

# 无网格支持域积分方法\*

刘 岩<sup>1,2\*\*</sup> Belytschko Ted<sup>2</sup> 张 雄<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> 清华大学航天航空学院, 北京, 100084)

(<sup>2</sup> Department of Mechanical Engineering, Northwestern University, 2145 Sheridan Road, Evanston, IL 60208, USA)

**摘 要** 根据无网格法局部化的特点, 针对 Petrov-Galerkin 格式的无网格法提出了一种支持域积分方法. 通过检验函数与多项式乘积在节点支持域上能够精确积分的要求, 得到积分点的位置和权重. 在每个支持域每个维度上只需要 2 个积分点, 计算量较之常用背景网格积分大大减少. 论文方法在线性应力场情况下能够精确给出节点力, 因此满足积分约束条件, 保证了其稳定性. 一维和二维算例显示出本方法具有良好的精度和收敛率.

**关键词** 无网格法, 支持域, 数值积分, 积分约束条件

## 0 引言

无网格法研究的广泛开展已经近二十年, 据不完全统计已有三十多种无网格法被提出, 并在动态断裂、流固耦合、冲击爆炸等多个领域显示出自己独到的优势<sup>[1,2]</sup>. 但无网格法较之有限元法等传统数值方法仍有很多不足, 如理论基础尚不充分、边界条件处理复杂等. 特别是在弱形式无网格法中, 通常需要数值积分计算节点力和节点质量. 由于无网格法的形函数往往不是多项式函数, 因此需要大量的积分点, 计算量很大, 这是无网格法显著的缺点之一.

已有很多研究者提出了数值积分的改进方案. 如 Beissel 和 Belytschko<sup>[3]</sup> 最先提出了节点积分方案, 将节点同时作为积分点, 不再需要背景网格, 也大大降低了计算量. Chen 等<sup>[4]</sup> 指出, 普通的节点积分是不稳定的, 会产生和单点积分有限元类似的零能模式, 需要满足一定的积分约束条件才能得到稳定的计算结果. Chen 等在此基础上提出了光滑应变稳定化方法. Krongauz 和 Belytschko<sup>[5]</sup> 讨论了积分约束条件, 指出其实质是要求若应力场为常数, 数值积分方案应能得到零节点内力.

另一类稳定节点积分方案是增加一组辅助点, 该组辅助点不参与近似函数的构建, 只用来计算积分. 光滑粒子流体动力学方法 (SPH) 最早使用增加

辅助点的方法克服拉伸不稳定性<sup>[6,7]</sup>, 称辅助点为应力点, 因此这类稳定积分方案通常称为应力点积分. Rabczuk 等<sup>[8]</sup> 首先使用了应力点积分方法, Belytschko 及其合作者<sup>[9,10]</sup> 对应力点积分方法的性质进行了深入研究.

大多数无网格法具有局部性质, 这和有限元法是类似的. 无网格法的形函数通常只在相应节点周围很小的邻域上不为零, 该邻域称为节点的支持域. 局部性在无网格法的方法构建以及数值积分上得到了利用. 如 Atluri 和 Shen<sup>[11]</sup> 提出的局部 Petrov-Galerkin 无网格法 (MLPG)、De 和 Bathe<sup>[12]</sup> 提出的有限球法, 将全局弱形式转化为局部弱形式, 并在局部进行积分, 因此不需要背景网格, 是纯无网格法. 但是这两种方法有时需要在每个局部积分区域采用大量的积分点, 大大增加了计算量. Carpinteri 等<sup>[13]</sup> 和 Dufloet 等<sup>[14]</sup> 提出的单位分解积分方案较好地利用了无网格近似的局部特性以及其单位分解性质, 实现了纯无网格法, 但也需要大量的积分点, 积分的计算效率方面没有明显的提高.

Liu 和 Belytschko<sup>[15]</sup> 充分利用了无网格法近似的局部性, 基于积分约束条件提出了一种支持域积分方案. 这种方案中每个节点对应的节点力和节点质量的计算只需要空间维数 + 1 个积分点, 因此具有很高的效率, 同时积分约束条件的满足又保证了其稳定性.

\* 国家重点基础研究发展计划 (2010CB832701), 国家自然科学基金 (11102097) 和清华大学人才支持计划资助.  
2010-11-22 收到第 1 稿, 2011-06-25 收到修改稿.

\*\* 通讯作者. Tel: 010-62772936, E-mail: yan-liu@tsinghua.edu.cn.

本文在文献[15]的基础上,提出了一种改进的支持域积分方法.本文方法令检验函数与多项式乘积在支持域上能够被精确积分,从而建立积分方案的积分点位置和权重.本文方法满足积分约束条件,能够精确计算线性场(如应力、体积力)导致的节点力和节点质量,还可以通过增加积分点获得更高阶的精确积分.

本文所提出的支持域积分方法侧重求解动力学问题,通过与迭代方法相结合,也可以求解静力学问题.本文将线弹性小变形问题为例阐述方法,但将其拓展到大变形和材料非线性问题应不困难.

第 1 节将概述线弹性动力问题的弱形式无网格法求解公式以及无网格近似方案;第 2 节阐述改进的支持域积分方法;第 3 节给出数值算例并解析解以及其他方法得到的结果进行对比;第 4 节总结全文.

### 1 无网格法求解线弹性动力问题

在线弹性小变形动力学问题中,问题域  $\Omega$  内点  $x$  上的运动方程可以写为:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(x,t) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(x,t) + \mathbf{b}(x,t) \quad (1)$$

其中  $\rho$  为密度,  $t$  为时间,变量上方的圆点表示对时间的导数,矢量  $\mathbf{u}$  和张量  $\boldsymbol{\sigma}$  分别表示位移和应力,矢量  $\mathbf{b}$  为体积力.上述运动方程需要相应的边界条件:

$$\mathbf{u}(x,t) = \bar{\mathbf{u}}(x,t) \quad \text{当 } x \in \Gamma_u \quad (2)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(x,t) = \bar{\mathbf{T}}(x,t) \quad \text{当 } x \in \Gamma_t \quad (3)$$

和初始条件:

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x) \quad (4)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(x,0) = \dot{\mathbf{u}}_0(x) \quad (5)$$

上述各式中  $\Gamma_u$  和  $\Gamma_t$  分别表示位移边界和面力边界,  $\bar{\mathbf{u}}$  和  $\bar{\mathbf{T}}$  表示边界上的给定位移和给定面力,  $\mathbf{n}$  为边界的单位外法线矢量,  $\mathbf{u}_0$  和  $\dot{\mathbf{u}}_0$  分别为初始位移和初始速度.

上述问题对应的弱形式为:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{T}} \, d\Gamma \quad (6)$$

将试探函数  $\mathbf{u}$  和检验函数  $\mathbf{v}$  分别离散为

$$\mathbf{u}(x,t) = \sum_{I=1}^{n_{inf}} N_I(x) \mathbf{u}_I(t) \quad (7)$$

$$\mathbf{v}(x,t) = \sum_{I=1}^{n_{inf}} K_I(x) \mathbf{v}_I(t) \quad (8)$$

上述两式中  $n_{inf}$  表示支持域覆盖计算点  $x$  的节点数目,即该点的影响节点数.试探函数和检验函数可以来自不同的空间,这里将试探函数用最小移动二乘 (MLS) 近似离散,将检验函数用 MLS 近似中的权函数  $K_I(x)$  的线性组合离散,MLS 近似及权函数的详细公式可以参考文献[1,2].本文使用三次样条权函数,并认为权函数  $K_I(x)$  和形函数  $N_I(x)$  的支持域一致.

将式(7)和(8)代入弱形式(6),并考虑到  $\mathbf{v}_I$  的任意性,可以得到离散方程组:

$$M_I \ddot{\mathbf{u}}_I = -\mathbf{f}_I^{int} + \mathbf{f}_I^{ext} \quad (9)$$

其中节点质量、节点内力和节点外力分别定义如下:

$$M_I = \int_{\Omega} \rho K_I(x) \, d\Omega \quad (10)$$

$$\mathbf{f}_I^{int} = \int_{\Omega} (\nabla K_I(x)) \cdot \boldsymbol{\sigma}(x,t) \, d\Omega \quad (11)$$

$$\mathbf{f}_I^{ext} = \int_{\Omega} K_I(x) \mathbf{b}(x,t) \, d\Omega + \int_{\Gamma} K_I(x) \bar{\mathbf{T}}(x,t) \, d\Gamma \quad (12)$$

上述推导中使用了集中质量阵,并利用了 MLS 形函数的单位分解性质. MLS 近似不具有 Kronecker Delta 性质,离散方程组(9)中通常还需要增加与位移边界条件(2)相关的项,由于和积分方案关系不大,为叙述简洁起见这里暂时将这些项省略.本文中方程组(9)使用显式方法求解.

由于权函数  $K_I(x)$  的局部性,节点  $I$  的质量、节点内力和节点外力表达式中在全域  $\Omega$  上的积分都可以转化为在节点支持域  $\Omega_I$  上的积分,并且注意到其中的体积分均可表示成权函数或者其导数与另外一个函数(如应力、体积力)乘积的积分.如对于节点内力有:

$$\mathbf{f}_I^{int} = \int_{\Omega_I} (\nabla K_I(x)) \cdot \boldsymbol{\sigma}(x,t) \, d\Omega \quad (13)$$

即为权函数的梯度矢量与应力张量的点乘在节点支持域上的积分.如果能够充分利用这种特点,以权函数/权函数的导数与多项式函数的乘积作为被积函数的模型推导出与之相适应的积分方案,则有望在使用较少积分点的情况下获得较高的精度.

### 2 支持域积分方法

在支持域积分方法中,积分点的位置是相对于节点给出的,即当节点位置和支持域半径给定后,积分点位置即可确定.积分方法的关键在于如何确定

积分点的位置和权重,本文积分方案通过要求权函数/权函数导数与多项式函数乘积在支持域上能被精确积分得到.下面以权函数导数与多项式乘积的积分为例推导,由此得到的积分点位置和权重将用来计算节点内力.针对权函数与多项式乘积的积分方案与其类似.为简明起见,下述推导均针对一维问题,并在单位长度半径的支持域上完成,但推广到高维问题和任意长度半径的支持域并不困难.

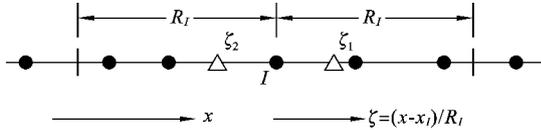


图 1 一维坐标系和支持域积分示意图  
Fig.1 Coordinate systems and support integration in one dimension

考虑如图 1 所示的一维问题,在节点  $I$  的支持域上建立归一化局部坐标系:原点位于节点  $I$ ,局部坐标系的正向与全局坐标系相同,其与全局坐标的关系为  $\xi = (x - x_I) / R_I$ ,其中  $R_I$  为支持域半径.考虑支持域上的积分:

$$\int_{-\rho_2}^{\rho_1} \frac{dK_I(\xi)}{d\xi} \sum_{i=0}^m a_i \xi^i d\xi \quad (14)$$

当支持域完全位于问题区域内时,积分限  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ,否则  $\rho_i$  为边界点局部坐标的绝对值.在每个节点的支持域内布置 2 个积分点,分别位于  $[0, \rho_1]$  和  $[-\rho_2, 0]$  区间内,如图 1 所示.要求式(14)能够由被积函数在积分点上的值乘以积分点权重精确计算.考虑到权函数关于节点的对称性,可以只分析式(14)在  $[0, \rho_1]$  上的部分,要求其能够被该区域内的唯一积分点所精确积分,即满足下式:

$$\int_0^{\rho_1} \frac{dK_I(\xi)}{d\xi} \sum_{i=0}^m a_i \xi^i d\xi = \frac{dK_I(\xi_1)}{d\xi} \omega_1 \sum_{i=0}^m a_i \xi_1^i \quad (15)$$

其中  $\xi_1$  是在  $[0, \rho_1]$  上的积分点局部坐标,  $\omega_1$  是该积分点的权重.

对于多数权函数,如本文所使用的三次样条权函数,其与多项式乘积的积分可以解析表达.将式(15)中求和符号和积分符号交换,考虑到多项式系数  $a_i$  的任意性,可得:

$$\frac{dK_I(\xi_1)}{d\xi} \omega_1 \xi_1^i = D_i(\rho_1) \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (16)$$

其中  $D_i(\rho) = \int_0^\rho \frac{dK_I(\xi)}{d\xi} \xi^i d\xi$ . 这里我们只要求式

(16)对  $i=0, 1$  的情况成立,即权函数与线性完备多项式的积分能够被精确得到,于是有:

$$\frac{dK_I(\xi_1)}{d\xi} \omega_1 = D_0(\rho_1) \quad (17)$$

$$\frac{dK_I(\xi_1)}{d\xi} \omega_1 \xi_1 = D_1(\rho_1) \quad (18)$$

上述两式联立,可得到积分点相对位置和权重:

$$\xi_1 = \frac{D_1(\rho_1)}{D_0(\rho_1)} \quad (19)$$

$$\omega_1 = \frac{D_0(\rho_1)}{dK_I(\xi_1)/d\xi} \quad (20)$$

注意到  $D_0(\rho_1) = \int_0^{\rho_1} \frac{dK_I(\xi)}{d\xi} d\xi = K_I(\rho_1) -$

$K_I(0)$  对于绝大部分常用的权函数总是非零的,以及权函数的导数在支持域内除节点上一般也是非零的,因此式(19)和(20)对于绝大多数权函数都是有意义的.

由权函数对称性,类似地可推导出  $[-\rho_2, 0]$  区间上积分点位置和权重:

$$\xi_2 = -\frac{D_1(\rho_2)}{D_0(\rho_2)} \quad (21)$$

$$\omega_2 = \frac{D_0(\rho_2)}{dK_I(|\xi_2|)/d\xi} \quad (22)$$

对于支持域半径  $R_I \neq 1$  的普遍情况,易得积分点的全局坐标  $x_{I1} = x_I + R_I \xi_1$  和  $x_{I2} = x_I + R_I \xi_2$ ,此时权重还要根据支持域的大小调整为  $\omega_{I1} = \omega_1 R_I$  和  $\omega_{I2} = \omega_2 R_I$ ,上述表达式中用下标  $Ij$  表示第  $I$  个节点所对应的第  $j$  个积分点.

从上述推导可以看到,支持域积分方法在  $[0, \rho_1]$  和  $[-\rho_2, 0]$  上分别只使用了一个积分点,就可以精确积分权函数导数与任意线性场函数的积分,由式(13)可知这表明任意线性应力场所引起的节点力均可精确求得.因此本文方法满足积分约束条件,即常应力场应得到零节点力,稳定性得到保证.

在上述推导中将权函数导数换为权函数,可以得到针对权函数积分的积分点位置和权重如下:

$$\xi_1 = \frac{B_1(\rho_1)}{B_0(\rho_1)}, \quad \omega_1 = \frac{B_0(\rho_1)}{K_I(\xi_1)} \quad (23)$$

$$\xi_2 = -\frac{B_1(\rho_2)}{B_0(\rho_2)}, \quad \omega_2 = \frac{B_0(\rho_2)}{K_I(\xi_2)} \quad (24)$$

以用于计算节点质量和节点外力,其中积分  $B_i(\rho)$  定义为:

$$B_i(\rho) = \int_0^\rho K_I(\xi) \xi^i d\xi \quad (25)$$

二维情况与一维类似,所不同的是在推导中需

要进行不同方向的变量分离. 如对于圆形支持域, 可将支持域划分成若干个扇形区域, 每个区域布置一个积分点, 再类似上述过程推导出相应积分点的位置和权重.

以上推导中每个区域只布置一个积分点, 这不是必须的, 每个区域可以布置多个积分点, 并引入令高阶完备多项式与权函数/权函数导数乘积能被精确积分的条件, 得到各个积分点的位置和权重. 但当使用高阶多项式时, 通常要求解较为复杂的非线性方程组, 因此本文在每个区域中使用单点积分以简化计算.

### 3 数值算例

下列算例除有说明外均使用无量纲量.

#### 3.1 一维行波

考虑一维区域 $[0, 100]$ , 施加初始位移

$$u(x) = \begin{cases} A \left[ 1 + \cos \frac{\pi(x-x_c)}{L_c} \right], & |x-x_c| \leq L_c \\ 0, & |x-x_c| > L_c \end{cases} \quad (26)$$

和初始速度:

$$\dot{u}(x) = \begin{cases} \frac{\pi A c}{L_c} \sin \frac{\pi(x-x_c)}{L_c}, & |x-x_c| \leq L_c \\ 0, & |x-x_c| > L_c \end{cases} \quad (27)$$

其中  $c = \sqrt{E/\rho}$  为声速, 这里取杨氏模量  $E$  和密度  $\rho$  为 1.0, 参数  $A=0.1, L_c=20, x_c=30$ , 两端边界均为自由边界, 该问题的位移解析解为:

$$u(x, t) = \begin{cases} A \left[ 1 + \cos \frac{\pi(x-x_c-ct)}{L_c} \right], & |x-x_c-ct| \leq L_c \\ 0, & |x-x_c-ct| > L_c \end{cases} \quad (28)$$

用 101 个均布节点离散问题域, 取时间步长 0.5, 分别使用背景网格高斯积分和本文的支持域积分方法计算, 其中高斯积分的背景网格点与节点重合, 即两个节点间的部分为一个积分细胞.

图 2 所示为点  $x=30$  的位移时程曲线, 图 3 所示为点  $x=50$  的应力时程曲线. 从图中可以看到, 无论是支持域积分, 还是传统的高斯积分, 都能得到与解析解非常吻合的结果, 图中 Gauss 4Pts 和 Gauss 1Pt 分别表示四点高斯积分和单点高斯积分的结果. 在某些时间段上, 单点高斯积分结果显示出

明显的偏离, 而四点高斯积分和本文支持域积分方法与解析解几乎重合. 在应力曲线的末端, 所有解答与解析解都有所偏离, 这是由于数值格式的频散引起的, 受积分方案影响不大.

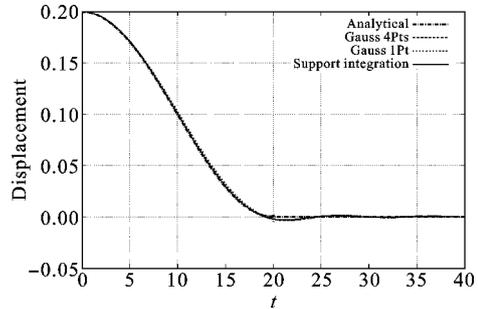


图 2 点  $x=30$  位移时程曲线

Fig. 2 Displacement history at  $x=30$

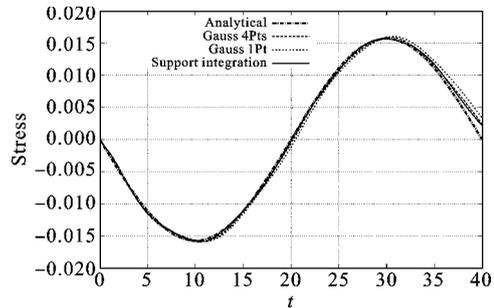


图 3 点  $x=50$  应力时程曲线

Fig. 3 Stress history at  $x=50$

我们还计算了不同节点分布的结果, 位移收敛曲线如图 4 所示, 这里的位移误差计算式为:

$$E_{L_2} = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (u^{\text{num}} - u^e)^2 d\Omega}{\int_{\Omega} (u^e)^2 d\Omega}} \quad (29)$$

其中上标 num 和 e 分别表示数值解和解析解. 由图 4 可见, 支持域积分和四点高斯积分的收敛曲线非常接近, 精度和收敛率都远高于单点高斯积分.

#### 3.2 一维区域左端受拉伸作用

长 0.15 m 的一维区域, 用 51 个均布节点离散, 在最左边的 11 个节点上施加初始速度  $-5 \text{ m/s}$ , 其他节点初始静止. 左端为自由边界, 右端固定, 杨氏模量  $E=200 \text{ GPa}$ , 密度  $\rho=7833 \text{ kg/m}^3$ . 取时间步长  $0.5 \mu\text{s}$ , 计算到  $t=0.4 \text{ ms}$ . 点  $x=0.03 \text{ m}$  和  $x=0.06 \text{ m}$  处的位移时程曲线分别如图 5 和图 6 所示. 支持域积分的结果和背景网格四点高斯积分结果吻

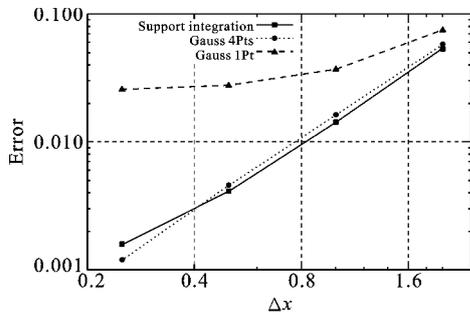


图 4 位移误差收敛曲线

Fig. 4 Convergence curve of displacement error

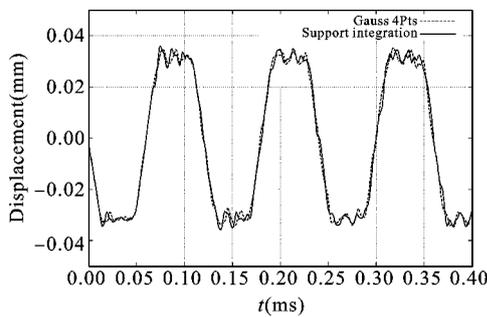


图 5 点  $x = 0.03$  m 的位移时程曲线

Fig. 5 Displacement history at  $x = 0.03$  m

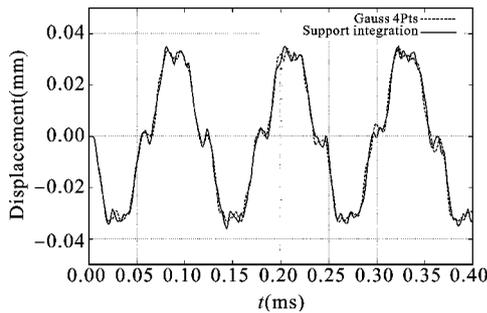


图 6 点  $x = 0.06$  m 的位移时程曲线

Fig. 6 Displacement history at  $x = 0.06$  m

合的非常好。

### 3.3 二维含体积力问题<sup>[15]</sup>

考虑二维区域  $|x|, |y| < L = 30$ , 其上加上有体积力:

$$b_x = \left[ -Gat^2 \left( \frac{\pi}{2L} \right)^2 - \rho a \right] \sin \frac{\pi x}{2L} \cos \frac{\pi y}{2L} \quad (30)$$

$$b_y = \left[ Gat^2 \left( \frac{\pi}{2L} \right)^2 + \rho a \right] \cos \frac{\pi x}{2L} \sin \frac{\pi y}{2L} \quad (31)$$

其中系数  $a = 1.0 \times 10^{-5}$ ,  $G$  为剪切模量, 本算例中取密度和杨氏模量均为 1.0, 泊松比为 0.3. 分别用每个积分细胞  $4 \times 4$  高斯积分和支持域积分(每个支

持域 4 个积分点)计算, 取支持域半径为 2.0 倍节点间距. 两种解答在  $t = 3$  时刻的能量误差和在  $t = 4$  时刻的位移误差收敛曲线分别如图 7 和图 8 所示, 其中位移误差的计算和算例 1 中类似, 能量误差由下式计算:

$$E_e = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^{\text{num}} - \boldsymbol{\sigma}^e) : (\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{num}} - \boldsymbol{\varepsilon}^e) d\Omega}{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e d\Omega}} \quad (32)$$

由图 7 可见, 支持域积分结果能量误差收敛曲线和  $4 \times 4$  高斯积分结果几乎完全重合, 图 8 所示的位移误差收敛曲线中, 支持域积分结果收敛率略低于高斯积分, 但两者仍然非常接近.

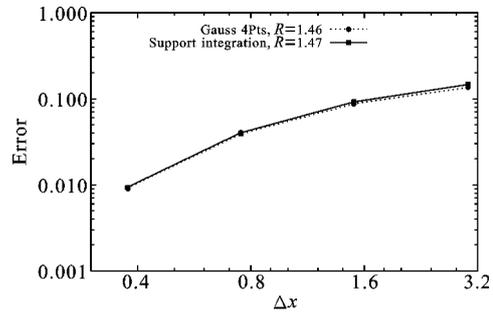


图 7 在  $t = 3$  时刻的能量误差收敛曲线

Fig. 7 Convergence curve of energy error at the time  $t = 3$

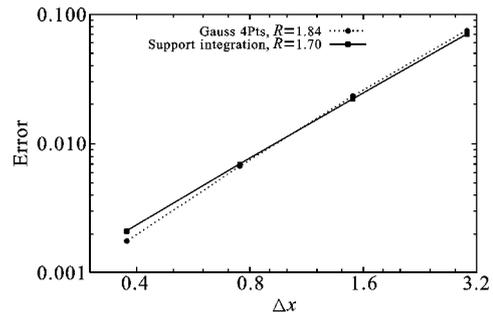


图 8 在  $t = 4$  时刻的位移误差收敛曲线

Fig. 8 Convergence curve of displacement error at the time  $t = 4$

我们还计算了支持域积分在非均匀布点情况下的结果, 其精度总体上保持不变.

## 4 结论

本文在文献[15]所提出的支持域积分方法的基础上, 提出了一种改进的支持域积分方法, 其基本思

想是令检验函数(本文中是MLS近似中的权函数)与任意多项式在支持域上的积分能够被精确计算,从而得到积分点的位置和权重。

本文方法可以保证任意线性应力场所导致的节点内力能够被精确积分,因此满足积分约束条件,是稳定的积分方案。方法中积分点位置由节点位置自动确定,是一种纯无网格法,也更适于求解带有节点位置变化的问题。

本文用一维和二维算例对所提出的方法进行了验证,本文方法只需要每个节点每个维度布置2个积分点(即每个支持域一维2个、二维4个积分点)即可获得解析解吻合的结果,与背景网格高斯积分中每个积分细胞4个(一维)或 $4 \times 4$ 个(二维)积分点所获得的精度和收敛率非常接近。可以预见,对于三维问题,本文算法在保证高精度的前提下,将比背景网格积分获得更大的效率提高。

后续工作中我们将进一步改进本文方法,使其适应求解复杂问题的需要。如本文中采用三次样条函数作为检验函数,离散的三次样条函数通常不满足单位分解条件,后续工作中将尝试改用Shepard函数等满足单位分解条件的函数。另外,复杂的边界形状将使边界附近节点的积分区域变得很不规则,可能造成边界附近精度的下降,我们也将研究针对复杂边界形状的处理方案。

### 参考文献

- [1] 张雄,刘岩.无网格法[M].北京:清华大学出版社 & Springer,2004.(Zhang X,Liu Y.Meshless Method [M].Beijing:Tsinghua University Press & Springer,2004.(in Chinese))
- [2] 张雄,刘岩,马上.无网格法的理论及应用[J].力学进展,2009,39(1):1-36.(Zhang X,Liu Y,Ma S.Mesh-free methods and their applications[J].Advances in Mechanics,2009,39(1):1-36.(in Chinese))
- [3] Beissel S,Belytschko T.Nodal integration of the element-free Galerkin method[J].Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,1996,139(1-4):49-74.
- [4] Chen J S,Wu C T,Yoon S.A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh free methods[J].International Journal for Numerical Methods in Engineering,2001,50:435-466.
- [5] Krongauz Y,Belytschko T.Consistent pseudo-derivatives in meshless methods[J].Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,1997,146:371-386.
- [6] Dyka C T,Randles P W,Ingel R P.Stress points for tension instability in SPH[J].International Journal for Numerical Methods in Engineering,1997,40:2325-2341.
- [7] Randles P W,Libersky L D.Normalized SPH with stress points[J].International Journal for Numerical Methods in Engineering,2000,48(10):1445-1462.
- [8] Rabczuk T,Belytschko T,Xiao S P.Stable particle methods based on Lagrangian kernels[J].Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,2004,193:1035-1063.
- [9] Fries T P,Belytschko T.Convergence and stabilization of stress-point integration in mesh-free and particle methods[J].International Journal for Numerical Methods in Engineering,2008,74:1067-1087.
- [10] Duan Q,Belytschko T.Gradient and dilatational stabilizations for stress-point integration in the element-free Galerkin method[J].International Journal for Numerical Methods in Engineering,2009,77(6):776-798.
- [11] Atluri S,Shen S.The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method[M].Encino,CA,USA:Tech Science Press,2002.
- [12] De S,Bathe K J.The methods of finite spheres with improved numerical integration[J].Computers & Structures,2001,79:2183-2196.
- [13] Carpinteri A,Ferro G,Ventura G.The partition of unity quadrature in meshless methods[J].International Journal for Numerical Methods in Engineering,2002,54(7):987-1006.
- [14] Duflo M,Hung N D.A truly meshless Galerkin method based on a moving least squares quadrature[J].Communications in Numerical Methods in Engineering,2002,18(6):441-449.
- [15] Liu Y,Belytschko T.A new support integration scheme for the weakform in mesh-free methods[J].International Journal for Numerical Methods in Engineering,2010,82:699-715.

## A MESHFREE SUPPORT INTEGRATION METHOD

Yan Liu<sup>1,2</sup>    Belytschko Ted<sup>2</sup>    Xiong Zhang<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing, 100084)

(<sup>2</sup> Department of Mechanical Engineering, Northwestern University, 2145 Sheridan Road, Evanston, IL 60208, USA)

**Abstract** A support integration method based on the locality of meshfree methods was proposed for Petrov-Galerkin meshfree methods. Positions and weights of quadrature points were obtained through the requirements that the integral of test functions multiplied by polynomials can be evaluated exactly on the support domain. Only two quadrature points are needed in each dimension for each support domain. The computational cost is much decreased in comparison with background mesh integration. This method can calculate nodal forces exactly for linear stress field, so that the integral constraint condition is satisfied to ensure the stability. One-dimensional and two-dimensional examples show that this method has good accuracy and convergence rates.

**Key words** meshfree method, support domain, numerical integration, integral constraint condition