  沿轴向变化曲线

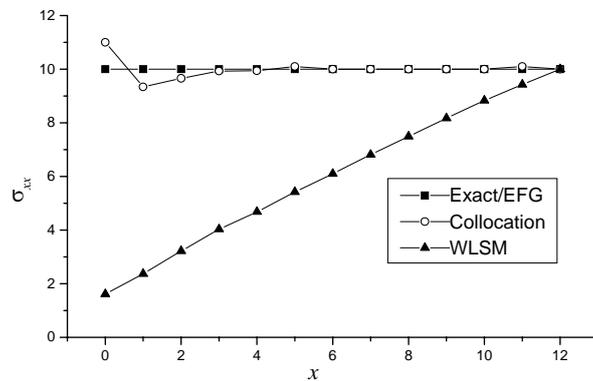


图 3-11 严格固支约束边界下，拉应力  $\sigma_x$  沿轴向变化曲线

### 3.4. 本章小结

在这一章中我们首先进一步讨论了移动最小二乘近似 (MLS) 的一些性质, 如其连续性和一致性如何确定, 并且应用 MLS 做了曲面拟合。以此作为算例, 我们讨论了 MLS 近似在数值计算中一些重要参数的选定, 讨论这些参数了对精度影响。这些工作为我们下一步求解板壳问题奠定了基础。

一是为了验证我们三维程序的正确性, 二是在三种无网格法中做出权衡取舍, 来确定到底采用哪一种方法求解板壳问题。我们选了分片实验和单拉问题作为算例进行了分析。尽管三种方法都通过了分片实验, 单拉问题也可以计算的很好。但面对位移约束比较“硬”的时候, 强形式的配点法和加权最小二乘法应力变得不好。因此我们认为这两种方法对于边界条件是不稳定的。因为我们决定在下一步求解板壳问题时候, 以计算费用为代价, 选定无网格伽辽金法 (EFG) 为计算方法。其中 MLS 近似的一些参数则以本章讨论的为基本出发点, 如选用二次基函数和四次样条函数作为权函数 ( $C_2$  连续); 对于板结构, 梁, 或者结构“平缓”的曲梁和壳选择长方体支撑域, 支撑域大小设置为  $\kappa_i = 2.0 (i=1,2,3)$ ; 对于大部分曲梁和壳则选用适应性强的球形支撑域。

## 第四章 板壳问题的三维无网格伽辽金直接分析法

## 4.1 EFG直接分析法与板壳理论对比

## 4.1.1 薄板壳和厚板壳

三维连续体方案不需要任何运动学假设，使用方便而且精度高，可同时求解厚板壳和薄板壳问题。布点时在厚度方向只需要布 2~5 层点，所以对比板壳理论计算费用不会显著增加。

## (1) 受集中荷载作用的固支厚曲梁（壳）

结构如图 4-1 所示，壳体外径  $R=5$ ，内径  $r=3$ ，宽  $B=2$ ，端部受集中荷载  $P=-100$ （负号表示向下）作用，材料参数  $E=10^4$ ， $\nu=1/3$ 。EFG 采用 315 个节点的布点方案（ $5 \times 21 \times 3$ ），如图 4-2 所示。MLS 近似采用三维二次基函数，球形支撑域，选离节点最近的 27 个有影响的结点组成影响域，采用  $3 \times 3 \times 3$  的高斯积分。图 4-4 给出  $r=4.0$ 、 $z=-1$ 、 $\theta=0 \sim 90^\circ$  的竖向位移  $u_y$  的计算结果。三维 EFG 直接分析法求得的  $y$  方向（竖向）挠度最大值为 -0.401，由 ANSYS 用 40 个 4 结点壳元的计算结果为 -0.37426。由于本结构属于厚壳，板壳理论结果有一定误差。由 ANSYS 用 160 个三维实体单元计算结果为 -0.40085，可见本文方法的精度是相当好的。

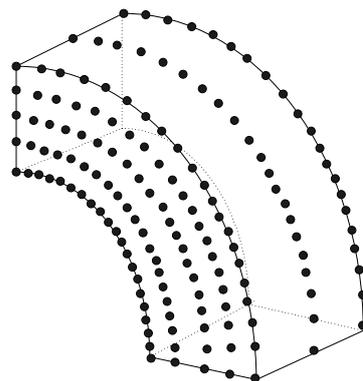
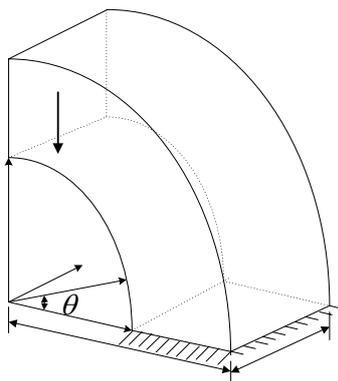


图 4-1 端部受荷载作用的固支曲梁（壳）      图 4-2 厚固支曲梁（壳）布点方案

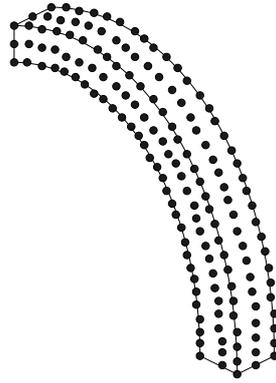


图 4-3 薄固支曲梁（壳）布点方案

(2) 受集中荷载作用的固支薄曲梁（壳）

将图 4-1 的壳体尺寸改为外径  $R=10$ ，内径  $r=9$ ，宽  $B=1$ ，集中荷载  $P=-1$ 。采用 279 个结点 ( $3 \times 31 \times 3$ )，如图 4-3 所示。图 4-5 给出了  $r=9.5$ 、 $z=-1$ 、 $\theta=0 \sim 90^\circ$  的竖向位移  $u_y$  计算结果。三维 EFG 直接分析方法计算得到的  $y$  方向挠度的最大值为 -0.809，由 ANSYS 用 60 个 4 结点壳元计算得到的结果为 -0.80245，两者仅相差 0.81%。

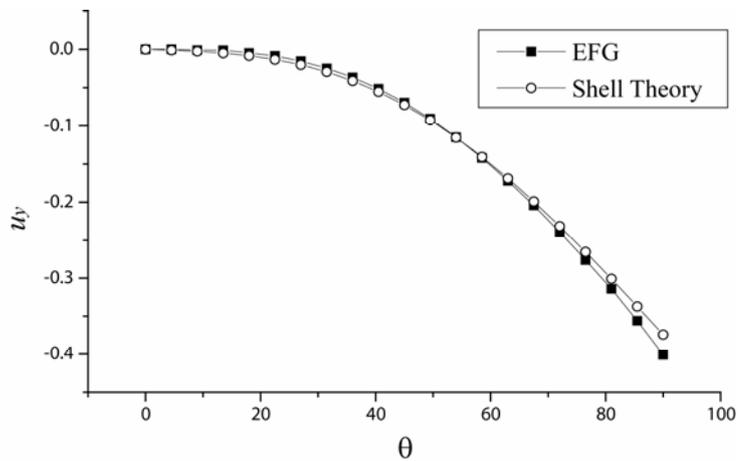


图 4-4 厚曲梁 EFG 法和板壳理论竖向位移  $u_y$  比较

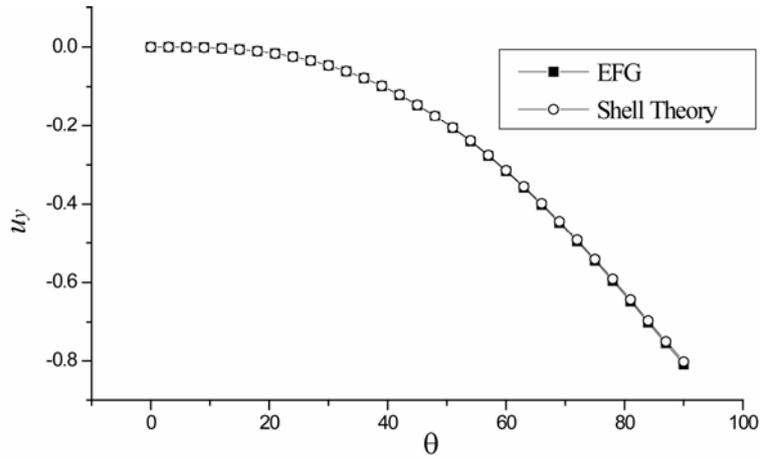


图 4-5 薄曲梁 EFG 法和板壳理论竖向位移  $u_y$  比较

#### 4.1.2 具有复杂本构关系的板壳

梁、板壳单元的另一个缺陷在于难以引入复杂的本构关系。而工程材料往往十分复杂（如混凝土材料），而且一个截面可能包含很多层材料（如复合的正交各向异性材料）。三维连续体方案并不像板壳理论那样把三维问题简化为二维问题，所以可以不受这些限制。

下面是一个简单的算例来说明这一点。尺寸为  $20 \times 20 \times 1$  的双层材料方板，上下材料层厚度均为 0.5，材料参数为  $E_1 = 10000$ ， $\nu_1 = 0.3$ ， $E_2 = 50000$ ， $\nu_2 = 0.1$ 。承受中央集中荷载  $P = -400$ ，取  $1/4$  进行分析，如图 4-6 所示。布点方案  $11 \times 11 \times 3$ （图 4-7），采用长方体支撑域， $\kappa_i = 2.0$ ， $2 \times 2 \times 2$  的高斯积分。沿  $y = 10$ ， $z = 0.5$ （中面）， $x = [0, 10]$  路径的挠度曲线如图 4-8 所示，其中有限单元法结果为相同布点方案下 ANSYS SOLID45 单元求得的结果作为参照结果。可以看出 EFG 的精度是可以的。

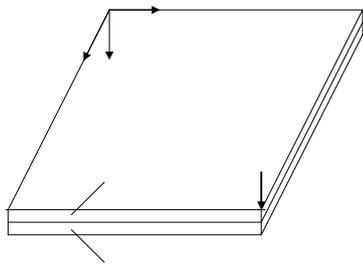


图 4-6 双层材料弹性板

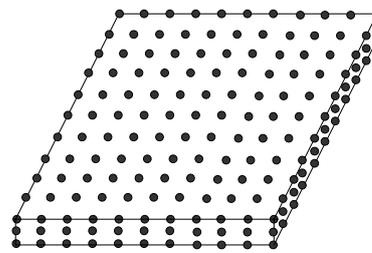


图 4-7 双层材料板布点方案

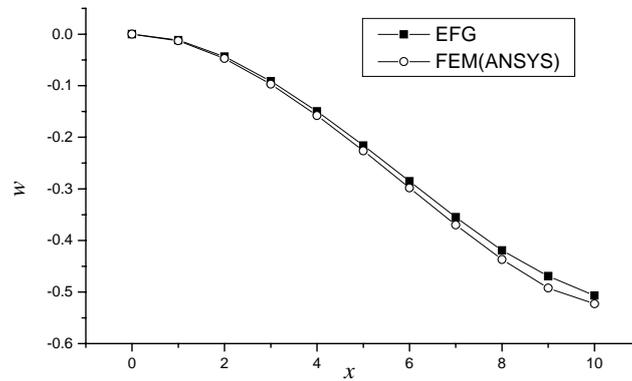


图 4-8 双层材料板挠度曲线

### 4.1.3 小结

在弹性的范围内，相对于板壳理论，直接连续体方案的优势在于：

- (1) 不需要任何运动学假设，原理简单，精度高，可同时用于薄板壳和厚板壳。
- (2) 相对于 Mindlin 板壳，在一定参数内避免了数值锁死。
- (3) 可以很方便地引入复杂本构关系。

其中关于数值锁死问题将在下一节详细讨论。

## 4.2 EFG直接分析法和有限单元直接分析法对比

### 4.2.1 EFG方法与有限单元法前处理对比

对于三维问题，划分六面体网格是一件十分繁琐和费神的事情。而无网格法的优势之一就是克服了这一缺陷。我们下面用一个简单的例子来说明这一问题。

一个截面为圆形的悬臂梁，右端承受集中荷载  $P=10$ ，材料参数  $E=10000$ ， $\nu=1/3$ 。

我们知道，即使是商用有限元软件，对圆柱体剖分六面体网格也不可能用自动剖分网格命令完成。这又归结为如何在圆平面内自动划分四边形网格。以 ANSYS 为例，自动划分网格的结果如图 4-9 所示。网格质量相当差。无论把 ANSYS

控制自动划分网格的参数 SMART SIZE 减的多小，它都很难划出满意的网格（图 3-9）。而且随着 SMART SIZE 参数的变小，网格数目剧增。所以必须手动划分网格，常用的技巧如图 4-10 所示，需要先把圆平面分为 5 个小面，然后再分别划分。这样划分的网格质量才会好。

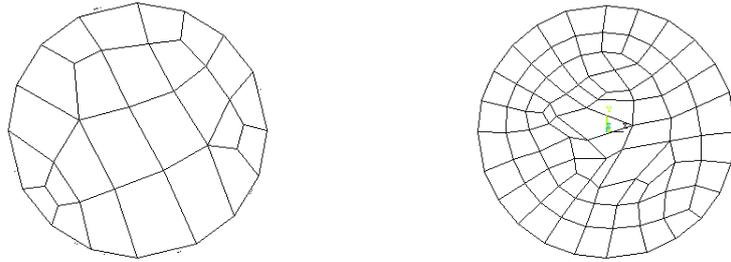


图 4-9 ANSYS 自动划分网格

(左: smart size = 8, 右: smart size =6)

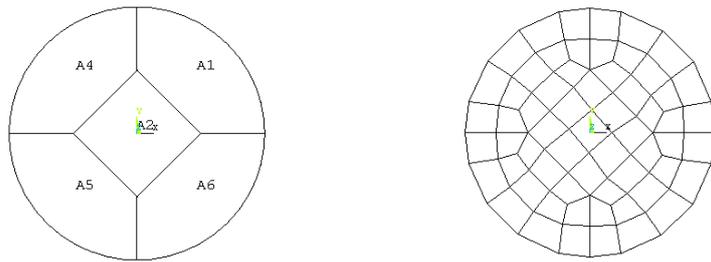


图 4-10 ANSYS 手工对圆平面划分网格步骤

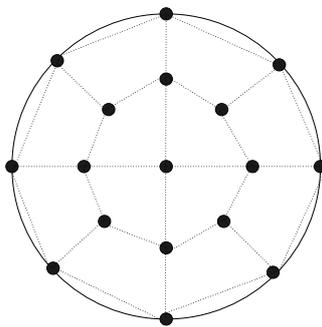


图 4-11 EFG 布点方案和积分背景网格

相比这一技巧，无网格法则不需要如此麻烦。图 4-11 是无网格法一截面内的布点方案，虚线划出了 EFG 法所需要的背景网格。EFG 采用球形影响域，取离计算点距离最近的 27 个点为定义域，采用  $3 \times 3$  的高斯积分。计算结果垂向挠度  $u_y$  和上表面横向应力  $\sigma_x$  如图 4-14, 4-15 所示。有限单元法由 ANSYS SOLID45 单元求得，布点方案与 EFG 布点方案相同。由于用正多边形 ( $I_1$ ) 拟合对圆 ( $I_2$ )，EFG 和有限单元法计算结果都根据惯性矩  $I$  值做了修正，即所有的结果都乘以  $I_1 / I_2$  (例如如图 4-13 的布点方案， $I_1 / I_2 = 0.81239$ )。值得注意的是，图 4-14, 4-15 可以看出，EFG 无论位移和应力精度都高于有限单元法 (ANSYS)。应力在端部的波动应该归结于约束过硬。

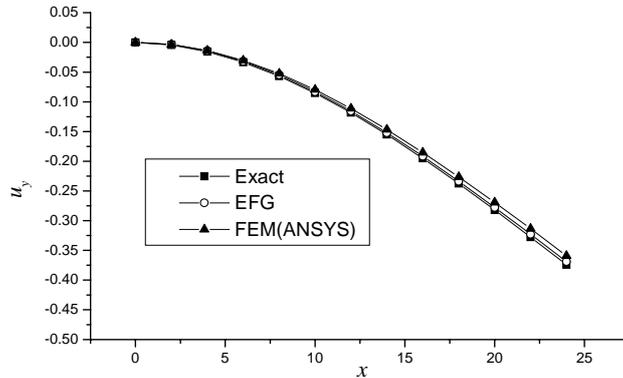


图 4-14 圆截面悬臂梁挠度曲线

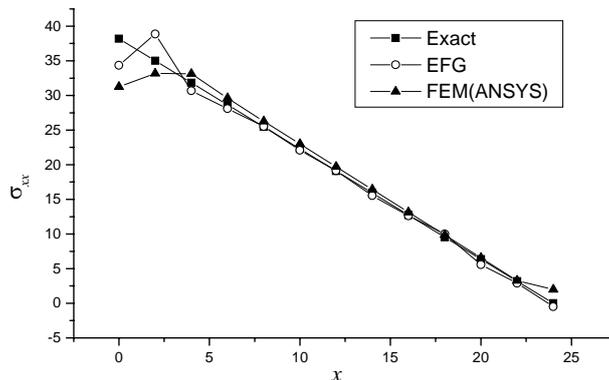


图 4-15 圆截面梁上表面正应力  $\sigma_{xx}$  分布

### 4.2.2 EFG与有限单元法精度对比

在第一章中我们已经从理论上说明了，有限单元法在三维连续体方案中的缺陷所在。这里我们通过一个算例来验证一下为什么有限单元法很少用于三维连续体方案。在相同的布点方案下，有限元法的精度比 EFG 差的多。

尺寸为  $20 \times 20 \times 1$  的四周固支的平板，承受中央集中荷载  $P = -400$ ，材料参数  $E = 10^4$ ， $\nu = 0.3$ 。由于对称条件，只取  $1/4$  进行分析（如图 4-16 所示），采用  $11 \times 11 \times 3$  节点离散，共有 363 个点（如图 4-17 所示），相当于有限单元法的 200（ $10 \times 10 \times 2$ ）个实体单元。

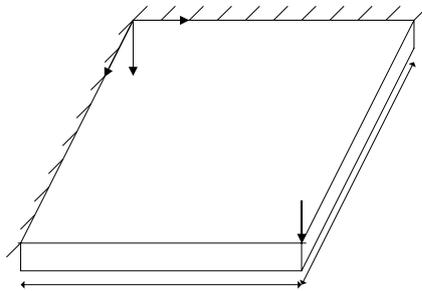


图 4-16 承受中央集中荷载的板（1/4）

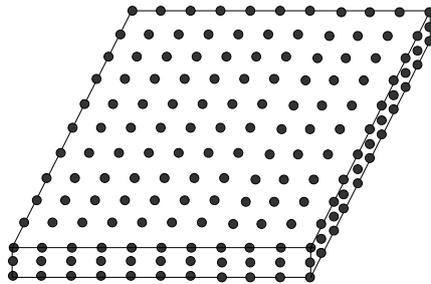


图 4-17 承受中央集中荷载的板（1/4）的布点方案

图 4-18 给出了挠度的计算结果，其中三维 EFG 直接分析中采用长方体影响域， $\kappa_i = 2.0$ 。板壳理论的计算结果由 ANSYS 采用 100 个 4 结点壳元求得；FEM1 是用有限元法采用与 EFG 相同的布点方案求得结果；FEM2 是在厚度方向上单元再加密一倍（ $10 \times 10 \times 4$ ）求得的结果；FEM3 是在面内两个方向单元各加密一倍（ $20 \times 20 \times 2$ ）求得的结果。

0  
x  
y  
z

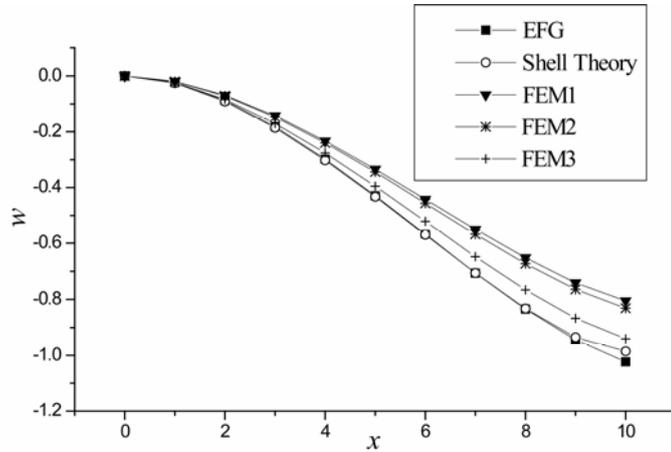


图 4-18 承受集中荷载方板的挠度变化曲线

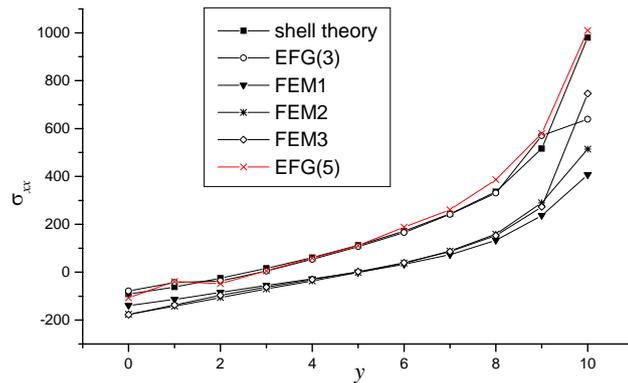


图 4-19 承受集中荷载方板的应力  $\sigma_{xx}$  曲线

Timoshenko<sup>[40]</sup>给出的中面挠度最大值的精确解为-0.978432，由 ANSYS 用壳单元得到的结果为-0.98545，三维 EFG 直接分析法得到的结果为-1.02343，FEM1 为-0.805，FEM2 为-0.831，FEM3 为-0.940。对比之下，有限单元法采用三维连续体方案处理板壳问题的弱点可以很明显地看出来。即使 FEM3 布点数是本文方案的 4 倍，精度仍然无法不能达到满意的程度。虽然 ANSYS 壳元给出的结果更接近 Timoshenko “精确”解，但 Timoshenko 解是板壳理论解，并不是真正的精确解。由 ANSYS 用 1600 个实体单元（ $20 \times 20 \times 4$ ）分析得到的结果应该更接近于精确解，其中面挠度最大值为-1.0517，可见本文方法比板壳理论更接近这个结

果。

图 4-19 给出了沿  $x=10.0$ ,  $z=0.0$ ,  $y=[0.0,10.0]$  路径上的正应力  $\sigma_{xx}$  的变化曲线。这里多加了一条 EFG(5) 是与 FEM2 布点相同 (厚度方向布 5 层点), 其余与上面 EFG 法设置相同的计算结果。可以看出无论应力还是位移, EFG 方法的精度都远高于有限单元法。

### 4.2.3 EFG 与有限元法对数值锁死的免疫力对比

#### (1) 体积锁死

对于有限单元法而言, 低阶单元在材料不可压或者接近于不可压时会发生自锁。

我们的算例依旧采用图 4-16 的结构模型, 将材料改为近似不可压材料, 即将泊松比改为  $\nu=0.4999$ , 其他参数与 4.2.2 节的设置相同。图 4-20 比较了板壳理论(由 ANSYS 用板壳单元求解)、三维 EFG 直接分析法和三维实体有限单元(采用与 EFG 相同的布点方案) FEAP 程序求得的挠度结果。此时挠度最大值的 Timoshenko<sup>[40]</sup>板壳理论解为 -0.806508。通过本算例可以看出, 对于此几乎不可压缩材料的问题, 有限单元法已经锁死, 而 EFG 直接分析法则基本不受影响。

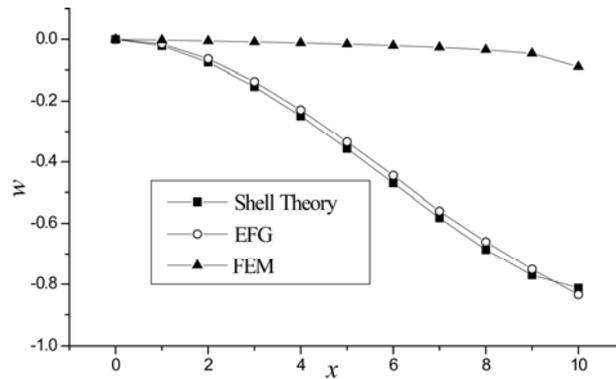


图 4-20 近似不可压缩材料的薄板受压的挠度曲线

由于 EFG 方法采用的 MLS 近似连续性好, 类似于有限单元法中的高阶单元, 所以能避免体积锁死的影响。

#### (2) 剪切锁死问题

悬臂梁尺寸  $2000 \times 2 \times 2$ ，端部受集中荷载  $P = -1$  作用，材料参数  $E = 10^9$ ， $\nu = 1/3$ 。如图 4-20 所示。由于在  $z$  方向无荷载，因此可以视为平面应力问题，弹性力学解析解为：

$$u_y = \frac{P}{6EI} \left[ 3\nu \left( y - \frac{1}{2} D \right)^2 (L - x) + \frac{1}{4} (4 + 5\nu) D^2 x + (3L - x)x^2 \right] \quad (4-1)$$

其中  $I = BD^3/12$  为转动惯量。图 3-23 中的 Exact 解就是由式(4-1)给出的解析解。

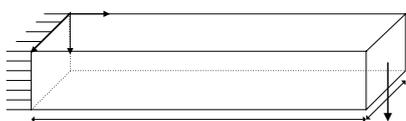


图 4-21 超薄悬臂梁结构示意图

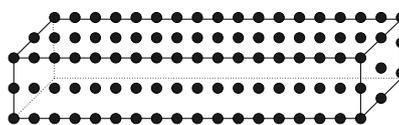


图 4-22 超薄悬臂梁布点方案（示意图）

三维 EFG 直接分析中采用  $51 \times 3 \times 3$  的布点方案，共 459 个结点，相当于有限元 200 个单元（ $50 \times 2 \times 2$ ），布点方案如图 4-22 所示。采用矩形支撑域， $\kappa = 2.0$ 。此时“单元”长宽比是  $40:1:1$ ，这对有限元法是不可想象的。但 EFG 法仍然给出了相当好的精度。挠度最大值与解析解相差 2.51%。图 4-23 中的 FEM 曲线为有限单元法采用与 EFG 相同的布点求得的挠度结果，此时已经“锁死”。如果把  $x$  方向布点加密一倍（“单元”长宽比减小为  $20:1:1$ ，对有限元法来说仍然是严重的“奢求”），经过计算，三维 EFG 直接分析法求得的最大挠度误差小于 0.5%。

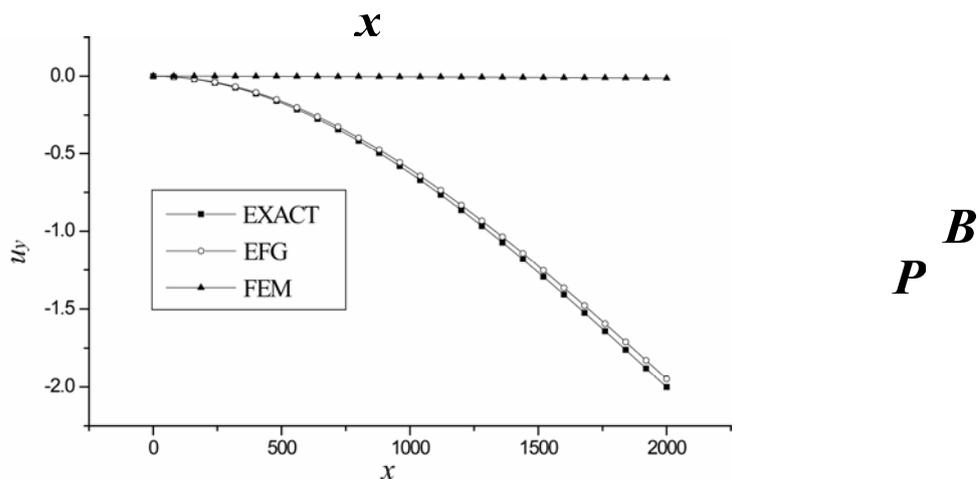


图 4-23 超薄悬臂梁受端部荷载作用的垂向挠度曲线

值得注意的是，梁的主要变形只是一个方向的，布点间距的长宽比达到 40:1:1 的情况下仍然能得到满意的结果，此时有限单元法三维实体单元基本完全锁死。对于复杂一些的板壳问题，经笔者仔细验算，三维 EFG 直接分析法在布点间距的长宽比小于 8:8:1 的情况下可以给出足够精确的结果。但如果进一步增大布点间距的长宽比则可能会出现或多或少的锁死现象由此可见，三维 EFG 直接分析法是在一定参数范围内上消除了剪切和薄膜锁死现象。

#### 4.2.4 小结

无网格法相对于有限单元法在采用直接连续体方案时，优势在于：

- (1) 无需要划分网格，这对于三维问题尤其具有优势。
- (2) 精度高，只需要在厚度方向布 2~5 层点足以捕捉场梯度，部分消除了三维连续体方案处理板壳问题需要划分单元多，布点多，计算费用高的缺陷。
- (3) 对体积锁死，剪切锁死，薄膜锁死免疫力更强。

对于无网格法为什么会具有如此好的性质，至今尚无定论。一种较为通常被大家认可的解释为 MLS 近似（或其它无网格近似函数）是一种“高阶”近似，根据要求可以得到  $C_2$ （本文）， $C_3$  甚至更高连续性的近似函数。这种高连续性对于数值计算是有益的<sup>[36]</sup>。

## 结 论

对于壳体和空间结构的分析，不仅要具有强健性，还应能同时用于厚结构和薄结构的分析，并且能避免各种锁死问题和极薄结构的不稳定性问题。

采用无网格伽辽金法和直接三维连续体方案求解板壳问题，原理简单，精度高，不用任何运动学假设，可以同时处理薄、厚板壳问题。网格法只需要在厚度方向上布置 3~5 层点就可以捕捉场函数在厚度方向的梯度，因此计算费用比板壳理论并无显著增加，这比有限单元法进步不小。同时他可以很方便地在板壳结构中引入复杂的本构关系，这是板壳理论很难做到的。三维 EFG 直接分析法很容易分析非线性问题，而此时基于板壳理论的分析方法将变得非常复杂和繁琐。另外，对于比 Mindlin 板壳，三维 EFG 直接分析法在一定参数的范围内可以消除数值锁死问题。

无网格的近似函数具有高度光滑性，因此克服了有限元法在求解此类问题时的缺陷。由于有限单元法的低阶单元不能模拟纯弯问题，因此往往需要在厚度方向布很多层点才能满足精度要求，但这增加了单元的尺寸方向比，使系统变得过于刚硬。在非线性问题中，虽然高阶单元能捕捉厚度方向的场梯度，但这同时也意味着厚度方向需要布多层点。所以有限元法的本身缺陷使得它在用于三维连续体方案时受到掣肘。

但本文方法的缺陷在于，一是它毕竟是一种连续体方案。因此很大的单元（影响域）尺寸比也会降低精度，当尺寸比变得极大时，也会产生“锁死”的现象。二是，本身 EFG 方法虽然稳定，精度高，但需要背景网格和高斯积分。所以不是纯无网格方法，而且计算费用也偏高。导师张雄教授提出的伽辽金配点法，伽辽金最小二乘法等同时吸收了 EFG 和配点法，最小二乘法的优点，能够在保证稳定性和精度的情况下大大减少了计算费用，因此可能是解决这个缺陷的一个不错的途径。

总而言之，无网格法和三维连续体方案虽然有一些缺陷，但仍然不失为求解板壳问题的一种好的思路。

## 参考文献

- [1] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element free Galerkin method. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.*, 1994, 37: 229-256
- [2] Lucy L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The Astron. J.*, 1977, 8(12): 1013-1024
- [3] Gingold R A, Moraghan J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Mon.Not.Roy. Astrou.Soc.*, 1977, 18: 375-389
- [4] Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing Kernal Particle methods. *Comput Methods Appl Mech Engrg.*, 1996, 139: 91-157
- [5] Duarte C A, Oden J T. Hp clouds: a h-p meshless method, *Numerical Methods for Partical Diferential Equations*, 1996, 12: 673-705
- [6] T Zhu, J D Zhang, S N Atluri. A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach. *Computational Mechanics*, 1998, 21: 223-235
- [7] S.N.Atluri, T.Zhu. A new meshless local Petrov-Galerkin(MLPG)approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 1998, 22: 117-127
- [8] 张雄, 宋康祖, 陆明万. Meshless Methods Based on Collocation with Radial Basis Function. *Comput.Mech*, 2000, 26(4): 333-343
- [9] 张雄, 宋康祖, 陆明万. Hermite type collocation with radial basis function. In *Proceedings of Internal Conference on Computational Engineering & Science*, August 20-25, 2000, Los Angeles, USA
- [10] B. Jumarhon, S. Amini, K. Chen. The Hermite collocation method using radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2000, 24: 607-611
- [11] 张雄, 刘小虎, 宋康祖, 陆明万. Least-square collocation meshless method, *Int.J.Numer.Methods Engrg.*, 2001, 51(9): 1089-1100
- [12] 张雄, 胡炜, 潘小飞, 陆明万. 加权最小二乘无网格法. *中国计算力学大会'2001 论文集*, 2001, 广州
- [13] P. Krysl, T. Belytschko. Analysis of thin plates by the element-free Galerkin method, *Comput. Mech*, 1996, 17: 26-35

- [14] P. Krysl, T. Belytschko. Analysis of thin shells by the element-free Galerkin method, *Int. J. Solids Struct.* 1996, 33:3057-3080
- [15] 张建辉, 邓安福, 王成. 无单元法在弹性地基板计算中的应用. *重庆建筑大学学报*, 第 21 卷, 第二期, 1999 年 4 月
- [16] GR. Liu, X. L. Chen. A meshfree method for static and free vibration analysis of thin plates of complicated shape. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 241(5): 839-855
- [17] L. Liu, G. R. Liu, V. B.C. Tan. Element free methods for static and free vibration analysis of spatial thin shell structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2002, 191: 5923-5942
- [18] Y.T.Gu and G.R.Liu. A meshless local Petrov-Galerkin(MLPG) formulation for static and free vibration analysis of thin plates. *Comp Modeling in Eng &sci*, 2001, 2 (4): 463-476
- [19] Shuyao Long, Qin Zhang. Analysis of thin plates by local boundary integral equation (LBIE) method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2002. 26: 707-718
- [20] J. Sladek, V. Sladek and H. A. Mang. Meshless formulation for simply supported and clamped plate problems. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 55: 359-375
- [21] J. Sladek, V. Sladek and H. A. Mang. Meshless local boundary integral equation method for simply supported and clamped plates resting on elastic foundation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2001, 191: 5943- 5959
- [22] J. Sladek, V. Sladek. A meshless method for large deflection of plates. *Computational Mechanics*, 2003, 30: 155-163
- [23] Vitor M, A. Leita. A meshless method for Kirchhoff plate bending problems. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 52: 1107-1130
- [24] J C simo T J R Hughes. On the variational foundation of assumed strain methods. *J. Numer. Methods Engrg.*, 1984, 20: 1685-1695
- [25] J C Simo and M S Rifa. A class of mixed assumed strain methods and the method of Incompatible modes. *Int. J. Numer Methods Engrg.*, 1990, 29: 1595-1638
- [26] T H H Pian and K Sumihara. Rational approach for assumed strain methods. *J. Appl. Mech. ASME*, 1986, 53: 51-54
- [27] 王勖成, 劭敏. 有限单元法基本原理和数值方法. 清华大学出版社, 第 2 版, 1997 年 3 月第 1 版
- [28] 方电新, 李卧东, 王元汉, 陈晓. 用无网格法计算平板弯曲问题. *岩土力学*, 2001 年 9 月, 第 11 卷第 3 期

- [29] Donning BM and Liu WK. Meshless methods for shear- deformable beams and plates. Comput. Methods Appl. Mech. Eng, 1998,.152: 47-71
- [30] W. Kanok-Nukulchai, W. Barry<sup>1</sup>, K. Saran-Yasoontorn and P. H. Bouillard. On elimination of shear locking in the element-free Galerkin method. Int. J. Numer. Meth. Engng, 2001, 52: 705-725
- [31] Noguchi H. Application of element free Galerkin method to analysis of Mindlin type plate/shell problems, 1997, Proc of ICE97, 918-923
- [32] Garcia O, Fancello EA, de Barcellos CS, and Duarte CA. Hp-Clouds in Mindlin's thick plate model. Int. J. Numer. Methods Eng, 2000, 47: 1381-1400
- [33] Noguchi H, Kawashima T, and Miyamura T. Element free analysis of shell and spatial structures. Int Numer. Methods Eng, 2000,.47: 1215-1240
- [34] Nam Ho Kim, Kyang Kook Choi, Jiun-Shyan Chen and Mark E. Botkin. Meshfree analysis and design sensitivity analysis for shell structures. Int. J. Numer. Meth. Engng, 2002, 53: 2087-2116
- [35] Belytschko T, WK Liu, Brian Moran. Nonlinear Finite Elements for continua and Structures 连续体和结构的非线性有限元, 庄茁译, 清华大学出版社, 2002 年 12 月, 第一版
- [36] Shaofan L, WK Liu. Meshfree and particle methods and their applications. Appl Mech Rev, vol 55, no 1, January 2002
- [37] W K Liu, Y Guo, S. Tang, and T. Belyschko. A multiple-quadrature eight node hexahedral finite element for large deformation elastoplastic analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 154: 69-132
- [38] Shaofan L, Wei H and WK Liu. Numerical simulation of large deformation of thin shell structures using meshless methods. Computational Mechanics, 8 Sep 1999
- [39] T. Belytschko, Y. Kongauz, D. Oigan, M. Fleming, P Krysl. Meshless methods: An overview and recent developments. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 1996, 139: 3-47
- [40] S Timoshenko. Theory of plates and shells. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1959.
- [41] 张雄, 刘岩. 无网格法, 清华大学出版社/Springer 出版社, 2004

## 致 谢

感谢国家自然科学基金（10172052）对本课题的支持。

本文的工作得到了导师张雄教授的悉心指导，生活上也得到了他热情的关怀和帮助，张老师治学态度严谨、态度随和，无论科学研究还是为人处世都使笔者受益匪浅。论文的研究还承蒙陆明万教授的热心指导，多次有益的讨论对论文的进展帮助很大。对两位老师不胜感激，能在研究生学习期间得到两位老师的指导，人生之幸事。

感谢实验室的师兄姐妹们在学习、生活中的帮助。潘小飞同学在程序的编制上给予了笔者很大帮助；马上同学向笔者提供了部分有限元结果；刘岩，胡炜都在理论上给笔者以深刻的教诲，还有一起生活，工作的所有同一个实验室的同学的无私鼓励和关怀，在此表示衷心感谢。

=====

## 声 明

本人郑重声明：所提交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名：\_\_\_\_\_日 期：\_\_\_\_\_

## 本人简历

1980年04月18日出生

1997.9-2001.7 在清华大学水利水电系学习，并于2001年7月获工学学士学位

2001年9月进入清华大学工程力学系计算固体力学专业直接攻读硕士学位，师从张雄教授

## 攻读硕士学位期间发表的学术论文

A: 在国内外核心学术刊物上发表的论文

1. 张伟，张雄，陆明万. 板壳问题的三维无网格伽辽金直接分析法. 计算力学学报, 2005年3月(已录用)