

文章编号: 1000-4750(2005)02-0050-06

几何精确的二维动态压电梁有限元格式

马 军, *张 雄

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘 要: 在几何精确梁理论的基础上, 通过引入压电材料的力-电耦合效应, 建立了一种几何精确的动态二维压电层合梁有限元格式。通过对这种几何精确有限元格式的实现, 得到了一个分析在空间做大尺度运动的压电柔性梁结构的方法。最后通过几个数值算例验证了这种格式的正确性, 并且给出了这种方法在分析压电结构时的可能用途。

关键词: 压电梁; 几何非线性; 主动控制; 大尺度; 柔性结构

中图分类号: O34 **文献标识码:** A

FINITE ELEMENT FORMULATION OF TWO-DIMENSIONAL GEOMETRICALLY-EXACT DYNAMICAL PIEZOELECTRIC BEAM

MA Jun, *ZHANG Xiong

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Based on the theory of geometrically-exact beam, a geometrically-exact finite element formulation of dynamical two-dimensional piezoelectric layered-beam is developed, in which the coupling effect of piezoelectric material is fully taken into consideration. The implementation of the proposed formulation leads to an efficient scheme for analyzing piezoelectric structures with large-scale motion. Three numerical examples are presented and the numerical results are compared with those obtained using ANSYS as well as with those in the literature. The accuracy and effectiveness of the present formulation is verified.

Key words: piezoelectric beam; geometrically nonlinear; active control; large scale; flexible structure

1 引言

集成有传感器和激励器的压电智能材料出现, 使得复杂柔性结构的动力学控制显得更为方便和强大。对于质量密度低及大柔性结构来说, 来源于大变形的几何非线性影响是不能够被忽略的。为了对这样的结构进行有效的控制, 需要对传感器输出的电压进行比较精确的估计, 然后计算出准确的补偿电压。但是, 对于压电层合结构的大变形的研

究还是比较不足的。Faria 和 Almedia^[1]分析了带压电激励器的复合梁的预弯曲特性。Thompson 和 Loughlan^[2]通过实验研究了带条状压电陶瓷激励器结构的主动弯曲控制。Icardi 和 Sciuva^[3]进行了多层压电板的大变形及应力分析。Reddy^[4]得出了一种集成有传感器和激励器的层合压电板结构的大变形分析方法。Chandrashekhara 和 Bhatia^[5]发表了一种智能层合板主动控制的有限元分析方法。Gaudenzi

收稿日期: 2003-06-03; 修改日期: 2003-11-24

作者简介: 马军(1978), 男, 广州人, 硕士生,

*张雄(1966), 男, 宁夏人, 教授, 博士, 从事计算动力学研究工作(E-mail: xzhang@tsinghua.edu.cn)

和 Bathe^[6]研究了一种能够计算带力电耦合性质的压电连续体的有限元迭代方法。Oh et al.^{[7][8]}研究了压电层合板在热电载荷下的振动特性。

本文在几何精确梁理论^[9]基础上,建立了一种新的考虑力-电耦合效应的几何精确动态二维压电梁有限元格式,采用 Newmark 法进行时间积分,采用 Newton-Raphson 法求解非线性方程组。

2 位移-应变关系

考查在空间做大位移、大转动的压电梁,考虑 x - z 平面的运动,如图 1 所示。采用平截面假设,即假设梁横截面在运动过程中仍然保持平面,但不再与轴线垂直,因此计入了剪切变形。建立随体坐标系 QXZ (坐标轴单位方向矢量为 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_3)和空间固定坐标系 Oxz (坐标轴单位方向矢量为 \mathbf{e}_1 、 \mathbf{e}_2)。初始时刻两个坐标系重合,如图 1 所示。变形前梁中性面上的点 Q_0 在梁变形后移动到点 Q (其物质坐标为 $[X, 0]$, 空间坐标为 $[X + u(X), w(X)]$), 而变形前梁上任一质点 P_0 在梁变形后移动到点 P (其物质坐标为 $[X, Z]$, 空间坐标为 $[x, z]$)。

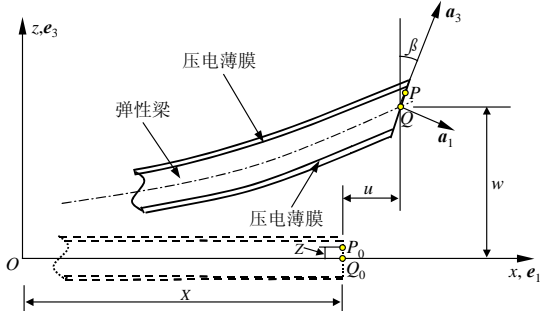


图 1 大位移和大转动梁

Fig.1 A beam undergoing large scale motion

设任意时刻压电梁的横截面与竖直方向的夹角为 β , 如图 1 示。此时梁上任一质点 P 的坐标为:

$$\begin{cases} x = X + u(X) + Z \sin \beta(X) \\ z = w(X) + Z \cos \beta(X) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $u(X)$ 和 $w(X)$ 表示梁截面中心点 Q 的位移。

式(1)中对于转角 β 没有做任何近似,因此是几何精确^[9]的。在 Green 应变张量 \mathbf{E} 中忽略与 Z^2 有关的项,可得非零项为:

$$E_{XX} = E^0 + ZK^b, \quad 2E_{XZ} = \Gamma \quad (2)$$

其中

$$E^0 = u_{,X} + \frac{1}{2}(u_{,X}^2 + w_{,X}^2) \quad (3)$$

$$K^b = [(1 + u_{,X}) \cos \beta - w_{,X} \sin \beta] \beta_{,X} \quad (4)$$

$$\Gamma = (1 + u_{,X}) \sin \beta + w_{,X} \cos \beta \quad (5)$$

这里 E^0 和 Γ 在同一横截面内为常数, K^b 度量了转动对横截面的影响。

3 压电梁的虚功方程

压电梁的虚功方程为:

$$\delta \Pi = \delta \Pi_b + \delta \Pi_a + \delta \Pi_s = 0 \quad (6)$$

式中 $\delta \Pi_b$ 、 $\delta \Pi_a$ 和 $\delta \Pi_s$ 分别为压电梁基体、作动层和传感层中外力、内力和惯性力的虚功。

3.1 压电梁基体

通过引入第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量 \mathbf{S} , 可得压电梁基体中外力、内力和惯性力的虚功为:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_b = & \int_{\Omega_0} (\delta E_{XX} S_{XX} + 2\delta E_{XZ} S_{XZ}) dV \\ & - \delta \Pi_b^{\text{ext}} - \delta \Pi_b^{\text{kin}} \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $\delta \Pi_b^{\text{ext}}$ 表示外力的虚功:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_b^{\text{ext}} = & \int_{\Omega} \delta U_I \rho_0 b_I^{(m)} dV + \int_{\Gamma_I} \delta U_I \bar{T}_I dS \\ = & \int_{\Omega} \delta u_i \delta_{il} \rho_0 b_I^{(m)} dV + \int_{\Gamma_I} \delta u_i \delta_{il} \bar{T}_I dS \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $b_I^{(m)}$ 和 \bar{T}_I 分别为体积力向量和表面力向量的分量。 $\delta \Pi_b^{\text{kin}}$ 为惯性力的虚功:

$$\delta \Pi_b^{\text{kin}} = - \int_{\Omega} \delta u_i \delta_{il} \rho_0 \dot{v}_I dV \quad (9)$$

将式(2)及(8)-(9)代入式(7)中,并考虑到 $dV = dX dA$, 得:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_b = & \int_L (\delta E^0 T_b + \delta \Gamma S_b + \delta K^b M_b) dX \\ & - \left[\int_{\Omega} \delta u_i \delta_{il} \rho_0 (b_I^{(m)} - \dot{v}_I) dV + \int_{\Gamma_I} \delta u_i \delta_{il} \bar{T}_I dS \right] \end{aligned} \quad (10)$$

其中 T_b 、 S_b 和 M_b 分别为截面轴力、截面剪力和截面弯矩:

$$T_b = \int_A S_{XX} dA, \quad S_b = \int_A S_{XZ} dA, \quad M_b = \int_A S_{XX} Z dA \quad (11)$$

3.2 压电层

设压电层内某点的电势为 φ , 则电场强度为:

$$\mathbf{G} = [G_X \quad G_Y \quad G_Z]^T = -[\varphi_{,X} \quad \varphi_{,Y} \quad \varphi_{,Z}]^T \quad (12)$$

考虑到压电梁在 X - Z 平面内运动,且压电层为薄膜,根据膜的性质可知其剪切应力 S_{XY} 、 S_{YZ} 、 S_{ZX} 及 Y 与 Z 方向的正应力 S_{YY} 和 S_{ZZ} 均为零。为简单起见,假设梁单元的压电层完全被电极覆盖,因此电压在梁的轴向和横向为常数。此时空间电场强度大小为 $-\varphi/t$ (其中 t 为压电层厚度),方向为垂直梁表面。故:

$$G_Z = \varphi_{,Z} = -\varphi/t, \quad G_X = G_Y = 0 \quad (13)$$

假设压电层与基体梁之间没有相对滑移,因此

压电层的轴向应变和梁表面的正应变相同。在梁的应变表达式中令 $Z = h/2$ 即可得到压电层的轴向应变:

$$E_{XX} = E^0 + \frac{h}{2} K^b \quad (14)$$

其中各项定义同压电梁基体。

在初始构型中, 线性压电材料的本构关系为:

$$\begin{cases} \mathbf{S} = \mathbf{C}\mathbf{E} - \mathbf{e}^T \mathbf{G} \\ \mathbf{D} = \mathbf{e}\mathbf{E} + \mathbf{L}\mathbf{G} \end{cases} \quad (15)$$

此时第一个方程可视为驱动方程, 由电场 \mathbf{G} 得到应力 \mathbf{S} , 从而产生驱动力; 第二个方程可视为检测方程, 由变形 \mathbf{E} 得到电位移 \mathbf{D} , 从而让外界获得状态信息。其中 \mathbf{C} 为弹性矩阵, \mathbf{L} 为介电常数矩阵, \mathbf{e} 为压电应力常数矩阵:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = [S_{XX} \quad S_{YY} \quad S_{ZZ} \quad S_{XY} \quad S_{YZ} \quad S_{ZX}]^T$$

$$\mathbf{D} = [D_X \quad D_Y \quad D_Z]^T$$

$$\mathbf{E} = [E_{XX} \quad E_{YY} \quad E_{ZZ} \quad 2E_{XY} \quad 2E_{YZ} \quad 2E_{ZX}]^T$$

$$\mathbf{G} = [G_X \quad G_Y \quad G_Z]^T$$

格林应变 \mathbf{E} 中的非零量为 E_{XX} , \mathbf{G} 中非零量为 G_Z , 对应的应力和电位移分别为 $S_{XX} = E^P E_{XX} - e_{31} G_Z$ 和 $D_Z = e_{31} E_{XX} + L_3 G_Z$, 其中 E^P 为压电层杨氏模量。

参考弹性层的推导, 可得压电层中内力的虚功:

$$\delta \Pi_P = \int_{\Omega_P} (\delta E_{XX}^P S_{XX}^P - \delta G_Z D_Z) dV \quad (16)$$

设压电梁单元下表面 ($-h/2$ 处) 贴有一层起传感作用的压电膜 P_1 , 上表面 ($+h/2$ 处) 贴有一层起激励作用的压电膜 P_2 。忽略激励层的惯性, 并假设激励层上没有外加电荷, 则激励层中力的总虚功为:

$$\delta \Pi_a = \int_{\Omega_a} (\delta E_{XX}^a S_{XX}^a - \delta G_Z^a D_Z^a) dV \quad (17)$$

由式(13)和(14)可知:

$$E_{XX}^a = E^0 + \frac{h}{2} K^b, \quad G_Z^a = -\frac{\varphi^a}{t} \quad (18)$$

将式(18)代入(17)中, 得:

$$\delta \Pi_a = \int_L (\delta E^0 T_a + \delta K^b M_a) dX + \int_L \delta \varphi^a D^{Pa} dX \quad (19)$$

其中:

$$T_a = A_a (E^P E_{XX}^a - e_{31} G_Z^a)$$

$$M_a = A_a \frac{h}{2} (E^P E_{XX}^a - e_{31} G_Z^a) \quad (20)$$

$$D^{Pa} = \frac{A_a}{t} (e_{31} E_{XX}^a + L_3 G_Z^a)$$

A_a 为激励层截面面积, h 为梁截面高度, E^P 为压电材料的弹性常数。

对于传感层, 利用同样的方法可以得到:

$$\delta \Pi_s = \int_L (\delta E^0 T_s + \delta K^b M_s) dX + \int_L \delta \varphi^s D^{Ps} dX \quad (21)$$

其中:

$$T_s = A_s (E^P E_{XX}^s - e_{31} G_Z^s)$$

$$M_s = -A_s \frac{h}{2} (E^P E_{XX}^s - e_{31} G_Z^s) \quad (22)$$

$$D^{Ps} = \frac{A_s}{t} (e_{31} E_{XX}^s + L_3 G_Z^s)$$

A_s 为传感层截面面积, h 为梁截面高度, E^P 为压电材料的弹性常数。

将式(10)、(19)、(21)代入到式(6)中, 得到压电梁的虚功方程为:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int_L (\delta E^0 T_b + \delta I S_b + \delta K^b M_b) dX \\ & - [\int_{\Omega} \delta u_i \delta_{il} \rho_0 (b_l^{(m)} - \dot{v}_l) dV + \int_{\Gamma_f} \delta u_i \delta_{il} \bar{T}_l dS] \\ & + \int_L (\delta E^0 T_a + \delta K^b M_a) dX + \int_L \delta \varphi^a D^{Pa} dX \\ & + \int_L (\delta E^0 T_s + \delta K^b M_s) dX + \int_L \delta \varphi^s D^{Ps} dX \\ = & \int_L [\delta E^0 (T_b + T_a + T_s) + \delta I S_b \\ & + \delta K^b (M_b + M_a + M_s)] dX \\ & + \int_L (\delta \varphi^a D^{Pa} + \delta \varphi^s D^{Ps}) dX \\ & - [\int_{\Omega} \delta u_i \delta_{il} \rho_0 (b_l^{(m)} - \dot{v}_l) dV + \int_{\Gamma_f} \delta u_i \delta_{il} \bar{T}_l dS] \\ = & 0 \end{aligned} \quad (23)$$

由于应变为小应变, 本构关系中 Green 应变和第二类 Piola-Kirchhoff 应力之间为线弹性关系:

$$S_{XX} = E E_{XX}, \quad S_{XZ} = 2G E_{XZ} \quad (24)$$

弹性层的广义力变量可以简化为:

$$T_b = E A E^0, \quad S_b = \kappa G A \Gamma, \quad M_b = E I K^b \quad (25)$$

其中 A 是横截面面积, I 是相对中心线的转动惯量, κ 代表由于 S_{XZ} 在横截面不是常数而产生的剪切修正因子。为简化计算, 类似地定义以下广义力变量:

$$T = T_b + T_a + T_s, \quad S = S_b, \quad M = M_b + M_a + M_s \quad (26)$$

将式(26)代入式(23)得:

$$\begin{aligned} \delta II = & \int_L (\delta E^0 T + \delta I S + \delta K^b M) dX \\ & + \int_L (\delta \varphi^a \mathbf{D}^{Pa} + \delta \varphi^s \mathbf{D}^{Ps}) dX \\ & - \left[\int_{\Omega} \delta u_i \delta_{il} \rho_0 (b_l^{(m)} - \dot{v}_l) dV + \int_{\Gamma_i} \delta u_i \delta_{il} \bar{T}_l dS \right] \end{aligned} \quad (27)$$

4 有限元离散

对广义位移进行插值:

$$u = \sum_{\alpha=1}^2 N_{\alpha}(X) u_{\alpha} \quad (28)$$

$$w = \sum_{\alpha=1}^2 N_{\alpha}(X) w_{\alpha} \quad (29)$$

$$\mathbf{B}_{\alpha} = \begin{bmatrix} (1+u_{,X}) N_{\alpha,X} & w_{,X} N_{\alpha,X} & 0 & 0 & 0 \\ \sin \beta N_{\alpha,X} & \cos \beta N_{\alpha,X} & \chi N_{\alpha} & 0 & 0 \\ \beta_{,X} \cos \beta N_{\alpha,X} & -\beta_{,X} \sin \beta N_{\alpha,X} & (\chi N_{\alpha,X} - \Gamma \beta_{,X} N_{\alpha}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\mathbf{D}_T = \begin{bmatrix} EA + 2A_p E^P & 0 & 0 & \frac{e_{31} A_p}{t} & \frac{e_{31} A_p}{t} \\ 0 & \kappa GA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI + \frac{E^P A_p h^2}{2} & \frac{e_{31} A_p h}{2t} & -\frac{e_{31} A_p h}{2t} \\ \frac{e_{31} A_p}{t} & 0 & \frac{e_{31} A_p h}{2t} & -\frac{L_3 A_p}{t^2} & 0 \\ \frac{e_{31} A_p}{t} & 0 & -\frac{e_{31} A_p h}{2t} & 0 & -\frac{L_3 A_p}{t^2} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\mathbf{f}_{\alpha} = \int_{\Omega} N_{\alpha} \rho_0 \mathbf{b}^{(m)} dV + \int_{\Gamma_i} N_{\alpha} \bar{\mathbf{T}} dS \quad (36)$$

$$\mathbf{M}_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} N_{\alpha} \rho_0 N_{\beta} dVI \quad (37)$$

$\mathbf{b}^{(m)}$ 和 $\bar{\mathbf{T}}$ 分别是体积力向量和表面力向量。

采用 Newton-Raphson 法求解式(31), 得:

$$\Psi_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} - \int_L \mathbf{B}^T \mathbf{S}_{n+1} dX - \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}}_{n+1} = 0 \quad (38)$$

所以切线刚度阵可以表示为:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_G)_{\alpha,\beta} = & \int_L \left(N_{\alpha,X} \begin{bmatrix} T^P & 0 & M^b \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & T^P & -M^b \sin \beta & 0 & 0 \\ M^b \cos \beta & -M^b \sin \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} N_{\beta,X} + N_{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} N_{\beta} \right. \\ & \left. + N_{\alpha,X} \begin{bmatrix} 0 & 0 & G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M^b \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} N_{\beta} + N_{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_1 & G_2 & -M^b \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} N_{\beta,X} \right) dX \end{aligned} \quad (40)$$

其中:

式中 $N_{\alpha}(X)$ 为一维两节点单元的形函数, u_{α} 、 w_{α} 和 β_{α} 分别为 u 、 w 和 β 的节点值。将式(3)-(5)和(28)代入式(27), 化简可得

$$\delta II = \sum_{\alpha=1}^2 \delta \mathbf{u}_{\alpha}^T \left[\int_{\Omega} \mathbf{B}_{\alpha}^T \mathbf{S} dV + \sum_{\beta=1}^2 \mathbf{M}_{\alpha\beta} \dot{\mathbf{v}}_{\beta} - \mathbf{f}_{\alpha} \right] = 0 \quad (31)$$

其中:

$$\mathbf{u}_{\alpha}^T = [u \quad w \quad \beta \quad \varphi^a \quad \varphi^s] \quad (32)$$

$$\mathbf{S} = [T \quad S \quad M \quad \mathbf{D}^{Pa} \quad \mathbf{D}^{Ps}]^T = \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{D}_T \mathbf{B}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \quad (33)$$

$$\mathbf{K}_T = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{u}} = \int_L \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} dX + \int_L \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{S} dX - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \quad (39)$$

$$= \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_L$$

其中 \mathbf{K}_M 为材料刚度阵, \mathbf{K}_G 为几何刚度阵, \mathbf{K}_L 表示随变形变化的载荷的切线形式, 本文不考虑此类载荷, 故 $\mathbf{K}_L = 0$ 。

\mathbf{K}_G 表示来自于非线性矩阵 \mathbf{B} 线性化时得到的

几何刚度阵, 具体形式经过简化后如下:

$$G_1 = S^p \cos \beta - M^b \beta_{,x} \sin \beta$$

$$G_2 = -S^p \sin \beta - M^b \beta_{,x} \cos \beta$$

$$G_3 = -S^p \Gamma - M^b \beta_{,x} \chi$$

式(38)可采用 Newmark 方法进行积分。

5 数值算例

(1) 压电梁长度 $L=0.2\text{m}$, 截面宽 $b=0.032\text{m}$ 。中间弹性基体为普通钢材, 厚度 $h=0.02\text{m}$, 弹性模量 $E=2.1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$, 泊松比 $\nu=0.3$; 上下压电层为压电陶瓷, 厚度 $h=0.005\text{m}$, 弹性模量 $E=8.13 \times 10^{10} \text{Pa}$, $e_{31}=-5.2\text{C/m}^2$, $L_3=13.06 \times 10^{-9} \text{c/v}\cdot\text{m}$ 。上下压电层极化方向相同, 并在上压电层的上表面和下压电层的下表面各作用 100V 电压。图 2 和图 3 分别比较了两端简支压电梁和悬臂压电梁的横向位移, 其结果与文献[10]的结果非常接近, 从而证明了本文推导理论的正确。

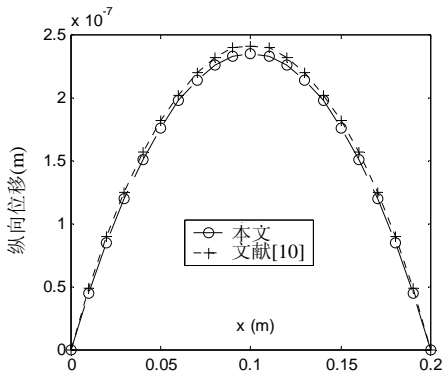


图 2 两端简支压电梁横向位移

Fig.2 Lateral displacement of simply supported beam

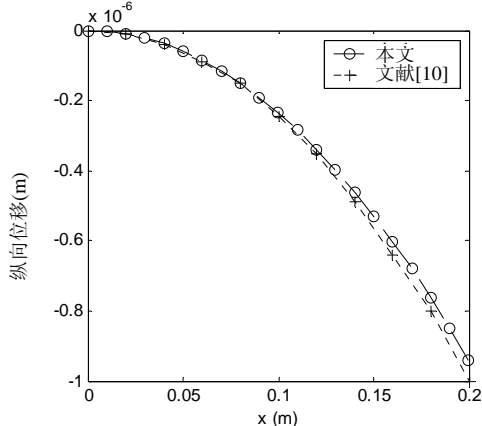


图 3 一端固支压电梁横向位移

Fig.3 Lateral displacement of cantilever beam

(2) 压电梁长度 $L=2\text{m}$, 截面宽 $b=0.32\text{m}$ 。中间弹性基体为普通钢材, 厚度 $h=0.02\text{m}$, 弹性模量 $E=2.1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$, 泊松比 $\nu=0.3$; 上下压电层为压电陶瓷, 厚度 $h=0.005\text{m}$, 弹性模量 $E=8.13 \times 10^{10} \text{Pa}$, $e_{31}=-5.2\text{C/m}^2$, $L_3=13.06 \times 10^{-9} \text{c/v}\cdot\text{m}$ 。上下压电层极化方向相同, 并在上压电层的上表面和下压电层的下表面各作用 100V 电压。图 4 和图 5 分别比较了本文的结果和 ANSYS 的计算结果(在 ANSYS 分析中, 中间弹性层采用 PLANE42 单元, 上下压电层采用考虑了大位移效果的 PLANE13 单元)。

电陶瓷, 厚度 $h=0.005\text{m}$, 弹性模量 $E=8.13 \times 10^{10} \text{Pa}$, $e_{31}=-5.2\text{C/m}^2$, $L_3=13.06 \times 10^{-9} \text{c/v}\cdot\text{m}$ 。本文讨论了两种情况: (1) 一端固支, 在自由端作用一垂直于梁的轴线方向的、大小为 $F=5 \times 10^4 \text{N}$ 的外力; (2) 一端简支, 在自由端作用一个垂直于梁的轴线方向的外力 F (当 $t \leq 0.2\text{s}$ 时, $F=500t\text{N}$; 当 $0.2\text{s} < t \leq 0.4\text{s}$ 时, $F=500(0.4-t)\text{N}$; 当 $t > 0.4\text{s}$ 时, $F=0$)。图 4 和图 5 分别比较了本文的结果和 ANSYS 的计算结果(在 ANSYS 分析中, 中间弹性层采用 PLANE42 单元, 上下压电层采用考虑了大位移效果的 PLANE13 单元)。

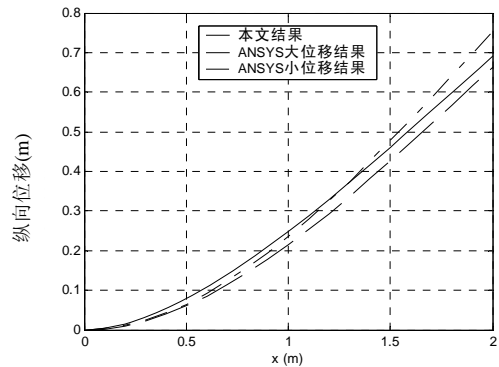


图 4 工况 1 中压电梁的横向位移

Fig.4 Lateral displacement of piezoelectric beam for case 1

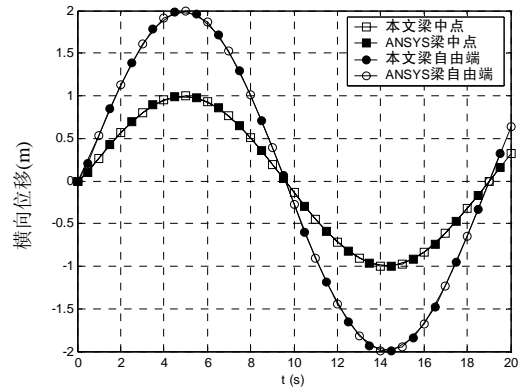


图 5 工况 2 中压电梁横向位移

Fig.5 Lateral displacement of piezoelectric beam for case 2

(3) 压电梁长度 $L=300\text{mm}$, 截面宽 $b=4\text{mm}$, 左端固支, 右端自由。中间弹性基体为 T300/976 石墨/环氧化合物, 厚度 $h=10\text{mm}$, 弹性模量 $E=1.5 \times 10^{11} \text{Pa}$, 泊松比 $\nu=0.3$, 密度 $\rho=1600\text{kg/m}^3$; 上下压电层采用 PZT G1195N 压电陶瓷, 厚度 $h=0.2\text{mm}$, 弹性模量 $E=6.3 \times 10^{10} \text{Pa}$, 泊松比 $\nu=0.33$, 密度 $\rho=7600\text{kg/m}^3$, $e_{31}=-17.585\text{C/m}^2$, $L_3=1.5 \times 10^{-8}$ 。在梁自由端作用冲击载荷 F (当 $t \leq 0.002\text{s}$ 时, $F=4\text{N}$; 当 $t > 0.002\text{s}$, $F=0$)。压电梁

等分为 20 个单元, 每一个单元内压电层上电压相同。在采用简单负反馈的时候, 将传感层得到的电压以相同的增益施加到该单元的激励层, 即 $\varphi_a = G_p \times \varphi_s$ (G_p 为增益)。图 6 比较了不采用负反馈和采用一定增益的负反馈 G_p 时自由端的响应, 通过与文献[11]的结果的比较可以看出, 本文的算法在进行负反馈控制时, 能够把柔性梁的振动很快地抑制下来。

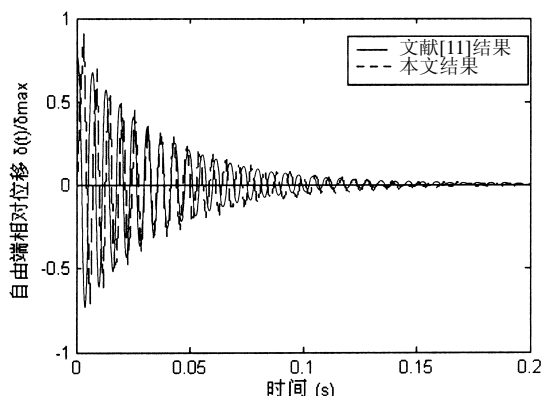


图 6 自由端 B 的响应曲线

Fig.6 Dynamic response at the free end of the beam

6 结束语

本文在几何精确梁理论的基础上, 通过引入压电材料的力-电耦合效应, 建立了一种几何精确的动态二维压电梁有限元格式, 得到了一个分析在空间做大尺度运动的压电结构的方法。并且通过压电层合梁在一端固支和两端简支边界条件下的算例, 与其它文献进行比较, 证明了推导的结论的正确。最后给出了一种对压电层合梁进行简单负反馈的方法, 从而使得对其运动的主动控制得以实现。

参考文献:

[1] Faria A R D, Almedia F M D. Enhancement of pre-buckling behavior of composite beams with geomet-

- ric imperfections using piezoelectric actuators [J]. Composites: Part B, 1999, 30: 43-50.
- [2] Thompson S P, Loughlan J. The active buckling control of some composite column strips using piezoceramic actuators [J]. Composite Structures, 1995, 32:59-67.
- [3] Icardi U, Sciuva M D. Large-deflection and stress analysis of multilayered plates with induced-strain actuators [J]. Smart Materials and Structures, 1996, 5:140-164.
- [4] Reddy J N. On laminated composite plates with integrated sensors and actuators [J]. Engineering Structures, 1999, 21:568-593.
- [5] Chandrashekhara K, Bhatia K. Active buckling control of smart composite plates-finite element analysis [J]. Smart Materials and Structures, 1993, 2:31-39.
- [6] Gaudenzi P, Bathe K J. An iterative finite element procedure for the analysis of piezoelectric continua [J]. Journal of Intelligent Materials Systems and Structures, 1995, 6: 266-273.
- [7] Oh I K, Han J H, Lee I. Postbuckling and vibration characteristics of piezolaminated composite plate subject to thermopiezoelectric loads [J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 233(1): 19-40.
- [8] Oh I K, Han J H, Lee I. Thermopiezoelectric snapping of piezolaminated plates using layerwise nonlinear finite elements [J]. AIAA Journal, 2001, 39(6): 1188-1198.
- [9] Zienkiewicz O C Z, Taylor R L. The finite element method [M]. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
- [10] 林启容, 刘正兴, 王宗利. 电场作用下压电层合梁的分析[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(9): 969-975.
Lin Qirong, Liu Zhengxing, Wang Zongli. Analysis of beams with piezoelectric actuators [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2001, 22(9): 969-975. (in Chinese)
- [11] Peng X Q, Lam K Y, Liu G R. Active vibration control of composite beams with piezoelectrics: a finite element model with third order theory [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 209(4): 635-650.