

金属及岩土冲击动力学问题的 物质点法研究

(申请清华大学工学博士学位论文)

培 养 单 位： 航天航空学院

学 科： 力学

研 究 生： 黄 鹏

指 导 教 师： 张 雄 教 授

二〇一〇年六月

金属及岩土冲击动力学问题的物质点法研究

黄

鹏

Material Point Method for Metal and Soil Impact Dynamics Problems

Dissertation Submitted to

Tsinghua University

in partial fulfillment of the requirement

for the degree of

Doctor of Engineering

by

Huang Peng

(Mechanics)

Dissertation Supervisor: Professor Zhang Xiong

June, 2010

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：清华大学拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：（1）已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；（2）为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供校内师生阅读，或在校园网上供校内师生浏览部分内容；（3）根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》，向国家图书馆报送可以公开的学位论文。

本人保证遵守上述规定。

（保密的论文在解密后遵守此规定）

作者签名：_____

导师签名：_____

日 期：_____

日 期：_____

摘 要

冲击动力学问题在军事和航天航空科技上有广泛而重要的应用，数值模拟是解决该类问题的有效方法。冲击动力学问题涉及多种物理现象，诸如非线性波传播、摩擦和磨损、大变形、高应变率、动态损伤与断裂。与拉格朗日和欧拉网格类方法相比较，无网格法在处理冲击和侵彻问题时更具有优势。物质点法属于质点类无网格法，采用质点离散物体，易于描述材料的破碎。物质点法采用规则背景网格计算动量方程，因此不受网格畸变的限制。目前，物质点法已经在爆炸问题和裂纹扩展问题中取得了成功应用。本文主要针对冲击和侵彻问题，研究适合于金属和岩土冲击动力学问题的物质点法。

尽管物质点法在超高速撞击问题中得到了应用，但小规模模拟无法获得高精度计算结果。针对这一问题，本文基于共享内存 OpenMP 技术开展物质点法并行化研究。为了解决并行化中的数据竞争问题，提出了物质点法的两种 OpenMP 并行算法：数组扩展法和背景网格区域分解法；为了得到高精度的超高速撞击碎片云结果，开展了 1300 万质点数的大规模物质点法并行计算。

标准物质点法中的粘着接触条件导致了较大的侵彻阻力，为了克服这个缺陷，本文将接触物质点算法用于侵彻计算。在关于冲击问题的接触算法中，提出了一种新的接触界面法向量算法，给出了接触算法的完整数学描述和数值实现，并采用多个算例验证了接触算法的正确性。侵彻数值计算表明标准物质点算法得到的剩余弹速远低于实验值，而接触物质点算法得到的剩余弹速和实验值吻合。

针对刚柔接触问题，提出了一种刚柔接触物质点算法，通过算例验证了该算法的正确性。进而，采用刚柔接触物质点算法模拟了 Taylor 杆撞击刚性墙的过程，以及水珠冲击台阶的过程。

物质点法不受网格畸变限制，尤其适合岩土类软材料的数值模拟。文中开展了物质点法在岩土冲击动力学问题中的应用，采用 Drucker-Prager 模型和物质点法模拟了岩土边坡的失效过程；采用刚柔接触物质点算法模拟了堆积物的坍塌流动过程，计算结果和实验一致；最后模拟了半球壳对岩土的侵彻过程。

关键词：冲击动力学；无网格法；物质点法；接触算法；并行计算

Abstract

The impact dynamics problems have broad and significant applications in the military and aerospace technologies. Numerical simulation is an important study approach for this kind of problems. Some physical phenomena, such as nonlinear wave propagation, friction and abrasion, large deformation, high strain rate, dynamic damage and fracture arise from the problems of impact dynamics. Compared with the Lagrangian and Eulerian mesh methods, meshfree methods have some advantages to solve the problems involving impact and penetration. Material point method (MPM) is a meshfree particle method. In MPM, each body is discretized by a set of particles, so that the material fragments can be efficiently simulated. MPM uses a predefined regular background grid to solve the momentum equations, so that the grid distortion and entanglement are completely avoided. MPM has been successfully applied to explosion problems and crack growth problems. In this study, the MPM simulations of the impact and penetration problems are carried out, especially for metal and soil material.

Although MPM has been applied to hypervelocity problems, the small-scale MPM simulation is unable to obtain high-resolution results. The parallel MPM is developed using the shared memory OpenMP in this study. Two OpenMP parallel methods, the array expansion method and the domain decomposition method of background grid, are proposed to avoid data races in parallelizing MPM. The parallel MPM is applied to a large-scale simulation with 13 million particles for obtaining the high-resolution results of debris cloud in hypervelocity impact.

The inherent non-slip contact constraint in the standard MPM creates a great penetration resistance. To overcome this deficiency, a contact MPM algorithm is presented and applied to the problems involving impact and penetration. A new method is proposed for the calculation of the normal

vector of contact surface in the impact and penetration simulation. The mathematic description and numerical implementation of the contact algorithm are presented. The contact MPM algorithm is verified by some numerical examples. In the penetration simulations, the projectile's residual velocities obtained by the standard MPM are significantly lower than the experimental data. Whereas, the projectile's residual velocities obtained by the proposed contact MPM have agreements with the experimental results.

A rigid-deformable contact MPM algorithm is proposed to simulate the contact between the rigid and deformable bodies. Some numerical examples are given to verify this rigid-deformable contact MPM algorithm. Using this contact algorithm, the Taylor bar impact on a rigid wall is simulated, and the water ball impact on a stair is also simulated.

Because of avoiding mesh distortion, MPM can efficiently simulate the mechanical behavior of soft material, such as soil. In this paper, MPM is applied to the soil impact dynamics problems. The slope failure is simulated using MPM and Drucker-Prager material model. The collapse of granular layer under gravity is simulated by the rigid-deformable contact MPM algorithm. The computed final configurations of granular layer are in good agreement with the experimental results. Finally, the penetration process of a hemispherical shell into soil is simulated by MPM.

Key words: impact dynamics; meshfree methods; material point method; contact algorithm; parallel computation

目 录

第 1 章 引言	1
1.1 研究背景、方法和意义	1
1.1.1 研究背景	1
1.1.2 研究方法	2
1.1.3 研究意义	3
1.2 冲击动力学问题数值模拟现状	4
1.2.1 冲击动力学数值方法概述	4
1.2.2 基于网格的方法	7
1.2.3 无网格方法	15
1.2.4 并行计算技术	18
1.3 物质点法研究现状	20
1.4 本文的主要研究内容	24
第 2 章 物质点法基本原理	26
2.1 控制方程和离散	26
2.1.1 控制方程	26
2.1.2 控制方程的离散	28
2.2 物质点法的计算格式	31
2.2.1 物质点法的三种格式	31
2.2.2 物质点法的具体实现	32
2.2.3 时间步长	35
2.3 冲击波和人工体积粘性	37
2.3.1 冲击波理论	37
2.3.2 人工体积粘性	39
2.4 应力更新、材料模型和状态方程	40
2.4.1 应力更新算法	40
2.4.2 弹性模型	42
2.4.3 Mises 弹塑性模型	43

2.4.4 Johnson-Cook 弹塑性模型	45
2.4.5 Mie-Grüneisen 状态方程	46
2.4.6 线性多项式状态方程	48
2.4.7 材料损伤和质点失效	49
2.5 本章小结	50
第 3 章 物质点法 OpenMP 并行化及应用	51
3.1 引言	51
3.2 OpenMP 的并行机制	51
3.3 物质点法的串行程序分析	53
3.4 物质点法的 OpenMP 并行化	57
3.4.1 节点变量更新的并行	57
3.4.2 质点变量更新的并行	61
3.4.3 负载均衡	63
3.5 并行算法测试与应用	63
3.5.1 并行算法测试	64
3.5.2 超高速撞击问题的模拟	68
3.6 本章小结	70
第 4 章 接触物质点算法及应用	73
4.1 引言	73
4.2 接触算法的基本描述	73
4.2.1 接触条件数学描述	73
4.2.2 接触问题的节点动量方程	75
4.2.3 接触节点探测	77
4.2.4 表面法向量	78
4.3 接触物质点算法构造与实现	79
4.3.1 接触物质点算法构造	79
4.3.2 接触物质点算法实现	82
4.4 接触物质点算法验证	84
4.4.1 两个弹性球的撞击	84
4.4.2 弹塑性杆的对称撞击	85

4.4.3 斜面上球体的滚动模拟	90
4.5 接触物质点算法应用	91
4.5.1 钢珠侵彻薄板	93
4.5.2 厚靶的贯穿模拟	95
4.6 本章小结	97
第 5 章 刚柔接触物质点算法	99
5.1 引言	99
5.2 刚柔接触物质点算法实现	99
5.3 算例及应用	102
5.3.1 弹性球撞击刚性面	102
5.3.2 斜面上球体的滚动模拟	103
5.3.3 Taylor 杆撞击模拟	106
5.3.4 水珠冲击破碎模拟	110
5.4 本章小结	112
第 6 章 岩土冲击问题的物质点法模拟	113
6.1 引言	113
6.2 Drucker-Prager 模型	113
6.2.1 屈服函数和势函数	114
6.2.2 塑性修正条件	116
6.2.3 塑性修正过程	117
6.2.4 程序实现和材料参数	121
6.3 Drucker-Prager 模型的验证	123
6.3.1 粘土边坡失效	123
6.3.2 砂土边坡失效	124
6.3.3 沙坡流动模拟	127
6.4 岩土动力学问题应用	128
6.4.1 铝棒堆积物流动模拟	128
6.4.2 岩土侵彻分析	132
6.5 本章小结	135
第 7 章 结论	137

7.1 研究成果	137
7.2 展望	138
参考文献	139
致谢与声明	152
个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果	153

主要符号对照表

MPM	物质点法
SPH	光滑粒子动力学
FEM	有限元法
ALE	任意拉格朗日-欧拉方法
EOS	状态方程
σ_{ij}	柯西应力
s_{ij}	应力偏量
σ_m	应力球量
σ_{ij}^{∇}	Jaumann 应力率
ε_{ij}	应变张量
D_{ij}	变形率张量
ω_{ij}	旋率张量
ε^p	等效塑性应变
e	比内能
p	压力
ρ	密度
K	体积模量
G	剪切模量
Δt	时间步增量

第 1 章 引言

1.1 研究背景、方法和意义

1.1.1 研究背景

随着科学技术的发展,冲击动力学在军事和民用领域中有了重要的应用。在军事领域,打击目标不断加固,例如飞机跑道加厚、武器库增加钢筋混凝土防护层、指挥中心迁到地下等,传统武器对这类目标的毁伤效能降低,因而,必须发展能够打击坚固目标和地下目标的钻地武器。侵彻和穿甲能力是衡量钻地武器效果的主要指标,只有对弹体的侵彻过程和靶体特性进行深入了解,才能有效指导武器的设计。在民用领域,飞机的防护问题引起重视。由于飞机飞行速度快,与飞鸟发生碰撞后常造成极大的破坏,严重时会造成飞机坠毁。为了对飞行器进行安全防护,就必须了解飞鸟撞击飞行器的破坏机理,从而设计恰当的防护材料和结构。在航天领域,日益增长的空间碎片严重威胁着航天器的安全运行,有关空间碎片超高速撞击的研究已得到了国内外的重视。空间碎片与航天器的相对撞击速度最高可达 16km/s 。为了对航天器结构进行安全防护,就必须了解超高速撞击结构和材料的破坏过程。在高速旋转机械以及核反应堆工程等领域,冲击动力学问题也占据重要地位。由于冲击动力学问题的重要性和普遍性,关于这类问题的科学研究一直是学术界关注的热点。

冲击动力学问题包含了一系列复杂的物理过程,涉及到材料和大变形、非线性波传播、摩擦与磨损、材料的动态损伤与破坏和高应变率效应。因此,这类问题的出现形成了力学的一个分支,即冲击动力学(Impact Dynamics)。冲击动力学是研究在各类冲击载荷作用下材料和结构特性的力学分支学科。冲击载荷主要包括爆炸载荷、碰撞载荷及其它原因引起的强动载荷等,这些载荷和通常的准静态载荷不同,一般都具有高强度和短时间历程的特征。在冲击动力学问题中,常常根据撞击速度的不同对问题加以区分^[1],一般枪炮弹速范围在 $500\sim 2000\text{m/s}$ 之间,低于这个速度的称为低速撞击($<500\text{m/s}$),高于这个速度的称为超高速撞击($>2\text{km/s}$)。在冲击动力学问题中,载荷作用时间在微妙(μs)量级,材料处于高应变率和大变形状态,如一般的侵彻与穿甲问题应变率达到 10^4 ,而

超高速撞击过程的应变率可以达到 10^8 。

与传统的结构动力学问题相比较，冲击动力学问题有着复杂性和特殊性。在冲击动力学中，除了要关注传统结构动力学的惯性效应外，还要关注一些新的问题，比如：热力耦合作用，材料界面，冲击波效应，应变率效应，材料与结构破坏模式的多样性等。这些复杂性和特殊性使得冲击动力学研究需要理论研究、实验研究和数值模拟相互结合补充。冲击动力学的理论支柱主要是连续介质力学、冲击波理论、材料动态本构关系和状态方程，以这些理论为基础，发展了解决冲击动力学问题的各种理论方法和数值方法。

1.1.2 研究方法

对冲击动力学问题的研究有以下三种研究方法：

(1) 实验方法

实验方法是研究冲击动力学问题最为直接的方法，实验方法里面最为关注的是冲击动力学实验的加载技术和测试技术。常用的实验加载技术如火炮、Hopkinson 杆技术和 Taylor 杆技术，这些加载技术可以使得试件产生 1500m/s 的弹速，使得材料的应变率达到 10^5 。为了获得更高的弹速，就要使用轻气炮、爆轰驱动飞片等技术，这些技术可以使得弹速达到 8km/s 或者更高，材料的应变率则可以达到 10^8 。常用的测试技术包括了高速摄影仪、X 射线照相、激光干涉测速仪(VISAR)等。在冲击和侵彻过程中，利用 X 射线照相可以直接观察到的弹体姿态和靶体的破坏特征。对于超高速撞击过程，利用 X 射线照相可以观察碎片云的形态，关于实验技术更详细的叙述可参见文献^[2]。

(2) 理论方法

冲击动力学的理论方法研究有经验方法和解析方法两种。所谓经验方法，就是根据已有的大量实验数据，把一些有物理特征的无量纲量联系起来，建立经验公式。在大量侵彻实验的基础上，Sandia 国家实验室的 Young 提出了适用于不同介质的侵彻方程^[3,4]，工程界将其称为 Young 氏侵彻方程。Young 氏侵彻方程的使用条件有一定限制，如侵彻过程要满足弹体完整性要求，而且对于不同的侵彻介质，方程的形式和参数也会不同。在侵彻和穿甲力学研究中，动态空腔膨胀模型是公认的有效理论分析方法之一，该模型认为弹体对靶体的侵彻过程可以看成空腔的动态膨胀过程。动态空腔膨胀模型将空腔周围按照不同的区域考虑，比如将岩土靶体的空腔周围考虑为塑性区和弹性区，进而根据柱形

空腔或者球形空腔膨胀过程,采用连续介质力学得到空腔膨胀速度和阻力之间的解析公式,经过 Sandia 实验室的 Forrestal 及其合作者的发展,动态空腔模型已经广泛用于金属、岩土和混凝土的深侵彻问题^[5-8]。即使如此,动态空腔模型的使用条件也有一定的限制,如侵彻过程要满足刚性弹假设和正侵彻条件。

(3) 数值方法

为了求得冲击过程或者穿甲问题的全部答案,人们就要依靠数值模拟的手段来求解涉及冲击问题的全部连续介质力学微分方程。在 1960 年代左右,随着计算机的发展,人们已经能获得冲击动力学问题的数值解,而且已经能采用所谓的流体弹塑性模型来处理从超高速撞击到中低速冲击的各种动力学问题。数值模拟方法是对质量守恒、动量守恒和能量守恒三类微分方程进行求解,根据控制方程的不同描述方式,将数值模拟方法可以区分为欧拉方法和拉格朗日方法。从数值算法的角度讲,冲击动力学问题数值算法的常用手段为有限差分法、有限元法,有限体积法。有限差分法和有限元的区别在于^[9]:有限差分法从微分方程出发,是精确问题的近似解;而有限元法是从微分方程的弱形式出发进行数值离散,是近似问题的精确解。

1.1.3 研究意义

在工程应用和科学研究中,数值模拟已经逐渐成为解决复杂问题的一个重要手段。数值模拟将实际的物理模型转化为数学描述下的离散形式,使用计算机重新构造和求解问题,再根据分析人员的需求客观揭示物理现象。理论求解方法往往具有一定的局限性,如冲击动力学中的一些解析方法常常需要考虑假设和近似,往往无法分析一些复杂的结构。数值模拟借助不断发展的计算机能力,考虑问题的细节建立高保真的数值模型,不需要对求解的问题做太多的假设,这一点优于理论方法。

数值模拟的另一优势是为科研人员提供了一个变通的工具,可代替在实验室或者是野外进行的昂贵、费时甚至危险的实验,如冲击动力学实验。与实验相比较,数值模拟能够提供更为完整的信息,冲击动力学过程往往在极短的时间完成,实验测量只能记录某个时刻的变形信息或者某个点上物理量的时间历程信息,而通过数值模拟,可以给出整个动态变形的过程,提供所有部位物理量的时间历程信息。

数值模拟的作用越来越受到政府部门的关注,基于战略武器发展的需要,

由美国能源部牵头，以美国国家航空航天局(NASA)，美国三大核武器实验室 Sandia (SNL)、Los Alamos (LANL)和 Lawrence Livermore(LLNL)国家实验室为主体，开展了旨在加强武器计算能力的 ASC 计划(Advanced Simulation & Computing)，其宗旨在于提高数值模拟在武器研制中的地位，从基于实验的武器设计到基于数值模拟的武器设计^[10]。

随着计算机软硬件技术和数值方法的发展，尤其是受到大规模并行计算机和并行计算的推动，数值模拟所起到的作用越来越大，许多无法解决的复杂问题都可以成功地进行计算。2005 年，美国科研界向总统提交了一份咨询报告^[11]，报告中认为数值模拟已经和理论研究以及实验研究并称为现代科学技术的三大支柱，认为数值模拟是确保美国竞争力的重要推动力。

1.2 冲击动力学问题数值模拟现状

1.2.1 冲击动力学数值方法概述

传统的结构动力学问题关注于结构的动态响应，冲击动力学问题更关注波的传播。历史上，将求解冲击动力学问题的数值模拟程序称为流体动力学程序(Hydrocodes)。冲击波对结构的作用会导致高压区出现，高压区的材料压力值远大于材料的屈服强度值。早期处理超高速冲击问题时，为了减小计算代价往往不考虑材料的偏应力，而仅仅考虑材料的状态方程计算压力，这样使得固体材料的计算方式和流体的计算方式相同，因此早期的冲击问题数值模拟程序称为流体动力学程序。

由于没有考虑应力偏量，早期的流体动力学程序在求解超高速撞击问题时更为有效，对于一些需要考虑材料强度的中低速冲击和侵彻问题，其计算效果不佳。在 1960 年代左右，几乎所有的流体动力学程序都考虑了偏应力的影响，在程序编制中将应力 σ_{ij} 分解为偏应力和应力球量两部分考虑

$$\sigma_{ij} = s_{ij} - p \quad (1-1)$$

其中，应力偏量 s_{ij} 反映了材料的固体强度特性，可以通过材料的强度模型计算。应力球量部分，即压力项 p 则可以通过状态方程给出。上述的应力分解方式大大扩展了流体动力学程序的应用范围，对于必须考虑材料固体强度特性的冲击和侵彻问题也能得到很好的计算结果。为了区分，以下暂将考虑材料固体强度

特性的流体动力学程序称为冲击动力学程序。

二次大战以后，计算机的出现使得冲击动力学程序得到充分发展，尤其在美国，冲击动力学程序的开发得到军方和政府部门的重视。冲击动力学程序的推动者主要是美国能源部的三大核武器实验室^[12]，这三大实验室是美国核武器的制造部门，拥有先进的大规模并行计算机(MPP)。在军事需求的牵引下，相继产生了一批冲击动力学程序，如 AUTODYN, CTH, DYTRAN, EPIC, HEMP, PRONTO, LS-DYNA。针对所求解的冲击动力学问题，这些程序具有以下共同特征：

- (1) 对质量、动量和能量守恒方程的求解。
- (2) 能够处理物体的接触界面(物质界面)。
- (3) 采用显式时间积分。
- (4) 能够捕捉冲击波产生的强间断面，如采用人工体积粘性。
- (5) 将应力张量分为偏量和球量两部分单独处理，应力偏量由材料的强度模型计算，应力球量(压力项 p)则可以通过状态方程给出。
- (6) 在本构模型中考虑材料大变形和大转动的影响。

在上述特征中，物体接触界面(物质界面)的处理方法属于冲击动力学程序中的难点，接触界面的处理方式直接关系到数值模拟成功与否。对控制方程的描述有两类基本方法：欧拉(Euler)描述和拉格朗日(Lagrange)描述。连续介质的守恒方程建立了材料密度 ρ 、速度 v_i 、内能 e 、应力 σ_{ij} 、体力 b_i 之间的联系。

按照拉格朗日描述

质量守恒

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1-2)$$

动量守恒

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i \quad (1-3)$$

能量守恒

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} \quad (1-4)$$

按照欧拉描述

质量守恒

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \quad (1-5)$$

动量守恒

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i \quad (1-6)$$

能量守恒

$$\frac{\partial e}{\partial t} + v_i \frac{\partial e}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} \quad (1-7)$$

其中， D_{ij} 为变形率张量分量， $\frac{d}{dt}$ 为物质导数， $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ，将含有 $v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ 的项称为对流项。

按照拉格朗日描述，计算网格随物质一起运动，可以容易地记录物质的变形历史。按照欧拉描述，物质流入流出空间网格，网格在空间固定不随物质流动，因此欧拉方法容易处理大变形问题。这两种方法的优缺点在下面还会详细叙述。

网格类求解方法包括有限元法、有限差分法和有限体积法，Benson 认为有限体积法是有限差分法的一种特殊表现形式^[13]。此处对这三种方法的基本原理进行简述。

有限差分法：将求解区域用一系列网格线交点组成的节点集合来代替，在节点上，将微分方程的导数用差分表达式来代替，从而在每个节点上形成代数方程，求解这些代数方程就获得了所需的数值解。按照坐标分类，有限差分法可以分为欧拉型和拉格朗日型。

有限元法：有限元法将求解区域划分为有限个单元，采用分片连续的多项式构造插值函数，单元内的变量通过单元节点变量插值得到；有限元法从微分方程的弱形式虚功方程出发建立最终的运动方程，在运动方程中节点变量是未知量；在冲击动力学的有限元程序中，常常采用显式积分算法和拉格朗日描述。

有限体积法：有限体积法将求解区域划分成一系列网格单元，将每个网格单元看成一个有限体积，在有限体积上对微分方程的积分形式直接离散从而导出离散方程。有限体积法有格心法和格点法两种，格心法的数值解定义在单元中心，格点法的数值解定义在单元角点上。有限体积法多用于流体力学数值计

算，也常用于高速冲击问题的数值模拟^[13,14]。

1.2.2 基于网格的方法

对于网格类方法，无论采用那种数值求解方法，冲击模拟的动力学程序总能按照欧拉方法、拉格朗日方法以及二者的混合方法进行分类描述，以下分别对网格类方法在冲击和侵彻中的研究和应用现状进行阐述。

1.2.2.1 拉格朗日方法

在拉格朗日法中，计算网格固定在物质上，随物质一起变形。网格点与物质点在物体的变形过程中始终保持重合，因此物质点与网格点之间不存在相对运动(即迁移运动，也称对流运动)，这简化了控制方程的求解过程。拉格朗日方法具有如下优点：

(1) 拉格朗日法计算过程简单。由于不存在对流项，拉格朗日法的质量、动量和能量守恒方程比较简单，在每个时间步中计算过程简单，从理论上讲拉格朗日法的效率更高。

(2) 拉格朗日法采用了物质坐标系，网格随物质一起运动，因此物体的边界容易识别和跟踪。

(3) 某些本构方程(如弹塑性问题)和材料变形历史相关，在拉格朗日法中比较容易处理。

由于拉格朗日方法的诸多优点，因此，工程上多采用拉格朗日有限元法处理中低速的冲击和侵彻问题。用拉格朗日有限元法模拟冲击问题时，接触算法属于难点和重点，接触算法及其参数的选取影响了计算结果的精度。在显式时间积分的拉格朗日有限元法中，首先将接触面按照主表面和从表面进行区分，然后采用以下两种方法实现接触计算：

(1) 罚方法

该方法的原理是在每一个时间步先检查各从节点是否穿透主表面，没有穿透则没有接触发生，接触力为零值。如果穿透发生，则在从节点上施加一个和穿透量成正比的接触力。这种处理方法相当于在该从节点和主表面之间引入了一个弹簧，以限制从节点对主表面的穿透量。罚方法仅仅是近似地施加了非穿透约束条件，当罚参数增加时，更接近于满足接触的非穿透条件^[15]。

在罚方法中，罚力过大会造成节点速度的逆向，因此必须限制罚力的大小，

文献^[15]给出了罚方法接触力的一个上限值。此外，罚方法是条件稳定的，当罚刚度增加时，稳定时间步长减小^[16]。

罚方法相当于在所有从节点和主表面之间布置了一系列的法向界面弹簧，程序容易实现而且效率较高。对于侵彻和穿甲问题而言，采用显式有限元模拟时需要考虑单元侵蚀技术，罚方法的优势在于容易和单元侵蚀技术相结合。此外，罚方法如果采用对称罚函数技术，模拟过程中能有效避免沙漏模态的出现^[17,18]。由于以上诸多优点，罚方法多为显式动力学有限元程序所采用，如LS-DYNA和PRONTO3D^[19,20]。

(2) 拉格朗日乘子法

显式算法的拉格朗日乘子法也称为节点约束算法^[21,22]。该算法的计算原理是首先不考虑接触，对各个物体的加速度、速度和位移进行更新计算，得到物体的试探解。然后，根据试探解进行接触判断，如果接触没有发生，试探解就是真实解。否则，接触发生并且计算接触力，接触力的大小可以从接触的非穿透条件得到。得到接触力以后，对物体的试探解进行修正，使得该时间步最后得到的位移和速度等变量满足接触的非穿透条件。该算法的最大优点是总是能保证接触界面节点满足非穿透条件^[18]。

采用有限元模拟穿甲和侵彻问题时，需要考虑单元侵蚀技术，单元侵蚀往往会造成接触面出现非规则的锯齿状和间隙，此时拉格朗日乘子法难于处理该问题，这限制了拉格朗日乘子法的应用范围。对于不考虑单元侵蚀的低速撞击问题，拉格朗日乘子法往往能获得精确的计算结果。一些主要的显式动力学程序，如LS-DYNA和PRONTO3D均提供了这种接触算法。

拉格朗日法的计算网格随物质一起变形和扭曲。当计算网格严重扭曲、甚至相互重叠时，将引起较大的数值误差，甚至使计算失败，这个问题可以通过使用网格重分技术(remesh)和单元侵蚀(element erosion)技术在一定程度上得以克服。

在显式有限元中，网格重分技术一般采用了 h 自适应策略来进行网格重分，网格重分技术多用于一些冲击和侵彻问题的二维模拟，这种技术在一定程度上改善了网格质量^[23-25]。基于二维的自适应网格技术，Camacho 采用了显式有限元方法模拟了钨合金长杆弹对钢靶的垂直侵彻过程，模拟得到的侵彻深度和实验值吻合较好^[23]。目前，网格重分技术在三维冲击模拟中的应用还处于起步阶段，Bessette 将 h 自适应的三维网格重分技术应用于 PRONTO3D 软件^[22]，并采

用该技术模拟了钨合金长杆弹对钢靶的斜侵彻过程，模拟过程中网格质量得到了一定的改善。三维网格重分技术过程费时而且算法较为复杂，而且对网格质量改善的效果有限，因此还需要进一步完善。

采用显式有限元分析侵彻和穿甲问题时，接触面的网格往往产生畸变，处理接触面网格畸变最为有效的手段之一就是单元侵蚀技术。单元侵蚀技术认为单元的等效塑性应变或者是其他变量达到一定阈值时，单元失去承载能力，从而删除单元。在金属的穿甲问题模拟中，临界失效应变设置值在 1-3 之间选取，这个值是个经验值，而不是实际的物理值。单元侵蚀技术依赖于网格密度以及失效应变的选择，因此网格密度和失效应变的取值对计算结果会产生影响。对于一些厚靶体正侵彻的二维自适应模拟，不采用单元侵蚀技术也能获得较好的计算结果^[23, 24]。但是对于三维的侵彻模拟过程，网格自适应技术不成熟，因此还必须采用单元侵蚀技术来克服网格畸变^[22]。单元侵蚀技术的缺点在于：单元侵蚀会造成系统的质量、动量和能量不守恒，这样会给计算结果带来扰动；此外，被侵蚀的单元完全丧失了承载能力，而实际的失效材料往往还有一定的承载能力，因此单元侵蚀技术会造成侵彻阻力被低估的现象。

现代的冲击动力学有限元软件均采用了率相关弹塑性本构关系、显式时间积分算法、冲击接触算法、单元侵蚀、二维网格自适应和人工体积粘性技术进行冲击动力学问题的模拟。关于这方面的文献发表在《Computer Methods in Applied Mechanics Engineering》、《International Journal for Numerical Methods in Engineering》以及其它一些国际期刊上。

比较有名的拉格朗日显式动力学有限元程序有以下几个：

(1) LS-DYNA 程序

LS-DYNA 程序是知名的显式有限元分析代码之一。LS-DYNA 程序的前身是 DYNA3D 和 DYNA2D 程序系列，最初在 1976 年由 LLNL 实验室的 Hallquist 主持开发，可用于结构的冲击动力学响应分析，最初的 DYNA 程序主要是为美国的核武器设计提供分析工具。1988 年 Hallquist 创建了 LSTC 公司，开始专注于 DYNA 程序的开发，后来将程序命名为 LS-DYNA，并将其应于民用产品，其最新的版本为 971 版本。经过 30 多年的发展，LS-DYNA 具有很强的通用分析能力，可以分析带有几何非线性、材料非线性和接触非线性的各种复杂动力学问题。其接触算法主要采用罚方法，包括了单面接触算法、面-面接触算法以及单元侵蚀技术相结合的接触算法。由于采用了单点积分算法，所以

LS-DYNA 具有较高的计算效率。LS-DYNA 包括了 200 多种材料模型, 包括了各种金属和岩土材料模型。光滑粒子动力学算法(SPH)被加入 LS-DYNA 程序, 用于超高速和穿甲分析。目前, LS-DYNA 在各种金属的冲击动力学问题中得到广泛应用, 如 Martineau 基于 LS-DYNA 研究了直径 6.4mm 的钨合金弹丸对钢靶的侵彻过程^[26], 冲击速度范围为 0.8–2.5 km/s。基于 LS-DYNA 程序, Resnyansky 发展了单元分裂技术^[27], 采用这种技术代替单元侵蚀技术来分析高速冲击问题。Børvik 基于 LS-DYNA 分析了平头、圆头和尖头三种弹丸对厚靶体的侵彻能力^[28]。

(2) PRONTO3D 程序

PRONTO3D由美国Sandia国家实验室开发, 是一个用于武器设计的显式拉格朗日有限元程序, 是一个非商业化的内部使用程序^[29]。PRONTO3D 从 PRONTO2D 发展而来, 用于求解带有高应变率、高度材料非线性和大变形问题的三维瞬态动力学程序。该程序采用八节点常应变六面体实体单元, 四节点常应变四边形壳单元, 采用变步长的显式时间积分, 用自适应时间步控制算法。程序中包含了稳健的接触算法、沙漏模态控制、单元侵蚀技术、刚体处理技术。无网格SPH方法作为一个求解模块加入到了程序中, 并且能和有限元法一起进行耦合求解。

和一般商业化的显式有限元程序比较, PRONTO3D具有更强的并行计算能力, Brown和Attaway等采用并行化的PRONTO3D程序进行了百万单元量级的弹靶冲击动力学过程分析^[30,31]。另外一个特征是, 针对有限元法计算深侵彻问题的缺陷(单元侵蚀), Warren等将半解析半数值的方法引入PRONTO3D, 其原理是从空腔膨胀理论或者其他解析公式导出弹体在侵彻中承受的压力, 将压力作为时间函数施加在弹体上, 从而获得弹体在侵彻过程中的动态响应, 该方法已经被用于金属靶、混凝土和地质介质靶体的侵彻过程分析^[32-35], 这种方法的缺点在于只能观测弹体响应, 无法得到靶体的破坏图像。

(3) ABAQUS 有限元程序

ABAQUS 有限元程序是商业化程序, 包括了两个求解器: ABAQUS/Standard 和 ABAQUS/Explicit 模块。ABAQUS/Standard 主要用于传统的结构静力学和结构动力学分析, 采用了隐式算法。而 ABAQUS/Explicit 则是采用了显式时间积分的拉格朗日有限元程序, 该模块可以求解冲击和爆炸问题。ABAQUS 的主要特色是可以方便地对 Standard 和 Explicit 模块得到的计算结果进行相互传输, 这

对于一些复杂过程的模拟是十分有利的，比如冲压过程和冲压后的回弹过程模拟。ABAQUS 的另一个特色是可以方便地加入材料本构模型^[36]，这对一些研究材料本构的人员具有强的吸引力。ABAQUS 也使用单元侵蚀技术，侵蚀后的单元有两种选项：失效的单元应力置零，或者失效的单元还可以承受压力。基于 ABAQUS/explicit 模块，Iqbal 和 Gupta 等采用了 Johnson-Cook 模型对各种弹丸侵彻金属靶体的过程进行了数值模拟，并和实验结果进行了对比^[37-39]。

(4) 其他的一些有限元程序

在工程中常常使用的显式动力学有限元程序包括了 DYTRAN 程序。1993 年 MSC 发布了 DYTRAN 的第一个商业版本，该程序继承了 DYNA3D 的显式积分有限元算法。DYTRAN 的特色之处在于集成了拉格朗日方法和欧拉方法，并能进行二者的耦合分析，适合于模拟爆炸、穿甲等问题^[40]。

EPIC 程序也常常在文献中被提到。EPIC 是拉格朗日型的显式有限元程序，由 Johnson 等在 20 世纪 70 年代研制，在二维问题中采用三角形单元，在三维问题中采用四面体单元。后来程序经过改进，引入网格重分和单元侵蚀技术，可以计算侵彻问题，EPIC 在研究领域一直发挥着作用^[41]。

除了拉格朗日有限元冲击动力学程序外，采用拉格朗日网格的有限差分程序也常常用于冲击和侵彻模拟。比较知名的是 LLNL 实验室 Wilkins 发展的 HEMP 程序^[42]，这个程序采用了网格重分技术处理网格大变形，用滑移线方法模拟接触界面，HEMP 程序主要用于爆炸力学领域的数值模拟。AUTODYN 是 Century Dynamics 公司发展的一个三维的显式动力学有限差分程序^[43,44]，该程序提供了拉格朗日方法、欧拉方法和无网格 SPH 方法，可以进行拉格朗日-欧拉耦合求解，拉格朗日-SPH 耦合求解。Tham 将弹体按照拉格朗日网格进行离散，混凝土靶体分别按照拉格朗日网格、欧拉网格和 SPH 质点进行离散，对比了不同耦合算法的侵彻深度^[45]。

冲击动力学有限元程序在我国研制起步较晚，但仍然取得了一些重要的研究成果。王肖钧等^[46]提出了有限元法中四边形单元沙漏控制的新方法，保证了大变形和局部变形奇异性问题的计算可顺利进行。胡秀章等^[47]提出了一种弹塑性弹丸侵彻靶板的滑移面处理新方法，成功解决了弹体头部大变形和质量消蚀问题。中国科学技术大学的李永池等^[48]发展了一种新的二维拉格朗日有限元程序 HVP，开展了弹丸对混凝土靶侵彻的二维数值模拟计算，采用了新的材料单元破坏删除模式和改进的滑移面技术，从而较好地揭示了侵彻过程中的主要物理

图象。王峰和王肖钧^[49]将二维有限元程序HVP发展成为三维的HVP-3D,并开展了钢弹对铝靶体的斜侵彻模拟。西南交通大学的宋顺成等给出了基于一致质量阵的显式有限元迭代计算格式,并将其用于长杆弹的深侵彻数值模拟^[50-52]。

1.2.2.2 欧拉方法

由于欧拉方法的网格在空间固定,物质在网格内流动,因此在处理大变形问题时具有较大的优势。冲击问题是一个高速瞬态的大变形问题,对于该类问题的数值模拟,目前拉格朗日方法的研究相对成熟。尽管拉格朗日方法的网格重分技术在一定程度上克服了网格畸变等问题,相比较而言,拉格朗日方法仍不可能像欧拉方法那样自然地反映大变形。欧拉方法另外一个优势是不用单元侵蚀技术就能进行侵彻模拟,而拉格朗日方法中的单元侵蚀技术是一个非物理的数值处理技术。欧拉方法在处理大变形问题时具有较大的优势,但当所研究的系统中含有多种物质的时候,便会出现混合网格,此时混合网格处理方法的优劣就显得至关重要。如何确定混合网格中的物质界面位置,如何计算混合网格的力学量以及混合网格向周围网格的物质输运量,一直是欧拉方法中的难题^[53]。

欧拉方法的求解变量在一个时间步内分两步完成计算过程,首先进行拉格朗日步计算,此时网格随着物质一起变形;然后进行映射步计算,此时将变形后的网格映射到初始的规则网格上,这种处理方式在数学上对应于算子分裂算法。大多数的欧拉方法程序都采用了这种算子分裂方法,如CTH、HULL和JOY等程序^[54,55]。采用这种算子分裂方法的主要原因是显式分析中易于得到二阶精度的计算结果^[13]。

CTH程序是Sandia实验室的内部使用的欧拉程序^[55],该程序采用有限体积法进行控制方程的离散,CTH可以进行穿甲、侵彻、爆轰和超高速撞击问题的模拟。CTH采用了算子分裂形式的两步算法完成一个时间步的数值计算,在拉格朗日步,采用显式时间积分算法完成拉格朗日形式的控制方程计算,初始的网格随着物质一起变形,此时没有质量流出网格边界。拉格朗日步之后是映射步,在映射步,变形后的网格被映射到初始的固定规则网格上。CTH还提供了可以进行数据修正的第三步,在该步用户可以对一些特殊情况下的数据库进行修正。在映射步,变形网格的质量、动量、和体积要映射到初始的规则网格,此时需要知道物质界面来进行映射计算。CTH采用了SLIC(Simple Line Interface

Calculation)方法以及 Youngs 界面重构方法计算物质界面^[56,57]。

CTH 对材料的失效处理分为两种：对于拉伸失效，当应力球量大于给定的阈值时，认为材料破坏，此时引入了空洞模型，该模型可以模拟层裂现象；对于金属材料的剪切失效，当等效塑性应变大于破坏应变时，此时认为失效的材料仅仅能承受材料压力，此时不考虑材料的固体强度特性。

对于欧拉方法，同样也要处理材料界面的接触问题，欧拉方法中的接触问题是通过混合网格的处理来体现的。对于包含两种物质的混合网格，常用的一种处理方法是采用混合理论来处理混合网格内的状态变量，这种处理方法是采用体积加权平均的思想计算混合网格内的状态变量，如材料强度。混合理论的缺点是常常将物质界面按照非滑移界面进行处理，这种处理方式对于超高速撞击是可行的。Fahrenthold 基于该方法并采用 CTH 程序对弹体超高速斜撞击过程进行了数值模拟^[58]。对于弹丸中低速侵彻靶体的过程，在侵彻过程中弹体变形不大，此时采用混合理论计算会造成弹体头部的明显变形，从而增加了侵彻阻力。为了改进混合理论，Silling 等在 CTH 程序中引入了处理滑移界面的边界层算法(BLINT)，该算法在两种物质之间引入滑移层，可以考虑材料之间的相互滑移，适合于分析中低速的穿甲和侵彻问题^[59]。目前，BLINT 算法已经可以处理三维问题，并在 CTH 程序上进行了充分发展，基于该算法，Scheffler 用 CTH 程序对钢弹侵彻铝靶的斜侵彻问题进行了分析^[60]。BLINT 算法虽然可以考虑滑移界面，但其无法考虑物质界面的摩擦滑移问题，这也是欧拉方法的缺陷。

由于军事的需求，我国关于欧拉方法的冲击动力学程序研制也取得了一定成果。北京应用物理与计算数学研究所开发了三维弹塑性流体力学欧拉程序 MEPH3D，MEPH3D 可以用于高速碰撞和侵彻等问题的三维欧拉数值模拟，在实际应用中发挥了重要的作用^[61-62]。

北京理工大学爆炸与冲击动力学学科组基于多物质欧拉型有限差分算法，开发了二维及三维爆炸与冲击问题仿真软件 EXPLOSION-2D、EXPLOSION-3D。EXPLOSION-3D 软件的三个组成模块为计算程序 MMIC-3D、前处理程序 MESH-3D 和后处理程序 VISC-3D。在这个软件的基础上，开展了大量的算法研究工作^[63-66]，并对混凝土侵彻问题进行了数值模拟。

北京大学王景焄、刘凯欣和中科院力学所张德良将 CE/SE 方法推广到了二维固体-流体弹塑性问题的数值计算，同时结合杂交粒子水平集方法追踪物质界面，提出一套完整的二维欧拉型流体弹塑性计算方案，并进行了长钨杆侵彻装

甲钢实验的数值模拟^[67-68]。

1.2.2.3 ALE 方法

拉格朗日方法易于跟踪材料界面，但存在网格畸变问题。欧拉方法易于处理大变形，但对材料界面的处理技术较弱。由于拉格朗日方法和欧拉方法都有各自的不足，一种直接的思想就是借鉴这两种方法的优点形成新的算法进行冲击和侵彻分析，任意拉格朗日-欧拉算法(ALE)就是将这两种方法结合的代表。

在初始构型 Ω_0 中质点的位置矢量记为 $\mathbf{X}$ ，变量 $\mathbf{X}$ 可以作为质点的标记，称为物质坐标。质点 $\mathbf{X}$ 在现时构型 Ω 中的位置矢量用 $\mathbf{x}$ 表示，变量 $\mathbf{x}$ 称为空间坐标或者欧拉坐标。ALE方法引入了一个独立于初始构型和现时构型的参考构型 Ω_ξ ，参考构形中质点的位置由其在参考坐标系中的位置矢量 ξ 确定，在ALE描述方法中，有限单元剖分是对参考构形进行的，网格点就是参考点，网格是独立于物体和空间运动的，可以根据需要自由选择。对于ALE方法，变量 F 定义在参考坐标上， $F = F(\xi_i, t)$ 。变量 F 的物质导数写为：

$$\frac{dF}{dt} = \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\xi_i} + (v_i - \hat{v}_i) \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (1-8)$$

其中， v_i 为物质速度， $\hat{v}_i$ 为网格速度， $v_i - \hat{v}_i$ 是所谓的对流速度。采用式(1-8)可以将控制方程转化到参考坐标系 ξ_i 下求解。ALE描述的重要特征是可以根据需要给定合适的网格运动速度 $\hat{v}_i$ ，以维持计算网格的合理形状并准确描述物体的移动界面。由于ALE算法中存在对流项，因此ALE计算也采用了拉格朗日步和映射步两步算法^[69-71]。在拉格朗日步，可以采用标准的拉格朗日有限元计算进行求解得到物质变形量；在映射步，需要根据旧网格进行重构得到优化后的新网格，然后将旧网格上的物理量映射到新网格。

ALE方法吸收了拉格朗日方法和欧拉方法的优势，适合于分析一些大变形问题，现在的有限元软件如LS-DYNA和ABAQUS均提供了ALE求解模块。目前，ALE算法的应用主要是解决一些锚杆和岩土의相互作用问题，由于这类问题中存在岩土的大变形，传统的有限元法难于分析此类问题。基于轴对称问题的ALE算法，Sheng等采用Mohr-Coulomb岩土材料模型分析了锚杆对岩土의侵彻过程^[72-73]。

Liyanapathirana和Walker等基于商业软件ABAQUS，采用ALE算法和轴对称

模型对锥杆侵彻岩土和砂土的准静态过程进行了数值模拟^[74-75]，其中粘土的材料模型采用了Mises弹塑性模型，砂土的材料模型采用了Drucker-Prager弹塑性模型。

CALE是由美国Lawrence Livermore国家实验室开发的二维ALE程序，Alme等使用CALE程序对超高速碰撞问题进行了模拟^[76]。目前，ALE方法在二维数值模拟问题中取得了一定成功，但还是存在一定的局限性，如何设计有效的三维网格运动和网格重构算法是难点。

1.2.3 无网格方法

在金属和岩土的冲击动力问题中，常常发生材料的大变形和破坏。传统的拉格朗日有限元方法在处理这类问题时，尤其是岩土的侵彻问题，网格会发生严重扭曲和畸变，这将使得计算步长过小或者出现单元负体积现象，这样大大加大了计算工作量，甚至无法完成整个求解过程。其次，对一些冲击过程中的材料碎裂问题，传统的网格类方法难于模拟。鉴于网格类算法在处理这些问题中的缺陷，近几年来国际上许多著名的计算力学学者发展了无网格方法。

建立近似函数时不借助网格是无网格法与有限元法的主要区别。无网格法采用定义在离散点上具有紧支特性的函数来构造近似函数，而不用定义在全局上的级数展开形式，这是无网格法与经典加权余量法的主要区别^[77]。

无网格方法名称众多，但它们都可以根据近似函数的构造方法或偏微分方程的离散形式进行区分。因此，通过这两条主线，便可了解无网格方法的全貌并加以区别。对于各种形式的无网格方法，求解微分方程的数值方法总可以分为三大类^[78-82]。第一类是直接求解微分方程和相应定解条件的近似解，如各类配点型无网格法。第二类是在整个计算域内建立和原来微分方程相等效的积分弱形式，再在此基础上建立近似解法，如EFG方法等。第三类是在子域内建立微分方程的等效积分弱形式，再在此基础上建立近似解法，如MLPG方法。无论从微分方程那种形式出发，从加权余量法的观点来看，各类无网格方法的主要区别还在于采用什么样的加权余量法和试探函数。

无网格法的近似函数是直接通过一组离散点 $\mathbf{x}_I (I=1,2,\dots,N)$ 来建立的，不依赖于单元，函数 $u(\mathbf{x})$ 可以近似为

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n N_I(\mathbf{x}) u_I = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (1-9)$$

其中, u_i 是函数 $u(\mathbf{x})$ 在节点 $\mathbf{x}_i$ 处的值, $N_i(\mathbf{x})$ 为节点 $\mathbf{x}_i$ 的形函数, n 为形函数在 $\mathbf{x}$ 处不为零的节点数, $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = [N_1(\mathbf{x}), N_2(\mathbf{x}), \dots, N_n(\mathbf{x})]$, $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ 。以下介绍无网格法常用的三种近似函数。

(1) 核近似

核近似方法最初用于光滑质点流体动力学法(SPH), 函数 $u(\mathbf{x})$ 可以近似为

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}') u(\mathbf{x}') d\Omega_{\mathbf{x}'} \quad (1-10)$$

其中 $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 称为核函数或者光滑函数, 在数值计算中, 需要采用上式的离散形式, 对式(1-10)右侧进行数值积分可以得到

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) u_j \Delta V_j = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) u_j \quad (1-11)$$

其中, $N_j(\mathbf{x})$ 为核近似的形函数, ΔV_j 为节点 j 对应的面积或者体积。

在 SPH 方法中, 将物体划分为 n 个小体元, 将各个体元的质心取为节点, 把各体元的质量赋予节点, 此时这些节点变成了带有质量的质点, 质点的体积可以从质点质量与质点密度的比值得到, 这种近似方法在文献中被称为粒子近似, 在 SPH 方法中, 采用粒子近似以后, 函数 $u(\mathbf{x})$ 可以近似为

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) u_j \frac{m_j}{\rho_j} \quad (1-12)$$

基于粒子近似, 将粒子变量的函数和导数代入微分控制方程便可以得到 SPH 方法的离散格式^[83-84]。

(2) 重构核近似

Liu等人发现将SPH用于求解有限区域问题时, 数值解在边界处恶化。Liu等人认为这是由于离散形式的核近似不满足一致性条件引起的, 因此提出了重构核近似粒子方法(RKPM), 在重构核近似粒子方法中, 近似函数采用以下形式

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} c(\mathbf{x}, \mathbf{x}') w(\mathbf{x} - \mathbf{x}') u(\mathbf{x}') d\Omega_{\mathbf{x}'} \quad (1-13)$$

式中, $c(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 称为校正函数, 可以通过令(1-13)满足一致性条件确定^[85-86]。

(3) 移动最小二乘近似

待求函数 $u(\mathbf{x})$ 在计算点 $\mathbf{x}$ 的邻域内可以局部近似为

$$u^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}') a_i(\mathbf{x}) \quad (1-14)$$

其中 $\mathbf{x}'$ 是计算点 $\mathbf{x}$ 的邻域内各点的空间坐标, $p_i(\mathbf{x}')$ 是基函数, m 是基函数的个数, $a_i(\mathbf{x})$ 是待定系数。在移动最小二乘近似(MLS)中, 系数 $a_i(\mathbf{x})$ 的选取根据加权最小二乘原则, 要求函数的局部误差最小。

$$J = \sum_{I=1}^n w_I(\mathbf{x}) \left[u^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) - u(\mathbf{x}_I) \right]^2 \quad (1-15)$$

令 J 取最小值, 解得待定系数 $a_i(\mathbf{x})$, 再代入(1-14)得到最小二乘近似,

$$u^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{u} \quad (1-16)$$

Nayroles等人将移动最小二乘近似法引入到微分方程的积分弱形式, 采用伽辽金法, 提出了散射元法(Diffuse Element Method, 简称DEM)^[87], 并且用这种方法分析了Poisson方程和弹性问题。1994年, 美国Northwestern University的学者Belyschko^[88]等人对DEM法进行了两点改进, 在采用移动最小二乘近似法计算形函数导数时保留了被Nayroles忽略的所有项, 并利用拉格朗日乘子法引入本质边界条件, 提出了无单元伽辽金法(the element-free Galerkin method, EFG)。

伽辽金型无网格法是基于全局弱形式, 它需要使用背景网格进行积分, 计算量大, 针对此缺点, Atluri等人利用移动最小二乘近似法来构造近似函数, 在局部子域内建立微分方程的伽辽金弱积分形式, 由此建立了无网格局部彼得罗夫-伽辽金法(Meshless Local Petrov-Galerkin Method, 简称MLPG), 该方法不需要背景网格^[89-90]。

以上结合三种常用的近似函数介绍了四种常用的无网格方法: SPH方法, RKPM方法, EFG方法和MLPG方法。除了文中介绍的这三种近似函数, 还存在其他的近似函数^[77]。由于无网格法的近似函数大多不满足delta函数性质, 因此难于施加本质边界条件。但是, 无网格法在大变形以及材料碎裂模拟上具有网格类方法无可比拟的优势, 因此在冲击和侵彻数值模拟中得到了较多应用。在无网格法中, 发展最早的SPH首先被用于模拟高速冲击问题^[91-93]。

接触问题是冲击碰撞过程中的一个重要问题。SPH中一个质点的影响点可以在本物体上也在另一个物体上, 因此对两物体的接触可以不加特殊考虑, 但SPH并不保证速度场单值, 因此接触面有可能发生质点穿透。Campbell等提出了基于罚函数的粒子-粒子接触算法^[94], 并将其用于两个杆的高速撞击过程, 并和DYNA的计算结果进行了对比。Vignjevic等提出的接触算法不需要专门建立接触面, 该算法被应用于液体晃动和超高速冲击中^[95]。

Johnson等应用和改进SPH方法^[96,97], 针对高速冲击问题进行了一系列工作, 基于有限元和SPH耦合算法进行了尖头钢弹对铝靶侵彻过程的数值模拟。Johnson等提出了与SPH类似的广义粒子算法(generalized particle algorithm, GPA)^[98], 用于高速冲击问题。Johnson等结合有限元和无网格方法, 将冲击变形过程中畸变的有限单元转化成质点^[99,100], 用于超高速冲击层裂破坏以及长杆弹斜侵彻。

目前, SPH已经成为高速冲击领域的重要方法, 被加入到AUTODYN、LS-DYNA等商业软件中, 并用于各种冲击问题尤其是超高速撞击问题的数值模拟。其他的一些无网格方法也逐步应用于冲击和侵彻模拟过程, Han等^[101]采用速度与速度梯度分别插值的MLPG混合方法计算高速侵彻问题, 体现了无网格法相对有限元的优势。Fahrenthold等一直致力于超高速碰撞问题数值模拟方法研究^[102,103], 基于哈密顿方程, 他们结合有限元的特点和质点类方法的思想提出杂交的质点单元方法, 同时利用质点和单元离散连续体, 分别用质点和单元模拟不同的物理量, 研究超高速冲击问题。

近年来, 一种质点类无网格方法—物质点法受到关注, 这种方法不受网格畸变限制, 适合于分析冲击动力学问题, 下文将对此方法的研究现状进行评述, 进而给出本文在物质点法的算法和应用两个层面上的研究内容。

1.2.4 并行计算技术

冲击动力学问题的数值模拟常常采用显式算法, 因此比较耗费计算时间。其次, 为了获得更为精细的数值模拟结果, 往往需要建立大规模的数值计算模型。在冲击动力学问题数值模拟中, 为了进行大规模计算以及缩短计算时间, 人们往往借助于并行计算技术。并行计算技术将计算任务进行分解, 使用尽可能多的处理器进行并行计算, 从而达到提高计算规模和缩短计算时间的效果。并行计算的效率和可扩展性依赖于并行算法的合理性, 一个好的并行算法应该具有两个特征: (1) 高的并行效率, 能有效减少计算时间; (2) 良好的扩展性, 即并行效率不因为计算模型规模变大而减小。

在构造并行算法时, 需要根据所使用的并行计算平台考虑以下问题:

- (1) 各个独立的处理器是否在每一次计算中都执行相同的操作, 各个处理器的计算是否独立。
- (2) 计算中使用的存储器是共享的还是独立的, 或者是两者兼有。

(3) 处理器之间的信息传递是经过通信网络，或是通过共享存储。

不同的并行计算平台需要采用不同的并行计算技术。对称多处理机(SMP)如 SGI Origin 体系使用了共享的系统资源，共享存储器和共享 I/O，所有的处理器都可以平等的使用这些资源。多核工作站和 SMP 类似，也采用了共享存储和共享 I/O，区别在于多核工作站中采用了共享缓存，可以将多核工作站看成 SMP 机器的简化版。大规模并行处理机(MPP)体系由通过网络连接的节点组成，网络中的每个节点都具有各自独立的存储器和 I/O，对于 MPP 而言，各个节点之间采用了分布式存储，而一个节点内部的处理器则采用了共享存储。

对应于不同的并行计算平台产生了两种并行技术^[104,105]：MPI 和 OpenMP。MPI 用于分布式存储并行平台，采用分布式存储的并行平台进行并行计算时，各个处理器需要通过 MPI 进行信息传递。OpenMP 用于共享存储并行平台，采用共享存储的并行平台进行并行计算时，各个处理器可以基于 OpenMP 通过共享内存来完成，不需要进行显式的信息传递。采用 MPI 进行并行计算时，必须在程序中做大量的改动以调用信息传递函数，比如采用 MPI_Send 和 MPI_Receive 进行信息的发送和接受，但其优势在于可以使用更大的计算资源。OpenMP 基于共享内存，其特点是不必对程序做太多改动，支持增量化并行。目前，MPI 和 OpenMP 均提供了 Fortran、C 和 C++语言的接口。

关于 MPI 并行技术在冲击动力学并行计算方面的应用较多，现有的并行有限元程序多采用基于单元的区域分解算法和 MPI 编程技术，比如 LS-DYNA 和 PRONTO3D。基于 MPI 和动态负载平衡技术，Brown 和 Attaway 等^[30,31]开展了显式有限元的并行算法研究，并进行了弹靶侵彻模拟的大规模数值计算，他们所采用的并行算法已经加入到了三维显式动力学有限元程序 PRONTO3D。基于 MPI 和区域分解算法，Har 等^[106]开展了冲击接触问题的并行有限元方法研究，重点讨论了接触算法的并行化问题。Guo 等^[107]基于 MPP 并行版本的 LS-DYNA 进行了坑道在地震载荷下的响应分析，其计算模型的单元数达到了 380 万。

关于 MPI 在无网格方法的并行计算方面，王裴等^[108]开展了并行 SPH 算法的研究，其并行算法基于区域分解算法。在此基础上，王裴等采用 100 个处理器对质点数为 145 万的斜侵彻问题进行了 SPH 模拟。基于 MPI 技术，Danielson 等^[109]开展了 RKPM 并行算法的研究，并采用并行的 RKPM 程序研究了板材拉伸下的破坏问题。

采用 OpenMP 进行并行计算的难点在于克服数据竞争问题，即避免不同的

处理器在同一时刻处理共享变量。关于 OpenMP 技术在冲击动力学问题并行计算中的研究不多, Pantalé^[110]基于 OpenMP 开展了并行有限元算法研究,他发现如果使用临界区处理数据竞争问题会导致并行效率下降。

其他方面, Couturier 等^[111]采用 OpenMP 开展了分子动力学的并行计算研究,其计算表明在 8 核下加速比可以达到 6。Ayguadea 等^[112]基于嵌套的 OpenMP 并行技术进行了流体动力学的并行计算研究。Thacker 等^[113]采用 OpenMP 和 Fortran77 编制了并行化的 SPH 程序 HYDRA_OMP, 并采用该程序进行天体物理学领域的并行计算。

1.3 物质点法研究现状

物质点法源于经典的质点网格法(Particle in Cell, PIC)^[114]。经典 PIC 方法主要用于计算流体动力学,该方法将连续介质凝聚为有限质点系。质点有质量,参与守恒运算,通过对质点的运算和追踪来实现流场数值模拟和界面显示。为了降低 PIC 方法的数值耗散, Brackbill 等人发展了 FLIP(Fluid implicit PIC)方法^[115,116],在 FLIP 方法中质点携带了更多的物理量,质点携带了动量和能量,并且采用了一致质量阵,这样数值耗散得到减少。

1994 年以来, Sulsky 等人将 FLIP 应用于冲击动力学问题中,提出了物质点法(Material Point Method, MPM)^[117-119]。为了能够处理固体力学中历史相关的本构关系, Sulsky 等对 FLIP 做了几点改进: (1) 本构方程在物质点上实现,而不是在网格上,这样便于处理与历史相关的本构关系。(2) 利用等效积分弱形式给出动量方程,得到数值离散格式。(3) 采用显式时间积分算法。

从算法分类上看,物质点法属于质点类无网格方法。物质点法将连续体离散为一组带有质量的质点,质点携带了所有的物质信息,质点的运动代表了物体的运动和变形。因此,质量守恒条件在物质点法中自然满足。物质点法需要背景网格,背景网格可以自由或者固定布置。建立背景网格的目的是用于求解动量方程和计算空间导数。在物质点法中,首先将质点信息映射到背景网格处,建立和求解动量方程,将变形后的网格节点信息映射到质点处,得到下一个时刻的质点信息。该步是完全的拉格朗日求解,质点和背景网格之间没有相对运动,因此避免了欧拉法因非线性对流项产生的数值困难,并且容易跟踪物质界面。在下一时间步抛弃变形的背景网格,仍然采用未变形的背景网格,因此避

免了拉格朗日法因为网格畸变而导致的数值困难。可见，物质点法发挥了拉格朗日法和欧拉法各自的长处，克服了其弱点。

与一般的拉格朗日方法和欧拉方法相比较，物质点法具有以下特征和优势：

(1) 虽然物质点法采用了背景网格，但每个计算步开始都采用规则的背景网格进行计算，这样物质点法的时间步长不受网格畸变的影响。因此，当采用物质点法求解材料和结构大变形问题时，计算效率高。

(2) 物质点法采用了质点离散，因此容易处理材料破碎问题，对一些涉及材料破碎的冲击动力学问题，用物质点法计算得到的物理图像更真实。

(3) 物质点法在质点和背景网格之间采用了单值映射函数，标准物质点法中自然地包括了粘着接触条件，因此物质点界面不会穿透。对于一些不考虑物质界面滑移和摩擦的问题，如流固耦合问题和超高速撞击问题，可以不用专门施加接触算法就能求解。

由于物质点法具有以上优点，近年来关于物质点法的研究得到了重视。以下从算法和应用两个层面来阐述物质点法的研究和应用现状。算法层面：

(1) 隐式物质点法

对于一些准静态问题和低速冲击问题，隐式物质点法能得到更好的计算结果并能有效减少计算时间^[120-123]，Cummins 采用迭代算法求解动量方程给出了一种隐式物质点法^[121]，Guilkey 给出了和隐式有限元算法类似的隐式时间积分算法^[122,123]。隐式物质点法用于模拟锻造过程和颗粒介质的相互作用。

(2) 质量阵形式

类似于显式有限元算法，显式物质点法中可以用协调质量阵，也可以用集中质量阵。Tan^[124]和Love 等^[125]为了获得更好的能量守恒性质，采用协调质量阵进行物质点法计算。Love等讨论了不同质量阵对能量和动量守恒的影响^[126]。在实际应用中，由于采用协调质量阵必须求解方程组，考虑到计算效率，多数研究者还是采用集中质量阵进行物质点法计算。

(3) 插值函数研究

标准的物质点法采用了线性插值函数，在计算某些问题时会产生所谓的质点跨越背景网格噪音问题。Bardenhagen 等^[127]针对此问题，采用精度更高的二阶基函数，发展了广义插值的物质点法(Generalized Interpolation Material Point method, GIMP)。基于 GIMP, Steffen 比较了不同形式的基函数和光滑长度对计算精度的影响^[128]。

(4) 自适应研究

Tan 等开展了 h 自适应的物质点法研究^[124], 对背景网格和质点同时进行自适应计算, 采用该自适应物质点法求解了裂纹尖端的能量释放率。Ma 开展了基于质点自适应的物质点算法研究, 并将该算法用于射流的数值模拟^[129]。

(5) 接触算法研究

由于采用了单值映射函数, 标准物质点法可以模拟物质界面, 防止材料相互穿透, 但标准物质点法无法有效模拟材料界面的分离、滑移和摩擦。为了更好地模拟接触分离, York等提出了一个简单的接触算法^[130], 该算法认为当物体接触发生时采用标准物质点法计算, 当物体分离时则在各自独立的速度场进行计算, 从而实现了接触分离。为了计算齿轮接触过程的物质点法计算, Hu等基于多重网格思想提出了一个接触/滑移/分离算法^[131], 该算法认为接触界面处的质点速度可以从公有背景网格计算, 而切向速度则可以从各个物体独立的背景网格计算得到。尽管上述两种算法都能有效处理接触分离, 但其缺点在于无法考虑界面摩擦。

Bardenhagen等提出了一个接触/摩擦/分离算法^[132,133], 该算法基于多速度场实现, 当接触发生时需要考虑界面的非穿透条件和库仑摩擦准则。在Bardenhagen的接触算法中, 计算的接触界面法向量不满足共线性条件, 该算法对于小变形问题能得到较好模拟。

(6) 并行计算研究

对于一些工程问题, 常常需要建立大规模的物质点法模型进行数值模拟, Parker等基于背景网格区域分解法和MPI技术研究了并行的MPM程序^[134,135], 并且采用该并行程序进行了1600万质点的大规模物质点法求解, 其计算平台为大规模并行机(MPP)。SAMRAI是一个基于C++和MPI的程序开发平台, 专门用于计算物理方面的并行程序开发, Ma和Lu等基于SAMRAI框架开发了并行的GIMP程序, 并将其用于多尺度问题的计算^[136]。

(7) 耦合算法研究

Zhang等提出了显式物质点有限元法^[137], 该算法在大变形区域布置背景网格使用物质点法计算, 在其他区域使用有限元法, Zhang等使用该算法对超高速撞击问题进行了计算。Guilkey等开展了多物质欧拉方法和物质点法的耦合算法研究^[138], 并采用该耦合算法求解了含能装置的爆炸问题, 其中采用欧拉方法模拟起爆过程, 采用物质点法模拟含能装置外壳。

在应用层面, 主要在以下领域开展了物质点法的数值模拟工作。

(1) 冲击和爆炸领域

物质点法主要用于超高速撞击和爆炸过程数值模拟, Ma和Zhang等采用了三维物质点法进行了超高速撞击和爆炸过程的数值模拟^[129,137,139]。Guilkey等将物质点法用于含能装置的爆炸过程模拟^[138]。Lee等^[140]用改进的质点网格法(Particle In Cell, PIC)方法模拟聚能射流和穿甲问题。Hu等将MPM用于模拟爆炸及其对混凝土墙的破坏^[141]。王宇新等将物质点法用于多相介质的爆炸冲击响应分析^[142]。物质点法在中低速冲击和侵彻分析中的应用不多见, Sulsky等采用标准物质点法开展了钢弹侵彻铝靶的研究^[118], 但计算侵彻深度远低于实验值。

(2) 断裂与失效分析

由于物质点法适合于分析裂尖奇异场和裂纹形成的间断面, 因此物质点法在断裂力学领域得到较多应用。Nairn 的研究组利用物质点法开发了计算裂纹尖端的CRAMP算法, 并基于自适应网格技术, 计算各种裂尖参量^[124,143,144,145]。Wang等采用非规则背景网格的物质点法来计算二维混合型裂纹^[146], 并将物质点法和有限元的计算结果进行比较。Daphalapurkar等用GIMP研究了动态裂纹扩展问题^[147]。

由于物质点法采用质点离散, 因此特别适合于分析材料的损伤与破碎模拟。Chen等应用MPM 研究了冲击载荷下的动态脆性破坏过程^[148,149], 并将物质点法计算结果与有限元计算结果进行了对比。采用物质点法和吸收边界条件, Shen和Chen等分析了冲击载荷下硅基体上金属膜的脱层失效过程^[150,151]。

传统的网格类算法难于分析复合材料的脱层破坏和冲击载荷下的层裂过程, Schreyer和Sulsky等通过在MPM中引入脱粘(decohesion)本构模型^[152,153], 模拟材料的脱层破坏和层裂破坏。

(3) 多孔材料与颗粒介质

Bardenhagen和Brydon建立了多空泡沫材料的微结构, 采用物质点法进行离散, 模拟泡沫材料的压实过程^[154,155]。Wieckowski 等^[156,157]采用MPM模拟了贮料垛卸过程中的颗粒流动问题以及金属材料拉拔过程。Bardenhagen和Cummins等^[132,158]将MPM用于炸药颗粒的剪切和流动过程模拟。Coetzee 应用MPM模拟了颗粒材料的挖斗填充问题^[159]。

(4) 其他方面

Sulsky等将物质点法用于海冰动力学问题计算^[160]。Zhang等用MPM开展了

冲击载荷下多孔介质的动力学响应分析^[161]。Guilkey等将物质点法用于生物力学^[162]。LANL的Zhang等将物质点法用于多相流的数值模拟^[163]。

综上，物质点法具有效率高，并且不受网格畸变限制，易于跟踪物质界面的特征。目前，物质点法在超高速撞击和爆炸领域取得了成功的应用，然而在中低速冲击和侵彻领域的研究有待进一步的开展。其次，对于一些冲击动力学问题，如果要获得高保真的计算结果，还必须进一步发展并行物质点算法。

1.4 本文的主要研究内容

本文的研究工作基于以下问题：

(1) 对于超高速撞击问题的物质点法模拟^[139]，由于受到计算规模限制难以获得高精度计算结果。因此，需要进一步发展冲击动力学问题的并行物质点算法和程序，开展超高速撞击问题的大规模并行计算研究。

(2) Sulsky 等采用标准物质点法开展了钢弹侵彻铝靶的研究^[118]，但计算得到的侵彻深度远低于实验值，其原因在于标准物质点法无法有效模拟接触界面的滑移、摩擦和分离，标准物质点法的粘着接触条件导致了较大的侵彻阻力。因此，需要进一步发展用于侵彻和穿甲计算的接触物质点算法。

(3) 目前，物质点法多用于爆炸、超高速冲击、材料的细观力学建模和模拟上，鉴于物质点法具有高效率且不受网格畸变限制等优势，需要进一步开展物质点法在岩土冲击动力学问题中的研究。

基于以上问题，本文开展 OpenMP 并行物质点算法研究，并进行金属弹丸超高速撞击的大规模并行计算。针对中低速的冲击和侵彻问题，研究适用于冲击和侵彻问题的接触物质点算法。在接触算法研究的基础上，开展金属及岩土中低速冲击动力学问题的研究。本文共七章，各章内容如下。

第一章即本章，介绍了研究背景、方法和意义。介绍了网格类算法和无网格算法在冲击动力学问题数值模拟中的研究现状，重点阐明各种算法对物体接触界面的处理方法。对物质点法的特点和应用现状进行了总结。

第二章阐述了物质点法的基本原理，介绍了物质点法的几种数值实现格式；简要介绍了冲击波理论、人工体积粘性法和应力更新算法，介绍了物质点程序 MPM3D^[192]常用的材料模型和状态方程。

第三章基于共享内存 OpenMP 技术开展物质点法的并行化研究。为了解决

物质点法 OpenMP 并行化中的数据竞争问题，提出了物质点法的两种 OpenMP 并行算法：数组扩展法和背景网格区域分解法。用背景网格区域分解法，开展了超高速撞击问题的大规模并行计算，计算规模达到了 13542030 个质点。

第四章内容为穿甲和侵彻问题的接触物质点算法研究，提出了一种新的接触界面法向量计算方法，给出了一般接触问题的完整数学描述，实现了接触物质点算法，采用多个算例验证了接触物质点算法的有效性和正确性；进而，将接触物质点算法用于中低速穿甲和侵彻模拟，解决了标准物质点算法模拟此类问题中侵彻阻力过大的问题。

第五章给出了刚柔接触物质点算法，通过两个算例验证了刚柔接触物质点算法的正确性；进而，采用该算法模拟了 Taylor 杆撞击后的回弹效应，模拟了水珠冲击台阶的大变形以及破碎过程。

第六章介绍了带拉伸失效的 Drucker-Prager 模型及其数值实现，采用标准物质点法模拟了岩土边坡的失效过程；采用刚柔接触物质点算法模拟了堆积物的坍塌流动过程，并和实验进行比较；采用接触物质点算法模拟了半球壳对岩土侵彻过程。

第七章是对全文进行总结和展望。对本文的主要工作进行总结，给出论文的创新之处，对进一步的研究方向进行展望。

第2章 物质点法基本原理

物质点法属于质点类无网格法，它将连续体离散为一组带有质量的质点，质点的运动代表了物体的运动和变形。物质点法需要背景网格，目的是用于求解动量方程和计算空间导数。

本章首先介绍物质点法的基本原理，进而比较标准物质点法的三种实现格式 USF、USL 和 MUSL，介绍这三种格式在 MPM3D 程序^[192]中的实现过程。介绍 MPM3D 物质点法程序处理冲击波的人工体积粘性方法，以及常用的金属材料模型和状态方程，并介绍模拟材料失效的质点失效处理方法。

2.1 控制方程和离散

2.1.1 控制方程

在固定的笛卡尔直角坐标系下，考察图 2.1 所示的物体运动。物体在 $t=0$ 时刻所占据的空间区域 Ω_0 称为初始构型，在初始构型中质点(material point)的位置矢量记为 $\mathbf{X}$ 。对于一个给定的质点，变量 $\mathbf{X}$ 不随时间 t 变化。变量 $\mathbf{X}$ 可以作为质点的标记，称为物质坐标。

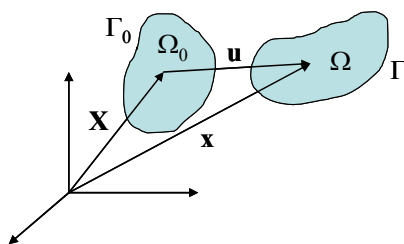


图 2.1 物体的初始构型和现时构型

物体在 t 时刻所占据的空间区域 Ω 称为现时构型，物体在 t 时刻的边界记作 Γ ， Γ 为空间区域 Ω 的边界。质点 $\mathbf{X}$ 在现时构型中的位置矢量用 $\mathbf{x}$ 表示。变量 $\mathbf{x}$ 给出了 t 时刻质点 $\mathbf{X}$ 的空间位置，称为空间坐标或者欧拉坐标。

质点 $\mathbf{X}$ 的运动方程可以表示为：

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (2-1)$$

令物质坐标 $\mathbf{X}$ 不变，物理量对时间的导数称为物质导数。如果物理量 Φ 是

用空间坐标 $\mathbf{x}$ 和时间 t 描述的, 则 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ 的物质导数为:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla\Phi \cdot \mathbf{v} \quad (2-2)$$

式中, $\mathbf{v}$ 为质点速度。 ∇ 为 Hamilton 算子, 利用算子 ∇ 可以方便地进行梯度和散度的描述。 $\nabla\Phi$ 表示变量 Φ 的左梯度, 为了避免歧义, 文中规定只使用变量的左梯度。如果 Φ 为标量, 则 $\nabla\Phi$ 为

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x_m} \mathbf{e}_m \quad (2-3)$$

式中, $\mathbf{e}_m$ 为坐标系的基矢量。

拉格朗日法可以分为两大类: 完全拉格朗日格式(TL 格式)和更新拉格朗日格式(UL 格式)。这两种描述都使用了拉格朗日描述, 即所有物理量都可以看成是物质坐标 $\mathbf{X}$ 和时间的 t 的函数。在完全拉格朗日格式中, 取初始构型为参考构型, 虚功方程的积分是在初始构型上完成的, 物理量也都是对物质坐标 $\mathbf{X}$ 求导的。而在更新拉格朗日格式中, 取现时构型为参考构型, 虚功方程是在现时构型上进行的, 物理量都是对空间坐标 $\mathbf{x}$ 求导的。

在物质点法中, 采用了更新拉格朗日格式进行描述, 这种格式更容易描述涉及材料大变形的动力学问题。更新拉格朗日格式中, 采用了 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 和变形率张量 $\mathbf{D}$ 来描述应力和应变率。根据连续介质力学, 物体的变形和运动必须满足以下控制方程。为了便于描述问题, 此处采用了张量表示形式。

$$\text{质量守恒:} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2-4)$$

$$\text{动量方程:} \quad \rho \mathbf{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (2-5)$$

$$\text{能量方程:} \quad \rho \frac{de}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (2-6)$$

式中, $\rho(\mathbf{x}, t)$ 为材料密度, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ 为速度矢量, ∇ 为 Hamilton 算子。 $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ 为加速度矢量, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ 为 Cauchy 应力张量, $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ 为体力矢量。 $e(\mathbf{x}, t)$ 为单位质量的内能, $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ 为变形率张量。此处, $\mathbf{x}$ 为 t 时刻的质点位置矢量, 式(2-4)、(2-5)和(2-6)基于现时构型定义。

对于速度矢量 $\mathbf{v}$, 其左梯度为

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\partial v_n}{\partial x_m} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n \quad (2-7)$$

在更新拉格朗日格式下，变形率张量等于应变率张量，即

$$\mathbf{D} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{v})^T + \nabla \mathbf{v}] \quad (2-8)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_u} = \mathbf{g}(t) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_t} = \tilde{\mathbf{t}}(t) \end{cases} \quad (2-9)$$

边界条件为：

式中， $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 为位移矢量，位移边界记作 Γ_u 。应力边界记作 Γ_t ， $\tilde{\mathbf{t}}$ 为应力边界上的面力矢量。

$t = 0$ 时刻，现时构型和初始构型重合，初始条件用物质坐标表示：

$$\begin{cases} \mathbf{v}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{X}) \\ \mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}) \end{cases} \quad (2-10)$$

能量方程可以进一步写成：

$$\dot{E} = J \sigma_{mn} D_{mn} = J s_{mn} \dot{\varepsilon}_{mn} - J p \dot{\varepsilon}_{kk} \quad (2-11)$$

式中， $\dot{E}$ 为单位初始体积的内能变化率， J 为变形梯度矩阵的行列式， s_{mn} 和 p 表示偏应力和压力。

$$J = \left| \frac{\partial x_m}{\partial X_n} \right| \quad (2-12)$$

$$s_{mn} = \sigma_{mn} + p \delta_{mn} \quad (2-13)$$

2.1.2 控制方程的离散

在物质点法中，将连续体离散为一系列质点，见图 2.2 所示，质点的运动代表了物体的运动，质点携带了密度、速度、应力等各种物理量。由于每个质点携带的质量在运动过程中保持不变，因此质量守恒方程(2-4)自动满足。

在域内直接求解动量方程的微分形式(2-5)是非常困难的，数值模拟一般是从微分方程的弱形式出发，它要求动量方程在域内积分满足，动量方程的弱形式为虚功方程。此处采用 Ω 代表 t 时刻一个物体所占的空间域， Γ 代表物体表面。 Γ 由两部分组成，即位移边界 Γ_u 和应力边界 Γ_t 。取虚位移矢量 $\mathbf{w}$ ， $\mathbf{w}$ 满足位移边界条件。对于一个物体，其虚功方程为

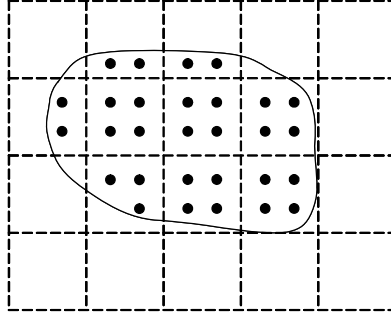


图 2.2 物质点法示意图，实线—物体边界，圆点—质点，虚线—背景网格

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{a} \cdot \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{w} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \tilde{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} d\Gamma \quad (2-14)$$

在物质点法中，通常采用脚标 i 表示节点变量，采用脚标 p 表示质点变量。如果采用质点离散， t 时刻物体的密度可以近似为

$$\rho = \sum_{p=1}^{N_p} m_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \quad (2-15)$$

式中， m_p 表示质点 p 的质量， $\mathbf{x}_p$ 表示 t 时刻质点 p 的空间位置。

将式(2-15)代入式(2-14)可以得到：

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{N_p} m_p \mathbf{a}(\mathbf{x}_p, t) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}_p, t) + \sum_{p=1}^{N_p} \frac{m_p}{\rho(\mathbf{x}_p, t)} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_p, t) : \nabla \mathbf{w} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p} \\ &= \sum_{p=1}^{N_p} m_p \mathbf{b}(\mathbf{x}_p, t) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}_p, t) + \int_{\Gamma_t} \tilde{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} d\Gamma \end{aligned} \quad (2-16)$$

在求解动量方程时，物质点和背景网格完全固连，物质点随着背景网格一起运动，因此可以通过有限元形函数建立质点和背景网格节点之间的映射关系。如果采用正六面体单元的正交背景网格，在一个单元内有 8 个节点，局部坐标系下的节点形函数表达式为

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) \quad (2-17)$$

其中， ξ, η, ζ 为局部坐标系下一质点的坐标值， ξ_i, η_i, ζ_i 根据不同节点值取为 ± 1 。此外，在六面体单元外部，形函数为零值。

质点变量和节点变量的映射关系为

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_p, t) = \sum_{i=1}^{N_n} N_i(\mathbf{x}_p) \mathbf{w}_i(t) \quad (2-18)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_p, t) = \sum_{i=1}^{N_n} N_i(\mathbf{x}_p) \mathbf{a}_i(t) \quad (2-19)$$

式中 $\mathbf{w}_i$ 为第 i 节点的虚位移, $\mathbf{a}_i$ 为第 i 节点的加速度。令 S_{ip} 表示 i 节点形函数在 p 质点处的值, $\mathbf{G}_{ip}$ 表示 i 节点形函数在质点 p 处的梯度矢量, 即

$$S_{ip} = N_i(\mathbf{x}_p), \quad \mathbf{G}_{ip} = \nabla N_i \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p} \quad (2-20)$$

将式(2-18)和(2-19)代入到式(2-16)可得:

$$\sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{w}_i \cdot \sum_{j=1}^{N_n} m_{ij} \mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{f}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{f}_i^{\text{int}} \quad (2-21)$$

考虑到节点虚位移 $\mathbf{w}_i$ 的任意性, 可得节点动量方程为:

$$\sum_{j=1}^{N_n} m_{ij} \mathbf{a}_j = \mathbf{f}_i^{\text{ext}} + \mathbf{f}_i^{\text{int}} \quad (2-22)$$

式中, m_{ij} 为质量阵分量, $\mathbf{f}_i^{\text{ext}}$ 为节点外力矢量, $\mathbf{f}_i^{\text{int}}$ 为节点内力矢量, 各个量的表达式为:

$$m_{ij} = \sum_{p=1}^{N_p} S_{ip} S_{jp} m_p \quad (2-23)$$

$$\mathbf{f}_i^{\text{ext}} = \sum_{p=1}^{N_p} m_p S_{ip} \mathbf{b}_p + \int_{\Gamma_i} N_i \tilde{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (2-24)$$

$$\mathbf{f}_i^{\text{int}} = - \sum_{p=1}^{N_p} \frac{m_p}{\rho_p} \boldsymbol{\sigma}_p \cdot \mathbf{G}_{ip} \quad (2-25)$$

如果采用集中质量阵, 则节点的动量方程为:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{f}_i^{\text{ext}} + \mathbf{f}_i^{\text{int}} \quad (2-26)$$

式中, m_i 为节点质量。

$$m_i = \sum_{j=1}^{N_n} m_{ij} = \sum_{p=1}^{N_p} S_{ip} m_p \quad (2-27)$$

式(2-26)为背景网格节点上的动量方程。通过以上推导过程可以看出, 物质点法的节点动量方程形式和有限元法的节点动量方程形式是类似的。

在物质点法中, 利用显式时间积分对式(2-26)进行积分, 便可以得到更新后的节点速度, 然后再通过形函数进行映射, 得到更新后的质点变量。具体的做法见下节。

2.2 物质点法的计算格式

2.2.1 物质点法的三种格式

在物质点法中，物体的物质信息由质点携带，背景网格节点不记录物质信息。物质点法的实现步骤为：

(1) 重新定义背景网格，将时间步初始时刻的质点变量映射到背景网格上，获得背景网格节点的质量、动量、内力和外力。

(2) 建立节点的动量方程，采用显式时间积分求解节点动量方程。

(3) 将节点的速度变化量和位置变化量映射回质点，更新质点速度和位置。

质点的应力通过应力更新算法进行计算，应力更新首先需要计算当前时刻的应变增量，然后通过本构方程得到应力增量。质点的应变增量需要通过质点的应变率进行计算，质点的应变率通过背景网格节点的速度进行计算。考虑到质点变量和节点变量之间的映射关系，根据式(2-8)可以得到质点的应变率表达式为：

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \left[(\mathbf{G}_{ip} \mathbf{v}_i)^T + \mathbf{G}_{ip} \mathbf{v}_i \right] \quad (2-28)$$

式中， $\mathbf{v}_i$ 为节点速度。

应力更新可以在每个时间步的开始时进行，也可以在时间步结束时进行。Bardenhagen^[164]将时间步开始时更新应力的格式称为 USF(Update Stress First)格式，将在时间步结束时更新应力的格式称为 USL 格式(Update Stress Last)，并且比较了两种格式的能量守恒性。Nairn^[143]对几种不同的应力更新方式(USF、USL、MUSL)进行了讨论。各种格式主要区别在于：更新应力时采用了不同节点速度计算应变率(或者应变增量)，导致了在不同时刻进行质点的应力计算。以下对 USF、USL、MUSL 三种格式的应变增量计算进行说明，便于对三种格式进行比较。

采用上标 k 和 $k+1$ 分别表示 t^k 和 t^{k+1} 时刻的值，当前时间步的初始时刻和最后时刻分别为 t^k 和 t^{k+1} ， Δt 是当前时间步的步长， $\Delta t = t^{k+1} - t^k$ 。

当前时间步质点应变增量为：

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^8 \left[(\mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_i)^T + \mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_i \right] \quad (2-29)$$

在一个时间步中，采用不同的节点速度计算应变增量便会得到不同的计算

格式:

(1) 在 USF 格式中, 首先计算质点应变增量, 并更新质点应力, 即采用更新前的节点速度 $\mathbf{v}_i^k$ 代入式(2-29)来计算应变增量。

(2) 在 USL 格式中, 最后计算质点应变增量, 并更新质点应力, 即采用更新后的节点速度 $\mathbf{v}_i^{k+1}$ 代入式(2-29)来计算应变增量。

(3) 在 MUSL(Modified USL)格式中, 将更新后的质点动量映射回背景网格进行节点速度计算, 进而进行应力计算。更新后的节点速度由下式得到

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = \frac{1}{m_i^k} \sum_p m_p \mathbf{v}_p^{k+1} S_{ip}^k \quad (2-30)$$

MUSL 将上述节点速度代入式(2-29)来计算应变增量。

MUSL 在每一个时间步结束时将质点动量映射到节点得到节点速度, 并通过该节点速度计算质点应力。USF 在每一个时间步开始时将质点动量映射到节点得到节点速度, 并通过该节点速度计算质点应力。因此, MUSL 格式和 USF 格式基本相同。Bardenhagen 和 Nairn 的研究表明^[143,164], USL 具有较强的数值耗散, 而 USF 和 MUSL 具有较好的能量守恒性。因此, 物质点程序常常使用 MUSL 格式和 USF 格式进行数值计算。

2.2.2 物质点法的具体实现

在物质点方法中, 如果节点质量接近于零值, 将会导致节点速度产生奇异, 因此, 在物质点法中用节点动量代替节点速度进行计算能得到更好的计算结果。为了方便描述, 文中的推导过程有时使用节点速度, 而在实际程序中均采用节点动量进行计算。

当前时间步的初始时刻和最后时刻分别为 t^k 和 t^{k+1} , Δt 是当前时间步的步长, $\Delta t = t^{k+1} - t^k$ 。具体的物质点法实现过程如下:

(1) 将质点的动量和质量映射到背景网格上, 得到节点质量和节点动量。

节点质量:

$$m_i^k = \sum_p m_p S_{ip}^k \quad (2-31)$$

节点动量:

$$\mathbf{p}_i^k = \sum_p m_p \mathbf{v}_p^k S_{ip}^k \quad (2-32)$$

(2) 对于 USF 格式, 根据背景网格节点速度 $\mathbf{v}_i^k$ 来计算应变增量和旋率增量, 对质点的应力和密度进行更新, 过程如下:

(a) 初始时刻的节点速度为

$$\mathbf{v}_i^k = \frac{\mathbf{p}_i^k}{m_i^k} \quad (2-33)$$

(b) 计算质点的应变增量和旋率增量为

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^8 \left[\left(\mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_i^k \right)^T + \mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_i^k \right] \quad (2-34)$$

$$\Delta \boldsymbol{\omega}_p = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^8 \left[\left(\mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_i^k \right)^T - \mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_i^k \right] \quad (2-35)$$

(c) 更新质点密度为

$$\rho_p^{k+1} = \rho_p^k / \left(1 + \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p) \right) \quad (2-36)$$

(d) 根据本构关系更新质点应力

$$\boldsymbol{\sigma}_p^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}_p^k + \Delta \boldsymbol{\sigma}_p(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p, \Delta \boldsymbol{\omega}_p) \quad (2-37)$$

(3) 计算节点内力, 节点外力和总节点力。

节点内力:

$$\mathbf{f}_i^{\text{int}} = - \sum_p \frac{m_p}{\rho_p} \boldsymbol{\sigma}_p \cdot \mathbf{G}_{ip}^k \quad (2-38)$$

节点外力:

$$\mathbf{f}_i^{\text{ext}} = \sum_p m_p S_{ip}^k \mathbf{b}_p^k + \int_{\Gamma_t} N_i^k \tilde{\mathbf{t}}^k d\Gamma \quad (2-39)$$

节点内力和外力之和为总节点力:

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^{\text{int}} + \mathbf{f}_i^{\text{ext}} \quad (2-40)$$

如果采用 USF 格式, 则计算节点内力时采用 $\boldsymbol{\sigma}_p = \boldsymbol{\sigma}_p^{k+1}$ 和 $\rho_p = \rho_p^{k+1}$; 否则对于 USL 和 MUSL 格式采用 $\boldsymbol{\sigma}_p = \boldsymbol{\sigma}_p^k$ 和 $\rho_p = \rho_p^k$ 计算节点内力。

(4) 积分动量方程并施加边界条件。

$$\mathbf{p}_i^{k+1} = \mathbf{p}_i^k + \mathbf{f}_i \Delta t \quad (2-41)$$

式中, Δt 为积分时间步长。对于固定边界令 $\mathbf{p}_i^{k+1} = 0$ 和 $\mathbf{f}_i = 0$ 。

(5) 将背景网格节点的速度变化量和位置变化量映射回质点, 得到质点的位

置和速度。

质点位置：

$$\mathbf{x}_p^{k+1} = \mathbf{x}_p^k + \sum_{i=1}^8 \frac{\mathbf{p}_i^{k+1}}{m_i^k} S_{ip}^k \Delta t \quad (2-42)$$

质点速度：

$$\mathbf{v}_p^{k+1} = \mathbf{v}_p^k + \sum_{i=1}^8 \frac{\mathbf{f}_i^k}{m_i^k} S_{ip}^k \Delta t \quad (2-43)$$

(6) 对于 USL 格式，采用积分后的节点动量得到节点速度，即由下式得到节点速度：

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = \frac{\mathbf{p}_i^{k+1}}{m_i^k} \quad (2-44)$$

然后根据该节点速度计算应变增量 $\Delta\epsilon_p$ 和旋率增量 $\Delta\omega_p$ ，对质点的应力和密度进行更新。

(7) 对于 MUSL 格式，将更新后的质点动量映射到背景网格得到节点速度，即由下式得到节点速度：

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = \frac{1}{m_i^k} \sum_p m_p \mathbf{v}_p^{k+1} S_{ip}^k \quad (2-45)$$

然后根据该节点速度计算应变增量 $\Delta\epsilon_p$ 和旋率增量 $\Delta\omega_p$ ，进而对质点的应力和密度进行更新。

(8) 至此，物质的所有物质信息均已经记录在物质点上，因此可以丢弃已经变形的网格，并在下一个时间步采用规则的背景网格进行计算。

基于上述的实现过程，采用 Fortran95，标准物质点法的三种数值实现格式均加入到本课题组的三维物质点程序 MPM3D^[192]。

为了说明 USF、USL 和 MUSL 三种格式的数值稳定性，下面以一个特殊问题为例进一步讨论三种格式^[143]，假设节点 i 只受到质点 p 的影响，外力仅仅考虑体力，因此由式(2-31)和式(2-40)可以知道节点质量和节点力为

$$m_i^k = m_p S_{ip}^k \quad (2-46)$$

$$\mathbf{f}_i = -\frac{m_p}{\rho_p} \boldsymbol{\sigma}_p \cdot \mathbf{G}_{ip}^k + m_p S_{ip}^k \mathbf{b}_p^k \quad (2-47)$$

将以上结果代入式(2-33)、(2-44)和(2-45)，可以得到三种格式在更新应力时所采用的节点速度分别为：

$$\text{USF:} \quad \mathbf{v}_i^k = \mathbf{v}_p^k \quad (2-48)$$

$$\text{USL:} \quad \mathbf{v}_i^{k+1} = \mathbf{v}_p^k + \left[-\frac{1}{\rho_p S_{ip}^k} \boldsymbol{\sigma}_p \cdot \mathbf{G}_{ip}^k + \mathbf{b}_p^k \right] \Delta t \quad (2-49)$$

$$\text{MUSL:} \quad \mathbf{v}_i^{k+1} = \mathbf{v}_p^{k+1} = \mathbf{v}_p^k + \sum_{i=1}^8 \frac{\mathbf{f}_i^k}{m_i^k} S_{ip}^k \Delta t \quad (2-50)$$

当质点 p 趋近于和节点 i 相对的边界时，此时形函数 $S_{ip}^k \rightarrow 0$ ，而形函数梯度 $\mathbf{G}_{ip}^k \neq 0$ ，因此 USL 格式(2-49)的右端第二项趋近于无穷大，这样将会导致数值不稳定。对于 MUSL 格式(2-50)右端第二项，形函数 S_{ip}^k 和节点质量 m_i^k 属于同阶小量，因此该项不会导致数值不稳定。可见，当节点受到一个质点影响时，USL 格式存在数值不稳定，而 USF 和 MUSL 格式是稳定的。

2.2.3 时间步长

采用显式积分的物质点算法要满足数值稳定性，必须满足 CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件，该条件要求在一个时间步中，波的传播距离不能超过一个网格。在物质点模拟中，时间积分是在空间固定的背景网格上完成的，在确定临界时间步长时，与采用拉格朗日网格方法不同，除了考虑材料的声速，还需要考虑质点速度^[165]。特别是对超高速撞击问题，质点速度和材料声速处于同一量级，质点速度的影响不可忽略。在物质点算法中，临界时间步长取为：

$$\Delta t_{cr} = \min_e \frac{d_c}{c + u} \quad (2-51)$$

式中， d_c 是背景网格的节点间距， u 是质点速度值， c 是材料声速。在求解实际问题以前，质点的速度是未知量，很难由式(2-51)得到时间步长。本文采用了固定时间步长，时间步长 Δt 由下式得到：

$$\Delta t = \alpha \min_e \frac{d_c}{c} \quad (2-52)$$

其中， α 为时间步长因子，可以根据不同的问题取值， α 取值应该保证整个计算过程中能量守恒。

材料的绝热声速可以表示为

$$c = \left(\frac{4G}{3\rho} + \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_S \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2-53)$$

下标 S 表示等熵。

材料的压力 p 是密度 ρ 和单位初始体积内能 E 的函数，即 $p = p(\rho, E)$ ，因此有：

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_S = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_E + \frac{\partial p}{\partial E} \Big|_\rho \frac{\partial E}{\partial \rho} \Big|_S \quad (2-54)$$

对于等熵过程有 $dE = -pdV$ ，因此

$$\frac{\partial E}{\partial V} \Big|_S = -p \quad (2-55)$$

其中， V 是变形前后体元的体积比，称为相对体积。利用关系式 $\rho V = \rho_0$ 可得

$$\frac{\partial E}{\partial \rho} \Big|_S = \frac{\partial E}{\partial V} \Big|_S \frac{dV}{d\rho} = \frac{pV^2}{\rho_0} \quad (2-56)$$

材料声速最终可以写成

$$c = \left(\frac{4G}{3\rho} + \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_E + \frac{pV^2}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial E} \Big|_\rho \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2-57)$$

对于线弹性材料， $p = -K \ln V$ ，因此

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_S = \frac{\partial p}{\partial V} \Big|_S \frac{dV}{d\rho} = \frac{K}{\rho} \quad (2-58)$$

式中， K 为体积模量，将式(2-58)代入式(2-53)，可以得到线弹性材料的声速为

$$c = \sqrt{\frac{4G + 3K}{3\rho}} \quad (2-59)$$

对于其他材料，需要考虑状态方程，可以根据压力和密度之间的关系由式(2-57)来计算其声速。

2.3 冲击波和人工体积粘性

2.3.1 冲击波理论

冲击动力学程序的典型特征就是要处理冲击波问题。冲击波可以简单定义为连续介质中的压力、内能和密度的间断。当材料中存在冲击波时，式(2-4)、(2-5)和(2-6)给出的微分方程就不再适用，因为冲击波间断面上的各个变量的导数没有意义，因此必须寻求其它的方程来描述冲击波的守恒方程。

冲击波的数学处理方法最初是 Rankine 和 Hugoniot 研究流体而提出的^[2]。为了对冲击波进行分析，做出以下基本假设：冲击波是个间断面，没有明显厚度；材料的剪切模量取零，仅仅考虑压力的作用；冲击波波阵面上的体力和热传导可以忽略。考察一维应变条件下的冲击波，根据冲击波波阵面前后区域的状态变化可以建立守恒方程。用图 2.3 可以图解冲击波，在波阵面前压力为 p_0 ，密度为 ρ_0 ，内能为 e_0 ；在波阵面后压力为 p ，密度为 ρ ，内能为 e ；波阵面前的质点速度为 $U_0=0$ ，波阵面后的质点速度为 U_p ，冲击波波阵面的速度为 U_s 。如果参考系取在波阵面上，而且参考系随波阵面以速度 U_s 运动，那么物质从右侧流入参考系的速度为 $U_s - U_0$ ，物质从左侧流出参考系的速度为 $U_s - U_p$ 。根据以上的分析，可以建立以下守恒方程：

$$\text{质量守恒:} \quad \rho_0 U_s = \rho (U_s - U_p) \quad (2-60)$$

$$\text{动量守恒:} \quad p - p_0 = \rho_0 U_s U_p \quad (2-61)$$

$$\text{能量守恒:} \quad p U_p = \frac{1}{2} \rho_0 U_s U_p^2 + \rho_0 U_s (e - e_0) \quad (2-62)$$

式中 e 表示单位质量的内能。

引入比容 v :

$$v = \frac{1}{\rho} \quad (2-63)$$

如果将式(2-60)代入到式(2-61)会得到 Rayleigh 线表达式：

$$-\rho_0^2 U_s^2 = \frac{p - p_0}{v - v_0} \quad (2-64)$$

Rayleigh 线描述了 p - v 平面上斜率为 $-\rho_0^2 U_s^2$ 的一条直线，这条直线的斜率和冲击波速度 U_s 的平方成正比。

利用式(2-64)和(2-61)，将能量方程(2-62)中的 U_p 和 U_s 消去，可以得到能量方程的另一种表示形式

$$e - e_0 = \frac{1}{2}(p + p_0)(v_0 - v) \quad (2-65)$$

这个方程称为 Rankine-Hugoniot 方程。而由上述式(2-65)得到的 $p-v$ 曲线称为 Hugoniot 曲线。

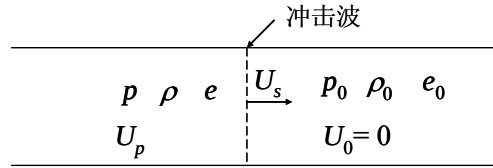


图 2.3 冲击波波阵面示意图

上述守恒方程有五个变量需要处理：压力 p 、内能 e 、密度 ρ (比容 v)、质点速度 U_p 和冲击波速度 U_s ，如果要得到任意两个参数之间的关系，还必须补充一个方程才能求解。补充的第四个方程是冲击波的速度 U_s 和质点速度 U_p 的关系式，这个关系式可以通过实验获得^[166]，一般可以写出如下的多项式形式：

$$U_s = c_0 + S_1 U_p + S_2 U_p^2 + \dots \quad (2-66)$$

式中的 S_1 和 S_2 是实验拟合参数， c_0 是压力为零值时材料中的声速，这些值均可以通过拟合 (U_s, U_p) 实验数据得到，实验表明，大多数金属材料在没有发生相变时，冲击波的速度 U_s 和质点速度 U_p 满足线性关系式：

$$U_s = c_0 + S_1 U_p \quad (2-67)$$

根据冲击波速度 U_s 和质点速度 U_p 的关系式，结合质量、动量和能量守恒三个关系式，便可以得到 $p-U_s$ ， $p-U_p$ 或者 $p-v$ 或者其他关系式。如果将式(2-67)、(2-60)和(2-61)进行联立，将 U_p 和 U_s 消去，就可以得到如下的 $p-v$ 关系式，该关系式即为 Hugoniot 曲线上压力 p_H 的一种解析表达式：

$$p_H = p_0 + \frac{\rho_0 c_0^2 (1 - v/v_0)}{[1 - S_1 (1 - v/v_0)]^2} \quad (2-68)$$

更为复杂的 Hugoniot 曲线的解析表达式可以由式(2-66)得到。图 2.4 给出了典型金属材料的 Hugoniot 曲线，需要注意的是 Hugoniot 曲线是一条由实验数据

拟合的状态曲线，而不是过程曲线。

2.3.2 人工体积粘性

冲击波导致压力、密度、质点速度和内能在波阵面前后发生突变，这种突变给数值计算造成了困难。为了在计算程序中捕捉冲击波，需要在压力项 p 添加人工体积粘性项^[19]。人工体积粘性项起到使得冲击波间断面光滑化的作用，该项的添加使得波阵面压力在相当狭窄的过渡区内呈连续变化。由于该方法能有效处理冲击波的强间断面问题，因此人工体积粘性的方法几乎被所有的冲击动力学程序所采纳。粘性项取为

$$q = \begin{cases} a_0 \rho l_e^2 (\dot{\epsilon}_{kk})^2 - a_1 \rho l_e c \dot{\epsilon}_{kk} & \dot{\epsilon}_{kk} < 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_{kk} \geq 0 \end{cases} \quad (2-69)$$

其中 l_e 是特征长度，在物质点程序 MPM3D 中取为背景网格节点间距 d_c ， $\dot{\epsilon}_{kk}$ 是体应变率， c 是声速， a_0 和 a_1 是无量纲常数，缺省值为 1.5 和 0.06^[19]。

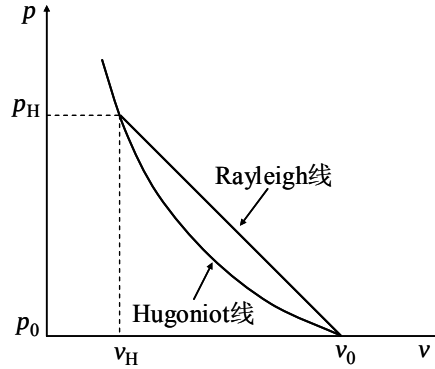


图 2.4 Hugoniot 曲线和 Rayleigh 线

引入人工体积粘性后，应力按照下式计算：

$$\sigma_{mn} = s_{mn} - (p + q) \delta_{mn} \quad (2-70)$$

能量方程可以进一步写成：

$$\dot{E} = J s_{mn} \dot{\epsilon}_{mn} - J (p + q) \dot{\epsilon}_{kk} \quad (2-71)$$

式中， $\dot{E}$ 为单位初始体积的内能变化率。引入人工体积粘性后，相当于在系统中引入了阻尼，阻尼比为：

$$\zeta = -\frac{q}{\rho l_e c \dot{\epsilon}_{kk}} = \frac{Q}{c} \quad (2-72)$$

于是有：

$$Q = \begin{cases} a_1 c - a_0 l_e \dot{\epsilon}_{kk} & \dot{\epsilon}_{kk} < 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_{kk} \geq 0 \end{cases} \quad (2-73)$$

Q 的量纲和速度相同，引入人工体积粘性后，式(2-52)给出的时间步长需要修正为：

$$\Delta t = \alpha \min_e \frac{d_c}{Q + (Q^2 + c^2)^{1/2}} \quad (2-74)$$

其中， α 为时间步长因子， d_c 是背景网格的节点间距。

2.4 应力更新、材料模型和状态方程

2.4.1 应力更新算法

率形式本构方程的积分算法为应力更新算法^[189]。时刻 $t + dt$ 的应力可以通过对应力率积分得到

$$\sigma_{ij}(t + dt) = \sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij} dt \quad (2-75)$$

$\dot{\sigma}_{ij}$ 为应力率，此处 i 和 j 为角标，表示应力分量。由于 Cauchy 应力的物质导数 $\dot{\sigma}_{ij}$ 受到刚体转动的影响，不是客观张量，因此在本构关系中采用 Jaumann 应力率 σ_{ij}^∇ 。应力率 $\dot{\sigma}_{ij}$ 和 Jaumann 应力率 σ_{ij}^∇ 之间的关系为

$$\dot{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^\nabla + \sigma_{ik} \omega_{jk} + \sigma_{jk} \omega_{ik} \quad (2-76)$$

其中， ω 为旋率张量。

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) \quad (2-77)$$

Jaumann 应力率 σ_{ij}^∇ 可以根据本构关系由应变率张量得到。

在物质点程序中，程序存储的是 t^n 时刻的应力 σ_{ij}^n 和当前时间步的旋率增量 $\Delta \omega_{ij}$ 和应变增量 $\Delta \epsilon_{ij}$ ，将式(2-76)代入到式(2-75)得到 t^{n+1} 时刻的应力

$$\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^{R^n} + \sigma_{ij}^\nabla \Delta t \quad (2-78)$$

其中

$$\sigma_{ij}^{R^n} = \sigma_{ij}^n + \sigma_{ik}^n \Delta \omega_{jk} + \sigma_{jk}^n \Delta \omega_{ik} \quad (2-79)$$

$\sigma_{ij}^{R^n}$ 为旋转后的应力张量。

在冲击动力学程序中, Cauchy 应力分解为压力和偏应力分别更新, 由式(2-78)可以得到偏应力的更新格式为

$$s_{ij}^{n+1} = s_{ij}^{R^n} + s_{ij}^{\nabla} \Delta t \quad (2-80)$$

其中,

$$s_{ij}^{R^n} = s_{ij}^n + s_{ik}^n \Delta \omega_{jk} + s_{jk}^n \Delta \omega_{ik} \quad (2-81)$$

式(2-80)的第二项可以从材料的本构关系确定。

对于高速冲击问题, 材料的压力需要通过状态方程来更新。压力一般是体积和内能的函数, 因此, 在计算压力以前, 需要对能量方程进行积分。 t^{n+1} 时刻的内能为:

$$\begin{aligned} e^{n+1} &= e^n + V_0 \Delta E \\ &= e^n + V^{n+1/2} s_{ij}^{n+1/2} \Delta \varepsilon_{ij} - V^{n+1/2} (p^{n+1/2} + q^{n+1/2}) \Delta \varepsilon_{kk} \end{aligned} \quad (2-82)$$

其中:

$$V^{n+1/2} = \frac{1}{2} (V^n + V^{n+1}) \quad (2-83)$$

$$s_{ij}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (s_{ij}^n + s_{ij}^{n+1}) \quad (2-84)$$

$$p^{n+1/2} = \frac{1}{2} (p^n + p^{n+1}) \quad (2-85)$$

$$q^{n+1/2} = \frac{1}{2} (q^n + q^{n+1}) \quad (2-86)$$

式中, V_0 为质点的初始体积, V^n 为质点在 t^n 时刻的体积。在物质点法中, 质点的体积按照下式计算:

$$V^{n+1} = V^n (1 + \Delta \varepsilon_{kk}) \quad (2-87)$$

不考虑二阶小量

$$V^{n+1/2} \Delta \varepsilon_{kk} = \Delta V \quad (2-88)$$

将式(2-88)代入式(2-82)得到:

$$e^{n+1} = e^{*n+1} - \frac{1}{2} \Delta V p^{n+1} \quad (2-89)$$

其中, e^{*n+1} 为 t^{n+1} 时刻的内能估计值, 表达式为

$$e^{*n+1} = e^n - \frac{1}{2} \Delta V p^n - \Delta V q^{n+1/2} + V^{n+1/2} s_{ij}^{n+1/2} \Delta \varepsilon_{ij} \quad (2-90)$$

如果状态方程是线性的, 那么计算 t^{n+1} 时刻的压力的状态方程表达式为:

$$p^{n+1} = A^{n+1} + B^{n+1} E^{n+1} \quad (2-91)$$

其中 E 是基于初始单位体积的内能, $E = e/V_0$ 。将式(2-89)两侧乘以 V_0 得到 t^{n+1} 时刻的内能 E^{n+1} , 并将其代入到式(2-91)得到压力的更新格式为

$$p^{n+1} = \frac{A^{n+1} + B^{n+1} E^{*n+1}}{1 + \frac{1}{2} B^{n+1} \frac{\Delta V}{V_0}} \quad (2-92)$$

其中, $E^{*n+1} = e^{*n+1}/V_0$ 。由式(2-92)得到 t^{n+1} 时刻的压力值, 将其代入式(2-89)可以得到 t^{n+1} 时刻的内能值 e^{n+1} 。在物质点法中, 对各个质点的内能进行求和, 便可以得到系统的总内能。

2.4.2 弹性模型

Jaumann 应力率 σ_{ij}^∇ 由材料本构得到。对于弹性材料,

$$s_{ij}^\nabla = 2G \dot{\varepsilon}_{ij}' \quad (2-93)$$

式中, G 为剪切模量, $\dot{\varepsilon}_{ij}'$ 为偏应变率张量。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}' = \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} \quad (2-94)$$

将式(2-93)代入到式(2-80)可以得到更新后的偏应力值为:

$$s_{ij}^{n+1} = s_{ij}^{R^n} + 2G \Delta \varepsilon_{ij}' \quad (2-95)$$

压力增量和体应变之间的关系为线性关系,

$$\Delta p = -K \Delta \varepsilon_{kk} \quad (2-96)$$

对于弹性材料, 更新后的压力为:

$$p^{n+1} = p^n - K \Delta \varepsilon_{kk} \quad (2-97)$$

该弹性模型采用了 Jaumann 应力率，可以处理大变形问题，是线弹性胡克模型在大变形理论中的推广。

2.4.3 Mises 弹塑性模型

描述金属材料的塑性行为通常采用 Von Mises 屈服模型。在 Von Mises 屈服模型中，有两个重要特征：

(1) Von Mises 屈服函数和应力偏量相关，和压力无关。屈服面在主应力空间是以 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ 为轴线的圆柱面，Mises 屈服函数可以写成

$$f(s_{ij}) = \sigma_y(\alpha_k) \quad (2-98)$$

其中 $f(s_{ij})$ 决定了屈服面的形状， $\sigma_y(\alpha_k)$ 则决定了屈服面的大小， α_k 是度量塑性变形的内变量，工程上通常将等效塑性应变 ε^p 取为内变量^[167]。

(2) 金属材料的 Mises 模型采用了关联流动法则，塑性势函数和屈服函数相同，因此，根据正交流动法则，塑性应变增量可由屈服函数求得：

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \quad (2-99)$$

此处， $d\lambda$ 为比例因子，塑性应变增量 $\Delta \varepsilon_{ij}^p$ 垂直于屈服面。

Mises 屈服面的演化规律可以很复杂，常用模型为等向强化模型和随动强化模型。对于等向强化模型，圆柱面随着塑性变形的增长而均匀膨胀，始终与初始圆柱面保持几何相似。对于随动强化模型，圆柱面的直径不变，但在塑性变形方向做刚体运动。本文讨论等向强化模型，对随动强化模型不做考虑。

采用弹塑性模型进行应力更新时，采用了径向返回算法进行计算^[189]。首先假定材料处于弹性阶段，由式(2-95)得到偏应力张量的试探值为

$$^*s_{ij}^{n+1} = s_{ij}^{R^n} + 2G\Delta \varepsilon'_{ij} \quad (2-100)$$

其中 $\Delta \varepsilon'_{ij}$ 为偏应变增量， $s_{ij}^{R^n}$ 为旋转后的偏应力张量，表达式为

$$s_{ij}^{R^n} = s_{ij}^n + s_{ik}^n \Delta \omega_{jk} + s_{jk}^n \Delta \omega_{ik} \quad (2-101)$$

此刻，Mises 等效应力的试探值为

$$^*\sigma_{eq}^{n+1} = \left(\frac{3}{2} ^*s_{ij}^{n+1} ^*s_{ij}^{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2-102)$$

如果等效应力的试探值 $^*\sigma_{eq}^{n+1}$ 不超过材料屈服应力 σ_y^{n+1} ，说明材料处于弹性阶段。反之，如果以下条件

$$^*\sigma_{eq}^{n+1} > \sigma_y \quad (2-103)$$

成立，说明试探应力落在了屈服面以外，此时需要采用径向返回算法将试探应力按照比例缩小，将其拉回屈服面。

$$s_{ij}^{n+1} = m ^*s_{ij}^{n+1} \quad (2-104)$$

其中，系数 m 按照下式进行计算

$$m = \frac{\sigma_y^{n+1}}{^*\sigma_{eq}^{n+1}} \quad (2-105)$$

在 Mises 弹塑性模型中，因为应力球量对塑性应变没有贡献，所以从总偏应变增量 $\Delta\varepsilon'_{ij}$ 中减去弹性偏应变增量可以得到塑性应变增量。

$$\Delta\varepsilon_{ij}^p = \Delta\varepsilon'_{ij} - \frac{1}{2G} (s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^{R^n}) \quad (2-106)$$

由式(2-100)可以知道总偏应变增量和应力试探值之间的关系，

$$\Delta\varepsilon'_{ij} = \frac{^*s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^{R^n}}{2G} \quad (2-107)$$

将式(2-107)代入(2-106)得到：

$$\Delta\varepsilon_{ij}^p = \frac{^*s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^{n+1}}{2G} \quad (2-108)$$

将式(2-104)代入上式可以得到：

$$\Delta\varepsilon_{ij}^p = \frac{(1-m)}{2G} ^*s_{ij}^{n+1} \quad (2-109)$$

利用式(2-105)和(2-109)，等效塑性应变增量为

$$\Delta\varepsilon^p = \left(\frac{2}{3} \Delta\varepsilon_{ij}^p \Delta\varepsilon_{ij}^p \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{^*\sigma_{eq}^{n+1} - \sigma_y^{n+1}}{3G} \quad (2-110)$$

对于等向强化模型有

$$\sigma_y^{n+1} = \sigma_y^n + E^p \Delta \varepsilon^p \quad (2-111)$$

其中 E^p 为塑性硬化模量。将式(2-111)代入式(2-110)得到等效塑性应变增量的计算格式为

$$\Delta \varepsilon^p = \frac{\sigma_{eq}^{n+1} - \sigma_y^n}{3G + E^p} \quad (2-112)$$

综上所述, Mises 弹塑性本构模型的计算步骤可以总结如下^[189]:

- (1) 计算偏应力试探值 s_{ij}^{n+1} , 计算等效应力的试探值 σ_{eq}^{n+1} ;
- (2) 如果等效应力试探值 σ_{eq}^{n+1} 大于屈服应力 σ_y^n , 则按照式(2-112)计算等效塑性应变增量 $\Delta \varepsilon^p$; 否则, 材料未发生塑性变形。
- (3) 更新等效塑性应变。

$$\varepsilon^p = \varepsilon^p + \Delta \varepsilon^p \quad (2-113)$$

- (4) 根据式(2-111)更新屈服应力, 得到 σ_y^{n+1} 。
- (5) 利用新的屈服应力计算比例系数 m , 利用径向返回算法使得应力点回到屈服面上。

$$m = \frac{\sigma_y^{n+1}}{\sigma_{eq}^{n+1}} \quad (2-114)$$

$$s_{ij}^{n+1} = m s_{ij}^{n+1} \quad (2-115)$$

2.4.4 Johnson-Cook 弹塑性模型

高速撞击涉及到高应变率, 撞击过程中应变率可以达到 10^4 或者更高。对于大部分金属材料而言, 材料的动态屈服应力随着应变率的增加而增加, 随着温度的增加而减小。应变率效应和热软化效应是冲击动力学问题的重要特征。

Johnson-Cook 模型考虑了材料在强动载荷下的应变率强化效应和热软化效应, 按照 Johnson-Cook 模型, 材料的屈服应力表示为下式

$$\sigma_y = (A + B \varepsilon^{pn}) (1 + C \ln \dot{\varepsilon}^*) (1 - T^{*m}) \quad (2-116)$$

此处 ε^p 是等效塑性应变, $\dot{\varepsilon}^*$ 是等效塑性应变率, T^* 是无量纲温度。其中,

$$\dot{\varepsilon}^* = \dot{\varepsilon}^p / \dot{\varepsilon}_0 \quad (2-117)$$

$\dot{\varepsilon}^p$ 是塑性应变率, $\dot{\varepsilon}_0$ 是参考应变率(为了方便, $\dot{\varepsilon}_0$ 可取 $1s^{-1}$)。无量纲温度 T^* 按照下式进行计算

$$T^* = \frac{T - T_{\text{room}}}{T_{\text{melt}} - T_{\text{room}}} \quad (2-118)$$

式中 T_{room} 为室温， T_{melt} 为金属材料的熔点温度。

A 、 B 、 C 、 n 和 m 是材料常数，可以通过 Hopkinson 杆实验来确定。尽管 Johnson-Cook 模型是个经验型的模型，但是由于该模型简洁有效，能够描述大多数金属材料的冲击动力学行为，因此该模型在冲击动力学程序中得到大量的应用。大多数金属材料的 Johnson-Cook 模型材料参数可以从一些手册上获得，或者从 AUTODYN 软件的材料库中获得。

Johnson-Cook 模型考虑了温度对材料屈服应力的影响，因此需要计算材料的温度。在冲击过程中，由于材料变形经历的时间很短，高应变率下材料的塑性变形过程可以按照绝热过程处理。材料的温升主要来自于不可逆的塑性变形产生的塑性功，温升可以按照下式计算

$$\Delta T = \frac{\beta}{\rho c_p} \Delta W^p \quad (2-119)$$

其中， ρ 是材料密度， c_p 是定压比热， ΔW^p 是单位体积的塑性功增量， β 一般取为 0.9。只有在试探应力值超过当前屈服应力时才会计算塑性功，从 t^n 时刻到 t^{n+1} 时刻的塑性功增量为

$$\Delta W^p = \frac{1}{2} (\sigma_y^n + \sigma_y^{n+1}) \Delta \varepsilon^p \quad (2-120)$$

2.4.5 Mie-Grüneisen 状态方程

强动载荷作用下的材料力学行为涉及到高温高压和高应变率，因此材料的 Cauchy 应力按照偏应力和压力分别进行更新，偏应力按照材料的强度模型进行处理，而材料的压力需要按照状态方程进行计算。材料的状态方程描述了压力、密度和内能之间的关系，考虑了材料的压缩效应和和非可逆的热力学过程，状态方程也称为物态方程。

描述状态方程时，常常用到比容 $v = 1/\rho$ 和材料的压缩系数 μ

$$\mu = \frac{v_0}{v} - 1 = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \quad (2-121)$$

材料的状态方程常常写成如下形式：

$$p = p(\rho, E) = p(v, E) = p(\mu, E) \quad (2-122)$$

式中, E 是单位初始体积的内能。

Mie-Grüneisen 状态方程也称为 Grüneisen 状态方程, 是由热力学和统计力学的方法得到, 该状态方程可以很好地描述绝大多数金属固体材料在强动载荷下的力学行为, 在冲击和侵彻问题中得到广泛的应用。Grüneisen 状态方程具有如下的形式:

$$p - p_c = \frac{\Gamma}{v}(e - e_c) \quad (2-123)$$

其中, Γ 是 Grüneisen 系数。 p_c 和 e_c 表示冷压和冷能, 即物体在绝对零度时的压力和内能, 此处内能 e 为单位质量的内能。

Grüneisen 状态方程也可以和其他参考状态联系起来, 在冲击动力学问题中, 常常用的是以 Hugoniot 线为参考系的 Grüneisen 状态方程, 在这种情况下,

$$p - p_H = \frac{\Gamma}{v}(e - e_H) \quad (2-124)$$

由上式可见, 当知道材料的密度或者比容时, Hugoniot 线外一点的压力和内能可以和 Hugoniot 线上一点压力和内能联系起来, 而 Hugoniot 线可以从实验得到。由于参考线是 Hugoniot 线, 所以式(2-124)适合于压缩状态。

Hugoniot 线上的压力表达式见式(2-68), 通常压力 $p_H \gg p_0$, 因此从 Hugoniot 线上的压力比容关系中忽略 p_0 可以得到^[194]

$$p_H = \frac{\rho_0 c_0^2 (1 - v/v_0)}{[1 - S_1 (1 - v/v_0)]^2} = \frac{\rho_0 c_0^2 \mu (1 + \mu)}{[1 - (S_1 - 1) \mu]^2} \quad (2-125)$$

Hugoniot 线上的内能表达式见式(2-65), 取 $p_0 = 0$, $e_0 = 0$ 可以得到

$$e_H = \frac{1}{2} p_H (v_0 - v) = \frac{p_H}{2\rho_0} \left(\frac{\mu}{1 + \mu} \right) \quad (2-126)$$

将式(2-125)和(2-126)代入式(2-124)得到 Grüneisen 状态方程为

$$p = p_H \left(1 - \frac{\Gamma \mu}{2} \right) + \Gamma \rho e \quad (2-127)$$

Grüneisen 系数存在以下经验公式,

$$\Gamma = \frac{\rho_0}{\rho} \Gamma_0 = \frac{v}{v_0} \Gamma_0 = \frac{1}{1 + \mu} \Gamma_0 \quad (2-128)$$

将式(2-128)代入式(2-127)可以得到:

$$p = \frac{\rho_0 c_0^2 \mu [1 + (1 - \Gamma_0/2) \mu]}{[1 - (S_1 - 1) \mu]^2} + \Gamma_0 E \quad (2-129)$$

考虑到材料的膨胀, 可以得到实际工程中使用的 Grüneisen 状态方程为

$$p = \begin{cases} \frac{\rho_0 c_0^2 \mu [1 + (1 - \Gamma_0/2) \mu]}{[1 - (S_1 - 1) \mu]^2} + \Gamma_0 E & \mu \geq 0 \\ \rho_0 c_0^2 \mu + \Gamma_0 E & \mu < 0 \end{cases} \quad (2-130)$$

除了材料密度, 金属材料的 Grüneisen 状态方程还需要输入三个材料参数 c_0 、 S_1 和 Γ_0 。其中, c_0 是压力为零值时材料中的声速, S_1 是冲击波速度和质点速度线性关系式的斜率, Γ_0 是 Grüneisen 系数。常用材料的 Grüneisen 状态方程的材料参数可以从一些书中获得^[2]。

2.4.6 线性多项式状态方程

在实际问题中, 线性多项式状态方程是一种常用的状态方程。线性多项式状态方程可以写成如下形式

$$p = a_0 + a_1 \mu + a_2 \mu^2 + a_3 \mu^3 + (a_4 + a_5 \mu + a_6 \mu^2) E \quad (2-131)$$

其中, a_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 、 a_5 和 a_6 是用户输入的材料参数。当材料受拉时, $\mu < 0$, 因此令 μ^2 项前的系数为零, 即 $a_2 = a_6 = 0$ 。

当取 $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_6 = 0$, 并且 $a_4 = a_5 = \gamma - 1$ 时, 多项式方程退化为气体的 Gamma 率状态方程,

$$p = (\gamma - 1) \frac{\rho}{\rho_0} E \quad (2-132)$$

其中, γ 是定压比热和定容比热的比值, 称为比热比。E 是单位初始体积的内能。

当取 $a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$, 并且 $a_1 = \rho_0 c_0^2$ 时, 多项式方程退化为无粘可压缩流体的状态方程

$$p = \rho_0 c_0^2 \mu \quad (2-133)$$

其中, c_0 是压力为零值时材料中的声速, 该状态方程适合于描述低速冲击下流体的力学行为。对于涉及到冲击波的水下爆炸等问题, 需要采用 Grüneisen 状

态方程来模拟流体的可压缩性^[168]。

2.4.7 材料损伤和质点失效

冲击动力学问题涉及到材料和结构的冲击破坏，材料的动态损伤和破坏是冲击动力学问题的又一个显著特征。材料的动态损伤与破坏是个非常复杂的问题，根据不同的载荷作用方式和材料性质，材料发生断裂破坏的模式也不相同，因此需要采用不同的材料损伤失效模型。当材料发生损伤失效以后，材料的承载能力下降。在物质点法中，材料的力学参量由质点记录，材料的失效表现为质点失效。

最常用的失效模型有以下几种：

(1) 金属材料靶体的侵彻模拟中，最常用失效模型是等效塑性应变失效模型。当质点的等效塑性应变超过材料的失效应变 $\varepsilon_{\text{fail}}$ 时，认为质点失效，即

$$\varepsilon^p > \varepsilon_{\text{fail}} \quad (2-134)$$

(2) 最大拉应力失效模型，该模型可以用来简单模拟冲击问题中的层裂现象，当质点压力满足

$$p < p_{\text{min}} \quad (2-135)$$

认为质点失效。其中 p_{min} 为材料的最大允许拉应力，输入参数小于零。

(3) 联合失效模型，如果质点的状态满足等效塑性应变失效模型或者最大拉应力失效模型之一，认为质点失效。

(4) Johnson-Cook 失效模型，该模型是以损伤量 D 来描述材料的失效过程，在 Johnson-Cook 失效模型中，失效应变按照以下公式定义

$$\varepsilon_{\text{fail}} = \left[D_1 + D_2 \exp(D_3 \sigma^*) \right] \left[1 + D_4 \ln \dot{\varepsilon}^* \right] \left[1 + D_5 T^{*m} \right] \quad (2-136)$$

其中， σ^* 为应力三轴度， $\sigma^* = \sigma_m / \sigma_{eq}$ ， σ_m 为应力球量， σ_{eq} 为 Mises 等效应力，其他变量和 Johnson-Cook 模型相同， D_1 到 D_5 是材料参数，需要根据实验确定。

Johnson-Cook 失效模型中，损伤量 D 按照下式进行计算

$$D = \sum \frac{\Delta \varepsilon^p}{\varepsilon_{\text{fail}}} \quad (2-137)$$

当损伤量 D 达到 1.0 时，材料破坏从而质点失效。在(2-136)式中，如果将

材料参数 $D_2 = D_4 = D_5 = 0$ ，则 Johnson-Cook 失效模型可以退化到等效塑性应变失效模型。

失效后质点的承载能力下降，在 MPM3D 程序中，对失效后质点的应力存在两种模型：

(1) 失效后质点的应力置零，这种处理方式不考虑失效后质点的承载能力，一般用在超高速撞击模拟中，因为在超高速撞击中，材料已经完全碎裂，成为碎片云。

(2) 失效后质点的偏应力置零，这种处理相当于质点失去了材料强度，但是仍然能承受压力。这种处理方式常常被 SPH 等质点类算法所采用^[169,170]，用来分析金属靶体的侵彻问题。

以上模型相对简单，但在工程中非常实用。不过没有考虑损伤对材料本构的耦合影响，对于一些复杂的动力学现象，还需要采用更为精细的材料损伤模型，比如考虑了金属材料中空洞形核、长大和汇合过程的 GTN 模型^[171]，采用该模型进行层裂模拟可以取得更好的效果。

2.5 本章小结

本章阐述了物质点法的基本原理，阐明物质点法的控制方程和离散方案，然后介绍了物质点法的实现过程，比较了三种数值实现格式，对三种格式的数值稳定性进行了简单讨论。物质点法的特征在于通过质点运动反映物体的运动和变形，通过背景网格来求解动量方程。

本章简要介绍了冲击波理论，介绍了处理冲击波间断面的人工体积粘性法。对数值模拟中的应力更新算法进行了详细阐述，介绍了物质点程序 MPM3D 常用的材料模型和状态方程，尤其介绍了 Mises 弹塑性模型的应力更新算法实现过程，以及金属材料最常用的 Grüneisen 状态方程。最后，介绍了几种常用的材料失效模型以及质点失效处理方法。

第3章 物质点法 OpenMP 并行化及应用

3.1 引言

采用物质点法模拟超高速撞击问题时，采用大规模的物质点模型能够得到更为精确的计算结果，但目前的串行物质点程序计算限制了计算规模和计算效率^[137,139]，因此，开展并行物质点算法和程序研究对于超高速撞击问题的分析有着重要的意义。按照计算机的体系不同，存在两种并行编程技术：一种是适合于分布式存储的 MPI 技术，一种是适合于共享存储的 OpenMP 技术。现有的物质点法并行程序大多基于 MPI 技术开发，一般采用计算域的区域分解方法。由于 MPI 技术对程序的改动量较大，而且需要复杂的通信机制和动态负载平衡技术，因此基于 MPI 的并行物质点法程序往往需要多人多年开发完成^[134-136,172]。

本章基于共享内存的 OpenMP 技术进行并行物质点算法及其应用研究，OpenMP 基于共享内存，避免了复杂的信息传递，但是 OpenMP 的共享内存往往会导致数据竞争问题，本章针对物质点法并行中的数据竞争问题提出了两种 OpenMP 并行算法：数组扩展法和背景网格区域分解法。采用这两种算法有效避免了物质点法 OpenMP 并行化中的数据竞争问题。基于本文给出的并行算法和程序，进一步开展了超高速撞击问题的大规模并行计算研究。

3.2 OpenMP的并行机制

OpenMP 的并行模式为 fork/join 式并行，当遇到并行指令语句 `!$omp parallel` 时，主线程派生分叉，产生多线程，在并行区域内多线程协同执行^[104,173]。并行代码结束时，多线程汇合到主线程。其计算原理如图 3.1 所示。

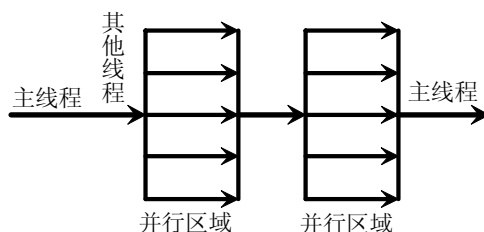


图 3.1 fork/join 式并行

OpenMP 支持增量化并行和共享内存,因此采用 OpenMP 可以对程序进行逐步并行,这样大大减少了对原有串行程序的改动。采用 OpenMP 对 Fortran95 串行程序进行并行化时要注意以下规则:

(1) 如果要使用 OpenMP 的各种库函数,则在程序开始要调用函数库: `use omp_lib`。采用 OpenMP 编制程序时,两个最常用的库函数分别是调用的线程总数设置函数 `omp_set_num_threads( )`和计时函数 `omp_get_wtime( )`。在有些情况下,还要知道是哪个线程在运行,此时通过调用函数 `omp_get_thread_num` 来识别当前线程号。

(2) 在 OpenMP 中,对数据进行了两种基本分类,即用 `!$omp private` 表示该数据是线程私有的,用 `!$omp shared` 表示数据是公有的。如果没有指明数据的作用域,数据的缺省设置是公有方式。当多个线程同时对某个公有数据进行写操作时,将会导致该数据无法准确记录,这会造成所谓的数据竞争现象,如何避免数据竞争是 OpenMP 程序编制中的难点所在。

(3) OpenMP 中基本的并行模式之一是循环分解模式。在循环分解中,循环体按照线程数进行平均分配,相当于对循环域进行分解,每个线程执行循环域的一部分。在 OpenMP 中,可以在循环体之前加上编译指导句 `!$omp parallel do` 完成循环分解。需要注意的是,采用循环分解模式进行并行编程时,要求循环计算中没有循环依赖性,即要求某一次循环计算不依赖于其他次循环的计算结果。

(4) OpenMP 中基本的并行模式之二是并行区域编程,并行区域编程旨在将一段代码在多个线程内同时执行。在 OpenMP 中,在一段代码前加上编译指导句 `!$omp paralle` 便开始了并行区域编程,在代码后加上编译指导句 `!$omp end parallel` 便结束了并行区域编程。当程序执行到 `!$omp paralle` 语句时,便会派生相应数目的线程形成线程组,后续的代码在各个线程内重复执行,当执行到 `!$omp end parallel` 时,所有线程完成其计算任务,然后所有线程便会同步汇合。并行区域编程也要求各个区域之间没有相互依赖性。

(5) 数据竞争问题的消除。如何避免数据竞争问题是 OpenMP 并行程序编写的难点所在,采用 OpenMP 编写程序时,对一些简单的数据竞争问题可以采用规约操作、临界区和原子操作来消除。

所谓规约操作,就是对一些涉及数据竞争的公有变量进行规约操作: `!$omp reduction`。在 OpenMP 中,目前的规约操作限于标量,如果要对一维数组 `A(:)`

进行规约操作，一种可行的办法是生成一个辅助的二维数组 $A_list(:, nthreads)$ ，其中 $nthreads$ 是所用的总线程数。在并行区域内，第 j 个线程仅仅对数组 A_list 的第 j 列数据进行操作，在并行计算完成后，可以将辅助数组 A_list 进行装配形成数组 A ，具体方法如下：

$$A(:) = \sum_{j=1}^{nthreads} A_list(:, j) \quad (3-1)$$

在实际计算中，如果数组 $A(:)$ 元素较少，则上述装配过程耗时较少，如果数组 $A(:)$ 元素较多，则装配过程耗时较多。

所谓临界区，即在涉及到数据竞争的代码前添加 `!$omp critical`，代码后添加 `!$omp end critical`。在临界区域内，仅仅有一个线程对公有变量进行操作。原子操作和临界区的设置原理类似，也是每次仅仅采用一个线程对指定的公有变量进行操作。实际经验表明：当临界区内的计算较为复杂时，临界区的存在会大大降低并行效率^[110,174]。

(6) 子程序的调用问题。在主程序内调用子程序时，首先必须对主程序内的所有变量规定其作用域，即分清私有变量和公有变量。在 OpenMP 编写的并行代码中，对子程序调用需要加以额外注意。如果子程序内的某变量 x 是由主程序的变量 a 传递来的，则变量 x 的作用域取决于主程序的变量 a 。如果子程序内的变量 y 是在子程序内使用的，即 y 是子程序内的局部变量，则 y 按照私有变量处理。

(7) Module 中全局变量的处理。在 Fortran95 编程中，有大量的数据按照 Module 进行处理，这些数据即为全局变量，这些数据在程序执行时常常被多个多个文件所需要。一般来说全局变量是公有数据，但是为了避免数据竞争，常常需要对全局变量进行线程私有化，此时采用 `!$omp threadprivate` 子句来标明该变量是线程私有数据，在当前线程访问过程中，不能由其他线程访问。

3.3 物质点法的串行程序分析

在实现物质点法的并行算法前，首先需要深入分析物质点算法的程序实现过程，在此基础上，对程序中的主要耗时部分进行分析，对其程序中的变量作用域进行分析，为进一步的程序并行化奠定基础。

本章主要是用并行物质点程序进行超高速撞击问题的大规模计算，已有的

研究是基于物质点法的 MUSL 格式对超高速撞击问题进行求解的^[137,139], 因此本章主要是对物质点法的 MUSL 格式进行并行化研究。首先简要回顾 MUSL 格式的实现过程, 物质点法的 MUSL 格式按照显式时间积分方法求解, 每个时间步的求解过程可以分为两阶段: 节点更新阶段和质点更新阶段。在节点更新阶段, 质点变量通过形函数映射到节点上获得节点变量, 进而进行节点动量方程求解。在质点更新阶段, 将更新后的节点变量映射到质点上, 计算质点的新位置和新速度, 更新质点的应变和应力。

用带有下标 i 的量来代表网格节点上的变量, 用带有下标 p 的量来代表质点物理量。上标 k 和 $k+1$ 代表时间 t^k 和 t^{k+1} 时刻的量, Δt 表示当前时间步增量。同样令质点 p 的形函数值为 S_{ip} , 形函数的导数值为 $\mathbf{G}_{ip}$ 。

(1) 将质点变量映射到节点变量。

节点质量可以通过质点的循环过程进行计算

$$m_i^k = \sum_p m_p S_{ip}^k \quad (3-2)$$

同样, 节点动量也可以通过质点的循环过程计算:

$$\mathbf{p}_i^k = \sum_p m_p \mathbf{v}_p^k S_{ip}^k \quad (3-3)$$

节点力也可以通过相同的方式得到:

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^{\text{int}} + \mathbf{f}_i^{\text{ext}} \quad (3-4)$$

此处, $\mathbf{f}_i^{\text{int}}$ 是节点内力, 可由下式给出:

$$\mathbf{f}_i^{\text{int}} = -\sum_p \boldsymbol{\sigma}_p^k \cdot \mathbf{G}_{ip}^k \frac{m_p}{\rho_p^k} \quad (3-5)$$

$\mathbf{f}_i^{\text{ext}}$ 是节点外力, 可由下式给出:

$$\mathbf{f}_i^{\text{ext}} = \sum_p m_p S_{ip}^k \mathbf{b}_p^k + \int_{\Gamma_i} N_i^k \tilde{\mathbf{t}}^k d\Gamma \quad (3-6)$$

式中: $\mathbf{b}$ —作用在物体上的体力;

$\tilde{\mathbf{t}}$ —作用在物体边界上的面力。

(2) 采用显式算法, 在背景网格节点上积分动量方程, 并施加边界条件。

$$\mathbf{p}_i^{k+1} = \mathbf{p}_i^k + \mathbf{f}_i \Delta t \quad (3-7)$$

固定边界条件: $\mathbf{p}_i^{k+1} = 0$, $\mathbf{f}_i = 0$ 。

如果 XY 面是对称面，则对称面上节点动量和节点力的 Z 向分量为零值。

(3) 采用质点循环，从节点变量得到映射信息，更新质点速度和质点位置。

新的质点位置为：

$$\mathbf{x}_p^{k+1} = \mathbf{x}_p^k + \bar{\mathbf{v}}_p^{k+1} \Delta t \quad (3-8)$$

新的质点速度为：

$$\mathbf{v}_p^{k+1} = \mathbf{v}_p^k + \mathbf{a}_p^k \Delta t \quad (3-9)$$

此处：

$$\bar{\mathbf{v}}_p^{k+1} = \sum_{i=1}^8 \frac{\mathbf{p}_i^{k+1}}{m_i^k} S_{ip}^k \quad (3-10)$$

$$\mathbf{a}_p^k = \sum_{i=1}^8 \frac{\mathbf{f}_i}{m_i^k} S_{ip}^k \quad (3-11)$$

(4) 采用质点循环，计算质点的应变和应力。

在 MUSL 格式中，将质点速度映射回背景网格得到更为精确的节点速度：

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = \frac{1}{m_i^k} \sum_p m_p \mathbf{v}_p^{k+1} S_{ip}^k \quad (3-12)$$

质点应变增量为：

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^8 \left[\left(\mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_i^{k+1} \right)^T + \mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_i^{k+1} \right] \quad (3-13)$$

质点旋率增量为：

$$\Delta \boldsymbol{\omega}_p = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^8 \left[\left(\mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_i^{k+1} \right)^T - \mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_i^{k+1} \right] \quad (3-14)$$

更新质点的密度：

$$\rho_p^{k+1} = \rho_p^k / \left(1 + \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p) \right) \quad (3-15)$$

由于 Cauchy 应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 受到刚体转动的影响，不是客观张量，因此在本构关系中采用 Jaumann 应力率 $\boldsymbol{\sigma}^\nabla$ 进行计算。质点的应力计算为：

$$\boldsymbol{\sigma}_p^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}_p^k + \Delta \mathbf{r}_p^k + \boldsymbol{\sigma}_p^\nabla \Delta t \quad (3-16)$$

式中：

$$\Delta \mathbf{r}_p^k = \Delta \boldsymbol{\omega}_p \cdot \boldsymbol{\sigma}_p^k - \boldsymbol{\sigma}_p^k \cdot \Delta \boldsymbol{\omega}_p \quad (3-17)$$

Jaumann 应力率的应力增量可根据弹塑性材料模型计算，此处考虑了材料的大变形和转动。对于超高速撞击问题，质点压力可由状态方程给出。基于以上格式，采用 Fortran95 编制串行的 MPM3D 物质点程序。程序中大量采用了 module 和自定义数据类型，以增强程序的模块化。图 3.2 给出串行 MPM3D 的计算流程图，

由图 3.2 可见，MPM 计算主要包含两个部分：由式(3-2)-式(3-7)的节点更新阶段，由式(3-8)-式(3-17)的质点更新阶段。在节点更新阶段，节点变量的计算是通过质点循环计算完成的，此时质点变量不变，而节点变量处于改动状态。在质点更新阶段，质点变量的计算也是通过质点循环计算完成的，此时节点变量不变。

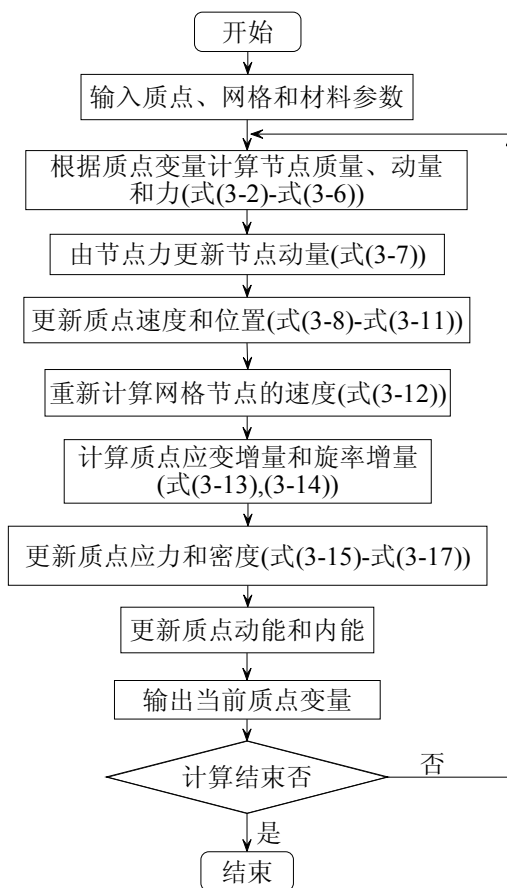


图 3.2 物质点法的计算流程图

物质点程序 MPM3D 采用显式算法，因此主要耗时阶段便是节点更新阶段

和质点更新阶段，串行程序的分析标明，节点更新阶段占总计算时间的 28%，而质点更新阶段占总计算时间的 72%。因此，采用有效的方法对节点更新阶段和质点更新阶段进行并行化是关键所在。

3.4 物质点法的 OpenMP 并行化

节点变量的更新由式(3-2)-式(3-7) 完成，在节点变量更新过程中采用了质点循环的方法。在节点变量更新的 OpenMP 并行化中，将质点变量定义为私有变量，将节点变量定义为公有变量，如果直接采用质点循环分解进行并行，不同的质点可能会在同一时刻更新某个节点变量，这样便会导致数据竞争问题。因此，必须采用专门的方法来消除数据竞争问题。

质点变量的更新过程采用了质点循环方法，在质点变量更新的 OpenMP 并行化中，可以直接采用质点循环分解方法，将各质点变量均作为私有变量，而节点变量作为公有变量仅供读取，因此，该过程不会造成数据竞争。

3.4.1 节点变量更新的并行

此处采用了两种方法消除节点变量计算中的数据竞争问题，这两种方法分别是数组扩展法和背景网格区域分解法。

3.4.1.1 数组扩展法

式(3-2)-式(3-6)给出了节点质量、动量和力的计算公式，采用 $Mg(N)$ 、 $Pxg(N)$ 和 $Fxg(N)$ 分别代表节点质量、动量和节点力数组， N 为节点数。在数组扩展法中，节点变量的一维数组被扩展为二维数组， $Mg_list(N, nthreads)$ 、 $Pxg_list(N, nthreads)$ 和 $Fxg_list(N, nthreads)$ 分别是节点质量、动量和节点力数组的辅助数组。

数组扩展法采用了质点循环分解法进行并行计算，代码中的质点变量对每个线程而言是私有变量，而辅助的节点数组是公有的。在节点变量的并行计算中，线程 i 仅仅可以操作辅助数组的第 i 列数据，不同的线程仅仅对线程所属的节点变量进行操作，这样便消除了数据竞争问题。结合 OpenMP 指令，采用元语言描述该并行过程：

```
!$omp parallel do &
!$omp private(质点变量) &
```

```

!$omp default(shared)
do 质点循环
    获得当前线程号 thread
    获得当前质点的影响节点 node
    计算 Mg_list(node,thread)
    计算 Pxg_list(node,thread)
    计算 Fxg_list(node,thread)
end do

```

上述并行计算过程完成后，要将辅助数组进行装配得到所需的数组。按照式(3-1)进行装配，即将辅助数组 $Mg_list(N, nthreads)$ 装配为质量数组 $Mg(N)$ ，将辅助数组 $P_{xg_list}(N, nthreads)$ 装配为动量数组 $P_{xg}(N)$ ，将 $F_{xg_list}(N, nthreads)$ 装配为节点力数组 $F_{xg}(N)$ 。

如果从物理思想上去理解数组扩展法，数组扩展法的实质是质点域的区域分解，在图 3.3 中给出了数组扩展法的示意图。在图 3.3 中共有 4 个线程将 16 个质点分为 4 份，线程 th1 负责质点 1~4 的计算，线程 th2 负责质点 5~8 的计算，线程 th3 负责质点 9~12 的计算，线程 th4 负责质点 13~16 的计算。从图 3.3 可知，数组扩展法中每个线程负责的质点数是相等的，因此每个线程的计算量相同。从图 3.3 可知，数组扩展法中，每个线程必须有一套背景网格与之相匹配，因此每增加一个线程，就必须增加一套背景网格，这相当于增加节点辅助数组的规模。

数组扩展法的优点是：容易实现，并且负载平衡性能良好。这种算法的缺点是：随着线程数的增加，辅助数组的规模增加，内存使用量增加。

3.4.1.2 背景网格区域分解法

为了消除节点变量计算中的数据竞争问题，另外一种方法是采用背景网格区域分解法，区域分解方法将背景网格区域分解为大小相同的子域，在并行计算中令线程数和子域数相同，一个子域的网格节点更新由一个线程来完成，各个子域节点更新完成以后，将其进行装配便得到整体节点值。由于每个线程仅负责一个子域的计算，因此数据竞争得以消除。

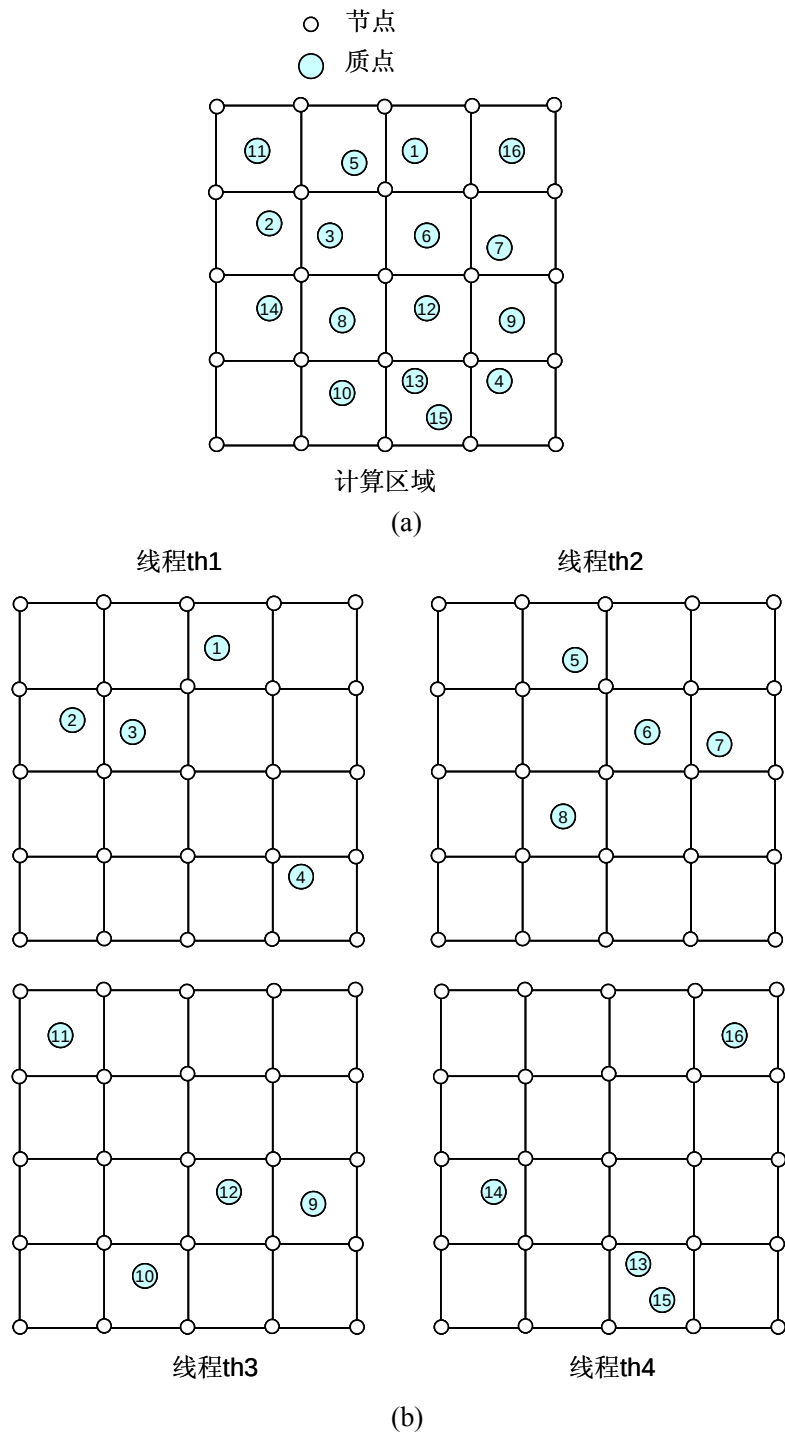


图 3.3 数组扩展法的示意图，(a) 计算区域及质点整体编号，(b) 各个线程负责的质点

区域分解的过程如图 3.4 所示，背景网格区域被分解为 4 个均匀的子域，在图 3.4(a)中给出了质点的整体编号，在图 3.4(b)中给出了质点在各个子域内的

子编号。在显式 MPM 计算中，质点运动导致质点在不同时间步位于不同的背景网格。因此，在每一个时间步要对质点进行判断，给出质点所在的子域及其子编号。质点的子编号通过编号数组 **Pindex** 给出，**Pindex**(*i,j*)给出了子编号为 *i* 的质点的整体编号，*j* 为质点所在子域，编号数组 **Pindex** 可通过并行计算完成。以图 3.4 为例，该问题的编号数组 **Pindex** 为：

$$\mathbf{Pindex} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 14 & 12 \\ 11 & 16 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

编号数组 **Pindex** 的并行计算可以借助计数数组完成。图 3.4 中 16 个质点被 4 个线程分为 4 份，线程 th1 负责质点 1~4 的计算，线程 th2 负责质点 5~8 的计算，线程 th3 负责质点 9~12 的计算，线程 th4 负责质点 13~16 的计算。对质点进行循环分解并行计算，生成计数数组 **patnp_th**，计数数组的(*i,j*)元素表示线程 *i* 在子域 *j* 内所负责的质点数。对于图 3.4 中的问题，该问题的计数数组 **patnp_th** 为：

$$\mathbf{patnp_th} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

区域分解完成以后，采用子域的循环分解方法进行并行，在各个子域内对所属的质点进行循环，进而更新各个子域内的节点变量。结合 OpenMP 指令，采用元语言描述该并行过程：

```
!$omp parallel do &
!$omp private (质点变量) &
!$omp default(shared)
do 子域循环
    do 子域内质点循环
        更新子域内节点变量
    end do
end do
```

完成各个子域内的节点变量更新后，将各个子域内的节点变量装配到整体节点变量，得到更新后的整体节点变量，该过程也可通过并行计算完成。

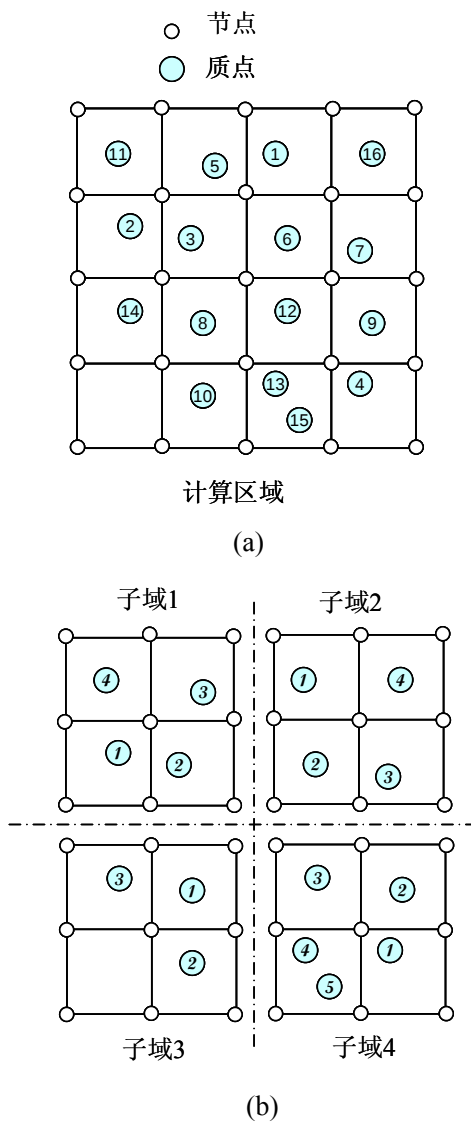


图 3.4 基于背景网格的区域分解算法，(a) 计算区域及质点整体编号，(b) 子域及质点子编号

3.4.2 质点变量更新的并行

在节点动量更新的基础上，将节点变量映射到质点上，更新质点变量。质点变量的更新包括三个阶段：(1) 更新质点位置和速度；(2) 重新计算节点速度；(3) 计算质点应变和应力。以下对这三个过程进行并行化。

对每一个质点进行位置和速度更新，其程序实现以式(3-8)~式(3-11)为准。进行质点循环分解，各质点变量均作为私有变量，而节点变量作为公有变量仅供读取，不会造成数据竞争，因此，并行时需要加如下OpenMP指令：

```
!$omp parallel do &
!$omp private (质点变量) &
!$omp default(shared)
do 质点循环
    更新质点位置和速度
end do
```

这样便完成了质点位置和速度更新程序的并行。

为了得到更为精确的计算结果，在 MUSL 格式中，将质点速度映射回背景网格，重新得到背景网格节点速度，其程序实现以式(3-12)为准。同样此处涉及到节点变量的数据竞争，可继续采用上节讨论的数组扩展法或者背景网格区域分解法来避免数据竞争。需要说明的是，如果采用背景网格区域分解法重新得到背景网格节点速度，由于式(3-12)中是以质点的旧位置来计算形函数值 S_{ip} ，因此仍然可以采用上节的区域分解，编号数组 **Pindex** 无需重新计算。

根据式(3-13)和式(3-14)计算每一个质点的应变增量和旋率增量，根据式(3-15)和式(3-16)更新每一个质点的密度和应力，此过程仅仅对质点进行计算，各质点变量均作为私有变量，而节点变量作为公有变量仅供读取，不会造成数据竞争。因此，采用质点循环分解方法便可完成质点密度和应力的并行计算。结合 OpenMP 指令，采用元语言描述该并行过程：

```
!$omp parallel do &
!$omp private (质点变量) &
!$omp default(shared)
do 质点循环
    计算质点的应变增量
    计算质点的旋率增量
    计算质点的密度和应力
end do
```

在质点应力计算时，涉及到对本构计算子程序Constitution()的线程私有调用，可将与本构相关的材料变量作为子程序中的局部变量，这样就可以达到本

构子程序Constitution()的线程私有调用。另外一种通用方法是在材料本构模块中，将一些和材料相关的全局变量进行线程私有化，这样也可以实现本构计算子程序Constitution()的线程私有调用。

完成质点变量的更新后，还需要进行系统总动能和总内能的并行计算，由于能量是标量，在 OpenMP 中可以采用归约操作来避免能量并行计算中的数据竞争问题。

3.4.3 负载平衡

从图 3.3 可知，数组扩展法中每个线程负责的质点数是相等的，因此每个线程的计算量相同，因此数组扩展法具有良好的负载平衡特性。

在背景网格区域分解法中，每个线程或者每个 CPU 处理一个子域，但是每个子域内的质点数是不同的，如图 3.4 所示，这样会导致负载不平衡。而且在一些计算中，由于质点的大范围运动，会导致在某个时间步的某些子域内没有质点，这样加剧了负载不平衡。

针对背景网格区域分解法，此处采用了一个简单的负载平衡算法，即采用自适应背景网格区域法，在一个时间段以后，背景网格被重新定义，根据质点的位置重新定义背景网格的范围，这样便避免了空子域，弱化了负载的不平衡。以图 3.5 所示的 Taylor 杆撞击问题为例来说明这个问题，在 t 时刻，由图 3.5(b) 可见杆的变形导致在一些背景网格中没有质点，如果一直采用初始时刻的背景网格，那么在并行计算中的各个线程之间会产生负载不平衡。而在 t 时刻进行背景网格的重新定义，如图 3.5(c)，那么背景网格大小因杆的大小而改变，这样在并行计算中有效改善了负载平衡。

3.5 并行算法测试与应用

基于上述的两种并行算法，开发了三维的并行物质点程序。该并行程序采用 Intel FORTRAN 10.0 编译器编译，编译中选择 OpenMP 选项。该程序的运行平台为 HP DL140G3 服务器，该服务器具备两个 4 核的 Intel Xeon 5355 处理器(主频为 2.66GHz)，具有 8 核和 8GB 内存。服务器采用了 Red Hat Linux 操作系统。

以下首先对并行程序的两种并行算法进行测试。

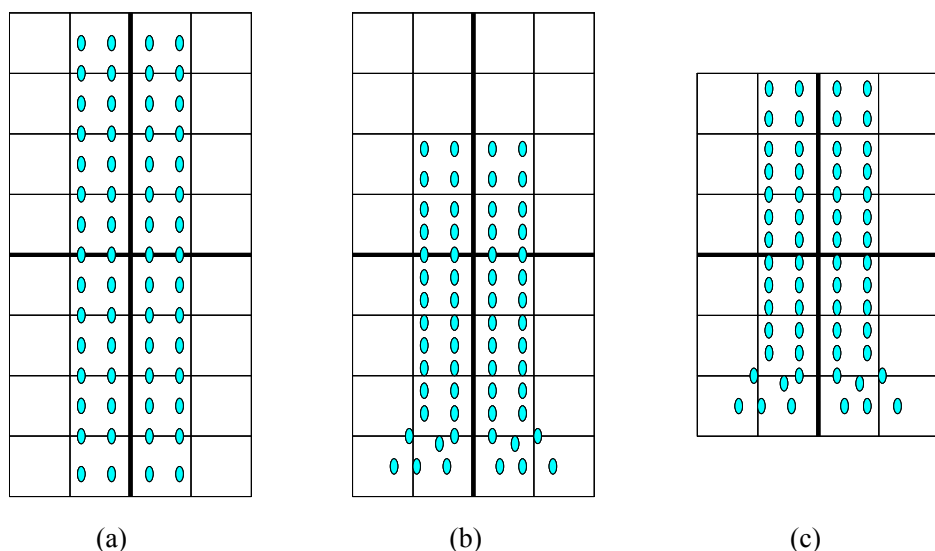


图 3.5 负载平衡所用的自适应背景网格区域法, (a) 初始构型, (b) t 时刻背景网格区域, (c) t 时刻自适应的背景网格区域

3.5.1 并行算法测试

3.5.1.1 测试算例描述

并行测试的算例为 Taylor 杆碰撞问题, 杆材料为铜。杆的初始长度 $L_0 = 25.4$ mm, 直径 $D_0 = 7.6$ mm, 初速度 $V_0 = 190$ m/s。在此计算中, 材料的偏应力采用了各向同性强化弹塑性模型:

$$\sigma_y = A + B\varepsilon^n \quad (3-18)$$

式中, A 、 B 和 n 是材料常数, σ_y 是屈服应力, ε^p 是等效塑性应变。材料的压力采用 Mie-Grüneisen 状态方程计算。材料参数取自文献^[175], 如表 3.1 所示。

表 3.1 铜的力学性能参数^[175]

弹性常数			强化模型			状态方程		
ρ (kg/m ³)	E (GPa)	ν	A (MPa)	B (MPa)	n	c_0 (m/s)	S_1	Γ_0
8930	117.0	0.35	157.0	425.0	1.0	3940	1.49	1.96

为了深入比较两种并行算法, 此处采用了三种不同规模的模型进行对比计算, 三种模型分别为粗模型 M1、中模型 M2 和细模型 M3, 模型的质点数、

初始的背景网格数和节点数见表 3.2 所示。

在 Taylor 杆冲击计算中，在杆端的节点处施加对称边界条件便可以模拟刚性壁面，冲击过程的模拟时间为 $80\mu\text{s}$ ，此时杆的动能为 0，杆外形不再变化。三种模型的 MPM 计算结果和实验结果比较见表 3.2，其中 L 为撞击结束后的杆长， D 为撞击端的杆直径。由表 3.2 可见，物质点模拟结果和实验结果吻合。粗模型碰撞前后的杆外形对比见图 3.6。

表 3.2 模型参数和计算结果

计算模型	模型参数			结果变量		
	质点数	初始网格数	初始节点数	$L(\text{mm})$	$D(\text{mm})$	最大 ε^p
粗模型 M1	56056	49152	53361	16.5	13.6	1.6
中模型 M2	244524	165888	175273	16.3	13.4	1.6
细模型 M3	1155192	1022208	1053493	16.3	13.6	1.9
实 验	—	—	—	16.2	13.5	—

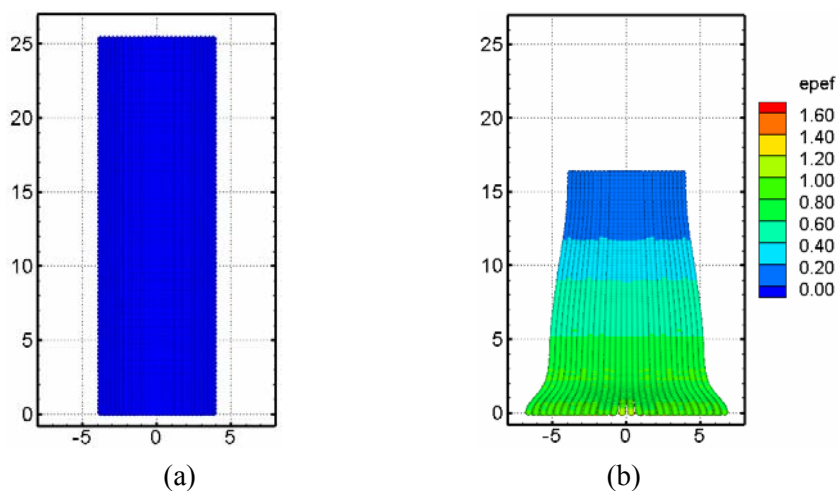


图 3.6 Taylor 杆的变形和塑性应变，(a) 撞击前，(b) 撞击后， $epef$ 为等效塑性应变

3.5.1.2 数组扩展法的测试

并程序调试完成后，并行计算结果必须和串行计算结果相同，才能表明并程序是可靠的。在分析并行 MPM 的效率之前，首先定义加速比如下：

$$s_p = \frac{T_s}{T_m} \quad (3-19)$$

式中： T_s —单核的计算时间；

T_m —多核的计算时间。

并行效率为加速比 s_p 和计算所用的核个数 n 之比：

$$e_f = \frac{s_p}{n} \quad (3-20)$$

采用前文所述的数组扩展法，三种模型的加速比随核个数变化如图 3.7 所示，三种模型的并行效率随核个数变化如图 3.8 所示，其整体计算的加速比以及并行效率详见表 3.3。需要说明的是图 3.7(a)是整体计算的加速比，而图 3.7(b)是节点变量更新阶段的加速比，图 3.7(c)是质点变量更新阶段的加速比。从图 3.7 和图 3.8 可知：

(1) 基于数组扩展法进行并行计算时，随着计算模型的规模增加，加速比和并行效率下降，因此数组扩展法的可扩展性不佳。

(2) 基于数组扩展法进行并行计算时，质点更新阶段的加速比良好，而节点更新阶段的加速比低，因此节点更新阶段的并行效率是数组扩展法的瓶颈。

计算过程表明，随着线程数的增加，数组扩展法的内存使用量也增加，如文中的 M3 模型，使用单线程(单核)计算时耗费内存为 464M，如果使用 8 个线程(8 核)计算则耗费内存为 864M。对于千万质点的大规模模型，采用数组扩展法时，随着线程数的增加，其内存使用量的增加是巨大的。

针对算法进行深入分析，在数组扩展法中，每增加一个线程就要增加一套全局背景网格(见图 3.3)，随着线程数的增加，其计算量以及内存的使用量均增加，这样导致了数组扩展法的扩展性不佳以及耗费内存。

即使数组扩展法有上述缺点，但该算法具有容易实现以及负载平衡性能良好的特点。

表 3.3 数组扩展法的加速比和并行效率

核数	粗模型 M1		中模型 M2		细模型 M3	
	加速比	并行效率	加速比	并行效率	加速比	并行效率
2	1.90	95.0%	1.88	94.0%	1.86	93.0%
4	3.78	94.5%	3.62	90.5%	3.31	82.8%
6	4.93	82.2%	4.49	74.8%	3.91	65.2%
8	5.73	71.6%	5.03	62.9%	4.09	51.1%

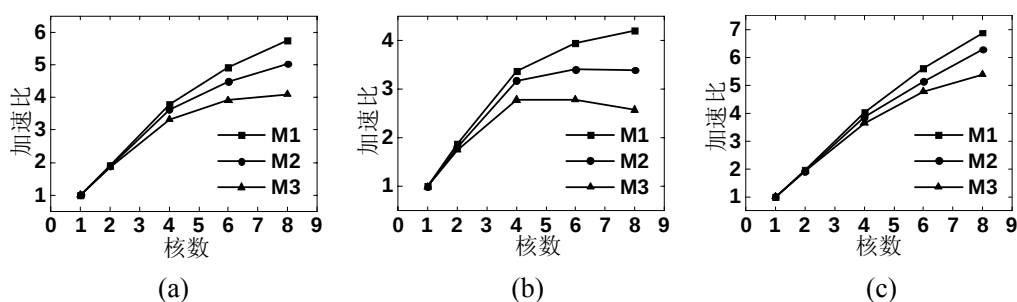


图 3.7 数组扩展法的加速比, (a) 整体计算, (b) 节点计算, (c) 质点计算

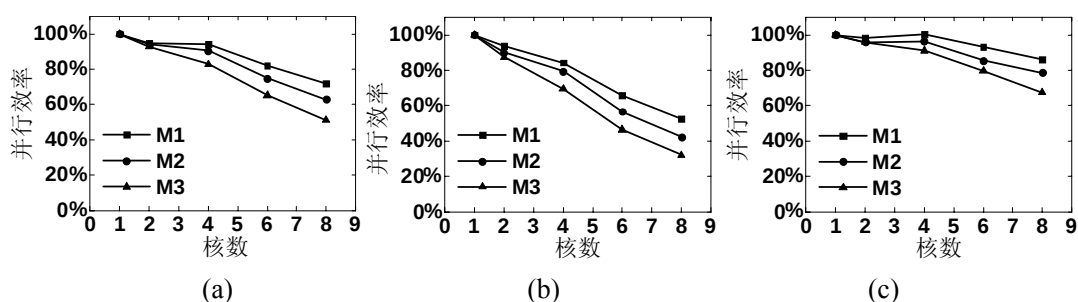


图 3.8 数组扩展法的并行效率, (a) 整体计算, (b) 节点计算, (c) 质点计算

3.5.1.3 背景网格区域分解法的测试

采用背景网格区域分解法进行并行计算, 当采用双核计算时, 背景网格区域在 xyz 方向按照 $2 \times 1 \times 1$ 进行子域分割。四核计算时, 背景网格区域按照 $2 \times 2 \times 1$ 进行子域分割。六核计算时, 背景网格区域按照 $2 \times 1 \times 3$ 进行子域分割。八核计算时, 背景网格按照 $2 \times 2 \times 2$ 进行子域分割。计算过程中采用了自适应背景网格区域方法改善负载平衡, 计算中背景网格区域根据质点域的大小进行重构。

三种模型的加速比随核个数变化见图 3.9, 三种模型的并行计算效率见图 3.10。其中, 图 3.9(a)是整体计算得到的加速比, 图 3.9(b)和图 3.9(c)分别是节点变量计算和质点变量计算阶段的加速比。三种模型整体计算的加速比和并行效率见表 3.4。

由表 3.4 和图 3.9 可知, 背景网格区域分解法的加速比与计算模型大小无关。计算还表明, 当采用背景网格区域分解法时, 线程数的增加不会造成内存使用量的增加。

当核数超过 4 时, 背景网格区域分解法的并行效率有所下降, 原因在于测试平台为双 CPU 八核构架, 当核数超过 4 时, CPU 之间需要通信, 从而降低了

并行计算效率。多核计算机的内存访问带宽是共享的，线程过多会影响内存的访问效率。

表 3.4 背景网格区域分解法的加速比和并行效率

核数	粗模型 M1		中模型 M2		细模型 M3	
	加速比	并行效率	加速比	并行效率	加速比	并行效率
2	1.88	94.0%	1.91	95.5%	1.91	95.5%
4	3.82	95.5%	3.79	94.8%	3.75	93.8%
6	4.59	76.5%	4.67	77.8%	4.68	78.0%
8	6.23	77.9%	6.23	77.9%	6.26	78.3%

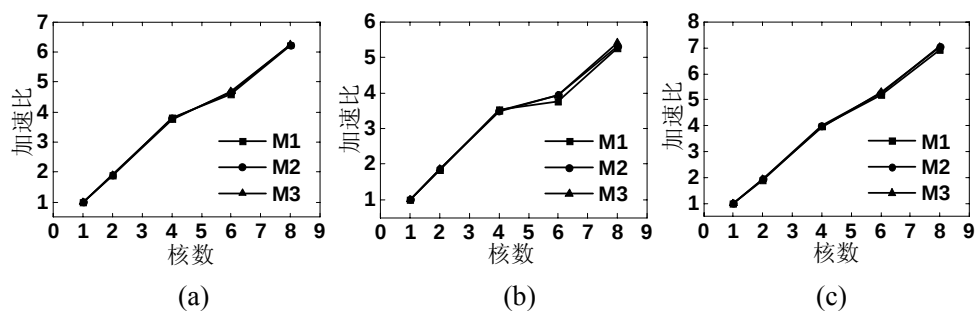


图 3.9 背景网格区域分解法的加速比, (a) 整体计算, (b) 节点计算, (c) 质点计算

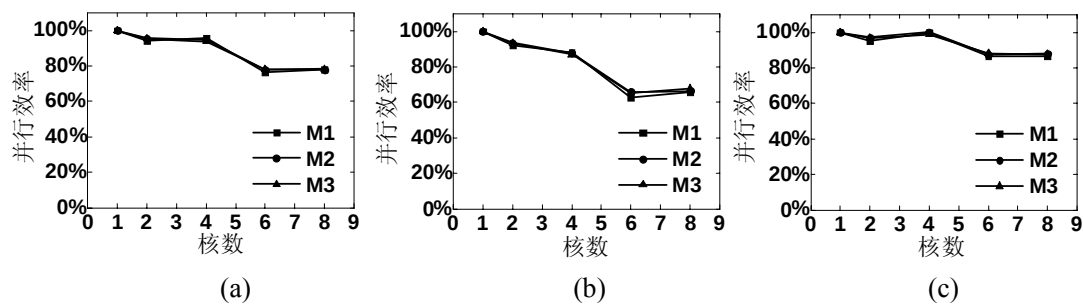


图 3.10 背景网格区域分解法的并行效率, (a) 整体计算, (b) 节点计算, (c) 质点计算

综上所述，背景网格区域分解法具有良好的扩展性和并行效率，而且文中给出的自适应背景网格区域方法可以有效改善负载平衡。因此，该算法适合于求解千万质点的大规模模型。

3.5.2 超高速撞击问题的模拟

由于网格畸变的原因，传统的有限元方法无法有效模拟超高速冲击中的碎

片云现象。而一些新发展的无网格算法可用于超高速冲击问题的求解，这些方法包括 SPH 算法^[176]，MLPG 算法^[101]，广义粒子算法^[177]，以及质点单元混合算法^[103]。为了说明我们的并行物质点法程序在超高速问题中的应用，此处对一个铅弹超高速撞击铅靶的问题进行模拟，采用了前文中的背景网格区域分解法对该问题进行大规模并行计算。

铅弹半径为 7.5 mm，弹丸质量为 20 g，靶厚为 6.35 mm，弹丸的撞击速度为 6.58 km/s。在此计算中，材料的偏应力采用了各向同性强化弹塑性模型，见式(3-18)，材料的压力采用 Mie-Grüneisen 状态方程计算。在超高速冲击中，采用了一个简单的失效模型来模拟材料失效：

(1) 塑性应变失效。此时质点的等效塑性应变超过了材料的失效应变 $\varepsilon_{\text{fail}}$ ，认为质点失效。

(2) 拉应力失效。此时质点的压力低于其失效压力 p_{min} ，相当于质点的应力球量大于某个阈值，认为质点失效。

当质点的状态满足上述条件之一时，则质点失效，失效后的质点不再承受载荷。表 3.5 给出了铅的材料力学性能参数^[2]。

表 3.5 铅的力学性能参数^[2]

弹性常数			强化模型			状态方程			失效参数	
ρ (kg/m ³)	E (GPa)	ν	A (MPa)	B (MPa)	n	c_0 (m/s)	S_1	Γ_0	$\varepsilon_{\text{fail}}$	p_{min} (MPa)
11350	22.4	0.42	12.0	125.0	1.0	2092	1.45	2.0	3.0	-1500

采用 x 射线照相技术，图 3.11 给出了撞击后 30.6 μs 的实验结果^[178]，可以看出在超高速撞击下弹靶已经碎裂为碎片云。在物质点法数值模拟中，首先采用了一个小规模模型来计算该问题，并通过该模型来研究网格间距变化对计算结果的影响，该模型包括了 847888 质点，初始的质点间距为 0.53 mm。采用该质点离散模型，图 3.12 给出了不同背景网格间距下的碎片云计算结果(撞击后 30.6 μs)，其中背景网格间距分别取值为 1.06mm、1.59 mm 和 2.12 mm。由图 3.12 可以看出，对于小规模模型，当背景网格间距为 2.12mm 时，计算结果较为理想。

进一步，对该超高速撞击问题进行了千万质点量级的大规模并行计算，来研究质点数对计算结果的影响。该大规模模型包括了 13542030 个质点，初始的

质点间距为 0.21mm，背景网格的间距取为 1mm，利用该大规模模型得到的撞击后 30.6 μs 的碎片云图像见图 3.13。图 3.13 中蓝色表示弹体材料，而红色表示靶体材料。对比图 3.11 和图 3.13 可以看出，实验得到的碎片云外形和大规模计算得到的碎片云外形一致。在实验中，撞击 30.6 μs 后碎片云前端距离靶板约为 200 mm，碎片云的宽度为 145 mm。图 3.13 给出的大规模计算结果表明，碎片云的前端距离靶板 198 mm，碎片云的宽度为 142 mm。因此，大规模计算得到的碎片云外形以及大小与实验值吻合较好。

对比图 3.12 和图 3.13 可知，虽然小规模模型和大规模模型得到的碎片云外形是相似的，但大规模模型得到的计算结果和实验结果更为一致。因此，对于超高速撞击问题，大规模物质点模型能够得到更精确的计算结果。

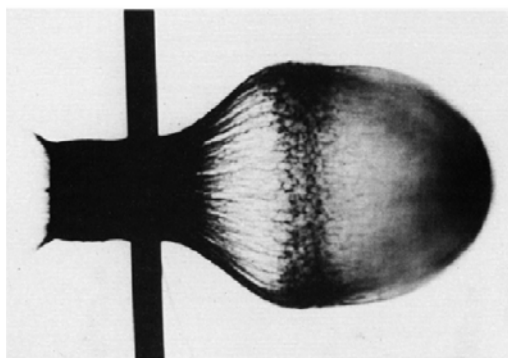


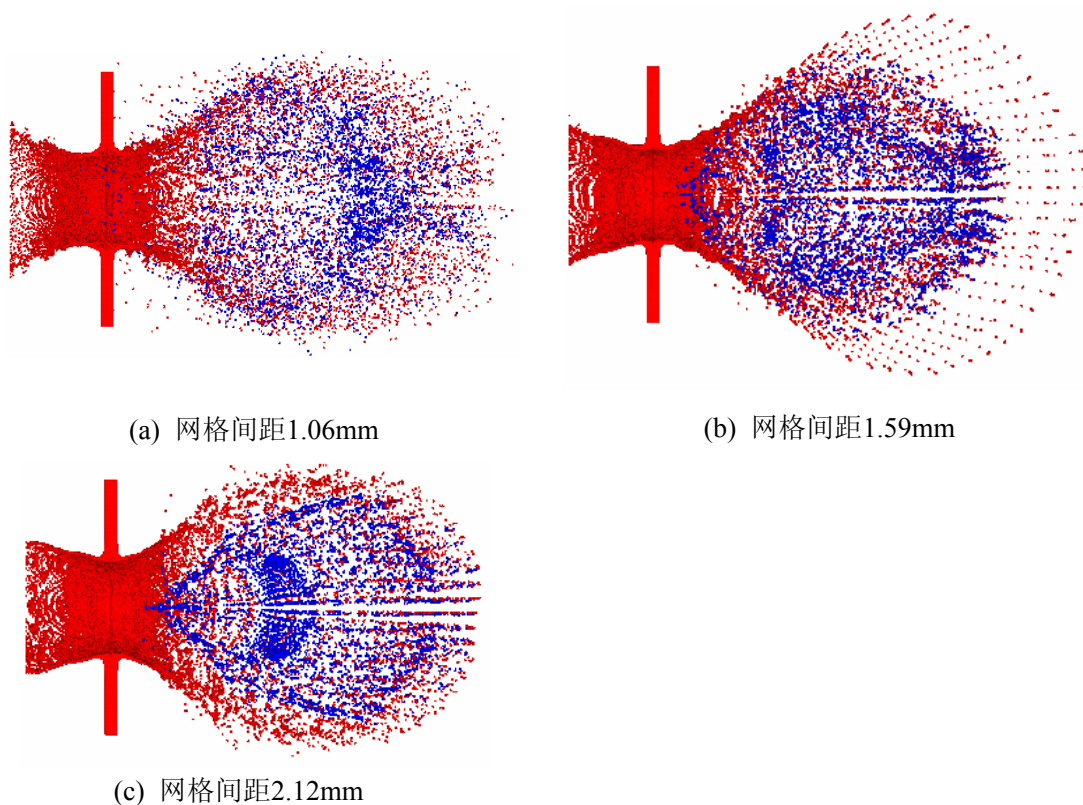
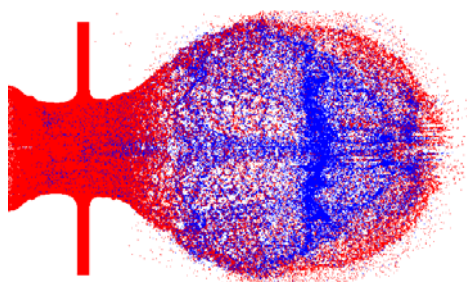
图 3.11 撞击后 30.6 μs 的实验结果^[178]

3.6 本章小结

本章基于共享内存的 OpenMP 技术，开发了用于冲击问题求解的并行物质点法程序。在物质点法程序的并行化中，为了解决节点变量计算阶段的数据竞争问题，提出了两种基于 OpenMP 的并行物质点算法：数组扩展法和背景网格区域分解法。

算法分析和算例测试表明：

(1) 在数组扩展法中，每增加一个线程就要增加一套全局背景网格，随着线程数增加，导致了内存使用量增加；但是，该算法具有容易实现以及负载平衡性能良好的特点。

图 3.12 碎片云的小规模计算结果($t=30.6\ \mu\text{s}$), 质点数 847888图 3.13 碎片云的大规模计算结果($t=30.6\ \mu\text{s}$), 质点数 13542030

(2) 背景网格区域分解法具有良好的扩展性和并行效率, 加速比与模型大小无关; 而且, 并行计算中可以用自适应背景网格区域方法改善负载平衡, 因此背景网格区域分解法能够进行大规模问题的并行计算。

在并行算法研究的基础上, 本章开展了超高速撞击问题的大规模并行计算, 计算规模达到了 13542030 个质点。研究表明通过大规模的物质点法计算, 能够获得精确的碎片云计算结果。计算结果表明, 虽然小规模模型和大规模模型得

到的碎片云外形是相似的，但大规模模型得到的碎片云结果和实验结果更为一致。

第4章 接触物质点算法及应用

4.1 引言

标准物质点算法在背景网格和质点之间采用了单值的映射函数，可以防止物质界面之间的相互穿透，将物体的接触界面按照粘着接触条件处理。对于超高速撞击问题，由于物质已经近似流体或者已经碎裂，物质界面之间的滑移可以忽略。当模拟中低速侵彻问题时，标准物质点算法中的粘着接触条件往往会导致较大的侵彻阻力，从而降低了剩余弹速或者减小了侵彻深度。因此，需要进一步在标准物质点算法中引入接触算法，开发用于中低速冲击和侵彻计算的接触物质点算法。

本章开展适用于中低速冲击和侵彻分析的接触物质点算法研究。对于大变形问题，已有文献给出的界面法向量算法不能保证接触界面法向量的共线条件^[132,133]，这将导致侵彻计算过程的动量不守恒和界面穿透。针对此问题，本章提出了一种新的接触界面法向量计算方法，保证了计算过程中的动量守恒，并且能处理破碎靶体的法向量计算难题。本章在对接触问题进行完整数学描述的基础上，实现了接触物质点算法，并采用多个算例来验证该算法。进而将接触物质点算法用于穿甲和侵彻问题的数值模拟，从而解决了标准物质点算法模拟此类问题时侵彻阻力过大的问题。

4.2 接触算法的基本描述

4.2.1 接触条件数学描述

根据接触问题应该满足的物理和几何条件，以下给出接触算法的一般数学描述。图4.1给出了两个接触体I和II，两个接触体使用相同的背景网格。

在接触物质点算法中，将各个物体的状态变量独立地映射到背景网格上，这样各个物体具有各自独立的节点变量。 $\mathbf{v}_{bi}$ 为**b**物体在*i*节点处的节点速度，可以由体**b**的节点动量 $\mathbf{P}_{bi}$ 和节点质量 m_{bi} 之比所得

$$\mathbf{v}_{bi} = \frac{\mathbf{P}_{bi}}{m_{bi}} \quad (b=1,2) \quad (4-1)$$

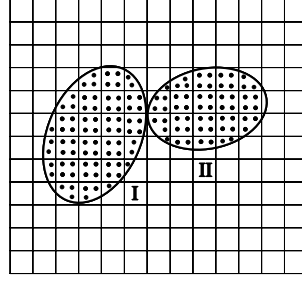


图 4.1 两个接触体的物质点离散

式中， b 代表物体编号， i 代表节点编号。为了方便描述，采用了两个物体的相互接触来说明问题。在构造接触物质点算法时，接触条件经由背景网格施加，按照连续介质力学，可以给出以下的接触条件^[16,179]：

(1) 法向量的共线条件

一旦接触发生，则两个接触体在接触界面上需要满足法向量的共线条件，而且法向量方向相反。即对于接触界面的单位法向量而言，存在以下条件：

$$\sum_{b=1}^2 \mathbf{n}_{bi} = 0 \quad (4-2)$$

式中， $\mathbf{n}_{bi}$ 是 b 物体在 i 节点处的单位表面法向量。

(2) 非穿透条件

当接触发生时，为了保证物质界面之间不互相穿透，在背景网格上各个物体的节点速度必须满足非穿透条件：

$$\sum_{b=1}^2 \mathbf{v}_{bi} \cdot \mathbf{n}_{bi} = 0 \quad (4-3)$$

此处， $\mathbf{v}_{bi}$ 由式(4-1)给出。

(3) 接触力条件

在接触物质点算法中，接触的判断和接触力的施加均通过背景网格节点完成，因此接触体之间为点-点接触关系。当两个物体在 i 节点处相互接触，根据牛顿第三定律可知：

$$\sum_{b=1}^2 \mathbf{f}_{bi}^{\text{ct}} = 0 \quad (4-4)$$

式中， $\mathbf{f}_{bi}^{\text{ct}}$ 为体 b 的 i 节点接触力。

f_{bi}^{nor} 定义为物体 b 的法向接触力

$$f_{bi}^{\text{nor}} = \mathbf{f}_{bi}^{\text{ct}} \cdot \mathbf{n}_{bi} \quad (4-5)$$

法向接触力应该满足以下条件

$$f_{bi}^{\text{nor}} \leq 0 \quad (4-6)$$

即法向接触力为负值，表示该力必须为压力。

4.2.2 接触问题的节点动量方程

从带有拉格朗日乘子项的虚功原理出发，能够得到接触问题的动量方程。此处采用 Ω 代表 t 时刻的一个接触体所占的空间域， Γ 代表接触体的表面。 Γ 由三部分组成，即位移边界 Γ_u ，应力边界 Γ_t 和接触力边界 Γ_c 。取虚位移矢量 $\mathbf{w}$ ，它满足位移边界条件。对于一个接触体，其虚功方程为

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{a} \cdot \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{w} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \tilde{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}^{\text{ct}} \cdot \mathbf{w} d\Gamma \quad (4-7)$$

式中采用了张量表达形式， ρ 为材料密度， $\mathbf{a}$ 为加速度矢量， $\boldsymbol{\sigma}$ 为 Cauchy 应力张量， $\mathbf{b}$ 为体力矢量， $\tilde{\mathbf{t}}$ 为应力边界 Γ_t 上的面力矢量， $\mathbf{t}^{\text{ct}}$ 为接触边界 Γ_c 上的接触面力矢量， ∇ 为 Hamilton 算子。

在物质点法中，将连续体离散为一系列质点，因此 t 时刻物体的密度可以近似为

$$\rho = \sum_{p=1}^{N_p} m_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \quad (4-8)$$

式中， $\mathbf{x}_p$ 表示 t 时刻质点 p 的空间位置。将式(4-8)代入式(4-7)得：

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{N_p} m_p \mathbf{a}(\mathbf{x}_p, t) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}_p, t) + \sum_{p=1}^{N_p} \frac{m_p}{\rho(\mathbf{x}_p, t)} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_p, t) : \nabla \mathbf{w} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p} \\ & = \sum_{p=1}^{N_p} m_p \mathbf{b}(\mathbf{x}_p, t) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}_p, t) + \int_{\Gamma_t} \tilde{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}^{\text{ct}} \cdot \mathbf{w} d\Gamma \end{aligned} \quad (4-9)$$

在式(4-9)中， $\mathbf{t}^{\text{ct}}$ 为接触边界上的接触面力矢量，是未知量。

质点变量和节点变量之间的映射关系为

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_p, t) = \sum_{i=1}^{N_n} N_i(\mathbf{x}_p) \mathbf{w}_i(t) \quad (4-10)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_p, t) = \sum_{i=1}^{N_n} N_i(\mathbf{x}_p) \mathbf{a}_i(t) \quad (4-11)$$

式中 N_i 为第 i 节点的形函数。 $\mathbf{w}_i$ 为第 i 节点的虚位移， $\mathbf{a}_i$ 为第 i 节点的加速度。令 S_{ip} 表示 i 节点形函数在 p 质点处的值， $\mathbf{G}_{ip}$ 表示 i 节点形函数在质点 p 处的梯度矢量。将式(4-10)和式(4-11)代入式(4-9)可得：

$$\sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{w}_i \cdot \sum_{j=1}^{N_n} m_{ij} \mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{f}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{f}_i^{\text{int}} + \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{f}_i^{\text{ct}} \quad (4-12)$$

考虑到 i 节点虚位移 $\mathbf{w}_i$ 的任意性可得节点动量方程为

$$\sum_{j=1}^{N_n} m_{ij} \mathbf{a}_j = \mathbf{f}_i^{\text{ext}} + \mathbf{f}_i^{\text{int}} + \mathbf{f}_i^{\text{ct}} \quad (4-13)$$

式中，

$$m_{ij} = \sum_{p=1}^{N_p} S_{ip} S_{jp} m_p \quad (4-14)$$

为质量阵分量，

$$\mathbf{f}_i^{\text{ext}} = \sum_{p=1}^{N_p} m_p S_{ip} \mathbf{b}_p + \int_{\Gamma_i} N_i \tilde{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (4-15)$$

为节点外力矢量，

$$\mathbf{f}_i^{\text{int}} = - \sum_{p=1}^{N_p} \frac{m_p}{\rho_p} \boldsymbol{\sigma}_p \cdot \mathbf{G}_{ip} \quad (4-16)$$

为节点内力矢量，

$$\mathbf{f}_i^{\text{ct}} = \int_{\Gamma_c} N_i \mathbf{t}^{\text{ct}} d\Gamma \quad (4-17)$$

为节点接触力矢量。

如果采用集中质量阵，则接触问题的节点动量方程为：

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{f}_i^{\text{ext}} + \mathbf{f}_i^{\text{int}} + \mathbf{f}_i^{\text{ct}} \quad (4-18)$$

式中

$$m_i = \sum_{p=1}^{N_p} S_{ip} m_p \quad (4-19)$$

为节点质量。

如果和有限元的接触算法进行比较,发现物质点法的接触问题节点动量方程和有限元的节点动量方程在形式上完全相同。

按照式(4-18),如果考虑两个物体的接触,接触面上节点的动量方程为:

$$m_{bi}\mathbf{a}_{bi} = \mathbf{f}_{bi}^{\text{ext}} + \mathbf{f}_{bi}^{\text{int}} + \mathbf{f}_{bi}^{\text{ct}} \quad (b=1,2) \quad (4-20)$$

4.2.3 接触节点探测

Bardenhagen 等^[132,133]给出了接触节点的判断公式,如果两个体的质点速度映射到同一节点处,则可以判断两个体之间发生了接触。所有质点在节点 i 处的映射平均速度定义为质心速度,节点 i 上的质心速度为:

$$\mathbf{v}_i^{\text{cm}} = \frac{1}{M_i} \sum_{b=1}^2 \mathbf{p}_{bi} \quad (4-21)$$

其中, M_i 是两个体的节点质量和,可以表示为

$$M_i = \sum_{b=1}^2 m_{bi} \quad (4-22)$$

物体的接触过程分为三种状态:未接触状态、接触状态和分离状态,因此要完整描述接触过程,需要对三种状态进行甄别。

此处分三种情况进行接触条件的讨论:

(a) 如果两个物体未发生相互接触,则仅有一个物体对节点 i 处的变量有贡献,这意味着节点 i 处的质心速度仅仅取决一个物体,因此当接触未发生时,存在关系式

$$(\mathbf{v}_{bi} - \mathbf{v}_i^{\text{cm}}) \cdot \mathbf{n}_{bi} = 0 \quad (b=1,2) \quad (4-23)$$

(b) 如果两个物体发生了相互接触,并且在 i 节点处发生物质界面相互穿透,这意味着

$$(\mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i}) \cdot \mathbf{n}_{1i} > 0 \quad (4-24)$$

$$(\mathbf{v}_{2i} - \mathbf{v}_{1i}) \cdot \mathbf{n}_{2i} > 0 \quad (4-25)$$

此时,接触节点处的质心速度取决于两个物体,将式(4-21)代入式(4-24)和(4-25)可得两个体在节点 i 处发生接触的条件为:

$$(\mathbf{v}_{bi} - \mathbf{v}_i^{\text{cm}}) \cdot \mathbf{n}_{bi} > 0 \quad (b=1,2) \quad (4-26)$$

(c) 如果两个已经接触的物体相互分离，则

$$\mathbf{v}_{1i} \cdot \mathbf{n}_{1i} + \mathbf{v}_{2i} \cdot \mathbf{n}_{2i} < 0 \quad (4-27)$$

将式(4-21)代入式(4-27)式整理可得接触体的分离条件为：

$$(\mathbf{v}_{bi} - \mathbf{v}_i^{\text{cm}}) \cdot \mathbf{n}_{bi} < 0 \quad (b=1,2) \quad (4-28)$$

综上所述，两个体在节点 i 处发生接触的条件为：

$$(\mathbf{v}_{bi} - \mathbf{v}_i^{\text{cm}}) \cdot \mathbf{n}_{bi} > 0 \quad (4-29)$$

当式(4-29)成立时，则在接触节点处需要施加接触力来消除界面之间穿透。如果式(4-29)不成立，说明接触未发生或者接触体正在分离，此时接触力为零值。

在物质点方法中，如果节点质量接近于零值，将会导致节点速度产生奇异，因此用节点动量代替节点速度进行计算能得到更好的计算结果。如果采用动量形式，则式(4-29)可以表示为：

$$\left(\mathbf{p}_{bi} - \frac{m_{bi}}{M_i} \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{p}_{\alpha i} \right) \cdot \mathbf{n}_{bi} > 0 \quad (4-30)$$

4.2.4 表面法向量

构造接触物质点算法时，需要计算物体的表面法向量。Bardenhagen 等^[132]通过节点质量的梯度计算物体 b 的表面法向量 $\hat{\mathbf{n}}_{bi}$

$$\hat{\mathbf{n}}_{bi} = \frac{1}{\left| \sum_p \mathbf{G}_{ip} m_{bp} \right|} \sum_p \mathbf{G}_{ip} m_{bp} \quad (4-31)$$

式中， m_{bp} 为体 b 上 p 质点的质量。

对于大变形问题，式(4-31)给出的单位法向量并不能完全满足表面法向量的共线条件式(4-2)^[133]。而在侵彻和穿甲分析中，如果表面法向量不完全满足共线条件，则计算时会导致动量不守恒和界面穿透。其次，对于破碎的靶体，靶体接触面的不规则往往会导致得到的法向量失真。

为了解决上述问题，本文提出了一种新的接触界面法向量计算方法，在该方法中，首先根据式(4-31)得到初始的单位表面法向量 $\hat{\mathbf{n}}_{bi}$ ，然后按照以下三种方法对 $\hat{\mathbf{n}}_{bi}$ 进行修正，得到修正后的接触面单位法向量 $\mathbf{n}_{bi}$ 。

(1) 如果体 I 的刚度远大于体 II，则令 $\mathbf{n}_{1i} = \hat{\mathbf{n}}_{1i}$ 并且 $\mathbf{n}_{2i} = -\hat{\mathbf{n}}_{1i}$ 。

(2) 如果体 I 的外表面是凸面或者平面，而体 II 的接触面是凹面，则令 $\mathbf{n}_{li} = \hat{\mathbf{n}}_{li}$ ，并且 $\mathbf{n}_{2i} = -\hat{\mathbf{n}}_{li}$ 。

(3) 修正的单位表面法向量 $\mathbf{n}_{bi}$ 也可以从原始法向量的平均值算出，即

$$\mathbf{n}_{li} = -\mathbf{n}_{2i} = \frac{1}{|\hat{\mathbf{n}}_{li} - \hat{\mathbf{n}}_{2i}|} (\hat{\mathbf{n}}_{li} - \hat{\mathbf{n}}_{2i}) \quad (4-32)$$

修正后的单位表面法向量 $\mathbf{n}_{bi}$ 能满足接触表面法向量共线条件式(4-2)，因此修正后的 $\mathbf{n}_{bi}$ 保证了计算中的动量守恒性。在穿甲和侵彻问题中，弹体在侵彻过程中往往是完整的，而靶体会出现破坏，因此利用弹体来计算接触界面法向量。

4.3 接触物质点算法构造与实现

4.3.1 接触物质点算法构造

4.3.1.1 法向接触力

物质点法的 USF 格式与显式有限元的数值实现格式相同，而且能保证动量和能量守恒性^[143]，因此本文采用此格式进行接触算法构造。类似于显式有限元中的接触算法^[15,121]，接触物质点算法按照以下三个部分进行构造：

(1) 首先不考虑接触，将两个接触体单独进行更新，分别积分节点动量方程，得到更新后的节点试速度。

(2) 对节点试速度进行接触判断，如果不满足接触条件式(4-29)，则说明两个物体未发生接触或者分离，此时节点的试速度即为真实解。

(3) 如果节点试速度满足接触条件式(4-29)，说明两个物体处于接触状态，而且有接触界面穿透，此时需要施加接触力消除界面穿透。

根据以上三部分描述，此处进行接触物质点算法的构造。首先不考虑接触，对于各个物体单独进行动量方程积分，得到 t^{k+1} 时刻节点的试速度 $\bar{\mathbf{v}}_{bi}^{k+1}$ 为：

$$\bar{\mathbf{v}}_{bi}^{k+1} = \mathbf{v}_{bi}^k + \frac{\mathbf{f}_{bi}}{m_{bi}^k} \Delta t \quad (4-33)$$

式中， $\mathbf{f}_{bi}$ 为物体 b 的节点内力和节点外力之和：

$$\mathbf{f}_{bi} = \mathbf{f}_{bi}^{\text{ext}} + \mathbf{f}_{bi}^{\text{int}} \quad (4-34)$$

根据 4.2.3 节的描述，如果节点试速度满足关系式：

$$(\bar{\mathbf{v}}_{bi}^{k+1} - \bar{\mathbf{v}}_i^{\text{cm},k+1}) \cdot \mathbf{n}_{bi}^k > 0 \quad (4-35)$$

则意味着两个物体在节点 i 处发生了接触。此处， $\bar{\mathbf{v}}_i^{\text{cm},k+1}$ 为基于节点试速度的质心速度，定义为：

$$\bar{\mathbf{v}}_i^{\text{cm},k+1} = \frac{1}{\sum_{b=1}^2 m_{bi}^k} \sum_{b=1}^2 m_{bi}^k \bar{\mathbf{v}}_{bi}^{k+1} \quad (4-36)$$

如果节点试速度不满足式(4-35)，则表明接触未发生或者物体正在分离，因此节点试速度即代表真实解。当节点试速度满足式(4-35)时，说明两个物体已经发生接触，并且在节点 i 处产生了相互穿透。因此，需要施加接触力来消除该穿透量。

对接触体施加接触力后，得到 t^{k+1} 时刻的节点真实速度为

$$\mathbf{v}_{bi}^{k+1} = \bar{\mathbf{v}}_{bi}^{k+1} + \frac{\mathbf{f}_{bi}^{\text{ct}}}{m_{bi}^k} \Delta t \quad (4-37)$$

t^{k+1} 时刻的节点速度 $\mathbf{v}_{bi}^{k+1}$ 必须满足非穿透条件，即

$$\sum_{b=1}^2 \mathbf{v}_{bi}^{k+1} \cdot \mathbf{n}_{bi}^k = 0 \quad (4-38)$$

将式(4-37)和式(4-4)代入式(4-38)可以得到法向接触力为

$$f_{li}^{\text{nor}} = f_{2i}^{\text{nor}} = \frac{m_{li}^k m_{2i}^k}{(m_{li}^k + m_{2i}^k) \Delta t} (\bar{\mathbf{v}}_{2i}^{k+1} - \bar{\mathbf{v}}_{li}^{k+1}) \cdot \mathbf{n}_{li}^k \quad (4-39)$$

进一步将式(4-36)代入式(4-39)可得：

$$f_{bi}^{\text{nor}} = \frac{m_{bi}^k}{\Delta t} (\bar{\mathbf{v}}_i^{\text{cm},k+1} - \bar{\mathbf{v}}_{bi}^{k+1}) \cdot \mathbf{n}_{bi}^k \quad (4-40)$$

如果不考虑切向接触力，则接触力的求解已经完成。为了充分阐述接触力的含义，需要对式(4-40)进行深入讨论。将式(4-40)代入式(4-37)可得：

$$\mathbf{v}_{bi}^{k+1} \cdot \mathbf{n}_{bi}^k = \bar{\mathbf{v}}_i^{\text{cm},k+1} \cdot \mathbf{n}_{bi}^k \quad (4-41)$$

前文已经说明，标准物质点法在背景网格和质点之间采用了单值的映射函数。在标准物质点法中，界面之间自然地按照粘着接触条件处理(无滑移接触)，式(4-36)中的节点质心速度 $\bar{\mathbf{v}}_i^{\text{cm},k+1}$ 等于标准物质点算法中的节点速度，因此 $\bar{\mathbf{v}}_i^{\text{cm},k+1}$

是满足非穿透条件的。而式(4-41)表明,施加接触力后, t^{k+1} 时刻的节点速度 $\mathbf{v}_{bi}^{k+1}$ 的法向分量等于节点质心速度 $\bar{\mathbf{v}}_i^{\text{cm},k+1}$ 的法向分量,因此 t^{k+1} 时刻的节点速度 $\mathbf{v}_{bi}^{k+1}$ 也满足非穿透条件。

4.3.1.2 切向接触力

切向接触力的计算方法和法向接触力的计算方法过程类似。首先计算两个物体完全粘着接触时的切向接触力,对于粘着接触而言,切向接触力定义为

$$\mathbf{f}_{bi}^{\text{tan}} = \mathbf{f}_{bi}^{\text{ct}} \cdot \mathbf{s}_{bi}^k \quad (4-42)$$

式中, $\mathbf{f}_{bi}^{\text{ct}}$ 为施加在体 b 上的接触力, $\mathbf{s}_{bi}^k$ 为接触面的单位切向量,在接触面上满足关系式 $\mathbf{s}_{1i}^k = -\mathbf{s}_{2i}^k$ 。

对于粘着接触, t^{k+1} 时刻节点速度 $\mathbf{v}_{bi}^{k+1}$ 必须满足以下条件:

$$\sum_{b=1}^2 \mathbf{v}_{bi}^{k+1} \cdot \mathbf{s}_{bi}^k = 0 \quad (4-43)$$

将式(4-36)和式(4-37)代入上式可得:

$$\mathbf{f}_{bi}^{\text{tan}} = \frac{m_{bi}^k}{\Delta t} (\bar{\mathbf{v}}_i^{\text{cm},k+1} - \bar{\mathbf{v}}_{bi}^{k+1}) \cdot \mathbf{s}_{bi}^k \quad (4-44)$$

同样将式(4-44)代入式(4-37)可得粘着接触时的一个关系式为:

$$\mathbf{v}_{bi}^{k+1} \cdot \mathbf{s}_{bi}^k = \bar{\mathbf{v}}_i^{\text{cm},k+1} \cdot \mathbf{s}_{bi}^k \quad (4-45)$$

式(4-41)和式(4-45)联立说明,对于粘着接触, t^{k+1} 时刻的节点速度 $\mathbf{v}_{bi}^{k+1}$ 等于节点质心速度 $\bar{\mathbf{v}}_i^{\text{cm},k+1}$,这也充分说明节点质心速度 $\bar{\mathbf{v}}_i^{\text{cm},k+1}$ 满足粘着接触条件。因此,对于粘着接触,切向接触力矢量可以通过简单的方法求得:

$$\mathbf{f}_{bi}^{\text{tan}} = \frac{m_{bi}^k}{\Delta t} (\bar{\mathbf{v}}_i^{\text{cm},k+1} - \bar{\mathbf{v}}_{bi}^{k+1}) - \mathbf{f}_{bi}^{\text{nor}} \cdot \mathbf{n}_{bi}^k \quad (4-46)$$

式(4-46)能够避免求解接触面的切向向量。

对于界面之间的滑移接触,界面之间摩擦力由库仑摩擦描述,而且摩擦力的值应低于粘着接触时的切向接触力,摩擦力方向为切向。因此需要判断接触的类型来计算接触力:

(i) 当满足条件 $\mu |\mathbf{f}_{bi}^{\text{nor}}| > |\mathbf{f}_{bi}^{\text{tan}}|$ 时,接触为粘着接触关系,此时接触力为:

$$\mathbf{f}_{bi}^{\text{ct}} = \frac{m_{bi}^k}{\Delta t} (\bar{\mathbf{v}}_i^{\text{cm},k+1} - \bar{\mathbf{v}}_{bi}^{k+1}) \quad (4-47)$$

(ii) 当满足条件 $\mu |f_{bi}^{\text{nor}}| \leq |\mathbf{f}_{bi}^{\text{tan}}|$ 时, 接触为滑移接触, 此时接触力为:

$$\mathbf{f}_{bi}^{\text{ct}} = f_{bi}^{\text{nor}} \cdot \mathbf{n}_{bi}^k + \mu |f_{bi}^{\text{nor}}| \frac{\mathbf{f}_{bi}^{\text{tan}}}{|\mathbf{f}_{bi}^{\text{tan}}|} \quad (4-48)$$

有了接触力, 可以根据式(4-37)得到 t^{k+1} 时刻的节点速度 $\mathbf{v}_{bi}^{k+1}$ 。

4.3.2 接触物质点算法实现

基于 USF 格式实现接触物质点算法, 以下给出实现细节。采用上标 k 和 $k+1$ 分别表示 t^k 和 t^{k+1} 时刻的值, 具体的计算过程如下:

(1) 重新定义背景网格, 计算节点质量、节点速度和节点处的单位法向量。

对于物体 b , 其 t^k 时刻节点质量和节点动量分别是

$$m_{bi}^k = \sum_p m_{bp} S_{ip}^k \quad (4-49)$$

$$m_{bi}^k \mathbf{v}_{bi}^k = \sum_p m_{bp} \mathbf{v}_{bp}^k S_{ip}^k \quad (4-50)$$

修正前的单位表面法向量为

$$\hat{\mathbf{n}}_{bi}^k = \frac{1}{\left| \sum_p \mathbf{G}_{ip}^k m_{bp} \right|} \sum_p \mathbf{G}_{ip}^k m_{bp} \quad (4-51)$$

(2) 计算各个物体的质点应变和应力, 计算质点密度。

物体 b 上的质点应变增量为

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{bp} = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^8 \left[\left(\mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_{bi}^k \right)^T + \mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_{bi}^k \right] \quad (4-52)$$

物体 b 上质点旋率增量为

$$\Delta \boldsymbol{\omega}_{bp} = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^8 \left[\left(\mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_{bi}^k \right)^T - \mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_{bi}^k \right] \quad (4-53)$$

基于应变增量和旋率增量, 根据本构关系计算 Cauchy 应力:

$$\boldsymbol{\sigma}_{bp}^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}_{bp}^k + \Delta \boldsymbol{\sigma}_{bp} \left(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{bp}, \Delta \boldsymbol{\omega}_{bp} \right) \quad (4-54)$$

物体 b 上质点密度为:

$$\rho_{bp}^{k+1} = \frac{\rho_{bp}^k}{1 + \text{tr}(\Delta \mathbf{e}_{bp})} \quad (4-55)$$

(3) 计算节点内力和节点外力

对于物体 b ，其节点内力和外力分别为

$$\mathbf{f}_{bi}^{\text{int}} = -\sum_p \sigma_{bp}^{k+1} \cdot \mathbf{G}_{ip}^k \frac{m_{bp}}{\rho_{bp}^{k+1}} \quad (4-56)$$

$$\mathbf{f}_{bi}^{\text{ext}} = \sum_p m_{bp} S_{ip}^k \mathbf{b}_{bp}^k + \int_{\Gamma_i} N_i \tilde{\mathbf{t}}_b^k d\Gamma \quad (4-57)$$

计算物体 b 的节点内力和节点外力之和 $\mathbf{f}_{bi}$ (不包括接触力)。

(4) 不考虑接触，对于各个物体单独进行动量方程积分，根据式(4-33)得到 t^{k+1} 时刻节点的试速度 $\bar{\mathbf{v}}_{bi}^{k+1}$ 。

(5) 进行接触判断。

根据 4.2.4 节内容对表面法向量进行修正，得到修正后的单位表面法向量 $\mathbf{n}_{bi}^k$ ，对于弹体侵彻靶体问题，可以采用弹体的表面法向量进行计算。根据式(4-35)进行接触判断，如果未发生接触，则节点试速度为真实解。如果接触发生，进行下一步计算。

(6) 接触力计算。

如果接触发生，首先计算法向接触力，判断接触类型。若为粘着接触，则由式(4-47)给出接触力。若为滑移接触，则由式(4-48)给出接触力。

(7) 接触发生时，节点速度调整。

对接触体的节点施加接触力后，根据式(4-37)得到 t^{k+1} 时刻的节点真实速度 $\mathbf{v}_{bi}^{k+1}$ 。

(8) 对于每个物体，更新质点的位置和速度。

更新后的质点位置：

$$\mathbf{x}_{bp}^{k+1} = \mathbf{x}_{bp}^k + \Delta t \sum_{i=1}^8 \mathbf{v}_{bi}^{k+1} S_{ip}^k \quad (4-58)$$

更新后的质点速度：

$$\mathbf{v}_{bp}^{k+1} = \mathbf{v}_{bp}^k + \Delta t \sum_{i=1}^8 \frac{\mathbf{f}_{bi} + \mathbf{f}_{bi}^{\text{ct}}}{m_{bi}^k} S_{ip}^k \quad (4-59)$$

经过以上八个步骤，便完成了一个时间步的计算。

显式有限元接触算法的实现过程可以参考文献^[15]，分析以上流程可知，物质点算法的接触实现和有限元的接触实现过程是相同的。两种算法都是基于以下思想：首先假设物体不接触，对物体的节点单独进行时间积分得到节点试速度，根据试速度判断物体处于接触或者分离状态，然后对物体施加接触力来消除界面穿透。

物质点接触算法要比有限元接触算法容易实现，因为物质点中的接触关系通过背景网格定义，物体间的接触力均可以施加到背景网格节点上，其接触为节点-节点的接触关系。在有限元接触算法中，物体的接触区域是不断变化的，在接触区域两个物体的节点位置一般不重合，需要采用点-面接触关系，这增加了算法的难度和计算成本。

4.4 接触物质点算法验证

4.4.1 两个弹性球的撞击

为了验证本文给出的接触物质点算法，对两个弹性球的撞击问题进行数值模拟。将接触物质点算法和 LS-DYNA 显式有限元的计算结果进行相互比较。

考虑两个完全相同的弹性球相互撞击，弹性球的半径为 $R=1.6\text{m}$ ，其中球体材料的体积模量为 7MPa ，剪切模量为 1.5MPa ，密度为 1g/cm^3 ，弹性球材料按照大变形弹性本构模型处理。弹性球的冲击速度为 15m/s ，冲击速度沿着两个球体的质心连线，意味着两个球的相对速度为 30m/s ，并且初始质心连线与 x 轴线的夹角为 30° 。两个球的初始距离为 0.8m ，弹性球之间的摩擦系数取零值，力学模型如图 4.2 所示。

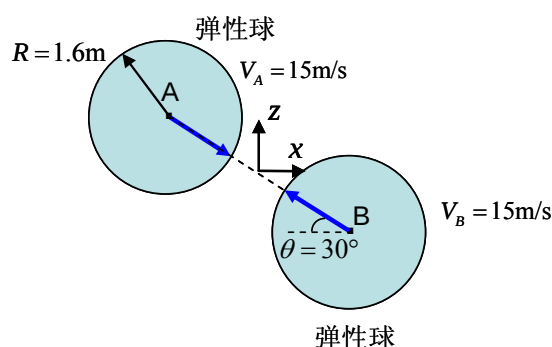


图 4.2 两个弹性球的对撞

接触物质点算法中采用了均匀分布的背景网格，初始的质点间距为 0.1 m，网格间距为 0.2 m，这意味着每个格子中有 8 个质点。离散后每个弹性球包括了 49560 个质点，此处采用了接触物质点算法模拟两个弹性球的对撞，时间步长因子取值为 0.25，不同时刻得到的弹性球变形及其位置见图 4.3(a)。

采用 LS-DYNA 显式有限元软件对该问题进行模拟，模拟中采用了面-面接触算法，每个弹性球的单元数为 49560，节点数为 52448，计算采用的时间步长因子为 0.25，不同时刻有限元计算得到的弹性球变形和位置见图 4.3(b)。

对比图 4.3 可知，接触物质点算法得到的变形结果和有限元得到的变形结果吻合。在冲击后 0.09s 时，接触物质点算法和有限元计算均表明弹性球变形为椭圆形。接触物质点算法表明两个弹性体在 0.167s 开始分离，有限元计算表明两个弹性球在 0.163s 开始分离，因此两种数值模拟给出的分离时间是吻合的。

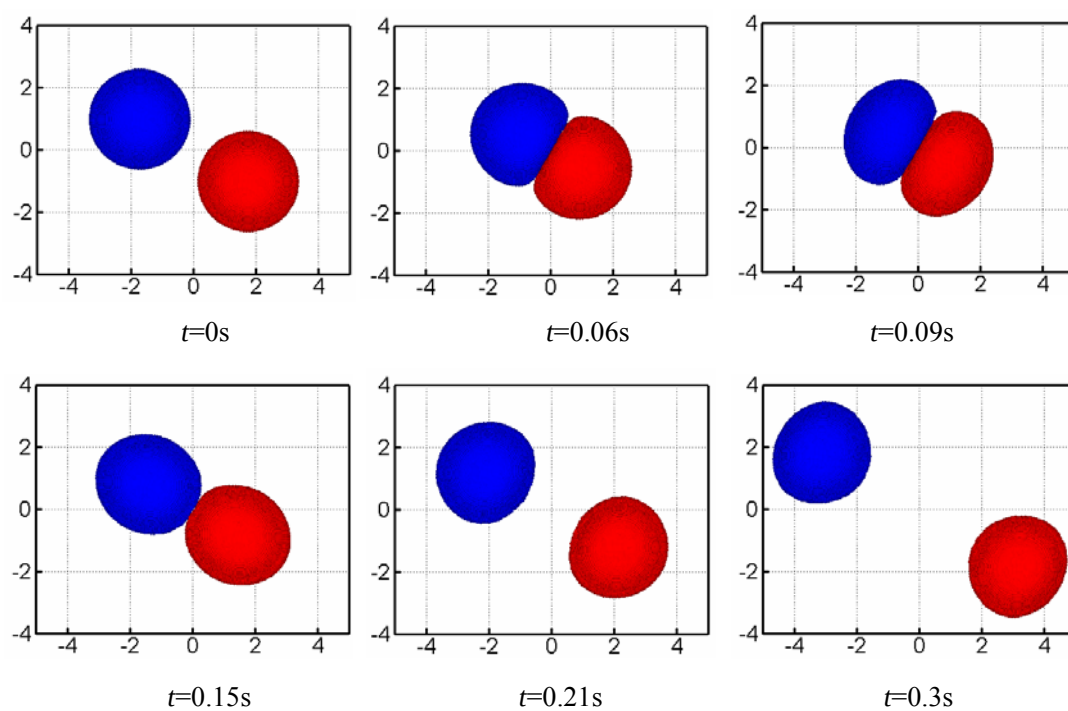
为了更精确地比较两种数值模拟得到的计算结果，对两个弹性球的球心距离进行比较，即对图 4.2 中的 A 点和 B 点的距离进行比较。由于两个球的冲击速度矢量在 xz 平面，并且沿着 AB 的连线，因此可以判断 A 和 B 的运动轨迹在 xz 平面。A 点和 B 点的距离随时间变化如图 4.4 所示，表明接触物质点算法和有限元算法得到的计算结果能够吻合。

对接触算法最为直接的验证是比较接触力。在接触物质点算法中将总的界面对接触力输出，并同有限元计算结果进行对比，结果比较见图 4.5。图 4.5 比较了球 A 的接触力在 x 和 z 轴方向的分量。由图 4.5 可知，接触物质点算法和有限元法得到的接触力大小和作用时间吻合。

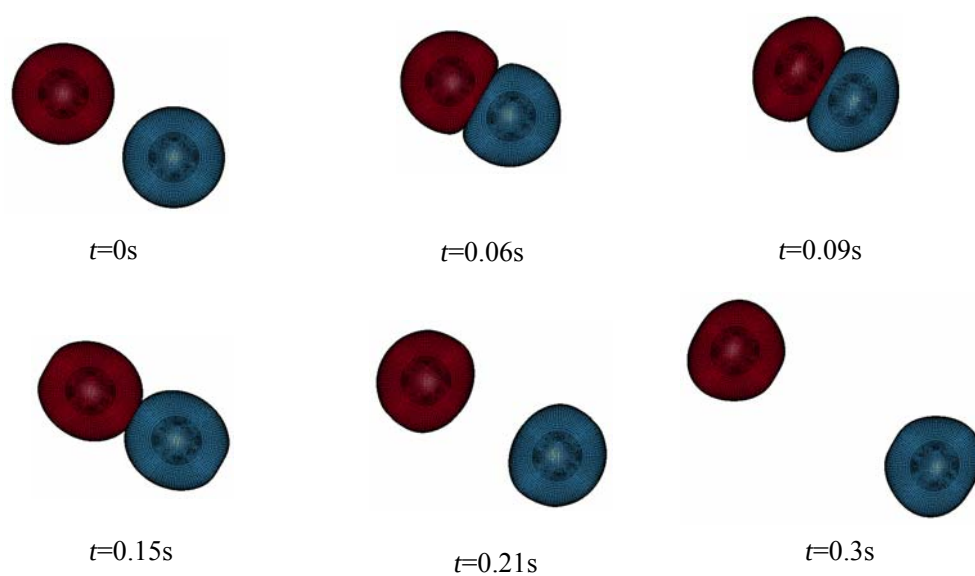
两个弹性球撞击过程中的能量变化曲线如图 4.6 所示，其中图 4.6(a)是接触物质点算法的计算结果，图 4.6(b)是有限元的计算结果。撞击过程中动能转化为内能，撞击结束后动能恢复，但是并不能完全恢复到撞击前的水平，这是由于撞击结束后，弹性球内部有应力波来回传播，弹性球仍然有变形能。

4.4.2 弹塑性杆的对称撞击

由于 Taylor 杆实验需要刚性壁面，在实际工程中这个刚性壁面往往难以得到，因此，工程中常常将两个相同的 Taylor 杆进行对称撞击，这就是对称 Taylor 杆撞击实验。基于接触物质点算法，本节模拟 Chapman 等人给出的对称 Taylor 撞击实验^[180]。柱体初始长度 L_0 为 38.1mm，直径 D_0 为 12.7mm，材料为 Al-6082-T6 铝，初始速度 V_0 为 225.5m/s。



(a) 接触物质点算法模拟



(b) 有限元法模拟

图 4.3 两个弹性球撞击的模拟结果比较

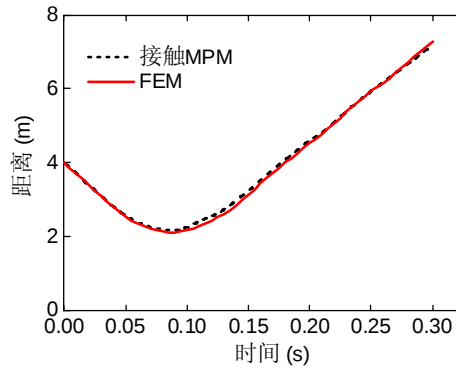


图 4.4 A 点和 B 点距离的计算结果比较

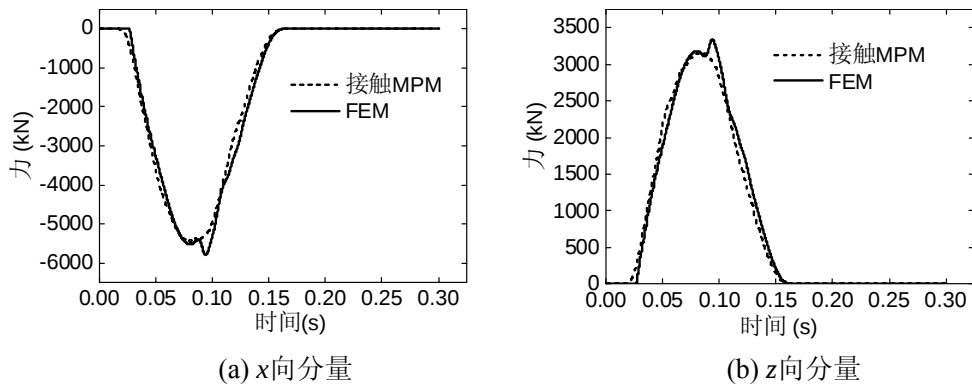


图 4.5 弹性球的接触力计算结果比较

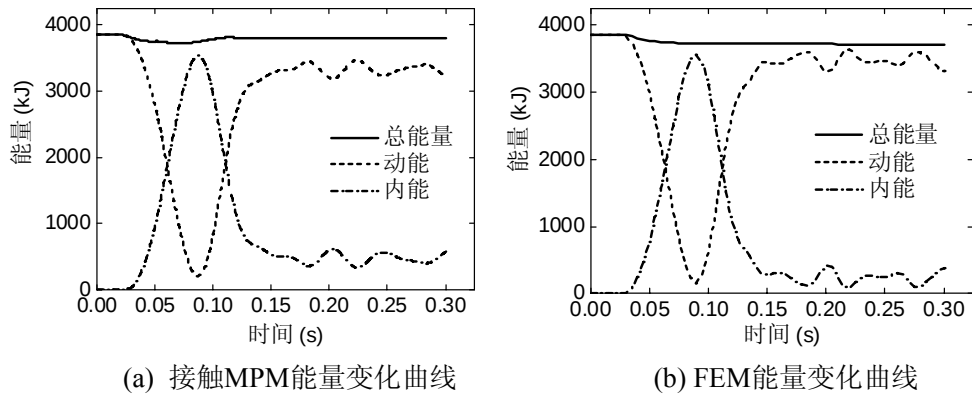


图 4.6 两个弹性球撞击过程的能量曲线

计算中采用的材料模型为简化的 Johnson-Cook 模型，即屈服应力：

$$\sigma_y = (A + B\varepsilon^{pn})(1 + C \ln \dot{\varepsilon}^*) \quad (4-60)$$

材料参数见表 4.1，此处不考虑状态方程。为了说明问题，此处采用了三种模拟手段对该问题进行计算，即分别采用了标准物质点算法、接触物质点算法和显式有限元算法进行模拟。考虑接触计算时，摩擦系数取为零。

表 4.1 Al-6082-T6 材料常数

ρ kg/m ³	E MPa	ν	A MPa	B MPa	n	C
2.7E3	69E3	0.3	311	105	1.0	0.0

在物质点法中，柱体采用了 21840 个质点离散，初始质点间距为 0.635mm，背景网格尺寸为 1.27mm，每个背景网格中包含了 8 个物质点。标准物质点算法表明，柱体动能在 65 μ s 时为零值，为了对两个柱体撞击后的效应加以考虑，此处一直计算到 140 μ s，标准物质点算法的计算结果见图 4.7。

接触物质点算法表明，柱体在 65 μ s 时接触力为零值，意味着 Taylor 杆之间开始分离，同样为了观察 Taylor 杆撞击后的效应，此处一直计算到 140 μ s，计算结果见图 4.8。

为了和两种物质点模型的计算结果进行对比，此处采用了 LS-DYNA 有限元软件对此问题进行计算，每个柱体的单元数为 21840 个，节点数为 24217 个。有限元计算中采用了面-面接触算法。有限元计算表明柱体在 65 μ s 时开始分离，此处一直计算到 140 μ s，计算结果见图 4.9。

图 4.8 和图 4.9 对比表明接触物质点算法和有限元方法所得计算结果一致。图 4.7 表明标准物质点算法在撞击结束后未见杆体分离，而接触物质点算法和有限元方法均表明撞击结束后两个柱体产生分离。因此，对于弹塑性杆的对称撞击过程，标准物质点算法无法模拟出两个杆体的分离过程，而接触物质点算法能给出更为合理的计算结果。

进一步将三种模拟的计算结果和实验结果进行比较，实验结果见文献^[180]，此处对撞击后杆的头部直径 D 和杆的长度 L 进行比较，为了比较计算结果和实验结果的一致程度，定义平均误差为：

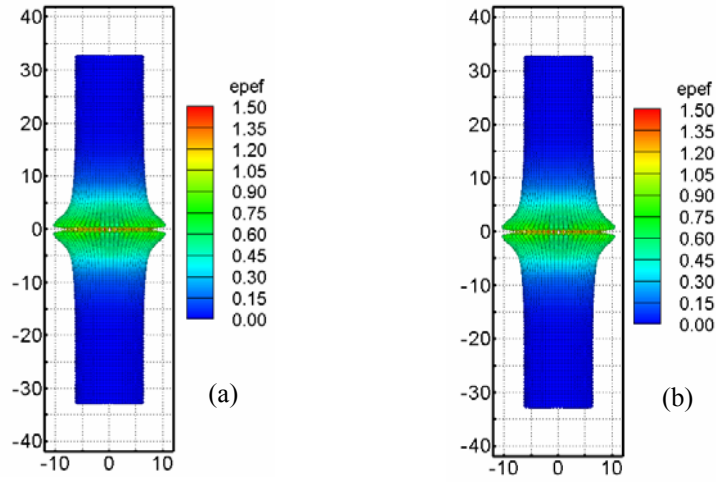


图 4.7 对称 Taylor 杆撞击的标准物质点法模拟, (a) $t=65\mu s$, (b) $t=140\mu s$

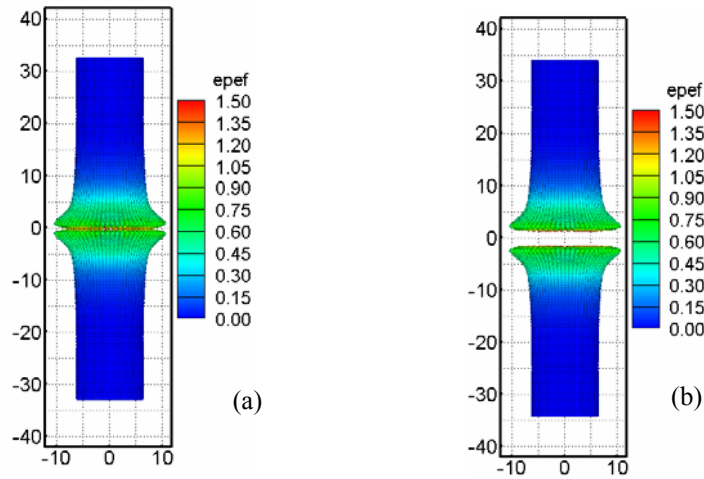


图 4.8 对称 Taylor 杆撞击的接触物质点算法模拟, (a) $t=65\mu s$, (b) $t=140\mu s$

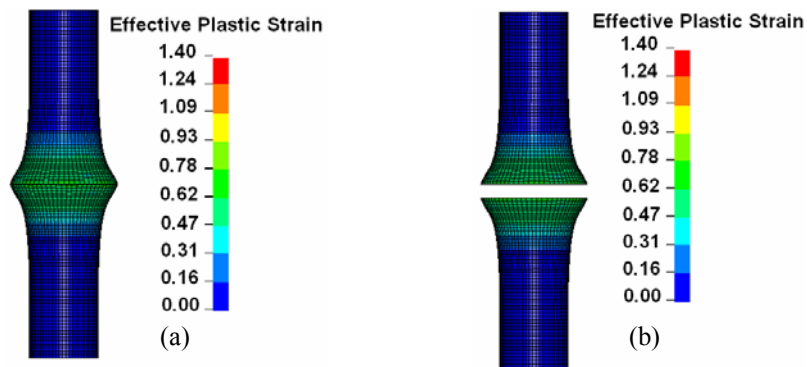


图 4.9 对称 Taylor 杆撞击的有限元法模拟, (a) $t=65\mu s$, (b) $t=140\mu s$

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(\frac{|\Delta L|}{L_e} + \frac{|\Delta D|}{D_e} \right) \quad (4-61)$$

式中脚标 e 表示实验值。

各个结果见表 4.2，由表 4.2 的计算结果可知，接触物质点算法的计算结果和实验结果很接近，说明了本文给出的接触物质点算法是合理正确的。

表 4.2 计算结果与实验结果比较

	L (mm)	D (mm)	Δ
实验值	31.2	20.1	-
标准 MPM	32.4	20.4	2.7%
接触 MPM	31.8	20.4	1.7%
FEM	30.1	19.5	3.3%

4.4.3 斜面上球体的滚动模拟

为了进一步验证接触物质点算法和摩擦模型，采用该算法来模拟斜面上弹性球的滚动问题。该问题构型如图 4.10(a)，一圆球在重力作用下在斜面上滚动。斜面的斜角为 θ ，斜面与球体之间的摩擦系数为 μ ，重力加速度为 $\mathbf{g}$ 。根据刚体动力学，当满足条件 $\tan \theta > 3.5\mu$ 时，球体滑移滚动；否则，球体将粘着滚动。对于初始静止的球体，球体质心的 x 坐标位置为：

$$x_{\text{cm}}(t) = \begin{cases} x_0 + \frac{1}{2} |\mathbf{g}| t^2 (\sin \theta - \mu \cos \theta), & \tan \theta > 3.5\mu \text{ (滑移接触)} \\ x_0 + \frac{5}{14} |\mathbf{g}| t^2 \sin \theta, & \tan \theta \leq 3.5\mu \text{ (粘着接触)} \end{cases} \quad (4-62)$$

此处， x_0 为初始位置， $|\mathbf{g}|$ 是重力加速度的大小。

在本计算中，球的半径为 $R = 1.6 \text{ m}$ 。此处采用长方体来模拟斜面，该长方体长度为 20 m ，高度为 4.0 m ，厚度为 0.8 m 。计算中重力加速度 $|\mathbf{g}|$ 为 10 m/s^2 。球体和斜面的材料均考虑为弹性材料模型，其中球体材料的体积模量为 7 MPa ，剪切模量为 1.5 MPa ，密度为 1 g/cm^3 。斜面材料比球体材料更为刚硬，其中斜面材料的体积模量为 70 MPa ，剪切模量为 15 MPa ，密度为 10 g/cm^3 。两种材料具有相同的波速 95 m/s 。计算中将斜面底部固定，这样更能模拟刚性的斜面。

计算中采用了均匀分布的背景网格，初始的质点间距为 0.1 m ，网格间距为

0.2 m，这意味着每个格子中有 8 个质点。离散后球体包括了 49560 个质点，而斜面包括了 64000 个质点，离散后的物质点模型见图 4.10(b)所示。

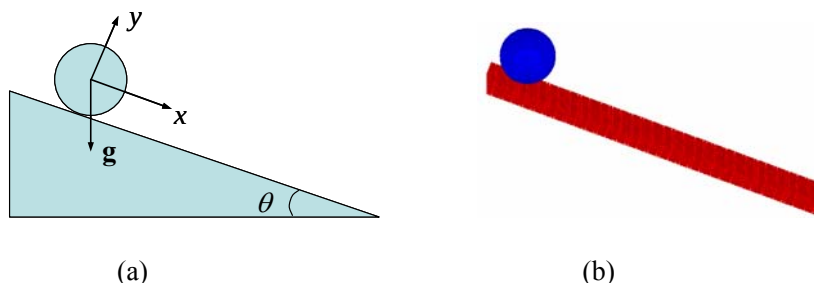


图 4.10 斜面上球体的滚动问题，(a) 几何构型，(b) 接触 MPM 模型

此处考虑两种计算工况：

工况一：斜面倾角为 $\theta = \pi/4$ ，摩擦系数为 $\mu = 0.4$ ，该工况下球体为粘着滚动。图 4.11 给出了工况一下不同时刻球体的位置，图中还给出了球体的速度云图，从球体速度分布可见，与刚体接触部位的速度为零，这符合粘着滚动的特征。

工况二：斜面倾角为 $\theta = \pi/3$ ，摩擦系数为 $\mu = 0.2$ ，该工况下球体为滑移滚动。图 4.12 给出了工况二下不同时刻球体的位置，图中还给出了球体的速度云图，从球体速度分布可见，与刚体接触部位的速度不为零，这符合滑移滚动的特征。

针对两种工况，可由式(4-62)给出球体质心位置的解析解。为了定量验证接触物质点算法，将弹性球质心位置的数值解和解析解进行比较，比较见图 4.13。图 4.13 比较表明数值解非常接近解析解，说明了接触物质点算法中的摩擦模型是正确的。

由图 4.13 可知，式(4-62)给出的球体质心位置解析解均略大于数值解，其原因在于在解析解中，球体的势能完全转化为了球体的动能。而在数值解中，球体的势能有一部分转化为了球体的弹性能，而且斜面也没有按照真正的刚体处理。进一步的研究应该是按照刚柔接触对该问题进行数值模拟。

4.5 接触物质点算法应用

通过以上三个算例的对比，对接触物质点算法进行了验证。以下将接触物质点算法应用于求解工程中的穿甲和侵彻问题，其中第一个问题是钢珠对薄圆

板的侵彻，第二个问题是尖拱弹对铝靶体的贯穿。

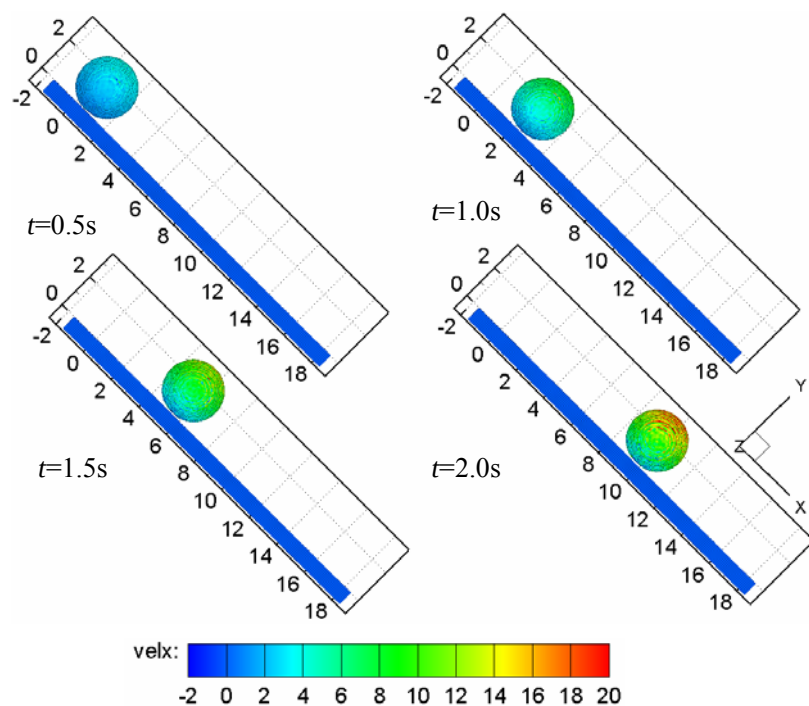


图 4.11 工况一下不同时刻球体的位置($velx$ 代表 x 向速度, m/s)

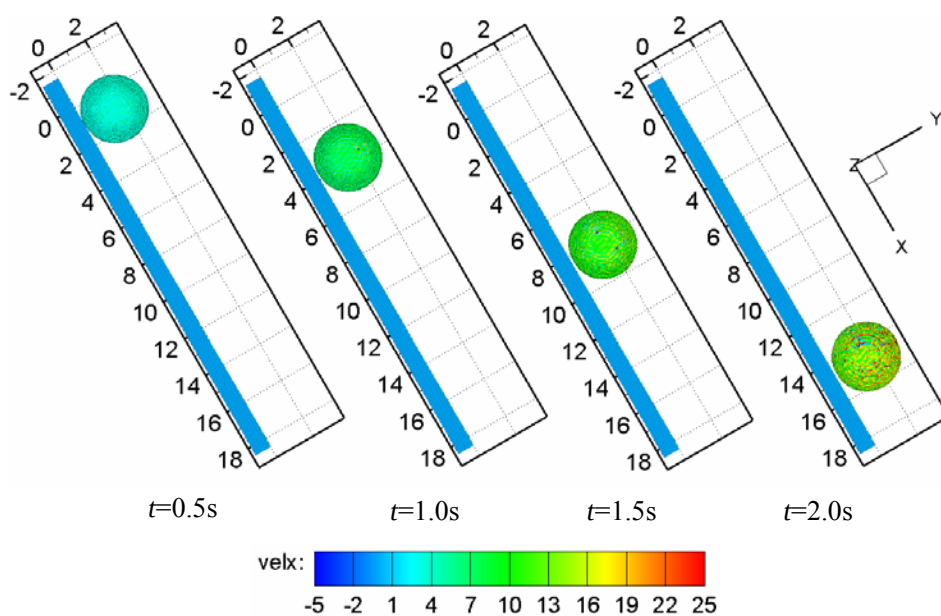


图 4.12 工况二下不同时刻球体的位置($velx$ 代表 x 向速度, m/s)

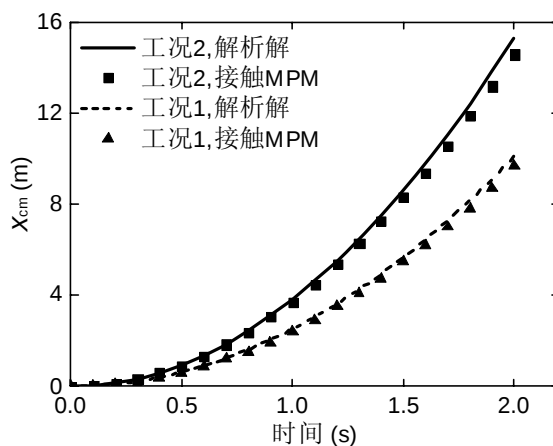


图 4.13 两种工况下球质心位置解析解与数值解比较

4.5.1 钢珠侵彻薄板

直径 10 mm 的钢珠侵彻一薄圆板，圆板厚度为 1mm，直径为 178 mm。钢珠以 200 m/s 的速度垂直冲击靶板，弹体和靶体的材料均为钢。

在本模拟中，材料的偏应力为简化的 Johnson-Cook 模型，表达式见式(4-60)。材料的压力采用了 Mie-Grüneisen 状态方程进行更新。此处所用钢材的材料常数取自文献^[181]，参数见表 4.3。

采用物质点算法模拟侵彻时考虑了质点失效模型，当质点的等效塑性应变达到失效应变 $\varepsilon_{\text{fail}}$ 时，质点的偏应力分量取零，这样考虑相当于失效质点不考虑其固体强度^[169,170]，本算例中失效应变取值为 0.57。考虑到结构的对称性，此处仅取四分之一的模型进行计算。弹体由 33664 个质点离散，靶体由 398184 个质点离散。初始的质点间距为 0.25 mm，背景网格间距为 0.5 mm，即每个格子包含了 8 个质点。

首先采用标准物质点算法对该问题进行求解，时间步长因子取值为 $\alpha = 0.4$ ，图 4.14 给出了标准物质点方法得到的弹靶构型和塑性应变大小，图 4.15 给出了接触物质点算法得到的弹靶构型和塑性应变大小。

表 4.3 钢珠侵彻薄板模拟中的材料常数

ρ kg/m ³	E GPa	ν	A MPa	B MPa	n	c_0 m/s	S_1	Γ_0	$\varepsilon_{\text{fail}}$
7850	200.0	0.30	600.0	275.0	0.36	3600	1.90	1.70	0.57

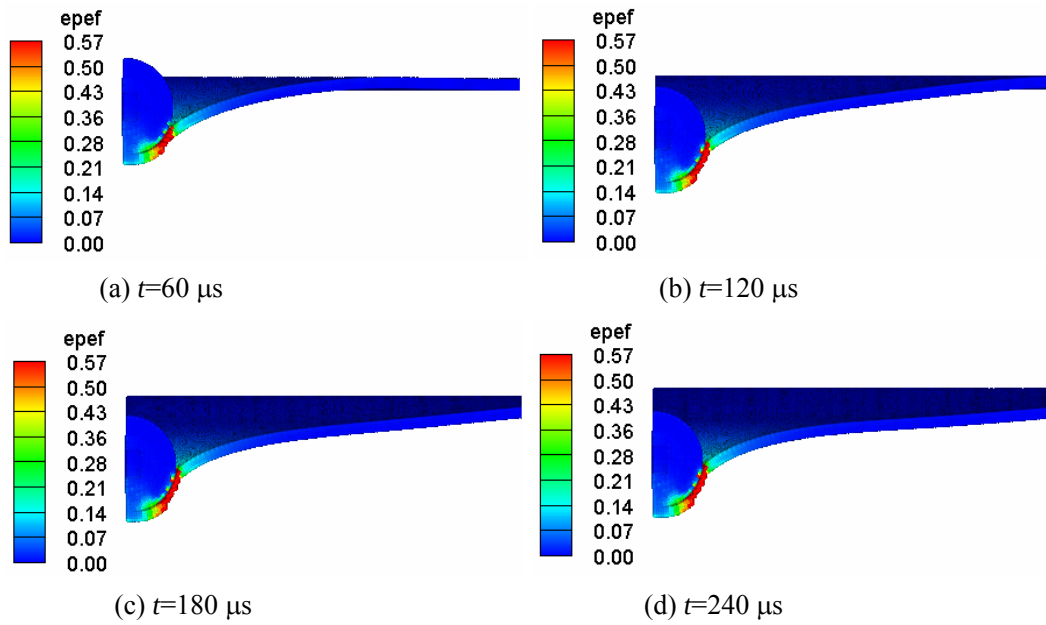


图 4.14 钢珠侵彻薄靶的标准物质点算法模拟(epef 为等效塑性应变)

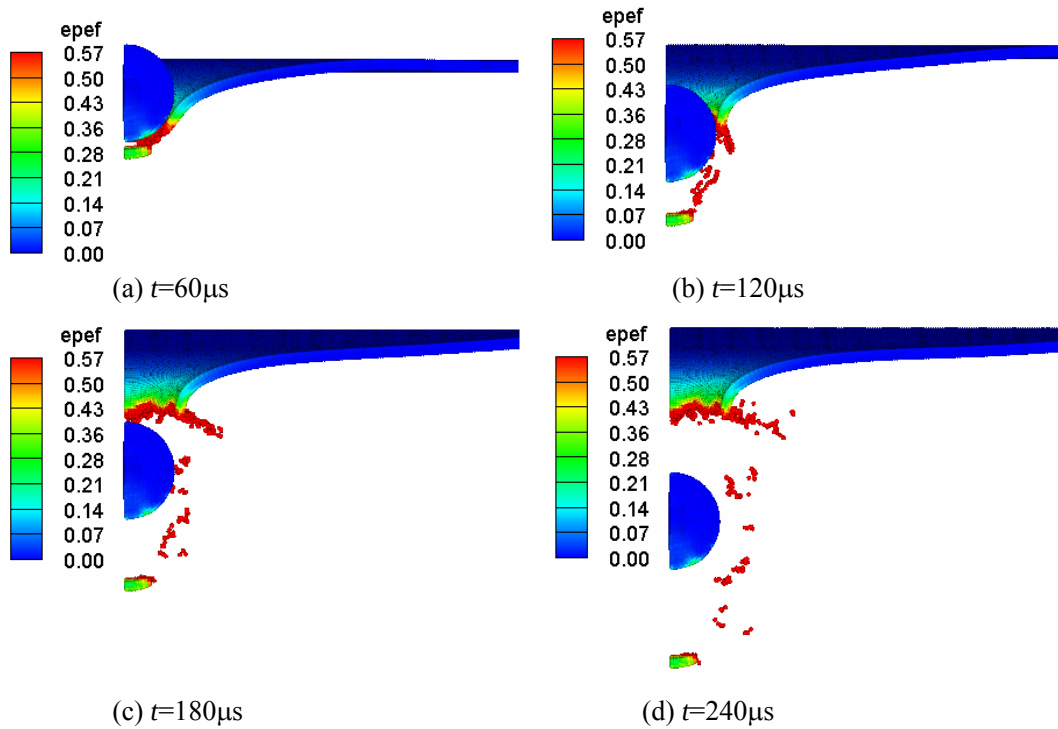


图 4.15 钢珠侵彻薄靶的接触物质点算法模拟(epef 为等效塑性应变)

由图 4.14 可见，标准物质点算法模拟的弹体不能穿透靶体，这与文献给出的实验结果不吻合，在实验中靶体被弹体穿透^[181]，可见标准物质点算法中的粘着接触条件导致了较大的侵彻阻力。由图 4.15 可见，接触物质点算法模拟表明靶体可以被弹体穿透，其弹体的剩余速度为 $V_{re} = 89.4 \text{ m/s}$ 。在接触物质点算法模拟中，失效质点仅出现在靶体上，弹体上未见失效质点，并且模拟过程中弹体是完整的，靶体上的碎片被完整地保留。与标准物质点算法相比较，接触物质点算法考虑了界面滑移和接触分离，因此，采用接触物质点算法进行侵彻计算更为合理。

进一步比较侵彻后的靶体变形，图 4.16 比较了靶体的最终变形，其中 4.16 (a) 为实验结果，图 4.16 (b) 为接触物质点算法的模拟结果，为了精确比较靶体变形，将靶体的变形高度与靶体的穿孔直径比值 h/D 进行定量比较。图 4.16 表明 h/D 的实验值为 0.84，接触算法物质点算法得到的 h/D 值为 0.85，数值结果和实验结果吻合，可见接触物质点算法能够很好地模拟该侵彻问题。

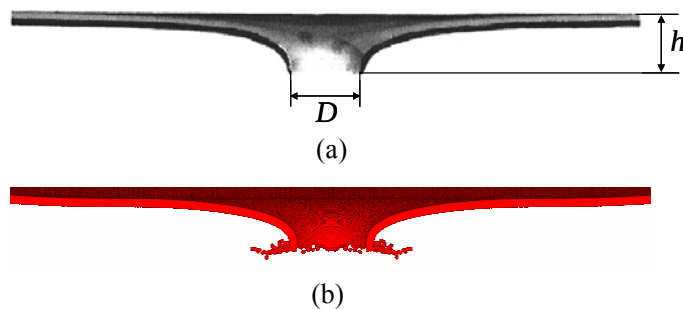


图 4.16 靶体最终变形结果，(a)实验结果，(b)接触物质点算法模拟

4.5.2 厚靶的贯穿模拟

最后一个算例是关于一个尖拱弹侵彻厚靶体的计算，相关实验数据见文献^[182]。弹体长度为 88.9 mm，直径为 12.9 mm，弹头端部曲率半径为 38.7mm，弹体材料为高强度钢。靶体厚度为 26.3 mm，靶体的倾斜角为 30° ，靶体材料为 A6061-T651 铝合金。

计算中，弹体材料按照弹性模型模拟，弹性模量为 $E = 200 \text{ GPa}$ ，泊松比为 $\nu = 0.3$ ，材料密度为 $\rho = 7.85 \text{ g/cm}^3$ 。靶体材料的偏应力按照 Johnson-Cook 本构模型计算。靶体材料的压力基于 Mie-Grüneisen 状态方程计算，所用材料参数见表 4.4。A6061-T651 的材料失效应变为 1.6，当质点等效塑性应变达到 1.6 时，质点

的偏应力取零值。

表 4.4 A6061-T651 的材料参数

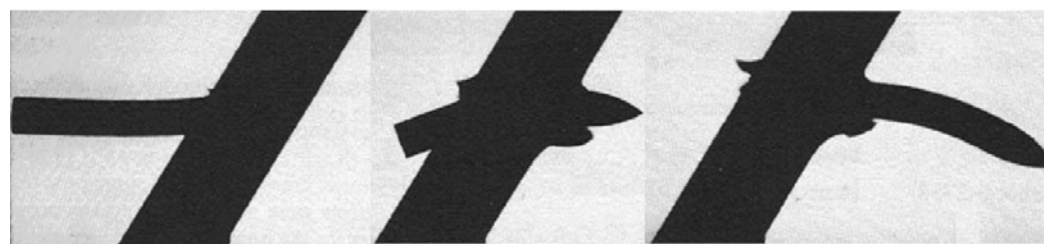
ρ kg/m ³	E GPa	ν	A MPa	B MPa	n	C	m	$\varepsilon_{\text{fail}}$
2700	69	0.3	262	52.1	0.41	0	0.859	1.6
c_0 m/s	S_1	Γ_0	T_{melt} K	T_{room} K				
5350	1.34	2.0	875	293				

考虑到结构的对称性,此处采用了 1/2 模型进行计算,弹体质点数为 13314,靶体质点数为 187550。弹体上质点的初始间距为 0.6mm 到 1.0mm,靶体上质点初始间距为 1.0 mm,背景网格间距为 2.0 mm,靶体上每个背景网格内有 8 个质点。采用接触物质点算法模拟时,弹靶之间的摩擦系数取为零。

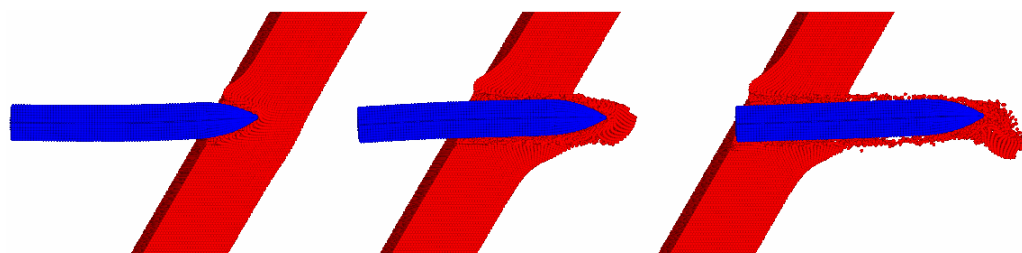
当弹体初始冲击速度为 400m/s 时,图 4.17(a)给出了不同时刻弹靶相互作用的实验结果,剩余弹速实验值为 217 m/s。标准物质点方法模拟结果见图 4.17 (b),标准物质点方法得到的剩余弹速为 127.9 m/s,远低于实验结果。接触物质点算法模拟结果见图 4.17 (c),接触物质点算法得到的弹体剩余速度为 207.8 m/s,该计算结果与实验值相差 4.2%。由图 4.17 的实验结果可见,弹体在侵彻过程中发生了弯曲和偏转,标准物质点算法模拟无法有效反映弹体的弯曲和偏转,而接触物质点算法模拟有效反映了弹体的弯曲和偏转。

为了说明文中给出的接触物质点算法具有广泛的适用性,对不同初始速度下的尖拱弹侵彻问题进行了模拟,将弹体剩余速度的计算值和实验值进行比较,数据见表 4.5。若以初始速度 V_0 为横轴,剩余速度 V_{re} 为纵轴,可以得到弹体剩余速度随初始速度变化的曲线,该曲线的计算结果和实验结果见图 4.18。为了便于说明问题,同样给出标准物质点算法和接触物质点算法两种计算结果。

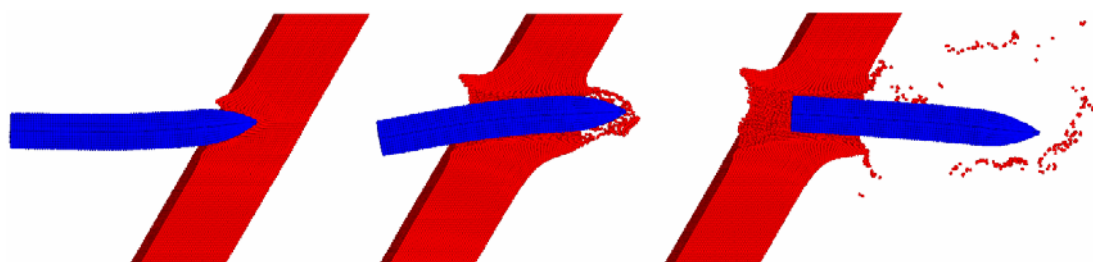
表 4.5 和图 4.18 的对比表明标准物质点算法得到的剩余弹速远低于实验结果,其原因在于标准物质点方法中的粘着接触条件导致了较大的侵彻阻力,导致靶体吸收了更多的能量,使得弹靶之间难以分离。对比表明接触物质点算法得到的剩余弹速和实验结果比较吻合,可见,接触物质点算法考虑了弹靶界面之间的接触关系和分离条件,更真实地模拟了弹靶之间的相互作用。以上对比还表明本文给出的接触物质点算法具有普适性,对于初始弹速范围 340m/s~730 m/s 内的斜侵彻分析均能得到较好的计算结果。

 $t=43.3\mu\text{s}$ $t=204.3\mu\text{s}$ $t=421.1\mu\text{s}$

(a) 实验结果, 剩余弹速217 m/s

 $t=43.3\mu\text{s}$ $t=204.3\mu\text{s}$ $t=421.1\mu\text{s}$

(b) 标准物质点法模拟, 剩余弹速127.9 m/s

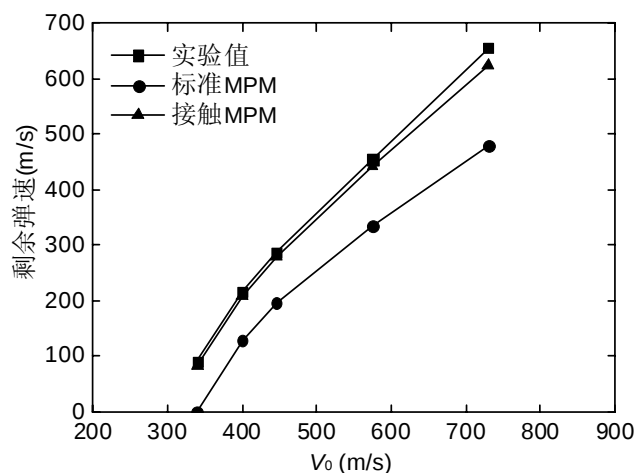
 $t=43.3\mu\text{s}$ $t=204.3\mu\text{s}$ $t=421.1\mu\text{s}$

(c) 接触物质点算法模拟, 剩余弹速207.8 m/s

图 4.17 弹靶相互作用的实验结果和模拟结果(初始弹速 400 m/s)

4.6 本章小结

本章首先给出了接触物质点算法的完整数学描述, 从界面的非穿透条件出发推导了接触力的计算公式。已有文献给出的界面法向量算法不能保证接触界面法向量的共线条件^[132,133], 这将导致侵入计算过程的动量不守恒和界面穿透。针对此问题, 本章提出了一种新的接触界面法向量计算方法, 保证了计算过程中的动量守恒, 避免了接触界面穿透。

图 4.18 不同初始弹速 V_0 下的剩余弹速 V_{re} 曲线表 4.5 不同初始弹速 V_0 下的剩余弹速 V_{re}

初始弹速 V_0 (m/s)	实验结果 V_{re} (m/s)	标准 MPM V_{re} (m/s)	接触 MPM V_{re} (m/s)	接触 MPM 相对误差 Δ
340	91	0	83.8	7.9%
400	217	127.9	207.8	4.2%
446	288	197.5	280.0	2.8%
575	455	334.1	442.8	2.7%
730	655	478.4	623.9	4.7%

本章给出了弹性球撞击问题、斜面上弹性球摩擦滚动问题 and 对称 Taylor 杆撞击问题三个算例，分别采用有限元计算、解析解和实验结果来验证接触物质点算法。进一步将本文的接触物质点算法应用于求解工程中的穿甲和侵彻问题。在钢珠对薄圆板的侵彻分析中，标准物质点算法模拟的弹体不能穿透靶体，这与实验中靶体被弹体穿透不吻合。而接触物质点算法能给出和实验吻合的计算结果。

在尖拱弹对铝靶体的贯穿分析中，标准物质点算法得到的剩余弹速远低于实验结果，而接触物质点算法得到的剩余弹速和实验结果比较吻合。计算表明本文给出的接触物质点算法具有普适性，对于初始弹速范围 340m/s~730m/s 内的尖拱弹斜侵彻分析均能得到较好的计算结果。

第 5 章 刚柔接触物质点算法

5.1 引言

在许多冲击动力学问题的模拟中，常常需要考虑刚柔接触，比如 Taylor 杆撞击刚性墙、液滴冲击壁面、岩土与结构件相互作用等。在这些问题中，考虑刚柔接触往往可以使得物理模型更为简洁，并且可以节省计算时间。

本章提出了刚柔接触物质点算法，该算法是在第 4 章一般接触物质点算法的基础上发展来的。此处的刚体不考虑其惯性效应，在计算中刚体以 $\mathbf{v}_r$ 匀速运动或者保持静止。在刚柔接触物质点算法中，需要将刚体进行质点离散，此外还需要考虑刚体质点的质量，这样处理的目的是为了便于计算刚体的表面法向量。

5.2 刚柔接触物质点算法实现

刚柔接触物质点算法的原理为：

(1) 首先不考虑接触，对变形体单独进行时间积分，得到变形体的节点试速度。

(2) 对变形体的节点试速度进行接触判断，如果不满足接触发生条件，则节点的试速度代表真实解。

(3) 如果变形体的节点试速度满足接触发生条件，则计算接触力，根据接触力计算新的节点速度，使得新节点速度满足非穿透条件。

为了便于说明问题，此处将变形体记作 d ，将刚体记作 r 。采用上标 k 和 $k+1$ 分别表示 t^k 和 t^{k+1} 时刻的值。刚柔接触物质点算法具体实现如下：

(1) 重新定义背景网格，计算节点质量、节点速度和节点处的单位法向量。

对于变形体，其 t^k 时刻节点质量和节点动量分别是

$$m_{di}^k = \sum_p m_{dp} S_{ip}^k \quad (5-1)$$

$$m_{di}^k \mathbf{v}_{di}^k = \sum_p m_{dp} \mathbf{v}_{dp}^k S_{ip}^k \quad (5-2)$$

对于刚体，计算其 t^k 时刻的表面法向量。

$$\hat{\mathbf{n}}_{ri}^k = \sum_p \mathbf{G}_{ip}^k m_{rp} \quad (5-3)$$

(2) 计算变形体质点的应变和应力

变形体质点的应变增量为

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{dp} = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^8 \left[\left(\mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_{di}^k \right)^T + \mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_{di}^k \right] \quad (5-4)$$

变形体质点的旋率增量为

$$\Delta \boldsymbol{\omega}_{dp} = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^8 \left[\left(\mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_{di}^k \right)^T - \mathbf{G}_{ip}^k \mathbf{v}_{di}^k \right] \quad (5-5)$$

基于应变增量和旋率增量，根据本构关系计算 Cauchy 应力：

$$\boldsymbol{\sigma}_{dp}^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}_{dp}^k + \Delta \boldsymbol{\sigma}_{dp} \left(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{dp}, \Delta \boldsymbol{\omega}_{dp} \right) \quad (5-6)$$

(3) 计算变形体节点的节点力。

对于变形体，其节点力 $\mathbf{f}_{di}$ 包括了节点内力和节点外力， $\mathbf{f}_{di}$ 为

$$\mathbf{f}_{di} = - \sum_p \frac{m_{dp}}{\rho_{dp}^{k+1}} \boldsymbol{\sigma}_{dp}^{k+1} \cdot \mathbf{G}_{ip}^k + \mathbf{f}_{di}^{\text{ext}} \quad (5-7)$$

式中， $\mathbf{f}_{di}^{\text{ext}}$ 为节点外力，由下式计算

$$\mathbf{f}_{di}^{\text{ext}} = \sum_p m_{dp} S_{ip}^k \mathbf{b}_{dp}^k + \int_{\Gamma_t} N_i \tilde{\mathbf{t}}_d^k d\Gamma \quad (5-8)$$

此处， $\mathbf{b}$ 为体力， $\tilde{\mathbf{t}}$ 为施加在 Γ_t 边界上的面力。

(4) 不考虑接触，积分变形体的节点动量方程，得到 t^{k+1} 时刻节点的试速度为

$$\bar{\mathbf{v}}_{di}^{k+1} = \mathbf{v}_{di}^k + \frac{\mathbf{f}_{di}}{m_{di}^k} \Delta t \quad (5-9)$$

(5) 进行接触判断。

首先将刚体表面法向量正则化：

$$\mathbf{n}_{ri}^k = \hat{\mathbf{n}}_{ri}^k / \left| \hat{\mathbf{n}}_{ri}^k \right| \quad (5-10)$$

在接触面上，如果变形体节点试速度满足关系式

$$\left(\mathbf{v}_r - \bar{\mathbf{v}}_{di}^{k+1} \right) \cdot \mathbf{n}_{ri}^k > 0 \quad (5-11)$$

则接触发生。式中 $\mathbf{v}_r$ 为刚体速度，本文仅考虑恒速运动的刚体。

(6) 接触力计算。

当判断出接触面以后，在接触面上，变形体的表面法向量 $\mathbf{n}_{di}^k$ 满足关系：

$$\mathbf{n}_{di}^k = -\mathbf{n}_{ri}^k \quad (5-12)$$

由于最终的节点速度在接触面上要满足非穿透条件：

$$(\mathbf{v}_{di}^{k+1} - \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{n}_{di}^k = 0 \quad (5-13)$$

变形体需要施加的法向接触力大小为：

$$f_{di}^{nor} = \frac{m_{di}^k}{\Delta t} (\mathbf{v}_{di}^{k+1} - \bar{\mathbf{v}}_{di}^{k+1}) \cdot \mathbf{n}_{di}^k \quad (5-14)$$

将式(5-13)代入式(5-14)得到变形体的法向接触力为：

$$f_{di}^{nor} = \frac{m_{di}^k}{\Delta t} (\mathbf{v}_r - \bar{\mathbf{v}}_{di}^{k+1}) \cdot \mathbf{n}_{di}^k \quad (5-15)$$

如果不考虑摩擦，接触力仅为法向接触力。考虑两个物体完全粘着接触时的切向接触力，对于粘着接触而言，在接触面上满足关系式：

$$\mathbf{v}_{di}^{k+1} = \mathbf{v}_r \quad (5-16)$$

因此粘着接触时的接触力为

$$\mathbf{f}_{di}^{ct} = \frac{m_{di}^k}{\Delta t} (\mathbf{v}_r - \bar{\mathbf{v}}_{di}^{k+1}) \quad (5-17)$$

粘着接触时，变形体的切向接触力为

$$\mathbf{f}_{di}^{tan} = \frac{m_{di}^k}{\Delta t} (\mathbf{v}_r - \bar{\mathbf{v}}_{di}^{k+1}) - f_{di}^{nor} \cdot \mathbf{n}_{di}^k \quad (5-18)$$

(7) 接触发生时，变形体的速度调整。

对于变形体和刚体之间的滑移接触，接触界面的摩擦力由库仑摩擦描述，而且摩擦力的值应低于粘着接触时的切向接触力，摩擦力方向为切向。因此需要判断接触的类型来计算接触力，并调整节点速度。

(i) 当满足条件 $\mu |f_{di}^{nor}| > |\mathbf{f}_{di}^{tan}|$ 时，接触为粘着接触关系，此时：

t^{k+1} 时刻节点速度满足公式(5-16)，接触力的大小为式(5-17)所述。

(ii) 当满足条件 $\mu |f_{di}^{nor}| \leq |\mathbf{f}_{di}^{tan}|$ 时，接触为滑移接触关系，此时：

接触力大小为：

$$\mathbf{f}_{di}^{\text{ct}} = f_{di}^{\text{nor}} \cdot \mathbf{n}_{di}^k + \mu \left| f_{di}^{\text{nor}} \right| \frac{\mathbf{f}_{di}^{\text{tan}}}{\left| \mathbf{f}_{di}^{\text{tan}} \right|} \quad (5-19)$$

滑动接触时, t^{k+1} 时刻节点速度为

$$\mathbf{v}_{di}^{k+1} = \bar{\mathbf{v}}_{di}^{k+1} + \frac{\mathbf{f}_{di}^{\text{ct}}}{m_{di}^k} \Delta t \quad (5-20)$$

(8) 更新质点速度和质点位置。

对于变形体, 质点位置为

$$\mathbf{x}_{dp}^{k+1} = \mathbf{x}_{dp}^k + \Delta t \sum_{i=1}^8 \mathbf{v}_{di}^{k+1} S_{ip}^k \quad (5-21)$$

对于变形体, 质点速度为

$$\mathbf{v}_{dp}^{k+1} = \mathbf{v}_{dp}^k + \Delta t \sum_{i=1}^8 \frac{\mathbf{f}_{di} + \mathbf{f}_{di}^{\text{ct}}}{m_{di}^k} S_{ip}^k \quad (5-22)$$

对于刚体, 质点位置为

$$\mathbf{x}_{rp}^{k+1} = \mathbf{x}_{rp}^k + \Delta t \mathbf{v}_r \quad (5-23)$$

在实现刚柔接触时, 对变形体还可以施加边界条件。

5.3 算例及应用

5.3.1 弹性球撞击刚性面

为了验证文中给出的刚柔接触物质点算法, 对弹性球斜撞击刚性壁面的问题进行数值模拟, 将物质点算法得到的计算结果和 LS-DYNA 显式有限元的计算结果进行对比。

弹性球的半径为 $R = 1.6 \text{ m}$, 弹性球的冲击速度为 $15\sqrt{2} \text{ m/s}$, 冲击斜角为 45° 。弹性球材料按照大变形弹性本构模型处理, 体积模量为 7 MPa , 剪切模量为 1.5 MPa , 密度为 1 g/cm^3 。弹性体距离刚性壁面初始距离为 0.4 m , 弹性球和刚性壁之间不考虑摩擦力, 力学模型如图 5.1 所示。

在刚柔接触物质点算法(刚柔接触 MPM)模拟中, 将刚体用一个长方体来代替, 该长方体长度为 10 m , 宽度为 4 m , 厚度为 0.4 m 。计算中采用了均匀分布的背景网格, 初始的质点间距为 0.1 m , 网格间距为 0.2 m , 这意味着每个格子中有 8 个质点。离散后弹性球包括了 49560 个质点, 而刚体包括了 16000 个质

点。计算采用的时间步长因子为 0.5。不同时刻，刚柔接触 MPM 计算得到的弹性球的位置和变形见图 5.2(a)。

采用显式有限元计算时，在 LS-DYNA 有限元程序中设置刚性壁进行计算，弹性球的单元数为 49560，节点数为 52448，计算采用的时间步长因子为 0.5，算法为有限元刚柔接触算法。不同时刻，有限元计算得到的弹性球的位置和变形见图 5.2(b)。

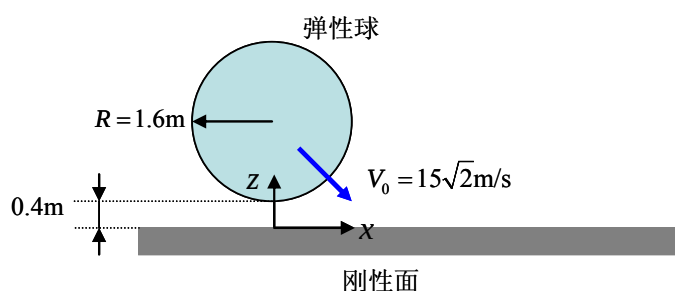


图 5.1 弹性球撞击刚性面示意图

对比图 5.2 可知，两种数值模拟得到的变形结果吻合。在 0.09s 时，物质点计算和有限元计算均表明弹性球变形为椭球形。刚柔接触 MPM 计算表明在 0.165s 时，弹性球和刚性壁的撞击过程结束。而有限元计算表明在 0.164s 时，弹性球和刚性壁的撞击过程结束。

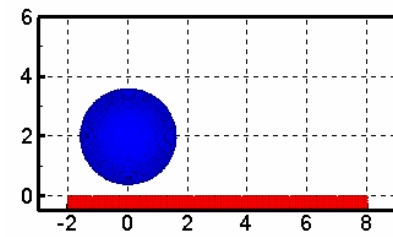
对接触算法最为直接的验证是比较接触力，将刚性壁面对弹性球的作用力进行比较。由于不考虑摩擦，弹性球仅受到垂直于壁面方法的法向接触力。在 LS-DYNA 软件中通过设置关键字可以输出刚性壁的接触力。在刚柔接触物质点算法中将总的接触力输出，结果的比较如图 5.3，从图 5.3 可知，有限元和物质点算法得到的接触力作用时间和大小吻合。

弹性球撞击刚性壁面过程中能量的变化曲线如图 5.4，其中图 5.4(a)是刚柔接触 MPM 的能量曲线，图 5.4(b)是有限元算法得到的能量曲线。撞击过程中动能转化为内能，撞击结束后动能恢复。但是，由于弹性球内有应力波存在，因此动能并不能完全恢复到撞击前的水平。由图 5.4(a)的能量曲线可知，刚柔接触物质点算法具有较好的能量守恒性。

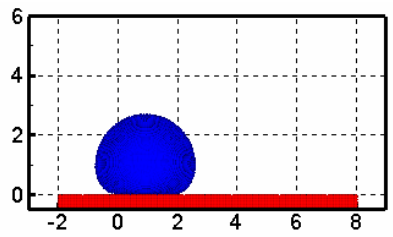
5.3.2 斜面上球体的滚动模拟

为了验证刚柔接触物质点算法的摩擦模型，此处模拟斜面上弹性球的滚动

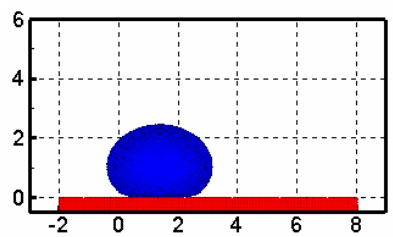
问题。



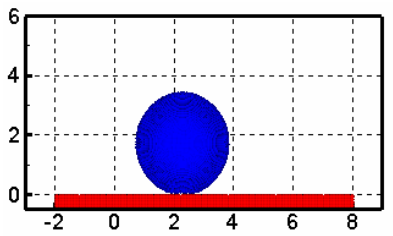
$t=0s$



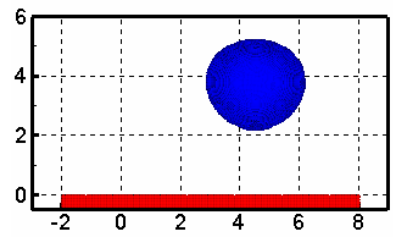
$t=0.06s$



$t=0.09s$



$t=0.15s$



$t=0.30s$

(a) 刚柔接触 MPM



$t=0s$



$t=0.06s$



$t=0.09s$



$t=0.15s$



$t=0.30s$

(b) 有限元

图 5.2 弹性球撞击刚性壁的数值模拟

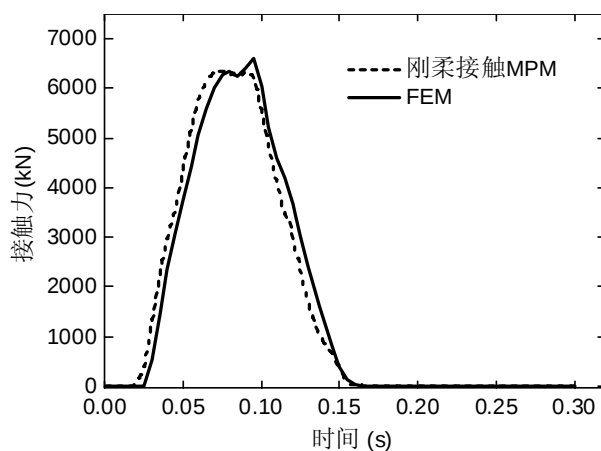


图 5.3 弹性球撞击刚性面的接触力比较

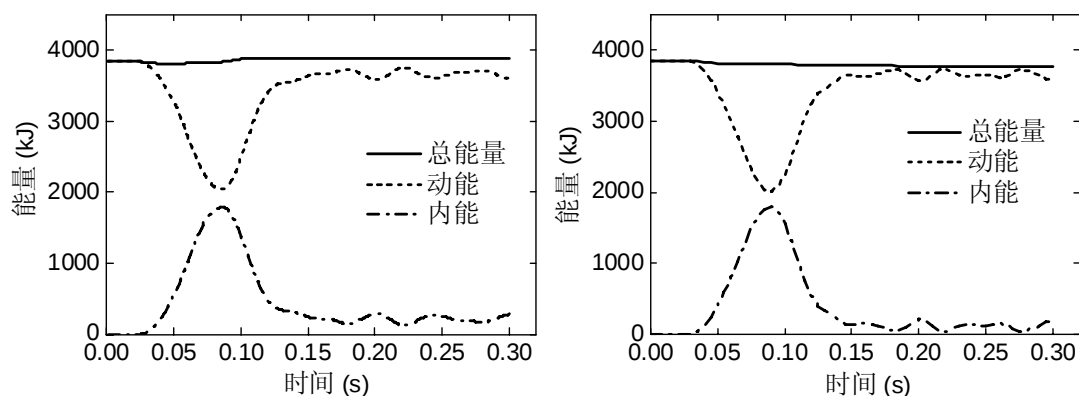


图 5.4 弹性球撞击过程的能量曲线, (a) 刚柔接触 MPM, (b) 有限元法

该问题已经通过一般接触物质点算法进行了求解(见 4.4.3 节), 此处将斜面考虑为刚体, 而前文中(4.4.3 节)是将斜面的密度和弹性模量考虑为弹性球的 10 倍处理。弹性球的球半径为 $R=1.6\text{m}$, 球体材料的体积模量为 7MPa , 剪切模量为 1.5MPa , 密度为 1g/cm^3 , 弹性球材料按照弹性材料本构模型处理。此处采用一个长方体来代表刚体, 该长方体长度为 20m 、高度 4.0m 以及厚度 0.8m 。计算中重力加速度 $|g|$ 为 10m/s^2 。

计算中采用了均匀分布的背景网格, 初始的质点间距为 0.1m , 网格间距为 0.2m , 这意味着每个格子中有 8 个质点。离散后球体包括了 49560 个质点, 而刚体包括了 64000 个质点。此处仍然采用两种计算工况:

工况一: 斜面倾角为 $\theta = \pi/4$, 摩擦系数为 $\mu = 0.4$, 该工况下球体为粘着滚

动。图 5.5 给出了工况一下不同时刻球体的位置，图中还给出了球体的速度云图，从球体速度分布可见，与刚体接触部位的速度为零，这符合粘着滚动的特征。

工况二：斜面倾角为 $\theta = \pi/3$ ，摩擦系数为 $\mu = 0.2$ ，该工况下球体为滑移滚动。图 5.6 给出了工况二下不同时刻球体的位置，图中还给出了球体的速度云图，从球体速度分布可见，与刚体接触部位的速度不为零，这符合滑移滚动的特征。

为了定量验证刚柔接触物质点算法，将弹性球的质心位置的数值解和解析解进行比较，如图 5.7 所示，数值解和解析解吻合较好。与前文(4.4.3 节)给出的数值解比较，由刚柔接触给出的数值解更接近解析解，这是由于此处将斜面考虑成了真实的刚体。

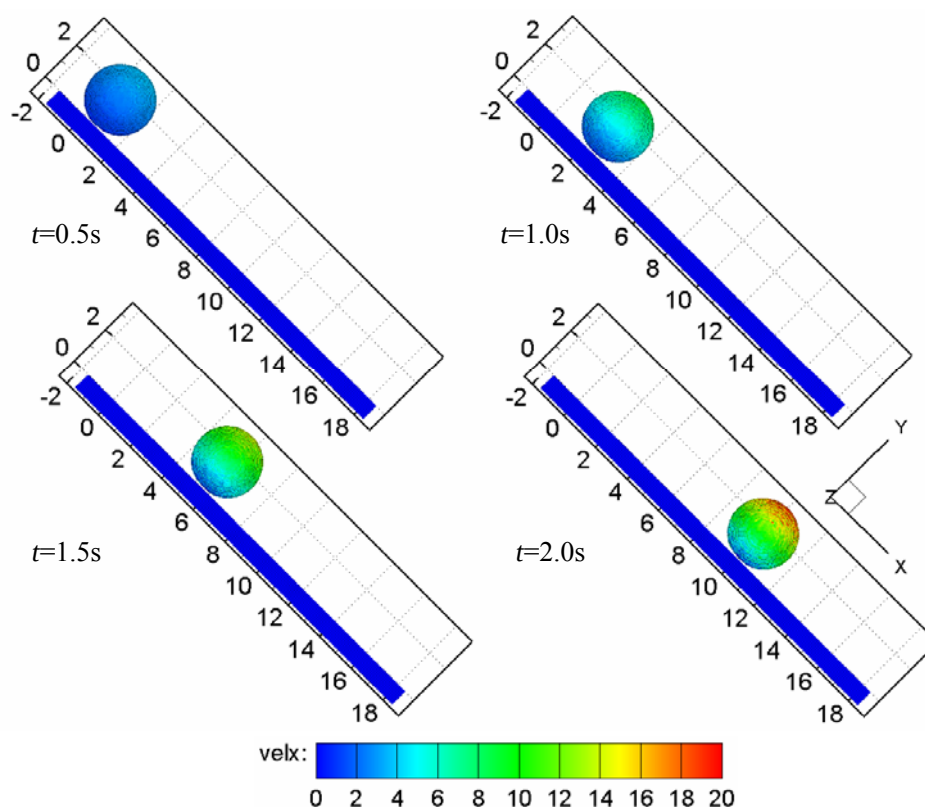


图 5.5 工况一球体的位置，刚柔接触 MPM(velx 代表 x 向速度，m/s)

5.3.3 Taylor 杆撞击模拟

刚柔接触的另一个应用是 Taylor 杆撞击问题。对于 Taylor 杆撞击问题，在物质点方法中可以通过两种方法进行模拟：一种是在撞击端面施加对称边界条件，采用标准 MPM 进行计算。另外一种就是采用刚柔接触 MPM 进行模拟。

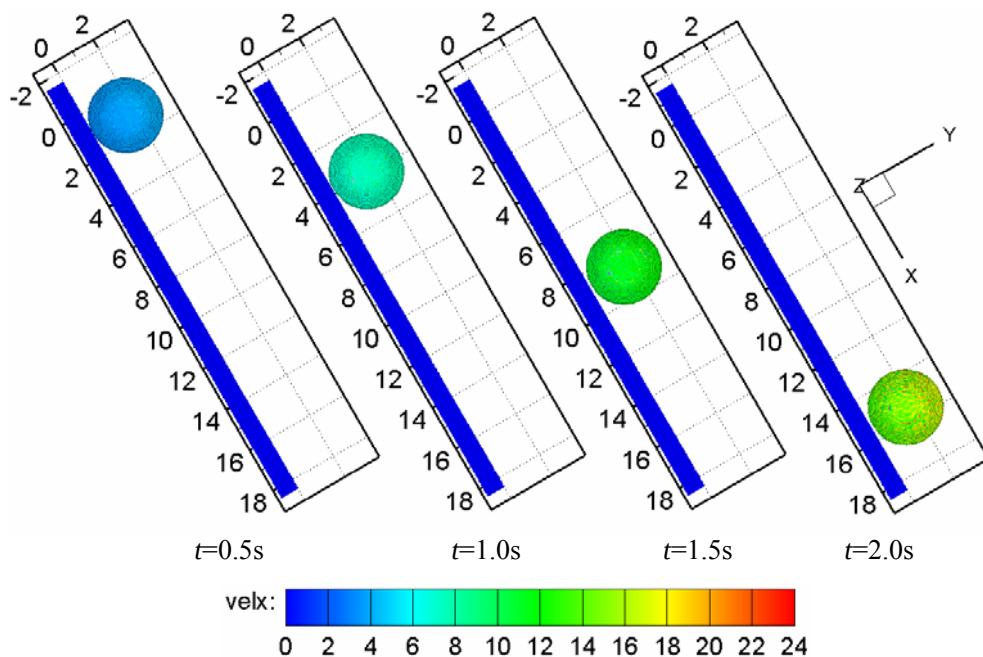


图 5.6 工况二球体的位置，刚柔接触 MPM (velx 代表 x 向速度，m/s)

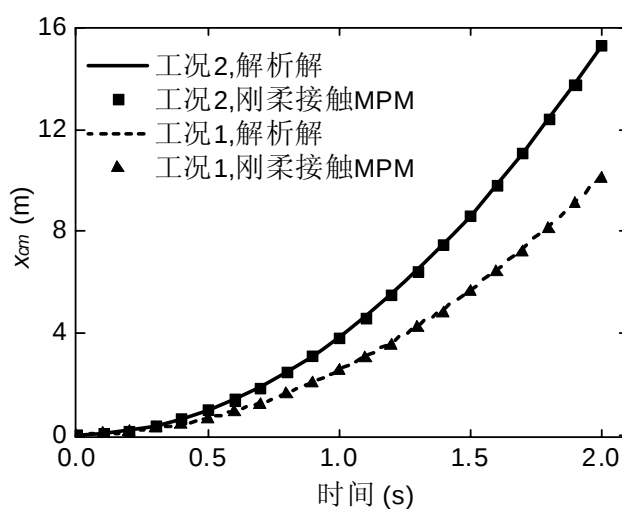


图 5.7 球体质心位置的解析解和数值解

根据 Johnson 等人的 Taylor 撞击实验^[175]，柱体的长度为 $L_0 = 25.4 \text{ mm}$ ，直径为 $D_0 = 7.6 \text{ mm}$ ，材料为铜，初始速度为 190 m/s ，该问题的材料参数在第 3 章的 3.5.1 节中已经给出。

首先采用标准物质点算法对该问题进行求解，即在 Taylor 杆的杆端施加对称边界条件，采用了 24656 个质点离散柱体，质点的初始间距为 0.38 mm ，背景

网格间距为 0.76mm ，每个背景网格中包含了 8 个物质点。标准物质点模拟表明，Taylor 动能在 $75\mu\text{s}$ 以后为零。为了考察 Taylor 杆撞击后的效应，一直计算到 $200\mu\text{s}$ ，计算结果见图 5.8。

其次，采用刚柔接触物质点算法对该问题进行求解，建立刚体的离散质点模型，刚体用一厚板表征，厚板的尺寸为 $22.8\times 22.8\times 1.52\text{mm}$ 。Taylor 杆仍然采用上述标准物质点模拟时的质点模型，刚体的离散质点数为 14400 个，背景网格的尺寸为 0.76mm ，每个背景网格中包含了 8 个物质点。同样为了观察撞击后的效应，一直计算到 $200\mu\text{s}$ ，计算结果见图 5.9。

为了和两种物质点算法的计算结果进行对比，建立了 Taylor 杆撞击模拟刚性壁的有限元模型，有限元模型的单元数为 24656 个，节点数为 27268 个。计算表明 Taylor 杆动能在 $75\mu\text{s}$ 以后为零，此处一直计算到 $200\mu\text{s}$ ，计算结果见图 5.10。

从图 5.9 可知，如果采用刚柔接触物质点算法，可以观察到 Taylor 杆撞击后的回弹效应，即撞击结束后柱体从刚性面分离。而图 5.8 表明，采用标准物质点算法和对称约束模拟，无法观察到该回弹现象。在有限元模拟中，也采用了刚柔接触算法，因此也可以观察到 Taylor 杆撞击后的回弹效应。将三种模拟的计算结果和实验结果进行比较。为了准确比较外形，采用三个特征参量来表征撞击后的 Taylor 杆，三个特征参量见图 5.11 所示。表 5.1 给出了计算结果和实验结果，其中 Δ 为计算值和实验值的误差。

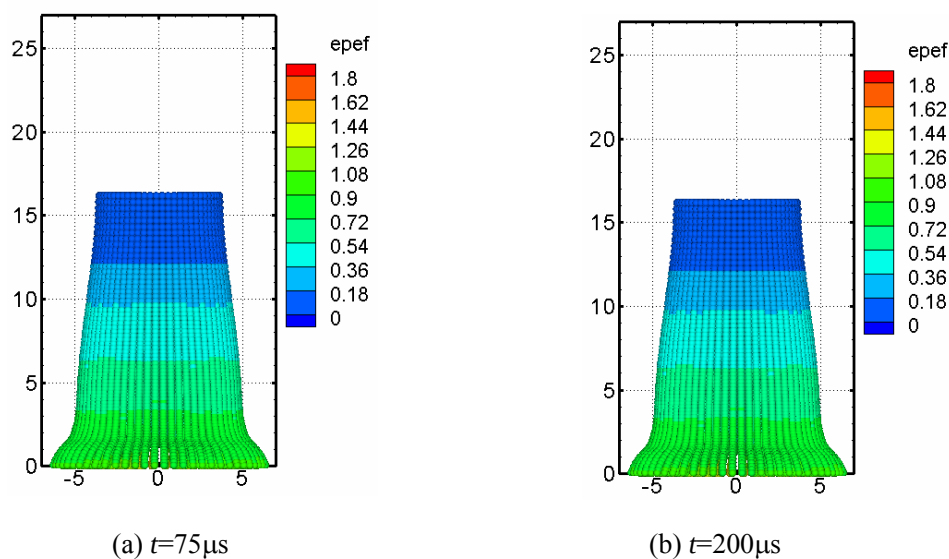


图 5.8 Taylor 杆撞击的标准 MPM 模拟

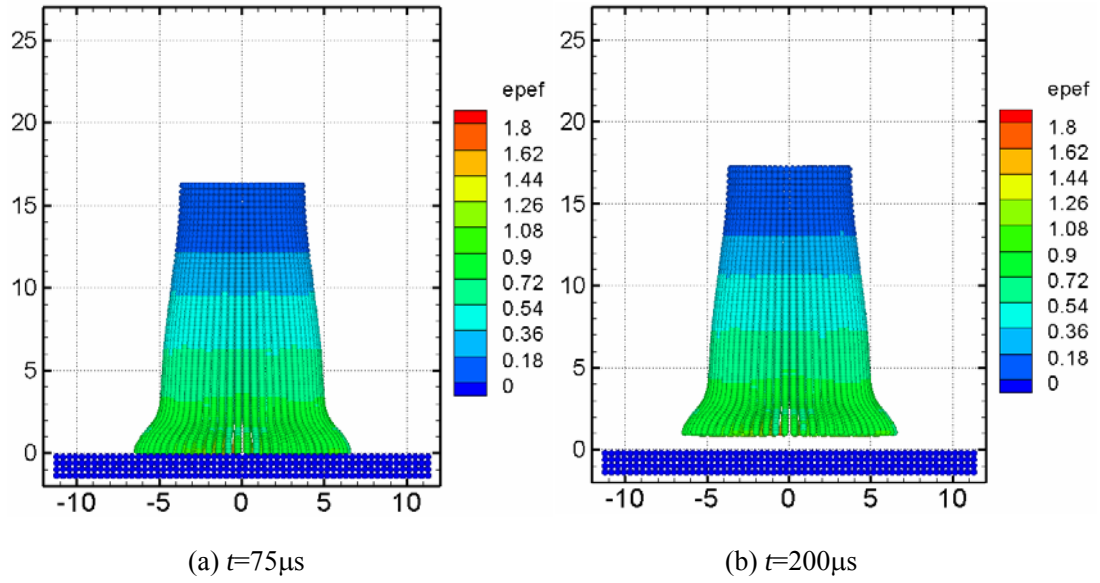


图 5.9 Taylor 杆撞击的刚柔接触 MPM 模拟

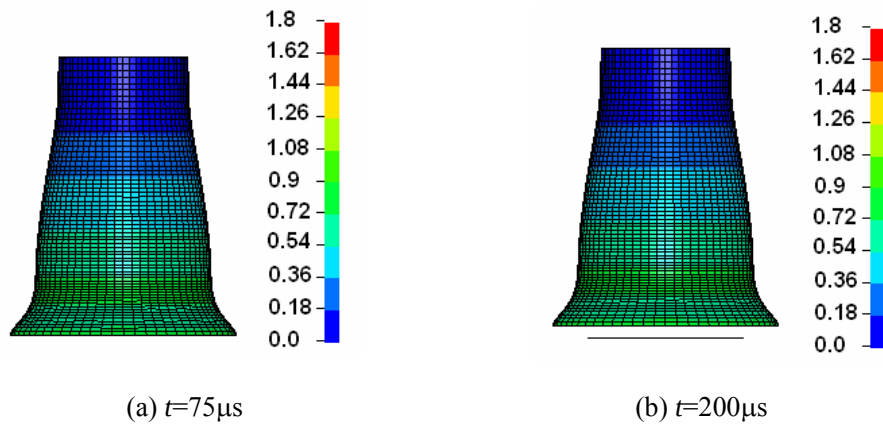


图 5.10 Taylor 杆撞击的有限元模拟

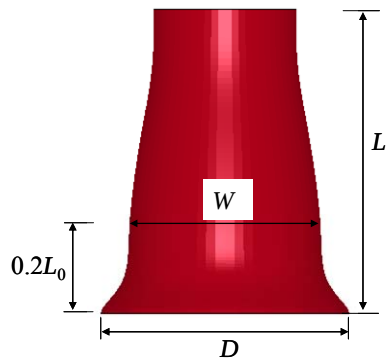


图 5.11 Taylor 杆的特征参量

由表 5.1 可知，刚柔接触物质点算法得到的计算结果和实验结果吻合较好，从而验证了刚柔接触算法的有效性和准确性。

表 5.1 Taylor 杆撞击刚性面的计算结果与实验结果

特征参量	$L(\text{mm})$	$D(\text{mm})$	$W(\text{mm})$	Δ
实验	16.2	13.5	10.1	-
标准 MPM	16.3	13.2	9.9	1.61%
刚柔接触 MPM	16.4	13.3	9.9	1.56%
FEM	16.3	13.4	10.0	0.8%

5.3.4 水珠冲击破碎模拟

上述三个算例主要是验证刚柔接触物质点算法，以上三个算例均能通过显式有限元进行求解。而对于水珠的冲击破碎问题，由于涉及到极大变形和破碎，显式有限元方法往往难于求解，对于此类问题的模拟，物质点方法具有明显的优势。以下采用刚柔接触物质点算法对水珠的冲击破碎问题进行分析。

本算例的模型为一水珠，水珠直径为 50mm，水珠冲击一个固定的阶梯。物质点法计算中将阶梯考虑为刚体，水珠的入射速度为 100m/s，水珠的入射角为 30°，按照此入射角，水珠将向阶梯的尖角处冲击。采用物质点算法计算时，水珠采用了 4224 个质点进行离散，阶梯采用了 64000 个质点进行离散。水珠的初始质点间距设置为 2.5mm，背景网格间距为 5mm。

不考虑水的粘性，水按照可压缩流体考虑^[183]，其状态方程考虑为：

$$p = \rho_0 c_0^2 \mu \quad (5-24)$$

其中， p 为压力， μ 为压缩系数。 ρ_0 为水的密度，取值为 1000kg/m³， c_0 为弹性波在水中的传播速度，取值为 1647m/s。计算中，水的偏应力取零值。采用刚柔接触物质点算法，图 5.12 给出了物质点法计算的不同时刻水珠变形模式。由图 5.12 可以观察到水珠与固壁接触后，水珠发生大变形直到破碎的整个过程，计算持续到 3ms 为止。

图 5.13 给出了 LS-DYNA 有限元计算得到的不同时刻水珠变形模式。由图 5.13 可以观察到水珠与固壁接触后，水珠发生大变形的过程。当计算到 1ms 时，水珠与台阶接触界面处的网格已经相互穿透，单元网格已经严重畸变，导致计

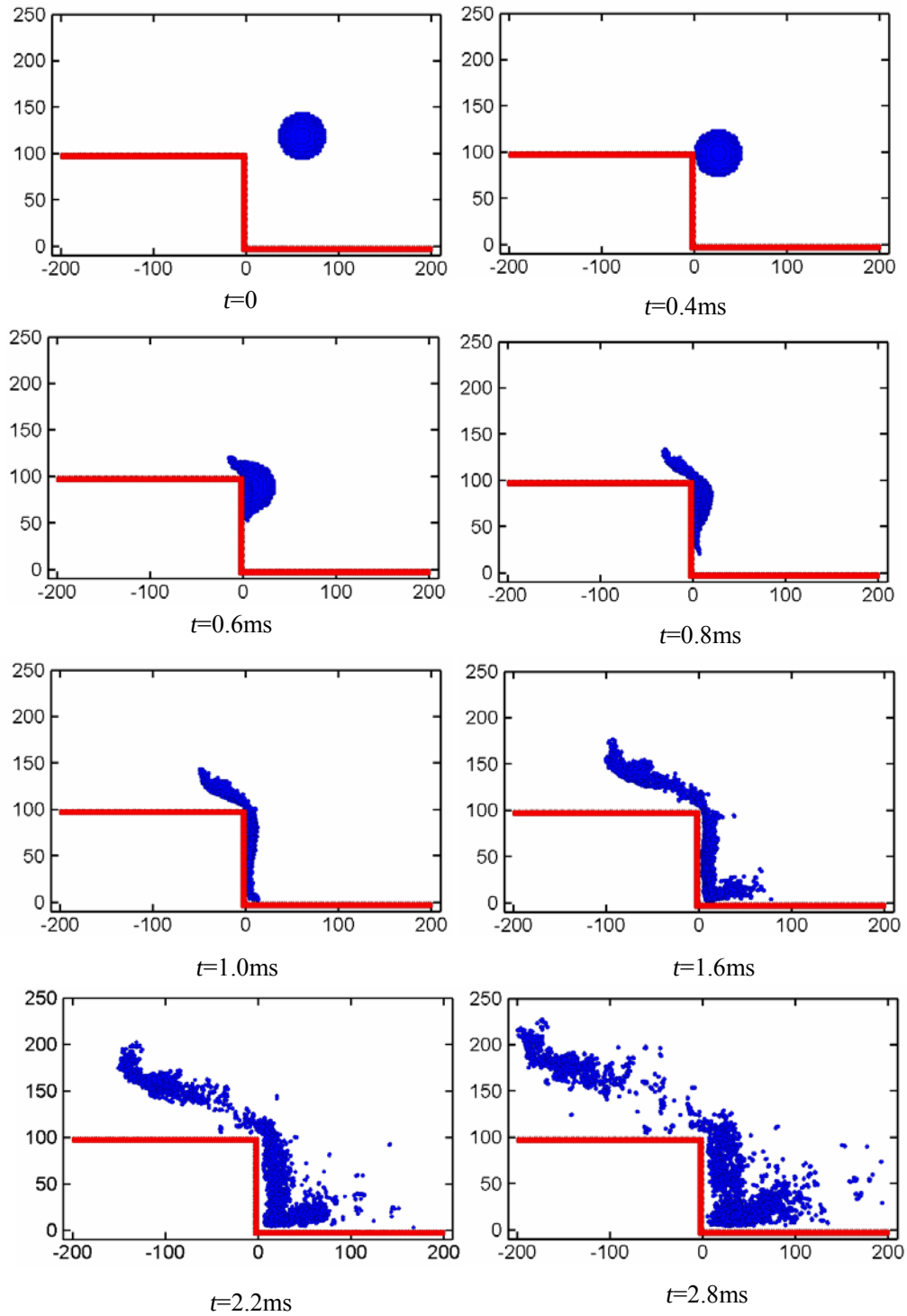


图 5.12 水珠冲击过程的刚柔接触 MPM 模拟

算终止。与有限元计算相比，物质点法能够描述水珠冲击破坏的整个过程。本

算例也说明了物质点方法在流固耦合分析中具有较强的优势，可以清晰描述流体的自由界面，以及跟踪流体和固体之间的物质界面。

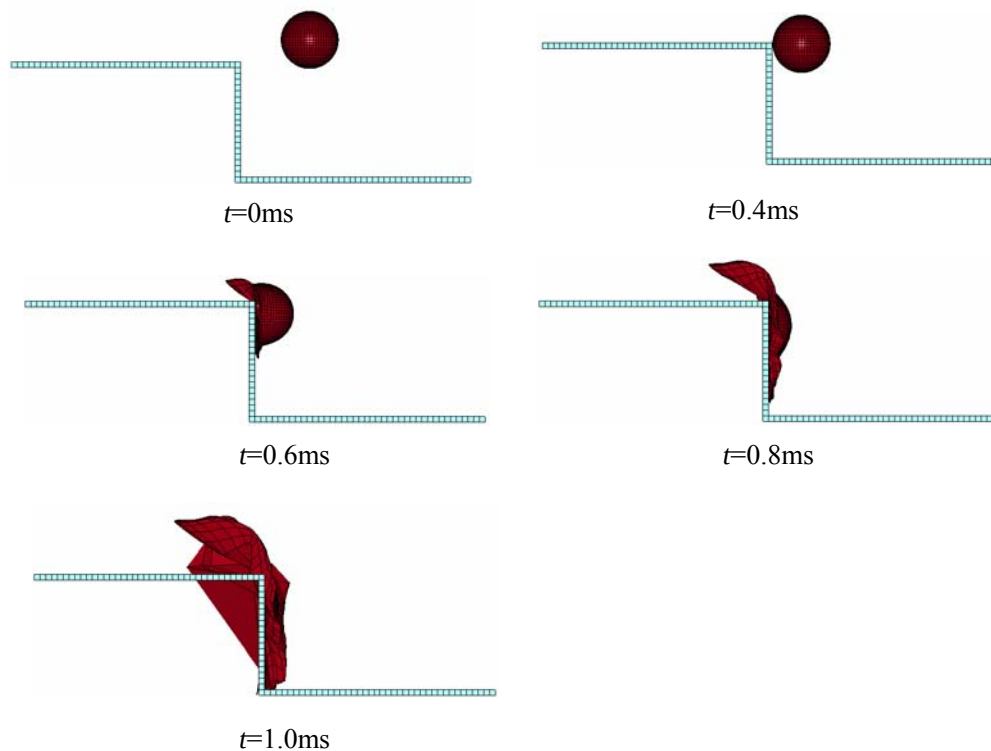


图 5.13 水珠冲击过程的有限元模拟

5.4 本章小结

在一些问题的模拟中，考虑刚柔接触往往可以使得物理模型更加简洁，在前文接触物质点算法的基础上，本章给出了刚柔接触物质点算法。通过弹性球撞击刚性面问题和斜面上球体滚动问题，分别采用显式有限元法和解析解对刚柔接触物质点算法进行了验证。

采用本章给出的刚柔接触物质点算法，可以模拟出 Taylor 杆撞击刚性壁面后的回弹效应，而标准物质点算法无法模拟回弹效应。对水珠冲击台阶的计算则表明，该算法能够完整模拟出水珠冲击大变形直到破碎的整个过程。

第6章 岩土冲击问题的物质点法模拟

6.1 引言

在岩土冲击动力学问题中, 岩土往往发生大变形。采用传统的有限元方法模拟此类问题时, 会发生网格畸变, 从而导致了较低的计算效率, 甚至无法完成整个计算。一些文献采用 ALE 算法来求解一些岩土的大变形侵彻过程^[72-75], 但 ALE 算法目前可以有效处理二维问题, 对一些复杂三维问题尚难于处理。

由于无网格法不受网格畸变的限制, 因此无网格法被用来求解岩土的动力学问题。Bui 等采用 SPH 模拟了岩土的崩落失效过程^[184], Coetzee 等基于二维物质点法模拟了岩土中锚墩的受力问题^[185]。最近, Andersen 等基于 GIMP 和 Mohr-Coulomb 模型对简化的边坡结构进行了失效分析^[193], 但缺乏实验验证。此外, 离散元方法在岩土动力学问题中也得到了应用, Tanaka 等基于离散元方法模拟了锚杆插入岩土的过程^[186]。

本章基于拉伸失效的 Drucker-Prager 弹塑性模型, 采用物质点法模拟岩土和砂土边坡的失效过程, 并和显式有限元的计算结果进行对比。采用刚柔接触物质点算法模拟堆积物的坍塌流动过程, 并和实验结果进行对比。最后, 采用接触物质点算法分析半球壳体对岩土的侵彻过程。

6.2 Drucker-Prager 模型

岩土为颗粒体堆积或胶结而成的多相体, 可以看做多相体组成的摩擦型材料。岩土的基本力学特征表现为: 强度和压力相关性, 剪胀性, 非关联塑性, 以及应变软化和等压屈服特性。Drucker-Prager 模型是常用的泥土弹塑性本构模型, 该模型的屈服面与压力相关, 考虑了剪胀性和非关联塑性。

本节的 Drucker-Prager 模型实现参考了 FLAC 软件的理论手册^[187], 但与 FLAC 软件的理论手册不同, 不同之处在于: 在模型中考虑了 Jaumann 应力率, 而且采用了更为一般的广义弹塑性理论推导了该模型的实现过程。Drucker-Prager 模型的失效包括了剪切失效和拉伸失效。其中, 与剪切失效相应的流动法则采用了非关联流动法则^[188], 而与拉伸失效相应的流动法则采用了关联流动法则。

6.2.1 屈服函数和势函数

Drucker-Prager 模型可以通过两个应力分量进行描述：即等效剪应力 τ 和球应力 σ_m ，等效剪应力 τ 可以描述材料的剪切失效。

$$\tau = \sqrt{J_2} \quad (6-1)$$

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} \quad (6-2)$$

其中 J_2 是偏应力张量第二不变量，定义为：

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad (6-3)$$

I_1 是应力张量的第一不变量，即：

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{kk} \quad (6-4)$$

与球应力 σ_m 相关的体应变为 ε_m

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (6-5)$$

如果考虑拉伸失效，主应力空间的 Drucker-Prager 屈服面为截锥面，见图 6.1(a) 所示。 σ_m 和 τ 平面上的 Drucker-Prager 屈服面包络线如图 6.1(b) 所示。

在图 6.1(b) 中，从点 A 到点 B 的包络线反映了材料的剪切失效，屈服函数为

$$f^s = \tau + q_\phi \sigma_m - k_\phi \quad (6-6)$$

式中， q_ϕ 和 k_ϕ 是材料常数，可由材料的内聚力以及摩擦角确定。

从点 B 到点 C 的包络线反映了材料的拉伸失效，其屈服函数为

$$f^t = \sigma_m - \sigma^t \quad (6-7)$$

此处， σ^t 为材料的抗拉强度。

如果材料常数 q_ϕ 不为零，即材料的摩擦角不为零，则材料的拉伸强度不能超过 $\sigma_{\max}^t$ ，由图 6.1(b) 可知

$$\sigma_{\max}^t = \frac{k_\phi}{q_\phi} \quad (6-8)$$

在 Drucker-Prager 模型中，剪切势函数 g^s 采用非关联塑性流动法则。 g^s 表

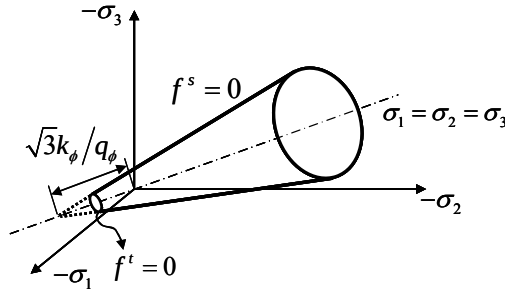
达式为

$$g^s = \tau + q_\psi \sigma_m \quad (6-9)$$

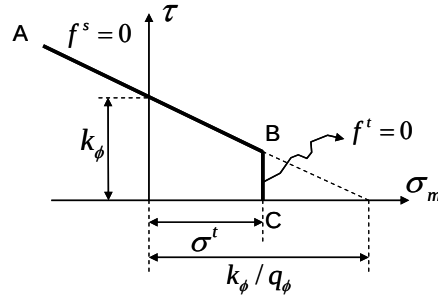
式中 q_ψ 为材料常数，由剪胀角确定。如果 $q_\psi = q_\phi$ ，则为关联塑性流动。

拉伸失效采用了关联流动法则，其势函数 g^t 为

$$g^t = \sigma_m \quad (6-10)$$



(a) 主应力空间的 Drucker-Prager 屈服面



(b) σ_m 和 τ 平面上的 Drucker-Prager 屈服面包络线

图 6.1 Drucker-Prager 屈服面

在图 6.1(b)所示的 σ_m 和 τ 平面内，某些区域既可以采用拉伸失效描述，也可以采用剪切失效描述。为了唯一确定拉伸失效区域和剪切失效区域，此处定义函数 $h(\sigma_m, \tau)$ ， $h(\sigma_m, \tau) = 0$ 表示平面内 $f^s = 0$ 和 $f^t = 0$ 两条直线的对角线，如图 6.2 所示。函数 $h(\sigma_m, \tau)$ 的表达式为^[187]

$$h = \tau - \tau^P - \alpha^P (\sigma_m - \sigma^t) \quad (6-11)$$

式中， τ^P 和 α^P 为常数，可以由下式定义为

$$\tau^P = k_\phi - q_\phi \sigma^t \quad (6-12)$$

$$\alpha^P = \sqrt{1 + q_\phi^2} - q_\phi \quad (6-13)$$

通过对角线 $h(\sigma_m, \tau) = 0$ 可以将失效区域分开, $h > 0$ 对应区域 1, $h \leq 0$ 对应区域 2, 如图 6.2 所示。如果应力点位于区域 1, 说明是剪切破坏, 应该由剪切势函数 g^s 确定流动法则, 应力点应该返回到直线 $f^s = 0$ 上。如果应力点位于区域 2, 说明是拉伸破坏, 应该由势函数 g^t 确定流动法则, 应力点应该返回到直线 $f^t = 0$ 上。

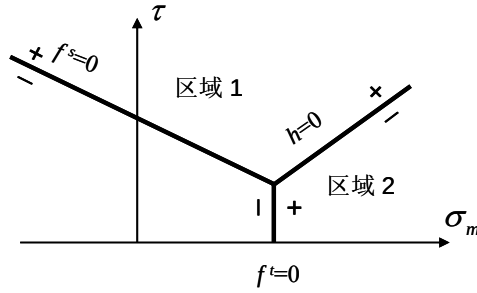


图 6.2 Drucker-Prager 模型塑性流动区域划分

根据式(6-12), 当材料的拉伸强度为 $\sigma^t = k_\phi / q_\phi$ 时, $\tau^P = 0$, 此时函数 $h(\sigma_m, \tau)$ 表达式为

$$h = \tau - \alpha^P (\sigma_m - k_\phi / q_\phi) \quad (6-14)$$

6.2.2 塑性修正条件

首先假设材料仍然处于弹性阶段, 计算 t^{n+1} 时刻应力张量的试探值为

$$^* \sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^n + \dot{\sigma}_{ij} \Delta t \quad (6-15)$$

由于 Cauchy 应力率 $\dot{\sigma}_{ij}$ 受到刚体转动的影响, 不是客观张量, 因此在本构关系中采用 Jaumann 应力率 σ_{ij}^∇ 。根据 Jaumann 应力率可以得到关系式^[189]

$$\dot{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^\nabla + \sigma_{ik} \omega_{jk} + \sigma_{jk} \omega_{ik} \quad (6-16)$$

其中, ω_{jk} 为旋率张量, 在材料弹性阶段, Jaumann 应力率 σ_{ij}^∇ 可以根据本构关系由应变率 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 求得, 即

$$\sigma_{ij}^\nabla = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (6-17)$$

其中 C_{ijkl} 是弹性本构张量。

将式(6-16)和(6-17)代入式(6-15)得到 t^{n+1} 时刻应力的试探值为

$${}^*\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^{R^n} + C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} \quad (6-18)$$

其中 $\sigma_{ij}^{R^n}$ 为旋转后的应力张量，其表达式为

$$\sigma_{ij}^{R^n} = \sigma_{ij}^n + \sigma_{ik}^n \Delta \omega_{jk} + \sigma_{jk}^n \Delta \omega_{ik} \quad (6-19)$$

进一步 t^{n+1} 时刻应力的试探值可以写成

$${}^*\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^{R^n} + 2G \Delta \varepsilon_{ij} + \left(K - \frac{2}{3} G \right) \Delta \varepsilon_m \delta_{ij} \quad (6-20)$$

与式(6-20)对应，可以得到 t^{n+1} 时刻球应力的试探值为

$${}^*\sigma_m^{n+1} = {}^*\sigma_{kk}^{n+1} / 3 \quad (6-21)$$

t^{n+1} 时刻等效剪应力的试探值为

$${}^*\tau^{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} {}^*s_{ij}^{n+1} {}^*s_{ij}^{n+1}} \quad (6-22)$$

根据图 6.2，对于应力的试探值进行判断，得到应力点所用的塑性势函数。

以下给出四个条件：

(1) 当 ${}^*\sigma_m^{n+1} < \sigma^t$ 并且 $f^s({}^*\tau^{n+1}, {}^*\sigma_m^{n+1}) > 0$ 时，应力点超出屈服面，表现为剪切失效，采用塑性修正，由剪切势函数 g^s 确定流动法则。

(2) 当 ${}^*\sigma_m^{n+1} < \sigma^t$ 并且 $f^s({}^*\tau^{n+1}, {}^*\sigma_m^{n+1}) \leq 0$ 时，应力点在屈服面之内，不采用塑性修正。

(3) 当 ${}^*\sigma_m^{n+1} \geq \sigma^t$ 并且 $h({}^*\tau^{n+1}, {}^*\sigma_m^{n+1}) > 0$ 时，应力点超出屈服面，表现为剪切失效，采用塑性修正，由剪切势函数 g^s 确定流动法则。

(4) 当 ${}^*\sigma_m^{n+1} \geq \sigma^t$ 并且 $h({}^*\tau^{n+1}, {}^*\sigma_m^{n+1}) \leq 0$ 时，应力点超出屈服面，表现为拉伸失效，采用塑性修正，由拉伸势函数 g^t 确定流动法则。

根据以上四个条件，可以判断是否需要对应力试探解进行塑性修正，以及确定所用的塑性势函数。

6.2.3 塑性修正过程

6.2.3.1 剪切失效修正

如果应力点超出屈服面并且为剪切失效，那么应当采用塑性修正，由剪切势函数 g^s 确定流动法则，并且修正后的应力应该返回到 $f^s = 0$ 上。

t^{n+1} 时刻修正后的应力满足:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{n+1} &= \sigma_{ij}^{R^n} + C_{ijkl} (\Delta \varepsilon_{kl} - \Delta \varepsilon_{kl}^p) \\ &= {}^* \sigma_{ij}^{n+1} - C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}^p\end{aligned}\quad (6-23)$$

式中, $\Delta \varepsilon_{kl}^p$ 为塑性应变增量。由于 σ_{ij}^{n+1} 满足 $f^s = 0$, 因此

$$f^s(\sigma_{ij}^{n+1}) = f^s({}^* \sigma_{ij}^{n+1} - C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}^p) = 0 \quad (6-24)$$

采用 Taylor 展开, 考虑一阶小量 $\Delta \varepsilon_{kl}^p$, 由式(6-24)可以得到

$$f^s({}^* \sigma_{ij}^{n+1}) - \frac{\partial f^s}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}^p = 0 \quad (6-25)$$

式中, $\frac{\partial f^s}{\partial \sigma_{ij}}$ 在 $\sigma_{ij} = {}^* \sigma_{ij}^{n+1}$ 处取值。

$\Delta \varepsilon_{kl}^p$ 由剪切势函数 g^s 确定:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = d\lambda^s \frac{\partial g^s}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6-26)$$

式中 $d\lambda^s$ 为比例因子。

将式(6-26)代入式(6-25)得:

$$d\lambda^s = \frac{f^s({}^* \sigma_{ij}^{n+1})}{\frac{\partial f^s}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial g^s}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (6-27)$$

上述的推导没有针对任何特殊的弹塑性本构关系, 因此式(6-27)对一般的非关联弹塑性本构模型都是适用的, 也称为广义塑性理论^[188,191]。在进一步推导 $d\lambda^s$ 前, 需要注意以下的运算符号

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} \delta_{ij} &= \varepsilon_{kk} = \varepsilon_m, & \sigma_{ij} \delta_{ij} &= 3\sigma_m \\ \delta_{ij} \delta_{ij} &= 3, & s_{ij} \delta_{ij} &= s_{kk} = 0\end{aligned}\quad (6-28)$$

根据弹性本构张量的性质有

$$C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}^p = 2G \Delta \varepsilon_{ij}^p + \left(K - \frac{2}{3} G \right) \Delta \varepsilon_m^p \delta_{ij} \quad (6-29)$$

式(6-29)中 $\Delta \varepsilon_m^p$ 为塑性体积应变增量。将式(6-26)代入(6-29)可得到:

$$C_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}^p = d\lambda^s \left\{ 2G \frac{\partial g^s}{\partial \sigma_{ij}} + \left(K - \frac{2}{3}G \right) \left(\frac{\partial g^s}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} \delta_{\alpha\beta} \right) \delta_{ij} \right\} \quad (6-30)$$

将式(6-30)代入式(6-25)得到 $d\lambda^s$ 的另一种表示形式

$$d\lambda^s = \frac{f^s \left({}^*\sigma_{ij}^{n+1} \right)}{2G \frac{\partial f^s}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g^s}{\partial \sigma_{ij}} + \left(K - \frac{2}{3}G \right) \left(\frac{\partial g^s}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} \delta_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial f^s}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij}} \quad (6-31)$$

上述的推导没有针对任何特殊的弹塑性本构关系，因此式(6-31)对一般的弹塑性本构模型都是适用的^[188]。

针对 Drucker-Prager 模型，根据公式(6-6)和(6-9)有下列关系式：

$$\frac{\partial f^s}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f^s}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f^s}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{s_{ij}}{2\tau} + \frac{q_\phi}{3} \delta_{ij} \quad (6-32)$$

$$\frac{\partial g^s}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial g^s}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial g^s}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{s_{ij}}{2\tau} + \frac{q_\psi}{3} \delta_{ij} \quad (6-33)$$

将式(6-32)和(6-33)代入式(6-31)，并注意到式(6-28)给出的运算关系，可以得到 Drucker-Prager 模型的比例因子 $d\lambda^s$ 为

$$d\lambda^s = \frac{f^s \left({}^*\sigma_{ij}^{n+1} \right)}{G + Kq_\phi q_\psi} \quad (6-34)$$

$\Delta\varepsilon_m^p$ 为塑性体积应变增量，根据式(6-26)和(6-33)有

$$\Delta\varepsilon_m^p = d\lambda^s \frac{\partial g^s}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} \delta_{\alpha\beta} = d\lambda^s q_\psi \quad (6-35)$$

根据式(6-23)， t^{n+1} 时刻修正后的应力球量满足：

$$\sigma_m^{n+1} = {}^*\sigma_m^{n+1} - K\Delta\varepsilon_m^p = {}^*\sigma_m^{n+1} - Kq_\psi d\lambda^s \quad (6-36)$$

由于 σ_{ij}^{n+1} 满足 $f^s = 0$ ，因此

$$\tau^{n+1} = k_\phi - q_\phi \sigma_m^{n+1} \quad (6-37)$$

因此根据应力返回算法，将弹性试探偏应力张量 ${}^*s_{ij}^{n+1}$ 按照比例缩小， t^{n+1} 时刻的应力张量 σ_{ij}^{n+1} 为

$$\sigma_{ij}^{n+1} = {}^*s_{ij}^{n+1} \frac{\tau^{n+1}}{\tau^{n+1}} + \sigma_m^{n+1} \delta_{ij} \quad (6-38)$$

定义等效塑性应变为

$$\Delta \varepsilon^p = \sqrt{\frac{2}{3} \Delta \varepsilon_{ij}^p \Delta \varepsilon_{ij}^p} = d\lambda^s \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{9} q_\psi^2} \quad (6-39)$$

6.2.3.2 拉伸失效修正

对于拉伸失效，其塑性修正过程如下。流动势函数的表达式见式(6-10)，流动法则为

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = d\lambda^t \frac{\partial g^t}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6-40)$$

此处， $d\lambda^t$ 为比例因子。

考虑到拉伸失效的屈服函数 f^t 和流动势函数 g^t ，因此：

$$\frac{\partial f^t}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f^t}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f^t}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (6-41)$$

$$\frac{\partial g^t}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial g^t}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial g^t}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (6-42)$$

将式(6-41)和(6-42)代入式(6-31)，并考虑比例因子为 $d\lambda^t$ ，因此

$$d\lambda^t = \frac{f^t \left({}^* \sigma_{ij}^{n+1} \right)}{K} = \frac{{}^* \sigma_m^{n+1} - \sigma^t}{K} \quad (6-43)$$

$\Delta \varepsilon_m^p$ 为塑性体积应变增量，根据式(6-40)有

$$\Delta \varepsilon_m^p = d\lambda^t \frac{\partial g^t}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} \delta_{\alpha\beta} = d\lambda^t \quad (6-44)$$

t^{n+1} 时刻修正后的应力球量满足

$$\sigma_m^{n+1} = {}^* \sigma_m^{n+1} - K \Delta \varepsilon_m^p = \sigma^t \quad (6-45)$$

显然，修正后的应力球量满足屈服函数 $f^t = 0$ 。对于拉伸失效，由于仅仅需要对应力球量进行修正，而偏应力不需要做修正，因此满足条件：

$$s_{ij}^{n+1} = {}^* s_{ij}^{n+1} \quad (6-46)$$

对于拉伸失效， t^{n+1} 时刻的应力张量 σ_{ij}^{n+1} 为

$$\sigma_{ij}^{n+1} = {}^* s_{ij}^{n+1} + \sigma^t \delta_{ij} = {}^* \sigma_{ij}^{n+1} + \left(\sigma^t - {}^* \sigma_m^{n+1} \right) \delta_{ij} \quad (6-47)$$

对于拉伸失效，定义等效塑性应变为

$$\Delta \varepsilon^p = \sqrt{\frac{2}{3} \Delta \varepsilon_{ij}^p \Delta \varepsilon_{ij}^p} = \frac{\sqrt{2}}{3} d\lambda^t \quad (6-48)$$

6.2.4 程序实现和材料参数

6.2.4.1 程序实现

以下给出 Drucker-Prager 的程序实现过程。程序实现过程如下：

(1) 首先根据式(6-19)计算旋转后的应力张量 $\sigma_{ij}^{R^n}$ ，根据式(6-20)得到 t^{n+1} 时刻应力的试探值 $^*\sigma_{ij}^{n+1}$ ，进而计算剪应力试探值 $^*\tau^{n+1}$ 和球应力试探值 $^*\sigma_m^{n+1}$ 。

(2) 当 $^*\sigma_m^{n+1} < \sigma^t$ 并且 $f^s(^*\tau^{n+1}, ^*\sigma_m^{n+1}) > 0$ 时，根据式(6-34)计算比例因子 $d\lambda^s$ ，根据式(6-36)和(6-37)计算剪应力 τ^{n+1} 和球应力 σ_m^{n+1} ，根据式(6-38)计算 t^{n+1} 时刻的应力张量 σ_{ij}^{n+1} 。

(3) 当 $^*\sigma_m^{n+1} \geq \sigma^t$ 并且 $h(^*\tau^{n+1}, ^*\sigma_m^{n+1}) > 0$ 时，根据式(6-34)计算比例因子 $d\lambda^s$ ，根据式(6-36)和(6-37)计算剪应力 τ^{n+1} 和球应力 σ_m^{n+1} ，根据式(6-38)计算 t^{n+1} 时刻的应力张量 σ_{ij}^{n+1} 。

(4) 当 $^*\sigma_m^{n+1} \geq \sigma^t$ 并且 $h(^*\tau^{n+1}, ^*\sigma_m^{n+1}) \leq 0$ ，根据式(6-47)计算 t^{n+1} 时刻的应力张量 σ_{ij}^{n+1} 。

6.2.4.2 材料参数

在程序实现过程中，拉伸强度参数 σ^t 按照以下公式取值：

$$\sigma^t = \begin{cases} 0 & (q_\phi = 0) \\ \sigma_{\max}^t & (q_\phi \neq 0) \cap (\sigma_{\text{use}}^t \geq \sigma_{\max}^t) \\ \sigma_{\text{use}}^t & (q_\phi \neq 0) \cap (\sigma_{\text{use}}^t < \sigma_{\max}^t) \end{cases} \quad (6-49)$$

此处 σ_{use}^t 为用户输入的材料拉伸强度。式(6-49)说明当材料参数 q_ϕ 为零值时，拉伸强度 σ^t 取零值。其次，材料的拉伸强度不能超过 $\sigma_{\max}^t$ 。

在三维主应力状态下，Drucker-Prager 模型和 Mohr-Coulomb 模型可以匹配， π 平面上两个模型的关系如图 6.3 所示。Mohr-Coulomb 准则可以由岩土材料的粘聚力 c 和摩擦角 ϕ 描述，三维主应力空间中的 Mohr-Coulomb 屈服面为六角棱锥的锥面。

根据不同的匹配关系，在 π 平面上，如果 Drucker-Prager 模型取

Mohr-Coulomb 模型的外接圆(与 A 点匹配), 此时参数 q_ϕ 、 k_ϕ 和 q_ψ 取值为^[187,191]

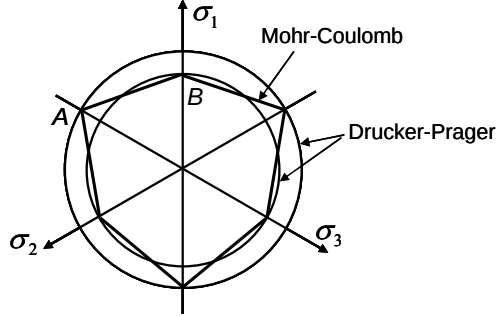


图 6.3 π 平面上的 Drucker-Prager 模型

$$q_\phi = \frac{6 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} \quad (6-50)$$

$$k_\phi = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} \quad (6-51)$$

$$q_\psi = \frac{6 \sin \psi}{\sqrt{3} (3 - \sin \psi)} \quad (6-52)$$

如果取内接圆(与 B 点匹配), 此时参数 q_ϕ 、 k_ϕ 和 q_ψ 取值为

$$q_\phi = \frac{6 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)} \quad (6-53)$$

$$k_\phi = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)} \quad (6-54)$$

$$q_\psi = \frac{6 \sin \psi}{\sqrt{3} (3 + \sin \psi)} \quad (6-55)$$

如果在 π 平面上取六边形的内切圆, 此时参数 q_ϕ 、 k_ϕ 和 q_ψ 取值为

$$q_\phi = \frac{3 \tan \phi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}} \quad (6-56)$$

$$k_\phi = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}} \quad (6-57)$$

$$q_\psi = \frac{3 \tan \psi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \psi}} \quad (6-58)$$

以上三种匹配关系得到的计算结果略有不同, 本文采用内接圆(与 B 点匹配)来确定 Drucker-Prager 模型参数。对于 Drucker-Prager 模型, 如果满足 $q_\phi = 0$, 则材料屈服面退化为 Mises 屈服面, 意味着材料的屈服与压力无关。在 Drucker-Prager 模型中, 如果剪胀角为零, 则 $q_\psi = 0$, 意味着材料满足塑性不可压缩条件。

6.3 Drucker-Prager 模型的验证

6.3.1 粘土边坡失效

为了验证 Drucker-Prager 模型实现的正确性, 以下采用物质点方法和有限元方法对边坡失效过程进行模拟。对于潜在的边坡失效面, 往往通过隐式有限元方法可以得到准确的分析。对于边坡失效后的土体崩落过程, 由于受到网格畸变的限制, 隐式有限元方法难于分析土体崩落过程。显式有限元方法可以分析土体的崩落过程, 但由于受到网格畸变的限制, 往往需要很长的计算时间。由于物质点方法具有模拟大变形的优点, 因此物质点方法既能计算出边坡的失效面, 而且能模拟边坡失效后的土体崩落过程。

本节分别采用物质点方法和显式有限元方法对粘土的边坡失效进行数值模拟, 显式有限元分析是基于 LS-DYNA 软件完成的。

粘土边坡的外形和边界条件如图 6.4 所示, 边坡侧面 AF 和 DE 边的 x 向位移被约束, 边坡底部 EF 边被完全固定, 边坡承受的载荷为重力。该问题为典型的平面应变问题, 此处采用三维的有限元模型和物质点模型进行计算, 计算时将三维模型的 y 向位移(离面位移)约束来模拟平面应变状态。

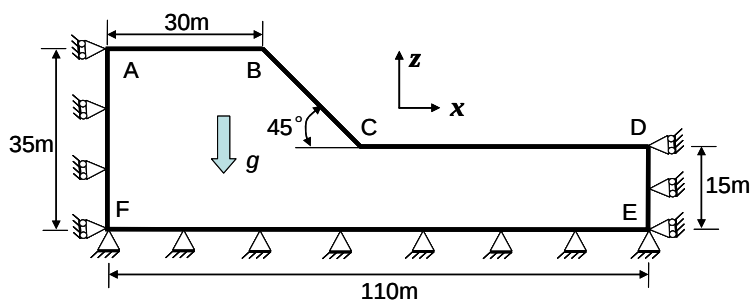


图 6.4 承受重力载荷的边坡模型

粘土具有粘聚力较高, 剪胀性低的特性。此处采用了 Drucker-Prager 模型

来描述粘土边坡的失效，其中采用了非关联塑性本构关系，相应的剪胀角 ψ 取值为 0° 。粘土的摩擦角取为 $\phi=20^\circ$ ，粘聚力取为 $c=10.0\text{kPa}$ 。Drucker-Prager 模型中，粘土的各项材料参数见表 6.1，按照内接圆等效计算土的 Drucker-Prager 模型材料参数。边坡的物质点模型采用了 19640 个质点进行离散，初始质点间距为 0.5m，初始的背景网格尺寸为 1m，即每个格子包含了 8 个质点。边坡的有限元模型采用了 19640 个单元和 30273 个节点进行离散。

图 6.5(a)和 6.5(b)分别给出了粘土边坡失效的物质点方法和有限元模拟结果，图 6.5 还给出了等效塑性应变的云纹图。从图 6.5 中可以看出滑移面从边坡的底部开始形成，随着重力载荷的作用，滑移面从边坡底部贯穿到顶部，从而导致边坡形成弧形的滑移面。从图 6.5 对比可以看出，两种算法均能有效模拟该边坡失效问题，而且两种算法得到的边坡失效外形和滑移面外形较为一致。

表 6.1 边坡破坏模拟中土的材料参数

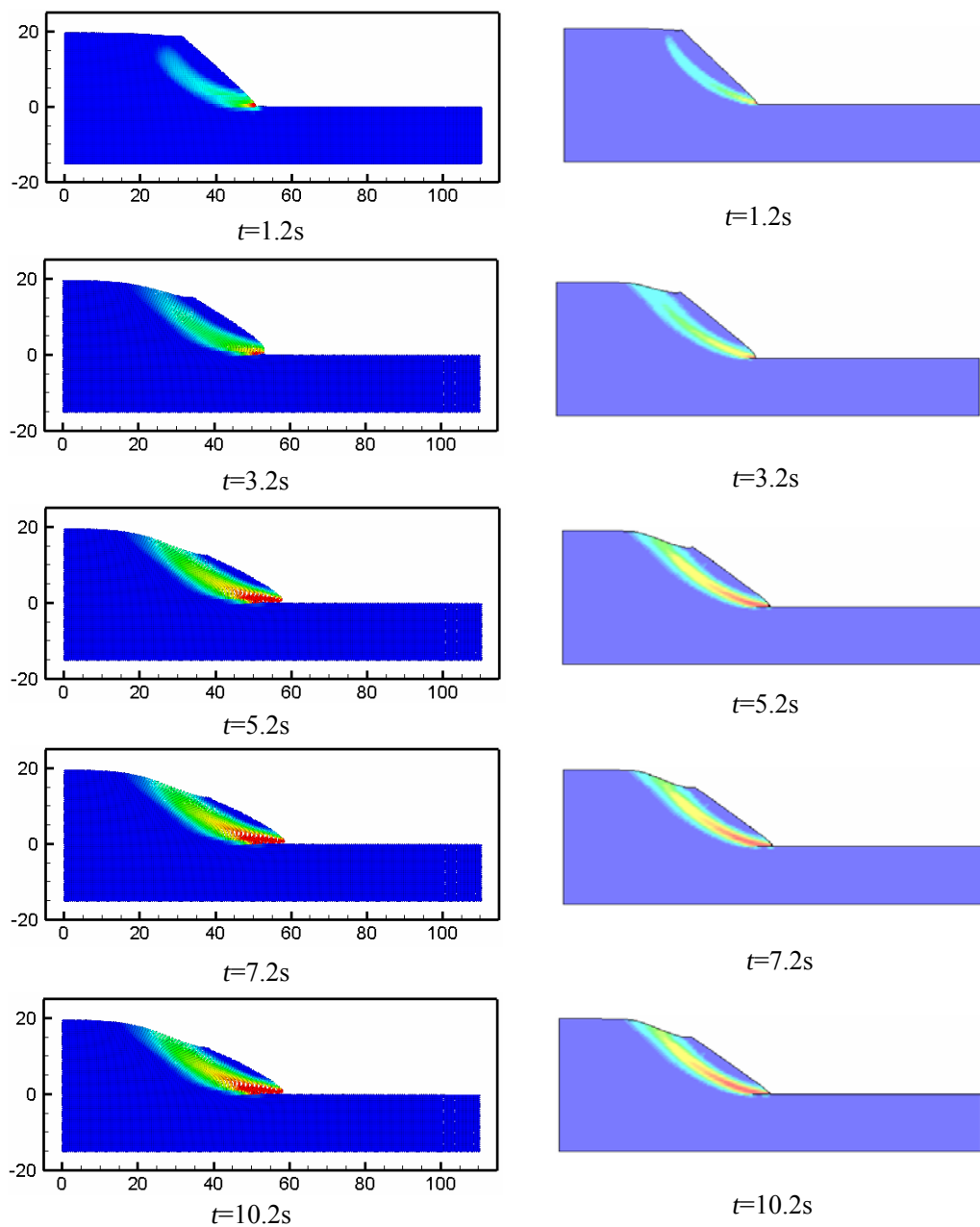
E MPa	ν	ρ g/cm ³	ϕ deg	c kPa	ψ deg	σ^t kPa
70	0.3	2.1	20	10.0	0.0	27.48
q_ϕ	k_ϕ kPa	q_ψ				
0.3545	9.74	0				

物质点方法模拟表明粘土边坡滑移时间为 5.8s，有限元模拟表明粘土边坡滑移的时间为 6.2s。物质点方法模拟表明粘土边坡 x 向滑移的最大位移为 7.5m，而有限元模拟给出粘土边坡 x 向滑移的最大位移为 6.5m。对比表明，对于粘土的边坡失效问题，采用 3.0GHzCPU 和 3.2G 内存的计算机，物质点方法的计算时间仅仅为 6 分钟，而显式有限元方法计算时间为 262 分钟，而且有限元计算中有网格畸变。

6.3.2 砂土边坡失效

同样对于图 6.4 所示的边坡结构，如果其材料为砂土，此处仍然采用物质点方法和显式有限元方法分析砂土的边坡失效。砂土具有粘聚力低的特性，为了和粘土边坡失效构型进行类比，此处仅将砂土的粘聚力取为 $c = 0.1\text{kPa}$ ，其余的材料参数和表 6.1 中的材料参数相同，仍然采用 Drucker-Prager 模型来描述砂土

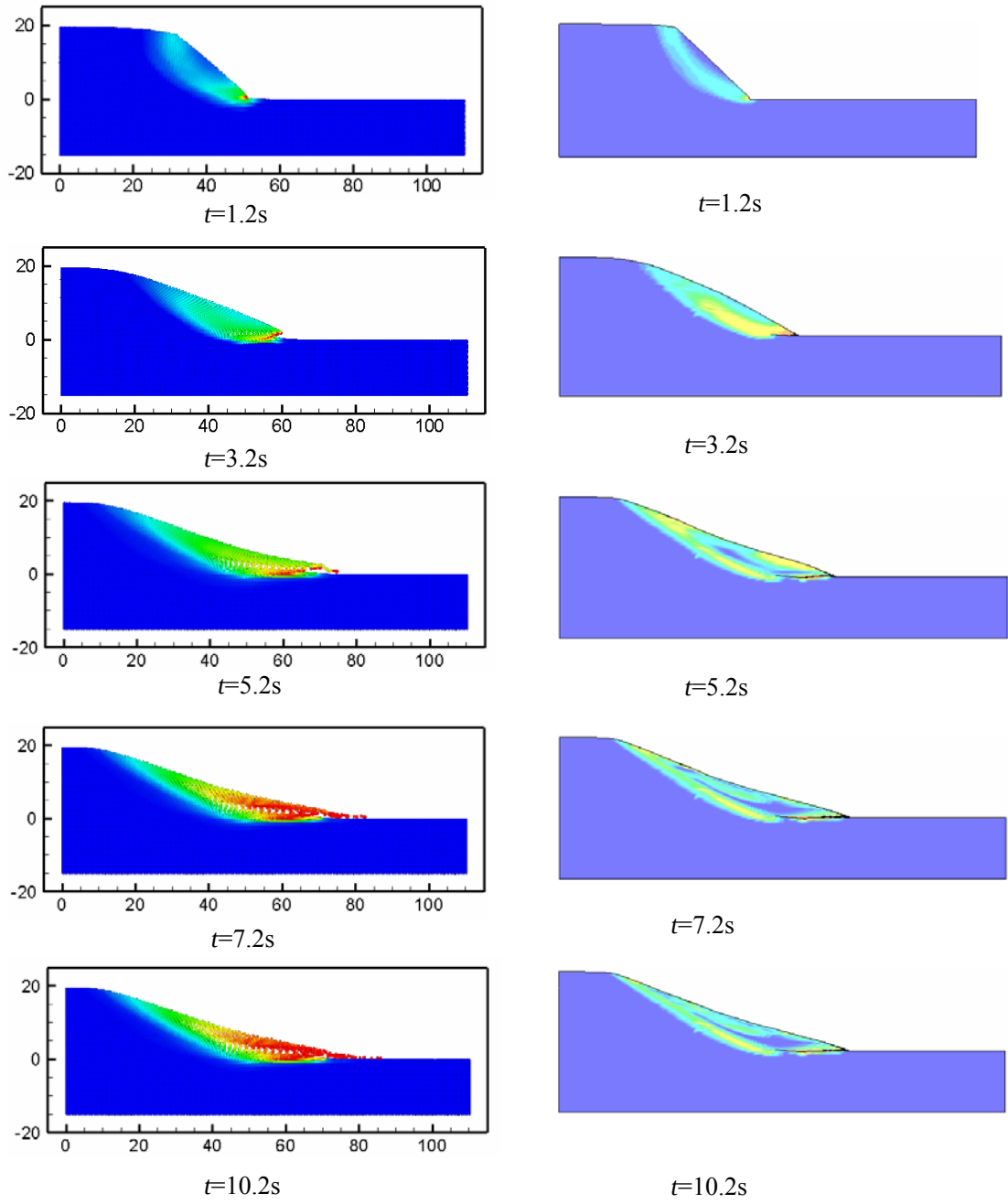
的力学行为。图 6.6(a)和 6.6(b)分别给出了砂土边坡失效的物质点方法和有限元模拟结果，图 6.6 还给出了等效塑性应变的云纹图。



(a) 物质点方法模拟

(b) LS-DYNA 有限元模拟

图 6.5 粘土边坡的失效模拟($\phi = 20^\circ$, $c = 10.0\text{kPa}$)



(a) 物质点方法模拟

(b) LS-DYNA 有限元模拟

图 6.6 砂土边坡的失效模拟($\phi = 20^\circ$, $c = 0.1\text{kPa}$)

由于砂土的粘聚力很低，在自重作用下边坡崩塌，砂土产生了较大的位移，崩塌后的砂土边坡和水平方向形成了一个角度，即休止角。砂土的边坡失效并没有形成明显的剪切带，而是边坡出现了显著的塑性流动。从图 6.6 可知，两种算法均能有效模拟砂土的边坡失效问题，而且两种算法在不同时刻得到的边坡外形和塑性区域均能吻合。

物质点方法模拟表明砂土边坡的滑移时间为 8s，有限元模拟表明砂土的滑移时间为 8.5s。物质点方法模拟表明砂土边坡的休止角为 15.5° ，而有限元模拟表明边坡的休止角为 17.5° ，两者均低于材料的摩擦角($\phi = 20^\circ$)。对于砂土边坡失效问题，物质点方法的计算时间仅仅为 6 分钟，而显式有限元方法计算时间为 19.8 小时，而且有限元计算出现了较为严重的网格畸变。

以上采用了 Drucker-Prager 模型模拟了粘土边坡和砂土边坡的失效过程，物质点方法和显式有限元方法的模拟结果比较吻合，因此说明本文实现的 Drucker-Prager 模型是正确的，其次说明物质点方法能高效地计算涉及土介质的力学行为。

6.3.3 沙坡流动模拟

同样对于图 6.4 所示的边坡结构，其材料为散沙。采用显式有限元分析散沙材料时，往往会因为粘聚力 c 为零值导致网格的突然畸变，导致无法继续求解。此处采用物质点方法研究散沙的颗粒流动和边坡失效构型，分析所用的材料参数见表 6.2，对于散沙流动模拟，此处摩擦角分别取 20° 、 30° 和 40° 。

不同摩擦角下最终的沙坡构型见图 6.7 所示，由图 6.7 可以得到沙坡的休止角，沙坡流动的计算结果见表 6.3。由表 6.3 可以知道，随着散沙材料的摩擦角升高，沙坡的休止角变大，但是沙坡的休止角明显低于其材料的摩擦角。

表 6.2 散沙的材料参数

E MPa	ν	ρ g/cm ³	ϕ deg	c kPa	ψ deg
70	0.3	2.1	20、30 和 40	0	0

表 6.3 沙坡流动的数值模拟结果

摩擦角(deg)	20	30	40
沙坡滑移时间(s)	8.0	7.6	8.5
休止角(deg)	15.2	22.0	29.0

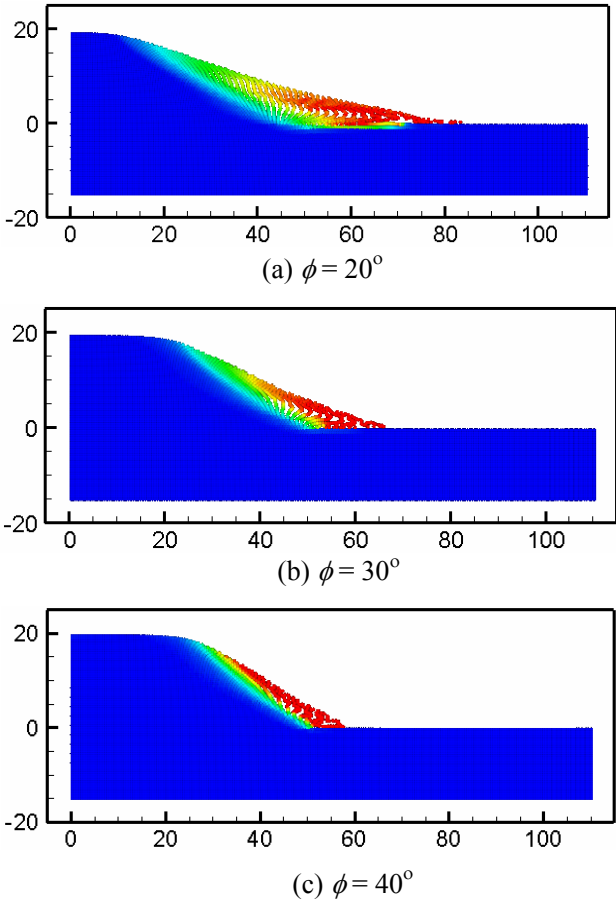


图 6.7 不同摩擦角下沙坡最终构型

6.4 岩土动力学问题应用

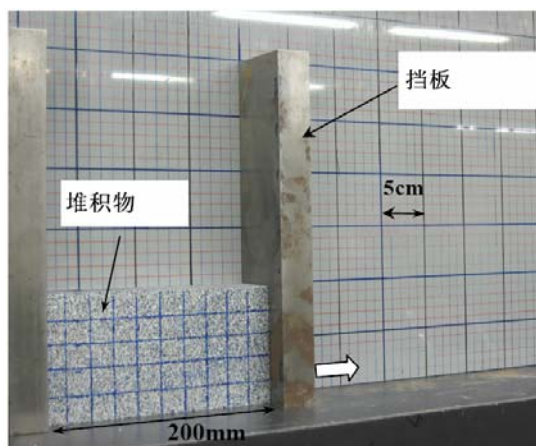
6.4.1 铝棒堆积物流动模拟

6.4.1.1 问题描述

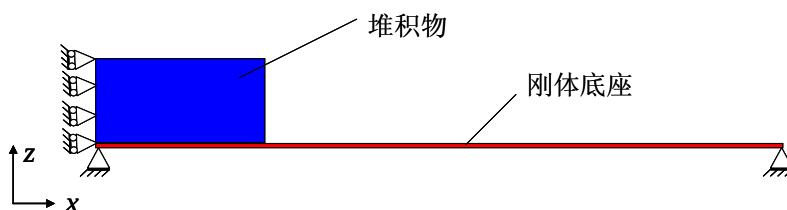
在岩土工程中，常常采用铝棒堆积物的流动来模拟沙和土的颗粒流，用铝棒堆积物可以在实验室内再现边坡的二维失效过程。Bui 进行了干燥铝棒堆积物

的坍塌流动实验^[184]，实验初始构型为方形坡体结构，坡体高度和长度分别是100mm和200mm，如图6.8(a)所示。实验中采用的铝棒直径为1mm和1.5mm，长度为500mm。实验开始时突然将右侧的挡板去掉，重力作用下铝棒堆积物便开始流动。

实验开始前用20×20mm的方形格子划分坡体外表面，通过格子的变形来观测坡体结构的失效区域和失效过程。为了深入研究铝棒堆积物的材料力学性质，Bui进行了铝棒堆积物的剪切盒实验^[184]，表明图6.8(a)所用铝棒堆积物的摩擦角为19.8°，粘聚力为零，说明干燥铝棒堆积物具有非粘聚特性。特别需要指出，铝棒堆积物的力学性质和铝棒的力学性质不同。



(a) 铝棒堆积物的实验构型^[184]



(b) 物质点方法计算模型

图6.8 铝棒堆积物的实验构型和计算模型

6.4.1.2 堆积物坍塌流动模拟

此处采用物质点方法对铝棒堆积物坍塌流动问题进行数值模拟，数值模拟按照平面应变问题处理。计算模型见图6.8(b)。计算模型中采用了刚柔接触物质点算法，底座按照刚体处理，底座和铝棒堆积物之间采用了非滑移接触条件。

在计算模型中，将铝棒堆积物左侧的 x 向位移约束。铝棒堆积物采用了 25600 个质点进行离散，底座刚体采用了 5120 个质点进行离散。初始质点间距为 1.25mm，背景网格大小为 2.5mm。铝棒堆积物本构模型为 Drucker-Prager 本构模型，材料参数见表 6.4。

需要说明的是在计算土和结构件相互作用时，结构件材料的弹性模量要比土的弹性模量大 10^3 以上，通常计算结构件需要的时间步长比计算土的时间步长小 30-200 倍，因此将结构件简化为刚体，可以大大节约计算时间。

不同时刻的变形计算结果见图 6.9，图中还给出了等效塑性应变的云纹图，图 6.9 表明与底座接触的材料等效塑性应变最大。数值模拟表明重力作用下铝棒堆积物的流动时间大约为 0.64s。

表 6.4 铝棒堆积物的力学参数^[184]

K MPa	ν	ρ g/cm ³	ϕ deg	c kPa	ψ deg
0.7	0.3	2.65	19.8	0	0

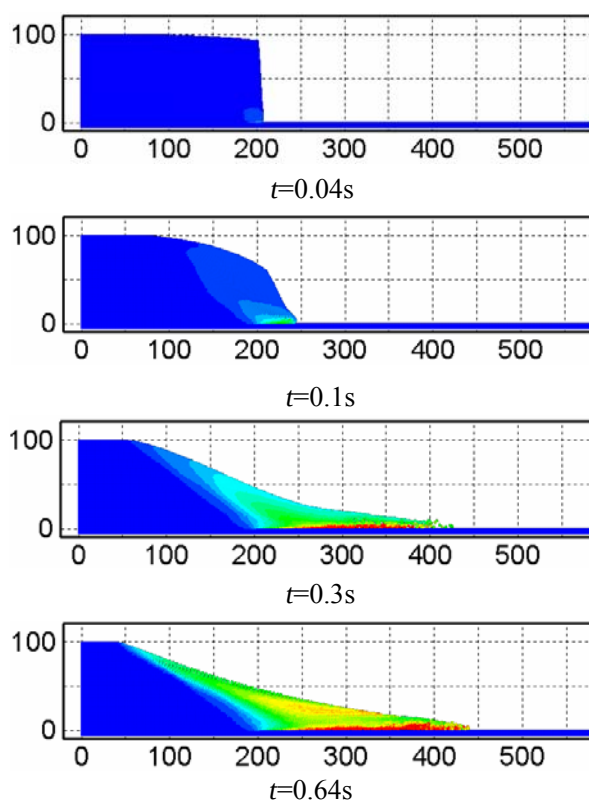


图 6.9 堆积物坍塌流动的刚柔接触 MPM 模拟

图 6.10 给出了实验和数值模拟得到的最终构型。图 6.10 表明坡体休止角的实验结果是 14° ，刚柔接触 MPM 计算得到的休止角也是 14° 。实验和计算均表明坡体的休止角低于其材料的摩擦角 19.8° ，这也证实了前文的分析结论。

图 6.11 将实验得到失效区和计算得到的失效区进行了定量比较，图 6.11 中主要比较了两条曲线，一条曲线代表坡体的坡面(自由面)，一条曲线代表坡体的失效面(等效塑性应变分界线)，失效面将坡体的分为失效区和非失效区。图 6.11 的对比表明，坡体失效区的实验结果和数值模拟结果吻合。

综上所述，带拉伸失效的 Drucker-Prager 弹塑性模型能合理模拟堆积物的坍塌流动过程，数值解和实验值的吻合也验证了刚柔接触物质点算法的有效性。

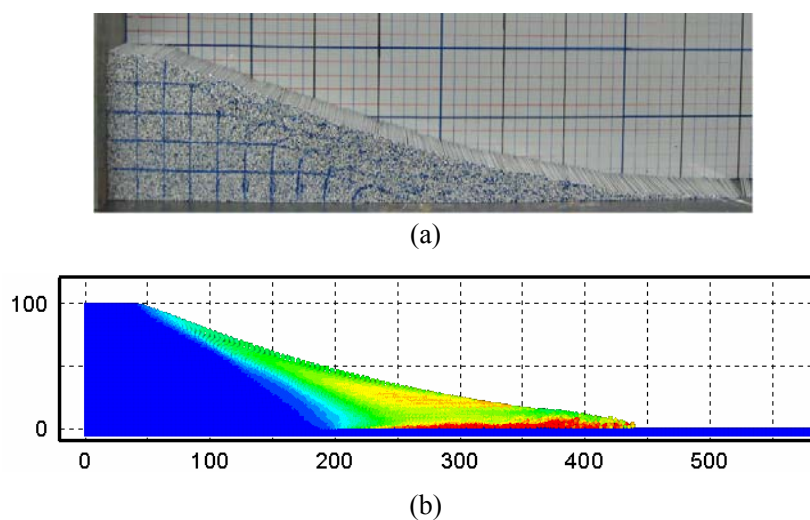


图 6.10 堆积物坍塌后的最终构型，(a) 实验结果，(b) 刚柔接触 MPM

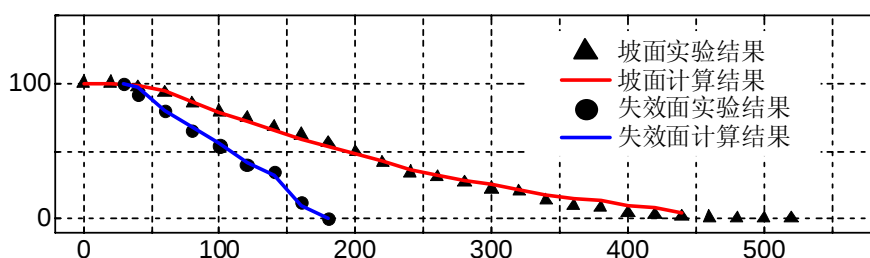


图 6.11 实验与计算的堆积物失效区比较

6.4.2 岩土侵彻分析

6.4.2.1 冲击速度 45m/s

飞行器返回地面时，会和地面产生撞击。在撞击过程，会产生较大的加速度，大的加速度会对飞行器内部的仪表和人员造成伤害，因此，研究飞行器对地面的撞击过程对飞行器的设计有重要的意义。为了研究飞行器对地表的撞击过程，Fasanella 等^[190]开展了半球壳对地表的撞击实验。本节采用物质点算法对半球壳撞击地表的过程进行模拟，并同实验结果进行比较。

半球壳的直径为 0.408m，质量为 12kg，材料为铝合金。实验过程中，半球壳以 45m/s 的速度冲击地面，在半球壳内部装有传感器记录加速度历程。半球壳撞击的地表材料为岩土，文献^[190]将该岩土称为 UTTR 岩土。

计算过程中，将半球壳的材料按照弹性材料模型处理，半球壳材料的密度为 $2.7 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ ，弹性模量为 70GPa，泊松比为 0.3。岩土材料按照 Drucker-Prager 模型考虑，其材料参数见表 6.5。岩土靶体为长方体，其尺寸为 $1200 \times 1200 \times 960 \text{mm}$ ，考虑到问题的对称性，此处采用 1/4 实体模型进行质点离散。计算中，半球壳和岩土靶体之间的摩擦系数 μ 取为零。初始的质点间距取为 6mm，背景网格的格子边长为 12mm。离散后，半球壳的质点数为 26385，靶体的质点数为 1600000 个。接触物质点算法计算表明 20ms 时，半球壳的动能为零值。

为了对比说明问题，此处采用 LS-DYNA 显式有限元软件进行计算，半球壳的单元数为 205 个，靶体的单元数为 43200 个。将接触 MPM 和有限元法得到的侵彻结果和实验结果进行比较，见图 6.12。

表 6.5 UTTR 岩土的材料参数

E MPa	ν	ρ g/cm ³	ϕ deg	c kPa	ψ deg	σ^t kPa
4	0.3	2.2	20°	40.84	0.0	112.21

图 6.12 中给出了侵彻结束后靶体上的塑性应变分布状态，对比表明接触 MPM 和有限元方法得到的靶体塑性应变分布状态一致。物质点算法和有限元算法得到的成坑深度随时间变化曲线见图 6.13，图 6.13 表明两种算法得到的成坑深度基本吻合。以上计算表明，对于岩土靶体的低速侵彻问题，物质点方法和有限元方法均能进行求解。

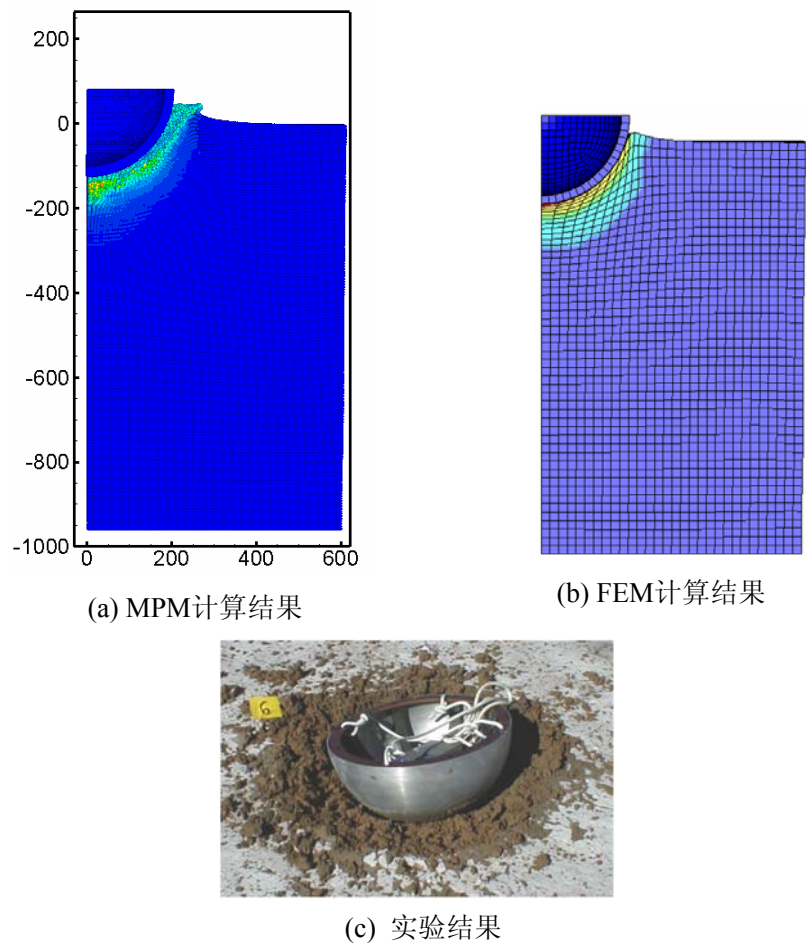


图 6.12 岩土靶低速冲击结果比较(初速 45m/s)

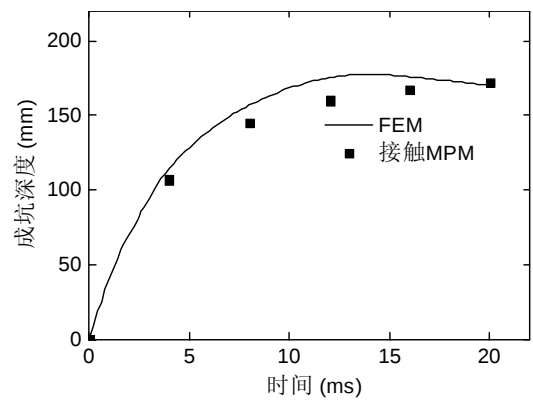


图 6.13 岩土靶低速冲击的成坑深度计算 (45m/s)

6.4.2.2 冲击速度 200m/s

同样对于质量为 12kg 的半球壳，以 200m/s 的速度冲击 UTTR 岩土，此处分别采用接触物质点算法和有限元法进行计算。模拟过程中，将半球壳的材料按照弹性材料模型处理，半球壳材料参数见上节，岩土材料参数见表 6.5。对于该冲击问题，没有实验数据可以参考，此处仅仅进行数值模拟分析。计算中半球壳和岩土靶体之间的摩擦系数 μ 仍然取为零值。

对于 200m/s 速度的岩土冲击问题，弹靶相互作用有限元计算结果见图 6.14 ($t=0.62\text{ms}$)，此时靶体的局部网格变形也在图 6.14 中给出。有限元计算表明，在冲击初期岩土产生了很大的局部变形，网格沿冲击方向被压缩成片状，出现单元负体积，冲击过程计算到 0.62ms 终止。

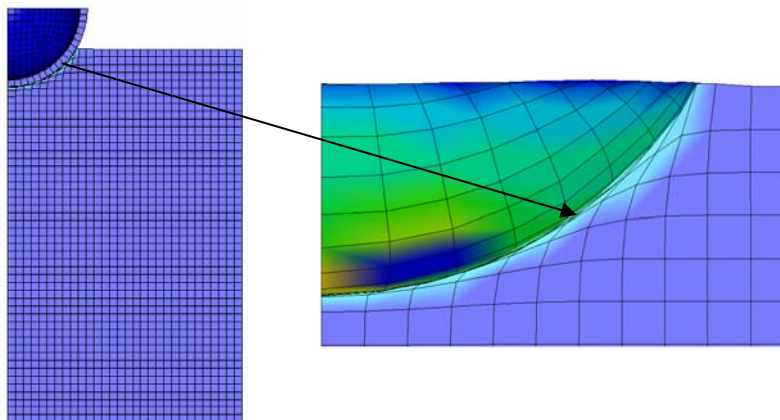


图 6.14 初速 200m/s 冲击岩土靶的有限元结果， $t=0.62\text{ms}$

接触物质点算法表明，弹体速度在 6.6ms 时趋近于零值，不同时刻的弹靶相互作用通过图 6.15 给出，图 6.15 中的云纹图表示塑性应变分布。图 6.15 表明，在侵彻初期，岩土靶的失效区域仅仅限于与弹体接触部位。而在侵彻的 2.2ms 以后，靶体的失效区域逐渐扩大，失效面向靶体内部传播。

虽然有限元计算仅仅给出了侵彻初期的计算结果，但这些结果可以用于接触物质点算法的对比验证。0.62ms 时，有限元计算得到的成坑深度为 98mm，而接触物质点算法给出的成坑深度为 95mm，可见两种数值模拟在侵彻初期得到的计算结果吻合较好。但是，由于不受网格畸变的限制，接触物质点算法能够将整个侵彻过程完整模拟。

综上所述，与传统的有限元方法相比，物质点法能更好地模拟此类颗粒材

料或者软物质的侵彻问题。

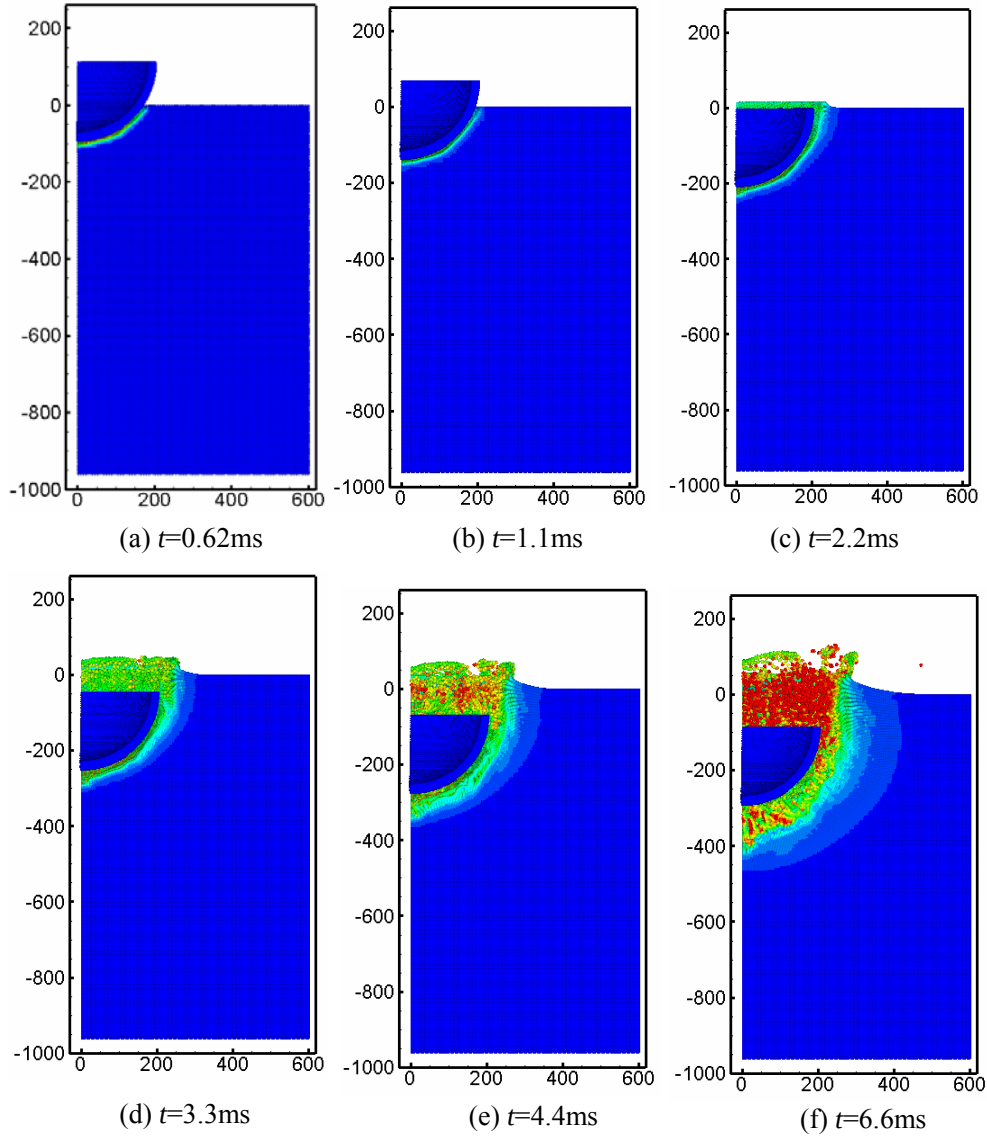


图 6.15 初速 200m/s 冲击岩土靶的接触 MPM 模拟

6.5 本章小结

为了模拟岩土的动力学问题，本章采用了带拉伸失效的 Drucker-Prager 弹塑性本构模型描述岩土本构关系。在该模型中考虑了 Jaumann 应力率和非关联塑性流动法则。

粘土边坡和砂土边坡失效分析表明,与显式有限元方法相比较,物质点方法能更高效地计算边坡的失效过程。采用文中提出的刚柔接触物质点算法,并结合 Drucker-Prager 模型,对堆积物的坍塌流动过程进行了数值模拟,对比表明数值模拟和实验得到的堆积物失效区一致。

对于岩土的冲击侵彻问题,有限元方法在弹靶接触面上出现网格扭曲和单元负体积等问题,有限元计算无法完成该问题的完整求解。不受网格畸变的影响,物质点算法很好地模拟了岩土的侵彻问题。因此,对于此类颗粒材料或者软物质的侵彻问题,采用物质点法进行模拟能够获得较好的计算结果。

第7章 结论

7.1 研究成果

冲击动力学问题在军事和航天航空领域有着重要的应用，并且作为热点问题一直受到关注。本文采用最近发展的物质点法，对金属和岩土冲击动力学问题进行了深入研究。本文不但着重于 OpenMP 并行物质点算法和接触物质点算法的研究，而且注重于将这些算法用于解决工程问题。其次，采用了数值模拟、理论和实验相互验证的方法对文中给出的算法进行验证。

本文的主要研究成果如下：

(1) 在物质点法 OpenMP 并行化中，为解决节点变量计算的数据竞争问题，提出了两种 OpenMP 并行物质点算法：数组扩展法和背景网格区域分解法。用背景网格区域分解法，开展了铅弹超高速撞击铅靶问题的大规模并行计算(1300万质点量级)，并和实验结果进行了比较。通过大规模的物质点法计算，获得了更为精确的碎片云计算结果。

(2) 给出了接触物质点算法的完整数学描述。针对文献中的界面法向量无法满足共线条件问题，提出了一种新的接触界面法向量计算方法，保证了接触计算中的法向量共线条件和动量守恒。采用弹性球对撞问题、Taylor 杆对称撞击以及斜面上弹性球的滚动问题验证了接触物质点算法。进一步将接触物质点算法用于钢珠侵彻薄钢板和尖拱弹贯穿铝靶的模拟，解决了标准物质点算法模拟此类问题中侵彻阻力过大的问题。

(3) 在一般接触物质点算法研究的基础上，提出了刚柔接触物质点算法。采用弹性球撞击刚性面、Taylor 杆撞击刚性面和刚性斜面上弹性球的滚动问题，验证了刚柔接触物质点算法。采用该算法模拟了 Taylor 杆撞击刚性面后的回弹效应，模拟了水珠撞击台阶的大变形以及破碎过程。

(4) 基于带拉伸失效的 Drucker-Prager 模型，结合物质点法模拟了岩土的动力学问题。与显式有限元方法比较，物质点法能更高效地求解边坡失效破坏问题。采用文中提出的刚柔接触物质点算法，对堆积物的坍塌流动过程进行了数值模拟，对比表明数值模拟和实验得到的堆积物失效区一致。采用接触物质点算法模拟了半球壳对岩土的侵彻过程。

本文的工作主要有以下三个创新点:

(1) 提出了数组扩展法和背景网格区域分解法两种 OpenMP 并行物质点算法, 解决了物质点法 OpenMP 并行化中的数据竞争问题。开展了 1300 万质点量级的超高速撞击模拟, 得到了高精度的碎片云计算结果。

(2) 提出了一种新的接触界面法向量计算方法, 保证了接触分析中的共线条件和动量守恒性。提出了将接触物质点算法用于侵彻模拟, 解决了标准物质点算法模拟此类问题中侵彻阻力过大的问题。

(3) 提出了一种刚柔接触物质点算法, 采用该算法和 Drucker-Prager 模型模拟了堆积物的坍塌流动过程, 取得了和实验结果相一致的数值计算结果。

7.2 展望

纵观上述研究成果, OpenMP 并行物质点算法和接触物质点算法的研究已经比较彻底, 超高速撞击问题和中低速侵彻问题的物质点法模拟已经比较完善。结合本人的理论认识和工程实践, 提出以下需要进一步需要开展的工作:

(1) 开展物质点法和欧拉算法的耦合研究。物质点算法采用质点离散, 不受网格畸变限制, 容易模拟物体的破碎。欧拉算法能自然处理物质的流动。因此, 可以进一步将物质点法和欧拉算法的耦合方法用于火烧下含能装置的破坏问题模拟, 以及用于分析接触爆炸问题。

(2) 进一步开展物质点法和有限元法的耦合算法研究。通过背景网格, 利用接触算法建立物质点法和有限元法的耦合关系。

(3) 采用物质点法开展泡沫材料的细观建模方法研究。可以考虑泡沫材料的微结构建立细观模型, 采用质点离散该模型, 通过物质点法分析不同密度和不同微结构下泡沫材料的压缩力学性能。

(4) 结合 MPI 和大规模并行机进行更大规模的物质点法模拟(上亿质点), 进行物理现象的精细捕捉。

参考文献

- [1] 钱伟长.穿甲力学. 北京: 国防工业出版社.1984.
- [2] Meyers M A. Dynamic Behavior of Materials. John Wiley & Sons, 1994.
- [3] Young C W. Penetration equations. Technical Report SAND97-22426, Sandia National Laboratories, 1997.
- [4] Young C W. Simplified Analytical Model of Penetration with Lateral Loading-User's Guide. Technical Report SAND98-0978, Sandia National Laboratories, 1998.
- [5] Forrestal M J, Brar N S, Luk V K. Penetration of strain-hardening targets with rigid spherical-nose rods. ASME Journal of Applied Mechanics, 1991, 58(1):7-10.
- [6] Forrestal M J, Luk V K. Penetration into soil targets, International Journal of Impact Engineering. 1992, 12:427-444.
- [7] Forrestal M J, Tzou D Y, Askari E, Longcope D B. Penetration into ductile metal targets with rigid spherical-nose rods. International Journal of Impact Engineering, 1995, 16:699-710.
- [8] Forrestal M J, Tzou D Y. A spherical cavity-expansion penetration model for concrete targets. International Journal of Solids and Structures, 1997, 34: 4127-4146.
- [9] Hertel E S Jr. A survey of numerical methods for shock physics applications. Technical Report SAND97-1015c, Sandia National Laboratories, 1997.
- [10] Kusnezov D F. Advanced simulation & computing: the next ten years. Technical Report SAND2004-3740P, Sandia National Laboratories, 2004.
- [11] Benioff M R, Lazowska E D. Computational science: ensuring America's competitiveness. President's Information Technology Advisory Committee, 2005.
- [12] Johnson W E, Anderson C E. History and application of hydrocodes in hypervelocity impact. International Journal of Impact Engineering, 1987, 5:423-439.
- [13] Benson D J. Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 1992, 99: 235-394.
- [14] 恽寿榕, 涂侯杰, 梁德寿, 等. 爆炸力学计算方法. 北京: 北京理工大学出版社, 1995.
- [15] Belytschko T, Liu W K, Moran B. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. John Wiley & Sons, 2000.
- [16] Belytschko T, Neal M O. Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and Lagrangian methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991, 31:547-572.
- [17] Hallquist J O, Goodreau G L, Benson D J. Sliding interfaces with contact-impact in large

- scale Lagrangian computations. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 1985, 51:107–137.
- [18] Belytschko T, Neal M O, Contact-impact by the pinball algorithm with penalty, projection, and Lagrangian methods. *Computational Techniques for Contact, Impact, Penetration and Perforation of Solids*, New York, 1989, 103:97-140.
- [19] Hallquist J O. LS-DYNA Theoretical Manual. Livermore Software Technology Corporation. 1998.
- [20] Taylor L M, Flanagan D P. PRONTO 3D a three-dimensional transient solid dynamics program. Technical Report SAND87-1912, Sandia National Laboratories, 1989.
- [21] Scheffler D R, Zukas J A. Practical aspects of numerical simulation of dynamic events:material interfaces. *International Journal of Impact Engineering* , 2000, 24:821-842.
- [22] Bessette G C, Becker E B, Taylor L M,et al. Modeling of impact problems using an h-adaptive, explicit Lagrangian finite element method in three dimensions. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 2003, 192:1649-1679.
- [23] Camacho G T, Ortiz M. Adaptive Lagrangian modeling of ballistic penetration of metallic targets. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 1997, 142:269-301.
- [24] Camacho G T, Ortiz M. Computational modeling of impact damage in brittle materials, *International Journal of Solids and Structures*. 1996, 33:2899-2938.
- [25] Littlefield D L.The use of r-adaptivity in explicit Lagrangian finite element codes, *Proceedings of the 15th US Army Symposium on Solid Mechanics*, 1999:305-320.
- [26] Martineau R L, Prime M B, Duffey T. Penetration of HSLA-100 steel with tungsten carbide spheres at striking velocities between 0.8 and 2.5 km/s. *International Journal of Impact Engineering*, 2004, 30:505-520.
- [27] Resnyansky A D. DYNA-modelling of the high-velocity impact problems with a split-element algorithm. *International Journal of Impact Engineering*, 2002, 27:709-727.
- [28] Børvik T, Hopperstad O S, Berstad T, Langseth M. Perforation of 12mm thick steel plates by 20mm diameter projectiles with blunt, hemispherical and conical noses, part II: numerical simulations. *International Journal of Impact Engineering*, 2002, 27:37-64.
- [29] Attaway S W, Brown M J, Heinsteins M W, et al. PRONTO3D User's Instructions: A Transient Dynamic Code for Nonlinear Structural Analysis. Technical Report SAND98-1361, Sandia National Laboratory, 1998.
- [30] Brown K, Attaway S, Plimpton S, Hendrickson B. Parallel strategies for crash and impact simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 184: 375-390.
- [31] Attaway S W, Hendrickson B A, Plimpton S J, et al. A parallel contact detection algorithm for transient solid dynamics simulations using PRONTO3D. *Computational Mechanics*,

- 1998, 22: 143-159.
- [32] Warren T L, Tabbara M R. Spherical Cavity-Expansion Forcing Function in PRONTO3D for Application to Penetration Problems. SAND97-1174, Sandia National Laboratories, 1997.
- [33] Warren T L, Fossum A F, Frew D J. Penetration into low-strength (23 MPa) concrete: target characterization and simulations. *International Journal of Impact Engineering*, 2004, 30(5):477-503.
- [34] Warren T L, Poormon K L. Penetration of 6061-T6511 aluminum targets by ogive-nosed VAR 4340 steel projectiles at oblique angles: experiments and simulations. *International Journal of Impact Engineering*, 2001, 25:993-1022.
- [35] Vorobiev Y O, Liu B T, Lomov I N, et al. Simulation of penetration into porous geologic media. *International Journal of Impact Engineering*, 2007, 34: 721-731.
- [36] ABAQUS Inc. Getting Started with ABAQUS Version 6.6, ABAQUS Inc, 2006.
- [37] Iqbal M A, Chakrabarti A, Beniwal S, et al. 3D numerical simulations of sharp nosed projectile impact on ductile targets. *International Journal of Impact Engineering*, 2010, 37:185-195.
- [38] Gupta N K, Iqbal M A, Sekhon G S. Experimental and numerical studies on the behavior of thin aluminum plates subjected to impact by blunt and hemispherical nosed projectiles. *International Journal of Impact Engineering*, 2006, 32:1921-1944.
- [39] Gupta N K, Iqbal M A, Sekhon G S. Effect of projectile nose shape, impact velocity and target thickness on deformation behavior of aluminum plates. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, 44:3411-3439.
- [40] MSC Inc. MSC.Dytran User's Manual. MSC.Software Corporation, 1999.
- [41] Wingate C A, Stellingwerf R F, Davidson R F, et al. Models of High Velocity Impact Phenomena. *International Journal of Impact Engineering*, 1993, 14:819-830.
- [42] Wilkins M L. *Computer Simulation of Dynamic Phenomena*. Springer, 1999.
- [43] Birnbaum N K, Tancreto J, Hager K. Calculation of Blast Loading in the High Performance Magazine with AUTODYN-3D. *Proceedings of the Twenty-Sixth DOD Explosives Safety Seminar*, 1994.
- [44] Century Dynamics Inc. AUTODYN-3D Users Manual. Century Dynamics Inc. 1994.
- [45] Tham C Y. Numerical and Empirical Approach in Predicting the Penetration of a Concrete Target by an Ogive-Nosed Projectile. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2006, 42:1258-1268.
- [46] 王肖钧, 胡秀章, 刘胜求. 四边形单元中的沙漏控制. *计算物理*, 1991, 8(3): 312-318.
- [47] 胡秀章, 王肖钧, 李永池. 一种弹塑性弹丸侵彻靶板的滑移面处理. *结构与介质相互作用理论与应用*, 南京: 河海大学出版社, 1993.

- [48] 李永池, 袁福平, 胡秀章等. 卵形头部弹丸对混凝土靶板侵彻的二维数值模拟. 弹道学报, 2002, 14(1):14-19.
- [49] 王峰. 有限元方法及其在高速碰撞中的应用[博士学位论文]. 合肥: 中国科学技术大学, 2007.
- [50] 宋顺成. 轴对称冲击有限元一致质量矩阵迭代解. 力学学报, 1998, 30(3):285-291.
- [51] 宋顺成, 谭多望, 蔡鸿年. 穿破甲有限元的几何非线性及物理参数的确定. 爆炸与冲击, 2002, 22(2):137-143.
- [52] 宋顺成, 谭多望. 高速冲击非线性有限元计算. 西南交通大学学报, 2001, 36:565-571.
- [53] 马天宝, 王静, 宁建国. 一种 VOF 与 PIC 耦合多物质界面处理算法及其在侵彻问题中的应用. 中国科学(G 辑), 2009, 39(9): 1185-1194.
- [54] Couch R, Albright E, Alexander N. The JOY computer code. Technical Report UCID-19688, Lawrence Livermore National Laboratories, 1983.
- [55] McGlaun J M, Thompson S L, Elrick M G. CTH: A three-dimensional shock wave physics code. International Journal of Impact Engineering, 1990, 10:351-360.
- [56] Noh W F, Woodward P. SLIC (Simple Line Interface Calculation). Lecture Notes in Physics, 1976, 59:330-340.
- [57] Youngs D L. Time-Dependent Multi-Material Flow with Large Fluid Distortion. Numerical Methods for Fluid Dynamics. New York: Academic Press, 1982.
- [58] Farenthold E P, Yew C H. Hydrocode simulation of hypervelocity impact fragmentation. International Journal of Impact Engineering, 1995, 17: 303-310.
- [59] Silling S A. CTH reference manual: boundary layer algorithm for sliding interfaces in two dimensions. Technical Report SAND93-2487, Sandia National Laboratories, 1994.
- [60] Scheffler D R. Modeling non-eroding perforation of an oblique aluminum target using the Eulerian CTH hydrocode. International Journal of Impact Engineering, 2005, 32:461-472.
- [61] 刘军, 何长江, 梁仙红. 三维弹塑性流体力学自适应欧拉方法研究. 高压物理报, 2008, 22(01):72-78.
- [62] 何长江, 于志鲁, 冯其京. 高速碰撞的三维欧拉数值模拟方法. 爆炸与冲击, 1999, 19(3): 216-221.
- [63] 马天宝, 宁建国. 三维爆炸与冲击问题仿真软件研究. 计算力学学报, 2009, 26(4):600-603.
- [64] 吴开腾. 爆炸与冲击问题的三维数值模拟及算法研究[博士学位论文]. 北京: 北京理工大学, 2002.
- [65] 马天宝, 郝莉, 宁建国. Euler 多物质流体动力学数值方法中的界面处理算法. 计算物理, 2008, 25(2):133-138.
- [66] 陈龙伟, 孙远翔, 宁建国. 动能弹对混凝土靶板侵彻三维数值模拟. 北京理工大学学

- 报, 2003, 23(5):536-539.
- [67] 王景焘, 张德良, 刘凯欣. 基于 CE/SE 方法的二维 Euler 型多物质流体弹塑性问题计算. 计算物理, 2007, 24(4):395-401.
- [68] Wang J, Liu K, Zhang D. An improved CE/SE scheme for multi-material elastic-plastic flows and its applications. *Computers & Fluids*, 2009, 38(3):544-551.
- [69] 张雄, 陆明万, 王建军. 任意拉格朗日-欧拉描述法研究进展. 计算力学学报, 1997, 14(1): 91-102.
- [70] Benson D J. An efficient, accurate and simple ALE method for nonlinear finite element programs. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1989, 72:305-350.
- [71] Liu W K, Belytschko T, Chang H. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for path-dependant materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1986:227-245.
- [72] Sheng D, Wriggers P, Sloan S W. Improved numerical algorithms for friction contact in pile penetration analysis. *Computers and Geotechnics*, 2006, 33:341-354.
- [73] Sheng D, Nazem M, Carter J P. Some computational aspects for solving deep penetration problems in geomechanics. *Computational Mechanics*, 2009, 44:549-561.
- [74] Liyanapathirana D S. Arbitrary Lagrangian Eulerian based finite element analysis of cone penetration in soft clay. *Computers and Geotechnics*, 2009, 36: 851-860.
- [75] Walker J, Yu H S. Adaptive finite element analysis of cone penetration in clay. *Acta Geotechnica*, 2006, 1:43-57.
- [76] Alme M L, Rhoades C E. A Computational Study of Projectile Melt in Impact With Typical Whipple Shields. *International Journal of Impact Engineering*, 1995, 17:1-12.
- [77] 张雄, 刘岩. 无网格法. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [78] Liu G R, Yan L. A study on numerical integration in element-free Galerkin method. Fourth International Asia-Pacific Conference on Computational Mechanics, Singapore, 1999.
- [79] 张雄, 刘岩, 马上. 无网格法的理论及应用, 力学进展, 2009, 39(1):1-36.
- [80] 顾元通, 丁桦. 无网格法及其最新进展, 力学进展, 2005, 35(3):323-337.
- [81] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Mesh-less methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1-4): 3-47.
- [82] Li S, Liu W K. Meshfree and particle methods and their applications. *Applied Mechanics Reviews*, 2002, 55(1): 1-34.
- [83] Monaghan J J. An introduction to SPH. *Computer Physics Communications*, 1988, 48: 89-96.
- [84] Swegle J W, Hicks D L, Attaway W S. Smoothed particled hydrodynamics stability

- analysis. *Journal of Computational Physics*, 1995, 116:123-134.
- [85] Liu W K, Chen Y, Aziz U. Generalized multiple scale reproducing kernel particle methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139:91-157.
- [86] Liu W K, Chen Y, Chang C T. Advances in multiple scale kernel particle methods. *Computational Mechanics*, 1996, 18:73-111.
- [87] Nayroles P, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element methods: diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 1992, 10:307-318.
- [88] Belyschko T, Touzot G, Gu L. Element free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37:229-256.
- [89] Atluri S N, Zhu T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 1998, 22:117-127.
- [90] Atluri S N, Zhu T. The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics. *Computational Mechanics*, 2000, 25:169-179.
- [91] Libersky L, Petschek A G, Carney T C, et al. High strain largrangian hydrodynamics a three-dimensional SPH code for dynamics material response. *Journal of Computational Physics*, 1993, 109:67-75.
- [92] Stellingwerf R F, Wingate C A. Impact modeling with smooth particle hydrodynamics. *International Journal of Impact Engineering*, 1993, 14: 707-718.
- [93] Benz W, Asphaug E. Simulations of brittle solids using smooth particle hydrodynamics. *Computer Physics Communications*, 1995, 87(1-2): 253-265.
- [94] Campbell J, Vignjevic R, Libersky L. A contact algorithm for smoothed particle hydrodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 184(1): 49-65.
- [95] Vignjevic R, De Vuyst T, Campbell J C. A frictionless contact algorithm for meshless methods. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2006,13(1): 35-48.
- [96] Johnson G R, Stryk R A, Beissel S R. SPH for high velocity impact computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1-4):347-373.
- [97] Johnson G R, Beissel S R. Normalized smoothing functions for SPH impact computations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, 39(16): 2725-2741.
- [98] Johnson G R, Beissel S R, Stryk R A. A generalized particle algorithm for high velocity impact computations. *Computational Mechanics*, 2000, 25(2-3):245-256.
- [99] Johnson G R, Stryk R A, Beissel S R, et al. An algorithm to automatically convert distorted finite elements into meshless particles during dynamic deformation. *International Journal of Impact Engineering*, 2002, 27(10): 997-1013.
- [100] Johnson G R, Stryk R A. Conversion of 3D distorted elements into meshless particles during dynamic deformation. *International Journal of Impact Engineering*, 2003, 28(9):

- 947-966.
- [101] Han Z D, Liu H T, Rajendran A M, et al. The applications of meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approaches in high-speed impact, penetration and perforation problems. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2006, 14(2): 119-128.
- [102] Fahrenthold E P, Horban B A. An improved hybrid particle-element method for hypervelocity impact simulation. *International Journal of Impact Engineering*, 2001, 26(1-10): 169-178.
- [103] Park Y K, Fahrenthold E P. A kernel free particle-finite element method for hypervelocity impact simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 63(5): 737-759.
- [104] Quinn M J. *Parallel Programming in c with MPI and OpenMP*. New York: McGraw-Hill Companies, 2004.
- [105] Grama A, Gupta A, Karypis G. *Introduction to Parallel Computing*(2nd edition). Benjamin-cummings Publishing Company, 2003.
- [106] Har J, Fulton R E. A parallel finite element procedure for contact-impact problems. *Engineering with Computers*, 2003, 19: 67-84.
- [107] Guo Y, Jin X, Ding J. Parallel numerical simulation with domain decomposition for seismic response analysis of shield tunnel. *Advances in Engineering Software*, 2006, 37: 450-456.
- [108] 王裴, 洪涛. 三维光滑粒子流体动力学并行计算程序. *计算物理*, 2006, 23(4):431-435.
- [109] Danielson K T, Uras R A, Adley M D, et al. Large-scale application of some modern CSM methodologies by parallel computation. *Advances in Engineering Software*, 2000, 31:501-509.
- [110] Pantalé O. Parallelization of an object-oriented FEM dynamics code: influence of the strategies on the Speedup. *Advances Engineering Software*, 2005, 36: 361-373.
- [111] Couturier R, Chipot C. Parallel molecular dynamics using OPENMP on a shared memory machine. *Computer Physics Communications*, 2000, 124:49-59.
- [112] Ayguadea E, Gonzaleza M, Martorella X, et al. Employing nested OpenMP for the parallelization of multi-zone computational fluid dynamics applications. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 2006, 66:686-697.
- [113] Thacker R J, Couchman H M P. A parallel adaptive P3M code with hierarchical particle reordering. *Computer Physics Communication*, 2006, 174: 540-554.
- [114] Harlow F H. The particle-in-cell computing method for fluid dynamics. *Methods in Computational Physics*, 1963, 3: 319-343.
- [115] Brackbill J U, Ruppel H M. FLIP: a method for adaptively zoned, particle-in-cell calculations in two dimensions. *Journal of Computational Physics*, 1986, 65:314-343.

-
- [116] Brackbill J U, Kothe D B, Ruppel H M. FLIP: a low-dissipation, particle-in-cell method for fluid flow. *Computer Physics Communications*, 1988, 48:25-38.
- [117] Sulsky D, Chen Z, Schreyer H L. A Particle Method for History-Dependent Materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1994, 118(1-2):179-196.
- [118] Sulsky D, Zhou S J, Schreyer H L. Application of a Particle-in-Cell Method to Solid Mechanics. *Computer Physics Communications*, 1995, 87(1-2):236-252.
- [119] Sulsky D, Schreyer H L. Axisymmetric form of the material point method with applications to upsetting and Taylor impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1-4):409-429.
- [120] Sulsky D, Kaul A. Implicit dynamics in the material-point method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193(12-14):1137-1170.
- [121] Cummins S J, Brackbill J U. An implicit particle-in-cell method for granular materials. *Journal of Computational Physics*, 2002, 180(2):506-548.
- [122] Guilkey J E, Weiss J A. An implicit time integration strategy for use with the material point method. *MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, 2001.
- [123] Guilkey J E, Weiss J A. Implicit time integration for the material point method: Quantitative and algorithmic comparisons with the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 57(9):1323-1338.
- [124] Tan H L, Nairn J A. Hierarchical, adaptive, material point method for dynamic energy release rate calculations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, 191(19-20):2095-2109.
- [125] Love E, Sulsky D L. An energy-consistent material-point method for dynamic finite deformation plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, 65(10):1608-1638.
- [126] Love E, Sulsky D L. An unconditionally stable, energy-momentum consistent implementation of the material-point method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195(33-36):3903-3925.
- [127] Bardenhagen S G, Kober E M. The generalized interpolation material point method. *CMES- Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2004, 5(6):477-495.
- [128] Steffen M, Wallstedt P C, Guilkey J E, et al. Examination and Analysis of Implementation Choices within the Material Point Method (MPM). *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2008, 31(2):107-127.
- [129] Ma S, Zhang X, Lian Y, Zhou X. Simulation of high explosive explosion using adaptive material point method. *CMES-Computer Modeling In Engineering & Sciences*, 2009, 39:101-123.
- [130] York A R II, Sulsky D, Schreyer H L. The material point method for simulation of thin

- membranes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 44: 1429-1456.
- [131] Hu W, Chen Z. A multi-mesh MPM for simulating the meshing process of spur gears. *Computers and Structures*, 2003, 81:1991-2002.
- [132] Bardenhagen S G, Brackbill J U, Sulsky D. The material point method for granular materials. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 2000, 187:529-541.
- [133] Bardenhagen S G, Guilkey J E, Roessig K M, et al. An improved contact algorithm for the material point method and application to stress propagation in granular material. *CMES-Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2001, 2(4): 509-522.
- [134] Parker S G. A component-based architecture for parallel multi-physics PDE simulation. *Future Generation Computer Systems*, 2006, 22:204-216.
- [135] Parker S G, Guilkey J, Harman T. A component-based parallel infrastructure for the simulation of fluid-structure interaction. *Engineering with Computers*, 2006, 22: 277-292.
- [136] Ma J, Lu H, Komanduri R. Structured mesh refinement in generalized interpolation material point (GIMP) method for simulation of dynamic problems. *CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2006, 12(3):213-227.
- [137] Zhang X, Sze K Y, Ma S. An explicit material point finite element method for hyper-velocity impact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, 66:689-706.
- [138] Guilkey J E, Harman T B, Banerjee B. An Eulerian-Lagrangian approach for simulating explosions of energetic devices. *Computers & Structures*, 2007, 85(11-14):660-674.
- [139] Ma S, Zhang X, Qiu X M. Comparison study of MPM and SPH in modeling hypervelocity impact problems. *International Journal of Impact Engineering*, 2009, 36:272-282.
- [140] Lee W H, Painter J W. Material void-opening computation using particle method. *International Journal of Impact Engineering*, 1999, 22:1-22.
- [141] Hu W Q, Chen Z. Model-based simulation of the synergistic effects of blast and fragmentation on a concrete wall using the MPM. *International Journal of Impact Engineering*, 2006, 32(12):2066-2096.
- [142] 王宇新. 多相介质爆炸冲击响应物质点法分析[博士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2006.
- [143] Nairn J A. Material point method calculations with explicit cracks. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2003, 4(6):649-663.
- [144] Guo Y, Nairn J A. Calculation of J-integral and stress intensity factors using The Material Point Method. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2004, 6(3):295-308.
- [145] Nairn J A. On the calculation of energy release rates for cracked laminates with residual stresses. *International Journal of Fracture*, 2006, 139(2):267-293.

-
- [146] Wang B, Karuppiyah V, Lu H, et al. Two-dimensional mixed mode crack simulation using the material point method. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2005, 12(6):471-484.
- [147] Daphalapurkar N P, Lu H, Coker D, et al. Simulation of dynamic crack growth using the generalized interpolation material point (GIMP) method. *International Journal of Fracture*, 2007, 143(1):79-102.
- [148] Chen Z, Hu W, Shen L, et al. An evaluation of the MPM for simulating dynamic failure with damage diffusion. *Engineering Fracture Mechanics*, 2002, 69(17):1873-1890.
- [149] Chen Z, Feng R, Xin X, et al. A computational model for impact failure with shear-induced dilatancy. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 56(14):1979-1997.
- [150] Shen L M, Chen Z. A multi-scale simulation of tungsten film delamination from silicon substrate. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(18-19):5036-5056.
- [151] Shen L M, Chen Z. A silent boundary scheme with the material point method for dynamic analyses. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2005, 7(3):305-320.
- [152] Schreyer H L, Sulsky D L, Zhou S J. Modeling delamination as a strong discontinuity with the material point method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, 191(23-24):2483-2507.
- [153] Sulsky D, Schreyer L. MPM simulation of dynamic material failure with a decohesion constitutive model. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2004, 23(3):423-445.
- [154] Bardenhagen S G, Brydon A D, Guilkey J E. Insight into the physics of foam densification via numerical simulation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, 53(3):597-617.
- [155] Brydon A D, Bardenhagen S G, Miller E A, et al. Simulation of the densification of real open-celled foam microstructures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, 53(12):2638-2660.
- [156] Wieckowski Z, Youn S K, Yeon J H. A particle-in-cell solution to the silo discharging problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 45(9):1203-1225.
- [157] Wieckowski Z. The material point method in large strain engineering problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193(39-41):4417-4438.
- [158] Bardenhagen S G, Brackbill J U, Sulsky D. Numerical study of stress distribution in sheared granular material in two dimensions. *Physical Review E*, 2000, 62(3):3882-3890.
- [159] Coetzee C J, Basson A H, Vermeer P A. Discrete and continuum modelling of excavator bucket filling. *Journal of Terramechanics*, 2007, 44(2):177-186.
- [160] Sulsky D, Schreyer H, Peterson K, et al. Using the material-point method to model sea ice

- dynamics. *Journal of Geophysical Research-Oceans*, 2007, 112(C2):C02S90.
- [161] Zhang H W, Wang K P, Chen Z. Material point method for dynamic analysis of saturated porous media under external contact/impact of solid bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 198(17-20):1456–1472.
- [162] Guilkey J E, Hoving J B, Weiss J A. Computational modeling of multicellular constructs with the material point method. *Journal of Biomechanics*, 2006, 39(11):2074–2086.
- [163] Zhang D Z, Zou Q, VanderHeyden W B, Ma X. Material point method applied to multiphase flows. *Journal of Computational Physics*, 2008, 227: 3159-3173.
- [164] Bardenhagen S G. Energy conservation error in the material point method for solid mechanics. *Journal of Computational Physics*, 2002, 180(1):383-403.
- [165] Anderson C E Jr. An overview of the theory of hydrocodes. *International Journal of Impact Engineering*, 1987, 5:33–59.
- [166] 经福谦等. 实验物态方程导引. 北京: 科学出版社, 1986.
- [167] 王仁, 黄文彬, 黄祝平. 塑性力学引论. 北京: 北京大学出版社, 1992.
- [168] Liu M B, Liu G R, Lam K Y. Investigation into water mitigations using a meshless particle method. *Shock Waves*, 2002, 12(3):181–195.
- [169] De Vuyst T, Vignjevic R, Campbell J C. Coupling between meshless and finite element methods. *International Journal of Impact Engineering*, 2005, 31: 1054-1064.
- [170] Wingate C A, Dilts G A, Mandell D A, et al. Progress in smooth particle hydrodynamics. Technical Report LA-UR-98-300, Los Alamos National Laboratories, 1998.
- [171] Voyiadjis G Z, Palazotto A N, Gao X L. Modeling of metallic materials at high strain rates with continuum damage mechanics. *Applied Mechanics Review*, 2002, 55(5):481-493.
- [172] Candel A E, Dehler M M, Troyer M. A massively parallel particle-in-cell code for the simulation of field-emitter based electron sources. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 2006, 558:154-158.
- [173] Chandra R, Dagum L, Kohr D, et al. *Parallel Programming in OpenMP*. Morgan Kaufmann Publishers, 2001.
- [174] Chapman B, Jost G, VanderPas R. *Using OpenMP : portable shared memory parallel programming*. The MIT Press, 2007.
- [175] Johnson G R, Holmquist T J. Evaluation of cylinder-impact test data for constitutive model constants. *Journal of Applied Physics*, 1988, 64:3901-3910.
- [176] Mehra V, Chaturvedi S. High velocity impact of metal sphere on thin metallic plates: a comparative smooth particle hydrodynamics study. *Journal of Computational Physics*, 2006, 212:318-337.
- [177] Beissel S R, Gerlach C A, Johnson G R. Hypervelocity impact computations with finite

- elements and meshfree particles. *International Journal of Impact Engineering*, 2006, 33:80-90.
- [178] Anderson C E Jr, Trucano T G, Mullin S A. Debris cloud dynamics. *International Journal of Impact Engineering*, 1990, 9: 89-113.
- [179] Wang F J, Wang L P, Cheng J G, et al. Contact force algorithm in explicit transient analysis using finite-element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2007, 43:580-587.
- [180] Chapman D J, Radford D D, Reynolds M, et al. Shock induced void nucleation during Taylor impact. *International Journal of Fracture*, 2005, 134:41-57.
- [181] Seoa S W, Min O K, Lee J H. Application of an improved contact algorithm for penetration analysis in SPH. *International Journal of Impact Engineering*, 2008, 35: 578-588.
- [182] Piekutowski A J, Forrestal M J, Poormon K L, et al. Perforation of aluminium plates with ogive-nose steel rods at normal and oblique impacts. *International Journal of Impact Engineering*, 1996, 18:877- 887.
- [183] Liu G R, Liu M B. *Smoothed Particle Hydrodynamics: a meshfree particle method*. World Scientific, 2003.
- [184] Bui H H, *Lagrangian Mesh-free Particle Method(SPH) for Large Deformation and Post-failure of Geomaterial using Elasto-plastic Constitutive Models* [Ph. D. thesis], Japan: Ritsumeikan University, 2006.
- [185] Coetzee C J, Vermeer P A, Basson A H. The modelling of anchors using the material point method. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2005, 29:879-895.
- [186] Tanaka H, Momozu M, Oida A, et al. Simulation of soil deformation and resistance at bar penetration by the Distinct Element Method. *Journal of Terramechanics*, 2000, 37:41-56.
- [187] Itasca Consulting Group Inc. *FLAC-Fast Lagrangian Analysis of Continua User's Manual* (Version 5.0). Minneapolis: Itasca Consulting Group Inc, 2005.
- [188] Chen W F, Mizuno E. *Nonlinear analysis in soil mechanics*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1990.
- [189] 张雄, 王天舒. *计算动力学*. 北京:清华大学出版社, 2007.
- [190] Fasanella E L, Jones Y, Knight N F Jr, et al. Low velocity earth-penetration test and analysis. Technical Report: AIAA-2001-1388, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2001.
- [191] 郑颖人, 沈珠江, 龚晓南. *广义塑性力学—岩土塑性力学原理*. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002.
- [192] 张雄. 冲击爆炸三维物质点法数值仿真软件 MPM3D:中国, 2009SRBJ4761. (计算机软件著作权登记号)
- [193] Andersen S, Andersen L. Modelling of landslides with the material-point method.

Computational Geosciences, 2010, 14:137-147.

[194] 马上. 冲击爆炸问题的物质点无网格法研究[博士学位论文]. 北京: 清华大学, 2009.

致 谢

衷心感谢导师张雄教授对本人的精心指导，他的言传身教将使我终生受益。
感谢陆明万教授、邱信明副教授对我的指导和帮助。

衷心感谢郝志明研究员、陈小伟研究员和尹益辉研究员对我的指导和帮助。
感谢计算动力学实验室同窗们，与他们的讨论使我收获良多。

本课题承蒙国家自然科学基金(10872107)和 973 项目(2010CB832701)资助，
特此致谢。

感谢家人的鼓励和支持。



声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名：_____日 期：_____

个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果

个人简历

1977 年 6 月 4 日出生于陕西省华县。

1995 年 9 月考入西安交通大学工程力学系，1999 年 7 月本科毕业并获得工学学士学位。

2002 年 9 月考入中国工程物理研究院北京研究生部固体力学专业，2005 年 7 月毕业并获得工学硕士学位。

2006 年 9 月考入清华大学航天航空学院攻读力学博士学位至今。

发表的学术论文

- [1] Huang P, Zhang X, Ma S, et al. Shared Memory OpenMP Parallelization of Explicit MPM and Its Application to Hypervelocity Impact. CMES-Computer Modeling In Engineering & Sciences, 2008, 38:119-147. (SCI 收录, 检索号 421YG; EI 收录, 检索号 20091311979890)
- [2] 黄鹏, 徐兵. 空间飞行条件下带涂层锥壳的热分析. 宇航学报, 2007, 28:1381-1384.(EI 收录, 检索号 20081211161741)
- [3] 黄鹏, 张雄, 马上, 等. 基于 OpenMP 的三维显式物质点法并行化研究. 计算力学学报, 2010, 27:21-27.(EI 源刊)
- [4] Huang P, Zhang X, Ma S, et al. Contact Algorithms for the Material Point Method in Impact and Penetration Simulation. International Journal for Numerical Methods in Engineering. (SCI 源刊, 已录用)
- [5] Huang P, Zhang X, Huang X C, et al. Material point method and application to impact and penetration. Proceedings of 25th International Symposium on Ballistics, Beijing, 2010, 1359-1366. (国际会议)
- [6] Ma Z T, Zhang X, Huang P. An object-oriented MPM framework for simulation of large deformation and contact of numerous grains. CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2010, 55:61-88.(SCI 源刊)
- [7] 黄鹏, 张雄. 显式物质点法的格式比较. 第五届全国爆炸力学实验技术学术会议论文集, 2008, 220-228.

研究成果

- [1] 侵彻爆炸问题的自适应物质点无网格法研究，国家自然科学基金(10872107，参加人)
- [2] 强冲击荷载下结构破坏过程的建模与关键算法，国家 973 项目子课题(2010CB832701，参加人)