

密级：公开

波动与碰撞非线性动力学问题的 最小二乘无网格法

Least Square Meshless Method on Nonlinear
Dynamical Problems of Wave and Impact

(申请清华大学工学硕士学位论文)

院(系、所)： 清华大学工程力学系

专 业 ： 固体力学

研 究 生 ： 胡 炜

指 导 教 师 ： 陆明万 教授

二零零三年六月

波动与碰撞非线性动力学问题的最小二乘无网格法

请将中文封面左边沿涂上胶水后对齐此基线粘贴，注意封面应将基线刚好盖住。

胡
炜

独创性声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得清华大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

签名：_____日期：_____

关于论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文的复印件，允许该论文被查阅和借阅；学校可以公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存该论文。

(涉密的学位论文在解密后应遵守此规定)

签 名：_____导师签名：_____日 期：_____

摘 要

无网格方法作为一种新型数值计算方法,可以不依赖于网格建立近似函数,从而有效避免了复杂的网格划分过程和网格畸变等不利影响,在处理非线性力学问题上有独特的优势。

本文引入并详细论述了加权最小二乘无网格方法,它利用移动最小二乘法构造近似函数,在离散方法上既吸收了配点法无需数值积分、计算量小的优点,又具有迦辽金法稳定性好、精度高的优势,是一种完全的无网格方法。

本文采用显式时间积分格式求解波传播问题,通过先时间域离散后空间域离散的办法,建立了加权最小二乘无网格法处理动态问题的求解方程,并基于理论和数值分析指出加权最小二乘无网格法的最大允许时间步长是相对较大的。算例分析表明,加权最小二乘无网格法相对无网格迦辽金法和直接配点法初步体现出精度和效率上的综合优势。

本文研究了弹性光滑接触的碰撞过程,并就加权最小二乘法在如何判断接触以及如何在求解方程中引入接触条件方面做了详细的讨论,在最后的求解方程中通过罚函数法引入接触条件,并通过附加约束的方法消除刚度阵的奇异性。

本文进一步研究了波动与碰撞的非线性动力学问题,采用三参数的 Mooney-Rivlin 超弹性材料,在 Lagrange 坐标下利用 Green 应变张量和第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量推导了加权最小二乘无网格法同时处理材料非线性弹性和几何非线性问题的求解方程,在静态和动态算例中都取得了理想的计算效果,为该方法处理材料非线性问题打下了良好的基础。

关键词:加权最小二乘法,弹性波,大变形,超弹性,接触

Abstract

As a new-style numerical method, meshless method establishes trial functions independent of elements, thus it has some advantage to solve nonlinear mechanical problems because of effectively abstaining from complex meshing and disadvantageous influence of elements distorting.

Weighted Least-Square Meshless Method is introduced and discussed in detail. WLSM, an absolute meshless method whose trial functions are developed by moving least-square method, not only is much cheaper by dispensing with numerical integral as collocation method but also has the advantage in stability and accuracy as Galerkin method.

Explicit time integral is introduced for the problem of wave propagation. The WLSM equation for dynamical problems is established in the way that discreteness in the coordinate of time is first and in the coordinate of space second. It is concluded by the theory and numerical study that the maximal allowable length of time step of WLSM is longer. Numerical studies show that WLSM is better in accuracy and efficiency than Direct Collocation Method and Galerkin method.

The impact with elastic smooth contact is studied, and it is discussed how to judge the contact and import it to the WLSM equation in detail. Penalty method is introduced to solve the contact, and the singularity of equation is ridden up by appending artificial constraint.

Ulteriorly, the nonlinear dynamical problem of wave and impact is considered. Three-parameter model of Mooney-Rivlin hyperelastic material studied, the WLSM equation for nonlinear elastic and nonlinear geometrical problems is established by Green strain tensor and the Second Piola - Kirchhoff stress tensor in Lagrange frame. And fine result is obtained in numerical experiment of static and dynamical problems. This study prepares for the further application on the nonlinear material problems.

Key words: weighted least-square meshless method, elastic wave, large deformation, hyperelastic, contact

目 录

摘要	
Abstract (英文摘要)	
目 录	
第一章 引言	1
1.1 无网格方法	1
1.1.1 无网格方法研究进展	1
1.1.2 无网格方法研究综述	3
1.1.3 无网格方法基本原理	4
1.1.4 无网格方法近似方案	5
1.2 无网格方法的应用	7
1.2.1 在动力学问题中的若干应用	7
1.2.2 在非线性问题中的若干应用	8
1.2.3 本文工作的应用背景	9
1.3 本文的主要工作	10
第二章 加权最小二乘无网格法	11
2.1 移动最小二乘近似	11
2.1.1 移动最小二乘近似的基本方法	11
2.1.2 基向量P以及权函数W的选取	13
2.2 加权最小二乘无网格法	14
2.3 算例分析	16
2.3.1 悬臂梁问题	16
2.3.2 带孔方板问题	20
第三章 大变形弹性波问题	23
3.1 线弹性小变形弹性波问题	23
3.1.1 弹性波问题的提法	23

3.1.2	最小二乘法求解格式	24
3.1.3	直接配点法和EFG法求解格式	27
3.1.4	算例分析	29
3.1.4.1	一维杆在冲击载荷作用下弹性波传播问题	29
3.1.4.2	Lamb问题	36
3.2	大变形问题	39
3.2.1	Lagrange描述	39
3.2.2	应变、应力的度量和平衡方程的形式	40
3.2.3	最小二乘法求解格式	42
3.2.3.1	域内方程的建立	42
3.2.3.2	边界条件的处理	46
3.2.3.3	非线性方程组的求解	48
3.2.4	算例分析	49
3.2.4.1	一维杆拉伸问题	49
3.2.4.2	二维梁弯曲问题	51
3.2.4.3	二维杆受冲击载荷问题	53
第四章	超弹性体接触碰撞问题	55
4.1	超弹性体问题	55
4.1.1	超弹性体本构关系	55
4.1.2	算例分析	59
4.1.2.1	一维杆拉伸问题	59
4.1.2.2	二维杆受冲击载荷问题	60
4.2	接触问题	62
4.2.1	弹性光滑接触条件	62
4.2.2	刚体位移的处理	63
4.2.3	接触条件引入最小二乘法	64
4.2.4	算例分析	65
4.2.4.1	一维杆和光滑刚性墙正碰问题	65
4.2.4.2	正方形板和光滑刚性墙正碰问题	68

目 录

结 论.....	72
参考文献.....	73
致谢.....	76
附录 I MLS 近似函数关于空间坐标的导数形式	77
附录 II 超弹性体接触碰撞问题程序流程图.....	78
个人简历、在学期间的研究成果及发表的学术论文.....	79

第一章 引言

在工程技术领域内，由于计算机技术的飞速发展，使得有限元等数值计算方法在计算效率和精度上有了全面的提升，从而得到了充分的应用。但是，在应用过程中，有限元方法也遇到了其固有的缺陷，如模拟锻造成形过程和高速撞击过程中所遇到的结构几何畸变问题、预测动态裂纹扩展路径问题以及某些特殊情况下的奇异性问题和高频振荡问题等。以上情况的相似之处是，在计算过程中网格产生很大的畸变，而有限元方法其插值函数依赖于网格，一旦网格发生畸变，计算就会失效。为解决这些问题就必需进行网格重构，生成新的网格信息，但这对计算精度和计算速度产生了较大的影响。

无网格方法中形成近似函数的过程是基于一系列节点进行的，并不依赖于网格，这样既避免了网格划分的复杂过程（插值点可任意布置），又不会碰到网格畸变这样的问题，所以这种方法具有重要的研究价值和应用价值。

本章阐述了无网格方法的基本思想和发展现状，特别说明了在动态问题和非线性问题方面若干应用的情况。

1.1 无网格方法

1.1.1 无网格方法研究进展

无网格方法产生于二十多年前，刚开始的时候发展较缓慢，近几年才逐渐受到重视，很多新的无网格方法相继诞生。

最早的无网格方法是光滑质点流体动力学法（Smoothed Particle Hydrodynamics Method，简称 SPH）^[1]，它是由 Lucy 在 1977 年提出的^[2]。这种方法一开始用于处理天体物理现象中无边界星系爆炸问题，并取得了成功。但是由于这种方法在精度和稳定性方面存在问题，所以一直没有得到更为广泛的应用。随后在八十年代，Monaghan^[3]等人在该方法的

研究与应用中作出了突出贡献，他们将 SPH 方法发展为核函数法。近几年，Swegle^[4]和 Dyka^[5]提出了 SPH 方法不稳定的起因及稳定化方案，另外 Jonhson^[6]等人也提出了一些改善应变计算的方法。随着 SPH 的日益成熟，这种方法开始被广泛应用于水下爆炸仿真模拟、高速碰撞材料动态响应的数值模拟等领域。

Nayrdes 等人^[7]在 1992 年提出了散射元法 (Diffuse Element Method , 简称 DEM) , 并且用这种方法分析了 Poisson 方程和弹性问题。在该方法中, Nayrdes 最先将 80 年代初由 Lancaster 等人^[8]提出的移动最小二乘近似法 (Moving Least-square Method , 简称 MLS) 引入 Galerkin 法中, 得出具有 C^1 连续性的近似解, 而一般的有限元解只有 C^0 阶连续。

1994 年, 美国西北大学的 Belytschko 在 Nayrdes 等人的工作基础上发展出一种基于 MLS 的新方法, 称为无单元伽辽金法 (Element-free Galerkin Method , 简称为 EFG)^[9,10]。Lu 利用 EFG 对固体力学的许多问题进行了分析, 并且在模拟动态裂纹扩展问题上取得了很好的效果^[11]。

西北大学的另一位学者 W.K.Liu 将传统的粒子方法与小波概念结合起来提出了再生核粒子法 (Reproducing Kernel Particle Method , 简称 RKPM)^[12]。由于结合了小波的概念, RKPM 可以利用小波函数的多尺度分析思想派生出尺度再生核粒子法 (Multi Scale Reproducing Kernel Particle Method , 简称 MRKPM) , 通过构造了一系列可同时伸缩和平移的窗函数, 实现了 RKPM 的自适应分析, 这样一来可用于对局部问题进行细致的数值分析。其后 Liu 等人使用 RKPM 方法对大量问题进行了数值分析, 如结构动力学问题^[13]等。

1995 年, J.T.Oden 和 Duarte^[14]提出了 “ Hp-Clouds ” 无网格方法, 该方法利用最小二乘原理建立单位分解函数, 用来进行场量近似, 然后通过 Galerkin 变分建立离散模型。Oden 严格证明了通过在 Hp-Clouds 空间引入单位分解函数, 可以建立任意阶连续光滑的基函数。最近, Oden、Duarte 和 Zienkiewicz 等^[15]又提出了 “ New Clouds-Bases FEM ” , 这种方法需要借助有限元网格, 虽然破坏了 “ 无网格 ” 的部分特性, 但给解决问题带来了方便。

1996年,西班牙学者 E.Onate 和 Idelsohn 等^[16]提出了有限点法(Finite Point Method, 简称 FPM), 该法采用 MLS 来构造形函数, 采用配点格式进行离散, 是一种无需背景网格的完全无网格方法, 它主要应用于流体动力学领域。

同样在 1996 年, 波兰学者 Liszka 等^[17]提出了“ Hp-Meshless Clouds Methods ”, 该方法不同于 Oden 的“ Hp-Clouds ”法, 它主要采用配点格式来求解, 同样也是一种完全的无网格方法。

近一段时间, 著名的力学家 Atluri 将边界元法的思想引入到无网格方法的研究当中, 发展了局部边界积分法(Local boundary integral equation method, 简称 LBIE)^[18]和局部 Petrov 迦辽金无网格法(Meshless Local Petrov-Galerkin Method, 简称 MLPG)^[19]。它们都是基于移动最小二乘原理来建立对场函数的近似, 而且在积分时不需要背景网格, 是完全的无网格方法。另外, 由于引入了边界元的思想, 相对其他无网格方法, 它们在处理边界条件尤其是复杂边界条件方面具有优势。

笔者所在的清华大学计算动力学研究室近几年也一直关注无网格方法的研究进展^[20], 并且在基于径向基函数的配点型无网格方法方面取得了一些研究成果^[21]。2001 年张雄等人^[22]开始提出了最小二乘配点型无网格法(Least-Square Collocation Meshless Method, 简称 LSCM), 它采用 MLS 近似函数, 域内引入辅助节点, 然后在最小二乘的意义下建立泛函。与直接配点法(Direct Collocation Meshless Method, 简称 DCM)相比, LSCM 的计算精度有了大幅度的提高。

1.1.2 无网格方法研究综述

以上所列举的无网格方法中, 有多种形函数的构造方法, 其中主要有核函数近似、移动最小二乘近似和单位分解近似, 后经证明发现前两者是单位分解法的特例。随后, Belytschko 等^[1]又进一步证明了它们之间的联系性。图 1.1 显示了流行的无网格近似方法之间的谱系关系^[1]。

在无网格方法后来的发展过程中, 尽管出现了多种形函数的插值方法, 但是离散求解方程的方案只有两种: Galerkin 法和配点法。

Galerkin法由于用到了数值积分，所以需要背景积分网格。它虽然可以得到较高的精度，但使得完全无网格方法中的许多优点无法体现。另外，由于无网格近似的形函数比较复杂，因此数值积分的阶次要求很高，虽然最后的系数矩阵是对称的，但计算量仍然很大，这也是Galerkin法的一个缺点。

和Galerkin法相比，配点法不需要任何背景网格，是完全的无网格方法。另外，配点法形成求解方程的步骤也较简单，计算量比较小。但是，它的缺点是精度不高、稳定性不好，并且形成的刚度矩阵不对称。

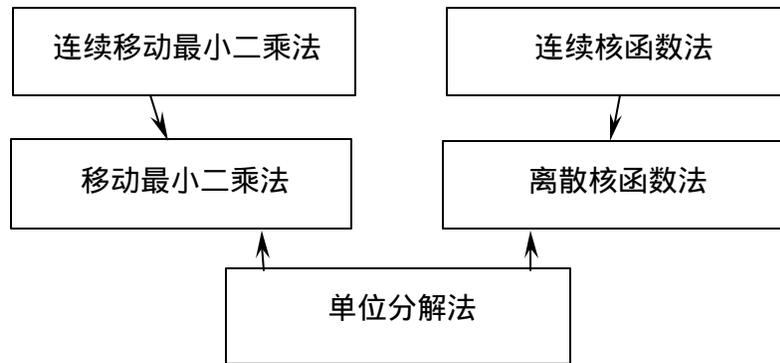


图 1.1 流形的无网格近似方法之间的谱系关系

1.1.3 无网格方法基本原理

考虑以下的一般弹性力学问题：

$$\begin{cases} A(\mathbf{u}) = \mathbf{p} & \mathbf{u} \in \Omega \\ B(\mathbf{u}) = \mathbf{t} & \mathbf{u} \in \Gamma_f \\ \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} & \mathbf{u} \in \Gamma_u \end{cases} \quad (1-1)$$

其中 Ω 代表定义域， Γ_u 为位移边界， Γ_f 为力边界。A 和 B 为给定微分算子， \mathbf{u} 为场变量， \mathbf{p} 为域内给定值， \mathbf{t} 为力边界 Γ_f 处给定值，同时在位移边界给定位移为 $\hat{\mathbf{u}}$ 。

处理上面的微分方程组最一般的方法是用加权残差法，其格式为：

$$\int_{\Omega} W \cdot [A(\mathbf{u}) - \mathbf{p}] d\Omega + \int_{\Gamma_i} \bar{W} \cdot [B(\mathbf{u}) - \mathbf{t}] d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \bar{\bar{W}} \cdot (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0 \quad (1-2)$$

其中 W 、 \bar{W} 和 $\bar{\bar{W}}$ 为任意权函数。

加权残差法的关键是近似函数的构造和离散方案。在有限元方法中，采用网格对区域进行划分，并且在各网格子区域内构造近似函数；如果近似函数的构造是基于节点而不是网格，则被称为无网格近似，这也正是无网格方法的理论基础。

现有大部分无网格近似方法的一个共同点是其权函数具有紧支特性，也就是说，它非零的子域要比剩余的区域小很多。与节点相关联的紧支子域通常也被称为节点的影响区域。在二维问题中，常用的紧支子域形状为盘状或矩形^[1]，如图 1.2。其中粗线表示求解域，细线表示某个节点对应权函数的紧支子域。可以看到，子域之间有相互重叠的部分。

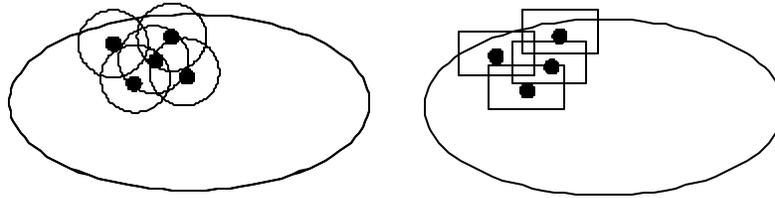


图 1.2 二维问题中常用的紧支子域

Onate 等人提出了无网格方法应满足的条件^[16]：

- (1) 对未知函数及其偏导数的离散必须只依赖于分析域中所布点的位置及由此而得的参数。
- (2) 权函数及其偏导数应只取决于分析域中点的位置。
- (3) 完全无网格法不需要体积分、面积分等数值积分过程。
- (4) 任何体积分或面积分应不依赖所选取的插值步骤。

1.1.4 无网格方法近似方案

以下简要介绍无网格方法的两种主要近似方案——核函数近似和移动最小二乘近似，它们发展得很成熟，使用得也最为广泛。

以区域 Ω 中定义的函数 $u(\mathbf{X})$ 为例进行说明。在区域 Ω 内，取一组离散的节点 $\mathbf{X}_I (I=1,2,\dots,N)$ 。

1. 核函数近似方案

核函数近似方法主要用于 SPH 和 RKPM 方法。 $u(\mathbf{X})$ 利用核函数进行如下近似：

$$u^h(\mathbf{X}) = \int_{\Omega} w(\|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\|, h) \cdot u(\mathbf{Y}) d\Omega_{\mathbf{Y}} \quad (1-3)$$

其中 $w(\|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\|, h)$ 被称为核函数或权函数，具有紧支性， h 是紧支域尺寸的一个度量。紧支核函数的引入使得近似方案具有局部意义，即 $u^h(\mathbf{X})$ 仅仅取决于那些紧支域包含 \mathbf{x} 的节点。

近似计算完成后，必须建立相应的离散形式。一旦选取了一种积分离散的方案，则有：

$$u^h(\mathbf{X}) = \sum_{I=1}^N \Phi_I(\mathbf{X}) \cdot u_I \quad (1-4)$$

$$\Phi_I(\mathbf{X}) = w(\|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\|) \cdot \Delta v_I \quad (1-5)$$

其中 Δv_I 是关于节点 \mathbf{X}_I 的某种区域度量。 Φ_I 被称为形函数。一般说来，由于 $u_I \neq u^h(\mathbf{X}_I)$ ，所以 u_I 并不代表节点 \mathbf{X}_I 处的场函数值，就是说这里的形函数不是插值函数，不满足 Kronecker δ 性质。

2. 移动最小二乘近似方案

$u(\mathbf{X})$ 的近似 $u^h(\mathbf{X})$ 可用多项式表示为：

$$u^h(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^m P_i(\mathbf{X}) \cdot a_i(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{P}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{X}) \quad (1-6)$$

其中， $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ 为多项式基向量， $\mathbf{a}(\mathbf{X})$ 为系数向量， m 代表基的项数。

移动最小二乘近似通过令 $u^h(\mathbf{X})$ 与对应节点场函数值 u_I 之差的加权平方和取最小来构造近似函数，即使下式取最小值：

$$J = \sum_{I=1}^N w_I(\mathbf{X}-\mathbf{X}_I) \cdot [\mathbf{P}^T(\mathbf{X}_I) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{X}) - u_I]^2 \quad (1-7)$$

其中 $w_I(\mathbf{X}-\mathbf{X}_I)$ 为与节点 \mathbf{X}_I 相关的权函数。可以看到权函数 $w_I(\mathbf{X}-\mathbf{X}_I)$ 是空间坐标 \mathbf{x} 的函数，因此在计算时，由于每个节点位置的不同，权函数

$w_i(\mathbf{X}-\mathbf{X}_i)$ 参数取值也不同, 这样在每点都需要计算 $\min(J)$, 即每一个节点的近似函数都不同, 故称近似函数是“移动”的。这样的好处是每一个节点都可以令权函数在其上取最大值, 提高计算精度。

由于本文所用的近似方案为移动最小二乘近似, 所以在后面的内容中将有更为详细的讨论。

1.2 无网格方法的应用

无网格方法从诞生至今已经有二十多年的历史, 人们在探讨算法本身的同时, 也将其应用于科研和工程的很多领域。

1.2.1 在动力学问题中的若干应用

动力学问题的数值方法涉及到空间域离散和时间域离散。无网格方法由于产生时间较短, 所以在时间域离散方面的研究成果不多, 主要集中在空间域的离散方面。

通过数值方法对瞬态问题的研究开始于五十年代早期^[23], Hydrocodes和Wave Propagation codes的产生就是为了帮助人们解决发生在流体或固体碰撞、穿透等情况下声波特别是激波的传播问题。八十年代以后, 由于SPH法的日益成熟, 作为一种离散方法它开始被逐步应用到动力学问题当中^[24], 成为最先应用于这一领域的无网格方法。

SPH法在流体动力学问题中的应用很广。国内也有相应的研究, 比如贝新源等人在1995年使用SPH法模拟了流体三维斜高速碰撞过程^[25]。他们的研究发现SPH法的逻辑简单, 比较容易实现三维空间复杂流场模拟, 在完全Lagrange描述下可以顺利处理大变形问题, 也可以较好处理断裂、空穴甚至粒子云现象。但是他们也发现当问题涉及不同属性的材料交界时, SPH法模拟会出现明显的数值振荡。其实SPH法的不稳定问题很早就出现了, 但一直没有得到完全的解决, 当SPH法逐渐应用到固体领域时, 这个问题就更显尖锐。J.P.Gray等人^[26]指出SPH法的不稳定问题影响通常不大, 但在弹性问题和脆性体问题中的影响却很严重, 他

们也因此提出可以通过引入人为应力的方法改善其稳定性。

Gary在1999年研究了将移动最小二乘近似法应用于流体动力学问题的途径^[27],并且通过算例表明MLS法由于其近似函数导数具有线性连续性,所以在解决SPH法面临的三个难题(边界条件的处理、应变及扭转的误差率和拉压状况下的不稳定性)方面有很大的突破。

Krysl和Belytschko等人在利用无网格迦辽金法模拟裂纹的动态扩展问题方面做了大量的工作。1999年他们利用EFG模拟了有限平板中混合型裂纹的扩展、三维实体中币状裂纹的扩展以及处于拉伸和扭转状态下三维棒中裂纹的扩展情况,并得到了很好的结果^[28]。

1.2.2 在非线性问题中的若干应用

力学领域内的非线性问题一般分为材料非线性、几何非线性和边界条件非线性。无网格方法不依赖网格,十分适宜处理非线性特别是几何非线性问题。

J.S.Chen等人在1996年做了关于橡胶的大变形问题的分析^[29],其中他们利用了再生核粒子法作为近似方案。通过对RKPM方法的研究,针对其在边界处近似函数不满足Kronecker \mathbf{d} 性质的问题,文中提出了一种直接转换法取代拉氏乘子法来处理边界条件。

对于线性和非线性薄板结构的数值分析在应用力学和许多工程领域内一直是个挑战。Li、Hao和W.K.Liu等人在2000年通过引入窗函数(window function)来构造高阶的近似函数^[30],从而有效的避免了刚度阵条件数大和数值阻尼问题,很好的利用EFG解决了薄板问题。

K.M.Liew等人在2002年发表的论文中全面阐述了利用RKPM解决大变形问题的过程^[31],特别提到近似函数无法在边界处满足Kronecker \mathbf{d} 性质的问题。他们研究发现通过罚函数引入强制边界条件的效果是令人满意的,并且通过几何非线性和材料非线性问题的算例分析发现无网格模型完全可以在精度和效率上和成熟的有限元法相比较。

B.N.Rao等人在2001年发表了应用无网格法和有限元法分析裂纹的破坏过程的论文^[32]。他们在对I型和混合型线弹性裂纹的破坏行为的模

拟过程中,使用EFG处理靠近裂纹的区域,而有限元法则处理远离裂纹的区域。从而避免了单纯有限元方法中网格划分对裂纹扩展路径的影响。当然在如何建立EFG和FEM过渡的问题上,他们也做了深入的探讨。

另外接触问题作为一种非线性边界条件问题在SPH法中有较多的研究。J.Campbell等人在2000年发表的文章中总结了SPH法处理各种接触条件的方法^[33],特别推导了应用罚函数法引入接触边界条件的过程。图1.3为他们做的对两段4mm长的钢棒以2km/s的速度正碰的数值模拟结果,可以看到SPH法的精度令人满意。

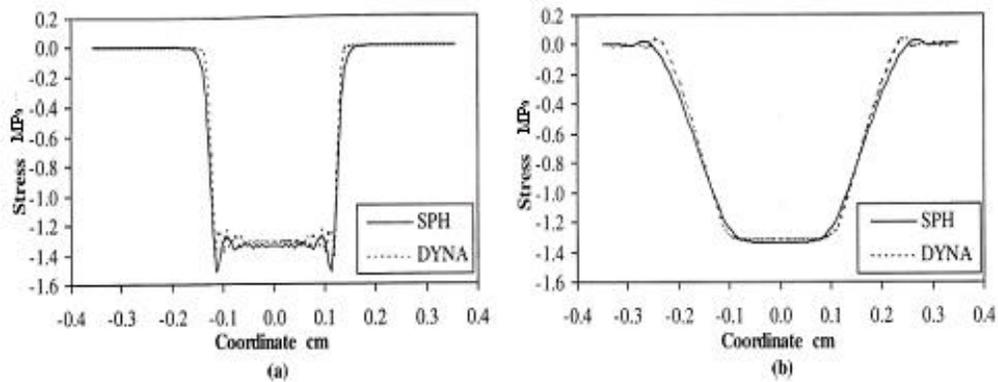


图 1.3 SPH 模拟一维高速碰撞数值结果($t = 0.2\mu\text{s}$, $t = 0.7\mu\text{s}$)

1.2.3 本文工作的应用背景

对于高速碰撞问题数值方法的研究在国防工业和国民经济的许多领域中都有着广阔的应用前景。目前在这个领域内,有限元法是最常用的数值分析方法,国外已研制了许多用于高速碰撞分析的程序,如DYNA3D、HEMP3D、EPIC-3、HULL、TRIOIL/TRIDORF、METRIC、K3和CELFE等。但有限元法在求解高速碰撞问题中也遇到了一些难以圆满解决的问题,如网格畸变、复杂三维结构的网格生成等。

无网格法作为一种新的数值方法,自身存在一些亟待解决的问题,但它仍是求解高速碰撞等涉及网格畸变和网格重构问题的很有发展前途的新方法。

本课题是国家自然科学基金资助的研究项目,目的是寻找求解高速

碰撞问题的高效的无网格方法。高速碰撞问题对数值方法的计算效率有很高的要求，就目前而言无网格方法的计算效率不如有限元方法，所以既保持无网格法的优点又大幅度提高其计算效率将成为研究的重点。

1.3 本文的主要工作

本文的主要目的是在对加权最小二乘无网格法 (Weighted Least Square Meshless Method, 简称 WLSM) 进行详细论述的基础上推导其在弹性波问题、大变形问题以及涉及超弹性和接触等问题中的求解格式。本文共分四章：

第一章，引言。对于无网格方法的基本原理和研究现状进行阐述，并且进一步就无网格法在动力学和非线性力学等问题中的应用进行简单的介绍。第二章，加权最小二乘无网格法。这一章详细介绍了在无网格方法中被广泛使用的移动最小二乘近似方法，并基于 MLS 推导了加权最小二乘无网格法对于弹性静力学问题的求解方程。通过对二维悬臂梁和带孔方板算例的分析，将 WLSM 和 DCM 及 EFG 做简单的比较。

第三章，大变形弹性波传播问题。这一章首先建立了 WLSM 求解弹性波问题的方程，并对典型算例进行了数值分析。然后通过引入 Lagrange 描述下各力学参量及控制方程的形式，推导了 WLSM 对于大变形问题的求解方程，并对一维和二维大变形问题的算例进行了分析。

第四章，超弹性体接触碰撞问题。这一章首先对典型的 Mooney-Rivlin 超弹性材料的本构关系进行了分析，得到了适合 WLSM 使用的分量形式。将其引入 WLSM 求解方程以后，进行了一维二维的算例分析。然后通过具体讨论接触条件的形式和引入方程的方法，实现了利用 WLSM 对超弹性体与光滑刚性墙正碰过程的模拟。

第二章 加权最小二乘无网格法

加权最小二乘无网格法是一种新型无网格方法，采用移动最小二乘法构造近似函数。移动最小二乘近似是局部近似与最小二乘法相结合的产物，该方法直接基于空间离散的点进行近似，而不需要对区域进行网格划分。

本章前一部分详细介绍了 MLS 近似方法，然后作为 WLSM 在动力学及非线性问题中应用的基础，建立其弹性静力问题的求解方程，并给出了边界条件的处理方案，最后通过算例分析简单考察 DCM、WLSM 和 EFG 三种方法的计算效率，这些比较结果同样适于动力学和非线性问题。

2.1 移动最小二乘近似

2.1.1 移动最小二乘近似的基本方法

设未知函数 $u(\mathbf{X})$ 在区域 Ω 内的近似为 $u^h(\mathbf{X})$ ，其中 $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N\}$ 为域中节点的集合。在二维情况下 $\mathbf{X}_I = (x_I, y_I)$ ，在三维情况下 $\mathbf{X}_I = (x_I, y_I, z_I)$ 。 $u(\mathbf{X})$ 的近似 $u^h(\mathbf{X})$ 可用多项式表示为：

$$u^h(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^m P_i(\mathbf{X}) \cdot a_i(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{P}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{X}) \quad (2-1)$$

其中 $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ 为多项式基向量， $\mathbf{a}(\mathbf{X})$ 为系数向量， m 代表基的项数。

移动最小二乘近似通过令 $u^h(\mathbf{X})$ 与对应节点场函数值 u_I 之差的加权平方和取最小来构造近似函数，即使下式取最小值：

$$J = \sum_{I=1}^N w_I(\mathbf{X} - \mathbf{X}_I) \cdot [\mathbf{P}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{X}) - u_I]^2 \quad (2-2)$$

其中 $w_I(\mathbf{X} - \mathbf{X}_I)$ 为与节点 \mathbf{X}_I 相关的权函数。

将 (2-2) 改写为矩阵形式：

$$J = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{U})^T \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{U}) \quad (2-3)$$

其中：

$$\mathbf{U}^T = (u_1, u_2, \dots, u_N)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{X}_1) & p_2(\mathbf{X}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{X}_1) \\ p_1(\mathbf{X}_2) & p_2(\mathbf{X}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{X}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{X}_N) & p_2(\mathbf{X}_N) & \cdots & p_m(\mathbf{X}_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1(\mathbf{X} - \mathbf{X}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2(\mathbf{X} - \mathbf{X}_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_N(\mathbf{X} - \mathbf{X}_N) \end{bmatrix}$$

由 J 对 \mathbf{a} 的变分为零以及 $d\mathbf{a}$ 的任意性得：

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{X}) - \mathbf{B}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2-4)$$

其中：

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{X}) &= \mathbf{P}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{W}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{X}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{X}) &= \mathbf{P}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{W}(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (2-5)$$

整理 (2-4) 得：

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{U} \quad (2-6)$$

将 (2-6) 代入 (2-1) 得：

$$u^h(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{U} \quad (2-7)$$

令

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{X}) \quad (2-8)$$

则有：

$$u^h(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{U} \quad (2-9)$$

可以看到近似函数中包含对矩阵 \mathbf{A} 的求逆，使得MLS的计算量大为增加，而且还存在 \mathbf{A} 奇异的情况。有关近似函数 \mathbf{F} 关于 \mathbf{x} 的一阶、二阶导数的表达式见附录I。

2.1.2 基向量 \mathbf{P} 以及权函数 \mathbf{W} 的选取

基向量 \mathbf{P} 一般取多项式的形式。

在一维情形下：

$$\mathbf{P}^T(x) = (p_0(x), p_1(x), \dots, p_r(x)) = (1, x, x^2, \dots, x^r) \quad (2-10)$$

在二维情形下：

$$\mathbf{P}^T(x, y) = (1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^r, \dots, x^k y^{r-k}, \dots, y^r) \quad (2-11)$$

其中 r 为多项式基的阶数。

常用情形为：

一维线性基 $r=1$, 项数 $m=2$, $\mathbf{P}^T(x) = (1, x)$

一维二次基 $r=2$, 项数 $m=3$, $\mathbf{P}^T(x) = (1, x, x^2)$

二维线性基 $r=1$, 项数 $m=3$, $\mathbf{P}^T(x, y) = (1, x, y)$

二维二次基 $r=2$, 项数 $m=6$, $\mathbf{P}^T(x, y) = (1, x, y, x^2, xy, y^2)$

权函数 \mathbf{W} 应具有如下的特性：

(1) 紧支特性，即 $w_i(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i)$ 仅在 \mathbf{X}_i 点的附近区域内不为零，其余均为零。这使得每一点只影响其周围有限数量个计算点，形成的刚度矩阵具有带状稀疏的特点，在计算时可以提高效率。

(2) 非负性，即 $w_i(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) \geq 0$ 。

(3) 衰减性，在定义域内随 $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_i\|$ 的增大 $w_i(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i)$ 逐渐衰减，即任一点对其周围的影响将随离该点的距离的增加而减小。

一般情况下，高斯函数、指数型函数和样条函数都可以作为权函数。

本文中取截断高斯函数^[9]：

$$w(R) = \begin{cases} \frac{e^{-(R/c)^2} - e^{-(d/c)^2}}{1 - e^{-(d/c)^2}} & R \leq d \\ 0 & R > d \end{cases} \quad (2-12)$$

其中 d 、 c 为常数，且 d 与布点情况相关；假设 $w_i(R)$ 为节点 \mathbf{X}_i 处的截断高斯权函数，则 $R = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_i\|$ 。函数形状如图 2.1 所示。

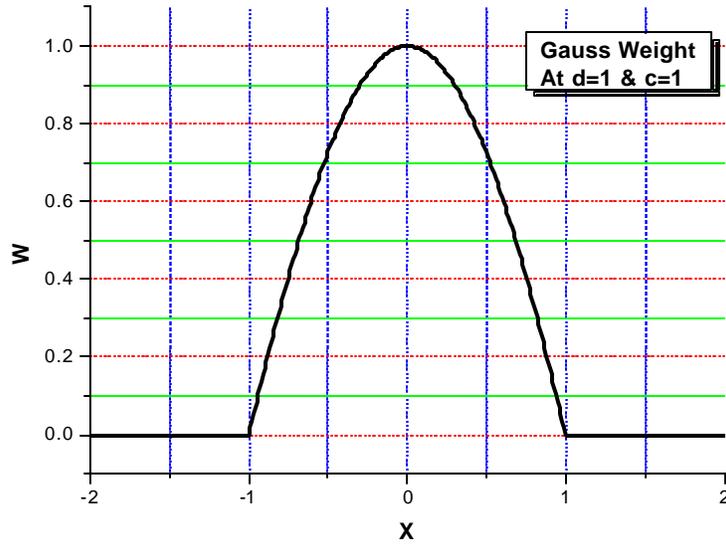


图 2.1 截断高斯函数图

2.2 加权最小二乘无网格法

下面以二维弹性静力学问题为例，给出加权最小二乘无网格法的具体格式。弹性静力学问题的基本方程为：

$$\begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{T}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Gamma_t \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Gamma_u \end{cases} \quad (2-13)$$

其中 Ω 为求解域， Γ_u 为位移边界， Γ_t 为力边界； $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 为待求位移场函数， $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 、 $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ 和 $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$ 分别为定义在域内、位移边界上和力边界上的已知函数， \mathbf{B} 和 \mathbf{T} 为微分算子，即：

$$\mathbf{B} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \frac{E}{1-\mathbf{u}^2} \begin{bmatrix} l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{1-\mathbf{u}}{2} \frac{\partial}{\partial y} & l \cdot \mathbf{u} \frac{\partial}{\partial y} + m \frac{1-\mathbf{u}}{2} \frac{\partial}{\partial x} \\ m \cdot \mathbf{u} \frac{\partial}{\partial x} + l \frac{1-\mathbf{u}}{2} \frac{\partial}{\partial y} & m \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{1-\mathbf{u}}{2} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

其中 l 、 m 为边界外法线的方向余弦， E 、 \mathbf{u} 分别为弹性模量和泊松比。

由加权最小二乘的意义建立如下泛函：

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_{\Omega} w \cdot [\mathbf{B}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x})) + \mathbf{f}(\mathbf{x})]^T \cdot [\mathbf{B}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x})) + \mathbf{f}(\mathbf{x})] d\Omega + \int_{\Gamma_u} \mathbf{a} [\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})]^T \cdot [\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})] d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_t} \mathbf{b} [\mathbf{T}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x})) - \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x})]^T \cdot [\mathbf{T}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x})) - \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x})] d\Gamma \end{aligned} \quad (2-14)$$

其中 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 为罚函数； w 为各计算点平衡方程残差项的权系数，即在总泛函中的权重，本文中取 $w \equiv 1$ ，也就是忽略权系数的影响。

类似于 Galerkin 法，(2-14) 式需要进行数值积分，计算量很大。为了避免使用积分，采用如下泛函：

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{I=1}^N [\mathbf{B}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x})) + \mathbf{f}(\mathbf{x})]_I^T \cdot [\mathbf{B}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x})) + \mathbf{f}(\mathbf{x})]_I + \sum_{J=1}^{N_u} \mathbf{a} [\mathbf{u}^h(x) - \bar{\mathbf{u}}(x)]_J^T \cdot [\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})]_J \\ & + \sum_{K=1}^{N_t} \mathbf{b} [\mathbf{T}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x})) - \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x})]_K^T \cdot [\mathbf{T}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x})) - \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x})]_K \end{aligned} \quad (2-15)$$

其中 N 为节点总数， N_u 为位移边界上的节点总数， N_t 为力边界上（包括自由边界）上的节点总数。

将 MLS 近似式(2-9)代入(2-15)中，并由该泛函的极小值问题可以得到加权最小二乘无网格法的求解方程：

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (2-16)$$

其中：

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & \sum_{I=1}^N \mathbf{H}_I^T \cdot \mathbf{H}_I + \sum_{J=1}^{N_u} \mathbf{a} \mathbf{N}_J^T \cdot \mathbf{N}_J + \sum_{K=1}^{N_t} \mathbf{b} \mathbf{Q}_K^T \cdot \mathbf{Q}_K \\ \mathbf{P} = & - \sum_{I=1}^N \mathbf{H}_I^T \cdot \mathbf{f}_I + \sum_{J=1}^{N_u} \mathbf{a} \mathbf{N}_J^T \cdot \bar{\mathbf{u}}_J + \sum_{K=1}^{N_t} \mathbf{b} \mathbf{Q}_K^T \cdot \bar{\mathbf{t}}_K \end{aligned} \quad (2-17)$$

$$\mathbf{N}_J = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_J^x \\ \mathbf{F}_J^y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_I = \frac{E}{1-\mathbf{u}^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_I^x}{\partial x^2} + \frac{1-\mathbf{u}}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_I^x}{\partial y^2} + \frac{1+\mathbf{u}}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_I^y}{\partial x \partial y} \\ \frac{1+\mathbf{u}}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_I^x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}_I^y}{\partial y^2} + \frac{1-\mathbf{u}}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_I^y}{\partial x^2} \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

$$\mathbf{Q}_K = \frac{E}{1-\mathbf{u}^2} \begin{bmatrix} l \frac{\partial \mathbf{F}_K^x}{\partial x} + m \frac{1-\mathbf{u}}{2} \frac{\partial \mathbf{F}_K^x}{\partial y} + l \cdot \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{F}_K^y}{\partial y} + m \frac{1-\mathbf{u}}{2} \frac{\partial \mathbf{F}_K^y}{\partial x} \\ m \cdot \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{F}_K^x}{\partial x} + l \frac{1-\mathbf{u}}{2} \frac{\partial \mathbf{F}_K^x}{\partial y} + m \frac{\partial \mathbf{F}_K^y}{\partial y} + l \frac{1-\mathbf{u}}{2} \frac{\partial \mathbf{F}_K^y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

由于 MLS 近似不具有插值特性，因此(2-16)中待求位移向量 \mathbf{U} 并不是系统的位移向量，而只是一组未知参数，或称为广义位移向量。各节点的位移需要利用(2-9)式求解。

由式(2-18)和(2-19)可以看出， \mathbf{N}_J 和 \mathbf{Q}_K 的量级不同，故罚函数 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 也应该具有不同的量级。本文分别取为 E^2 和 E^4 (E 为材料的弹性模量)。

由式(2-17)可以看到刚度阵 \mathbf{K} 是对称矩阵，而且由于 MLS 取紧支权函数，所以 \mathbf{K} 同时满足带状稀疏的特点，这给方程的求解带来了便利。

2.3 算例分析

2.3.1 悬臂梁问题

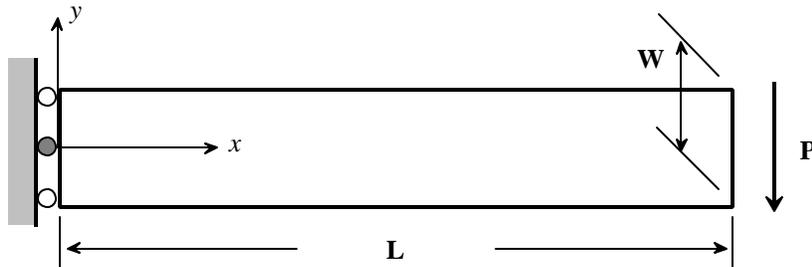


图 2.2 悬臂梁模型

悬臂梁尺寸为 $L \times W$ ，端部外载荷为 P ，如图 2.2。左端为中点固支，其余点允许 y 向滑移的位移边界，即 $x=0$ 边上满足如下的位移边界条

件：

$$\begin{cases} \bar{u}_x = 0, \bar{u}_y = 0 & y = 0 \\ \bar{u}_x = 0 & y \neq 0 \end{cases} \quad (2-20)$$

弹性力学教材曾给出解析解^[34]为：

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{Py}{6EI} \left[(6L-3x)x + (2+\mathbf{u}) \left(y^2 - \frac{W^2}{4} \right) \right] \\ u_y &= \frac{-P}{6EI} \left[3\mathbf{u}y^2(L-x) + (4+5\mathbf{u}) \frac{W^2x}{4} + (3L-x)x^2 \right] \\ \mathbf{s}_x &= \frac{-P(L-x)y}{I} \\ \mathbf{s}_y &= 0 \\ \mathbf{t}_{xy} &= \frac{-P}{2I} \left(\frac{W^2}{4} - y^2 \right) \end{aligned} \quad (2-21)$$

其中 \mathbf{u} 表示泊松比， $I = W^3/12$ 为截面相对中线的惯性矩。

计算过程中，取杨氏模量 $E = 10000\text{MPa}$ ，泊松比 $\mathbf{u} = 0.3333$ ，模型尺寸 $L = 12.0\text{m}$, $W = 2.0\text{m}$ 。布点情况如图 2.3，均布 17×5 节点。EFG 法数值积分采用两点高斯积分。MLS 近似函数中节点影响域为圆域，离计算点最近的第 12 点和计算点之间的距离乘以放大系数 2.0 作为该计算点的影响域，基函数阶次为二次，高斯截断权函数参数取 $d = 1.0$ ， $c = 0.2$ 。

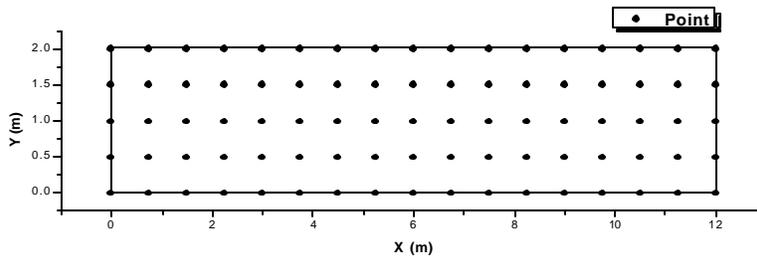


图 2.3 悬臂梁 17×5 均匀布点

图 2.4 给出了由 WLSM 计算的全场剪应力等高线图。图 2.5 至图 2.7 给出了 DCM、WLSM 和 EFG 三种方法分别计算下表面挠度、上表面应力 \mathbf{s}_x 和 \mathbf{s}_y 的结果。

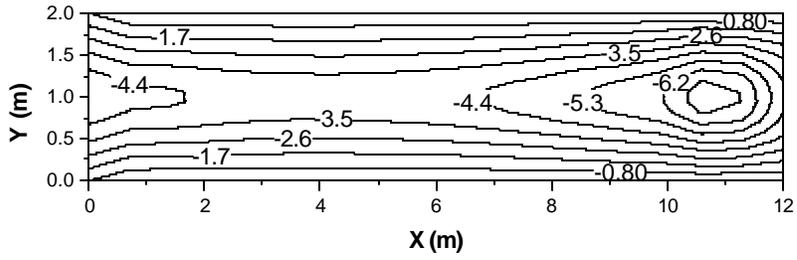


图 2.4 由 WLSM 计算的全场剪应力等高线图 (单位: MPa)

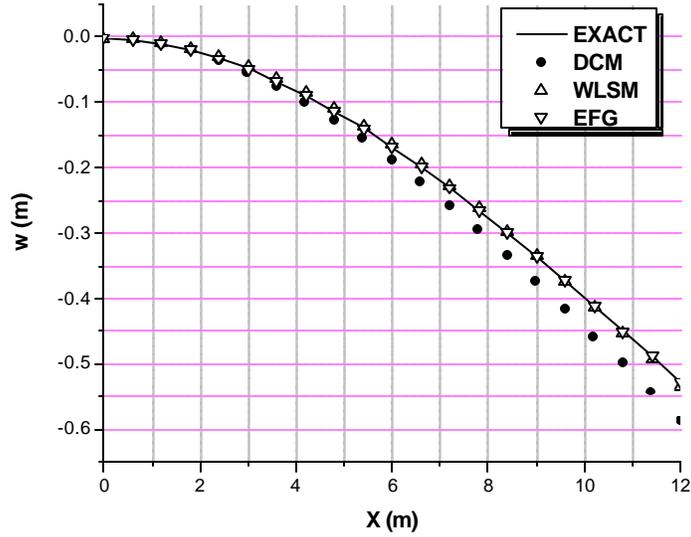


图 2.5 下表面挠度计算结果

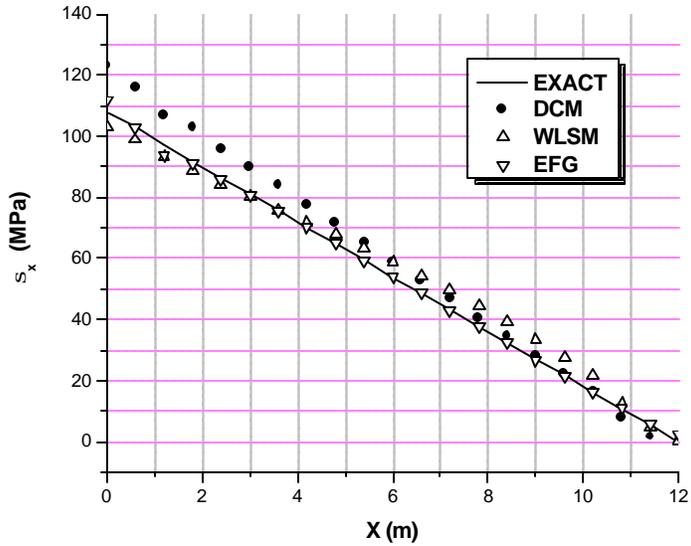
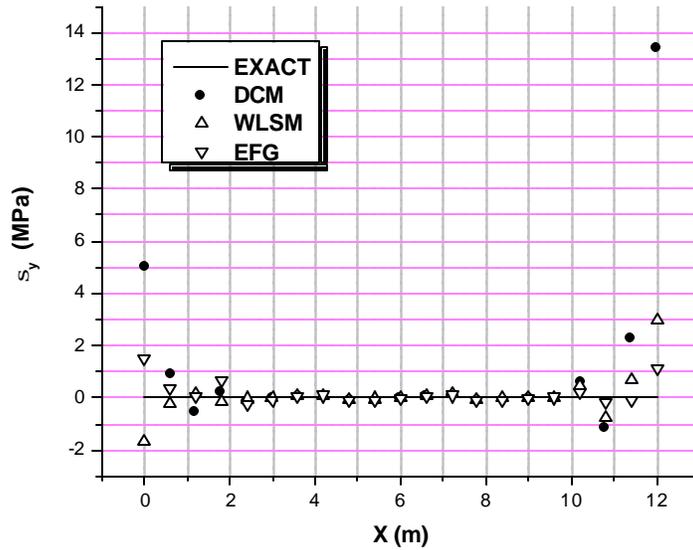


图 2.6 上表面应力 s_x 的计算结果

图 2.7 上表面应力 s_y 的计算结果

全场位移和应力的均方根误差见表 2.1。

表 2.1 悬臂梁计算结果的均方根误差

	DCM	WSLM	EFG
位移均方根误差	11.2066 %	1.1715 %	0.3269 %
应力均方根误差	12.6346 %	7.0436 %	3.5812 %

在 65×17 布点情况下，表 2.2 对计算时间进行比较，计算环境：CPU-Intel PIII350MHz，内存 192M。

表 2.2 悬臂梁 65×17 布点情况下计算时间

	DCM	WSLM	EFG
刚度集成用时	0.76s	0.84s	33.24s
方程求解用时	0.1s	0.19s	0.19s

综合以上结果，可以看到 EFG 在精度上有优势，而 WLSM 在精度和计算速度上的整体效果优于 EFG 和 DCM。

2.3.2 带孔方板问题

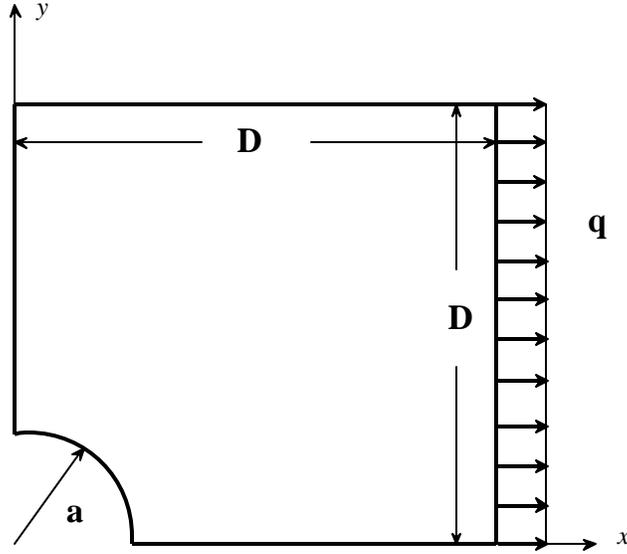


图 2.8 带孔方板计算模型

对中心有圆孔的方板由对称性取其 $1/4$ 部分研究，边长为 D ，中心圆孔半径为 a ，如图 2.8 所示。右边界作用均布拉力 q ，孔边缘为自由边界，左边界和下边界分别固定 x 向位移和 y 向位移。

弹性力学教材曾给出解析解^[34]为：

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{q}{4G} \left\{ r \left[\frac{(\mathbf{k}-1)}{2} + \cos(2\mathbf{q}) \right] + \frac{a^2}{r} \left[1 + (1+\mathbf{k})\cos(2\mathbf{q}) \right] - \frac{a^4}{r^3} \cos(2\mathbf{q}) \right\} \\
 u_q &= \frac{q}{4G} \left[\frac{(\mathbf{k}-1)}{2} \frac{a^2}{r^2} - r - \frac{a^4}{r^4} \right] \sin(2\mathbf{q}) \\
 \mathbf{s}_x &= q \left\{ 1 - \frac{a^2}{r^2} \left[\frac{3}{2} \cos(2\mathbf{q}) + \cos(4\mathbf{q}) \right] + \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\mathbf{q}) \right\} \\
 \mathbf{s}_y &= -q \left\{ \frac{a^2}{r^2} \left[\frac{1}{2} \cos(2\mathbf{q}) - \cos(4\mathbf{q}) \right] + \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\mathbf{q}) \right\} \\
 \mathbf{t}_{xy} &= -q \left\{ \frac{a^2}{r^2} \left[\frac{1}{2} \sin(2\mathbf{q}) + \sin(4\mathbf{q}) \right] - \frac{3a^4}{2r^4} \sin(4\mathbf{q}) \right\}
 \end{aligned} \tag{2-22}$$

其中剪切模量 $G = \frac{E}{2(1+\mathbf{u})}$ ；平面应变时 $\mathbf{k} = 3-4\mathbf{u}$ ，平面应力时 $\mathbf{k} = \frac{3-\mathbf{u}}{1+\mathbf{u}}$ 。

计算过程中，杨氏模量 $E=1000\text{MPa}$ ，泊松比 $\nu=0.3333$ ，模型尺寸 $D=5.0\text{m}$ ， $a=1.0\text{m}$ 。布点情况如图 2.9，共 81 个节点。EFG 法数值积分采用两点高斯积分。MLS 近似函数中节点影响域为圆域，离计算点最近的第 12 点和计算点之间的距离乘以放大系数 2.0 作为该计算点的影响域，基函数阶次为二次，高斯截断权函数参数取 $d=1.0$ ， $c=0.2$ 。

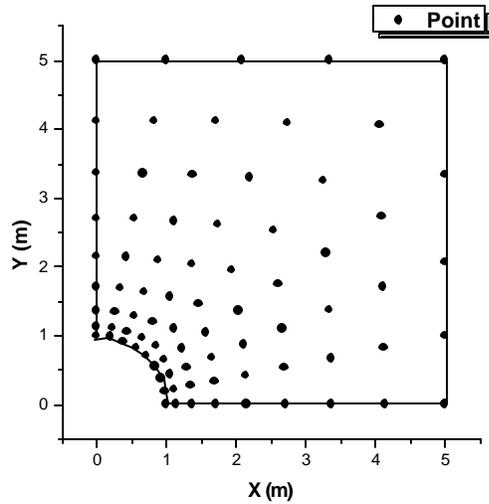


图 2.9 带孔方板布点方案

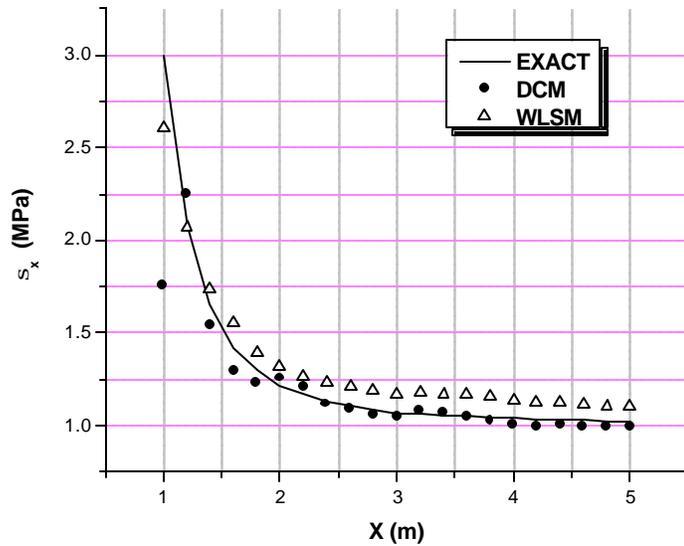
图 2.10 $x=0$ 边各节点应力 s_x 的计算结果

图 2.10 给出了由 DCM 和 WLSM 两种方法计算得到的 $x=0$ 边各节点应力 s_x 的结果。

表 2.3 给出全场位移和应力的均方根误差。

表 2.3 带孔方板计算结果的均方根误差

	DCM	WLSM
位移均方根误差	4.8912%	2.9304%
应力均方根误差	18.0970%	13.4434%

在 1089 点布点情况下，表 2.4 对计算时间进行比较，计算环境：CPU-Intel PII350MHz，内存 192M。

表 2.4 带孔方板 1089 点布点情况下计算时间

	DCM	WLSM	EFG
刚度集成用时	0.65s	3.4s	57.0s
方程求解用时	0.61s	1.14s	1.03s

第三章 大变形弹性波问题

弹性波广泛存在于碰撞问题中，在很多简单情况下人们已经得到了它的解析解，而对于更为复杂的弹性波传播问题可以通过数值方法解决。本章前一部分从简单线弹性小变形波传播问题出发，通过在时间域上采取显示积分格式，将加权最小二乘无网格法的弹性静力学格式发展为动力学格式。

大变形问题是非线性力学问题中的重要组成部分，寻找如何描述这类问题、如何建立方程和发展数值求解格式一直是学者们关注的方向。作为一种完全的无网格方法，加权最小二乘无网格法不受网格畸变等影响，所以基于已有的 WLSM 静态、动态求解方程，本章在 Lagrange 坐标下建立了能处理几何非线性问题的求解方程，并对线弹性材料算例进行了分析。

3.1 线弹性小变形弹性波问题

3.1.1 弹性波问题的提法^[35]

对于均匀各向同性弹性介质， Ω 为求解域， Γ_u 位移边界， Γ_f 为力边界，其动力学控制方程为：

动力学方程：

$$\frac{\partial \mathbf{s}_{ij}(x, t)}{\partial x_j} + \mathbf{r}f_i(x, t) = \mathbf{r}\ddot{u}_i(x, t) \quad (\forall x \in \Omega) \quad (3-1)$$

应力应变关系：

$$\mathbf{s}_{ij}(x, t) = D_{ijkl} \cdot \mathbf{e}_{kl}(x, t) \quad (\forall x \in \Omega) \quad (3-2)$$

几何方程：

$$\mathbf{e}_{ij}(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial x_i} \right] \quad (\forall x \in \Omega) \quad (3-3)$$

边界条件：

$$u_i(x, t) = \bar{u}_i(x, t) \quad (\forall x \in \Gamma_u) \quad (3-4a)$$

$$\mathbf{s}_{ij}(x, t) \cdot n_j(x, t) = \bar{T}_i(x, t) \quad (\forall x \in \Gamma_t) \quad (3-4b)$$

初始条件：

$$u_i(x, 0) = u_i^0(x) \quad (\forall x \in \Omega) \quad (3-5)$$

$$\dot{u}_i(x, 0) = \dot{u}_i^0(x)$$

其中 $f_i(x, t)$ 、 $\bar{u}_i(x, t)$ 和 $\bar{T}_i(x, t)$ 为已知函数， u_i^0 和 \dot{u}_i^0 分别表示初始位移和初始速度。由于是均匀各向同性弹性介质，所以本构关系(3-2)式中有：

$$D = \frac{E}{(1-\mathbf{u})^2} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{u} & 0 \\ \mathbf{u} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mathbf{u})/2 \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

通过几何方程和本构关系，可以用位移量作为基本变量表示无体力时的动力学方程，即 Navier 方程：

$$G\nabla^2 \mathbf{u} + (\mathbf{I} + G)\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{r}\ddot{\mathbf{u}} \quad (\forall x \in \Omega) \quad (3-7)$$

3.1.2 最小二乘法求解方程

在 Galerkin 变分形式中，泛函的意义是能量积分。先在空间域上通过分部积分得到平衡方程的弱形式，然后将其在时间间隔 t_1 到 t_2 之间对时间积分，给定了位移在两时刻的值之后，可以利用哈密顿原理得到包含动能变分在内的总的系统泛函变分。

然而如果沿用式(2-15)的泛函构造形式，则加权最小二乘法建立的动力学方程泛函如下：

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{I=1}^N \left[\mathbf{B}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x})) + \mathbf{r}\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{r}\ddot{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}) \right]_I^T \cdot \left[\mathbf{B}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x})) + \mathbf{r}\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{r}\ddot{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}) \right]_I \\ & + \sum_{J=1}^{N_u} \mathbf{a} \left[\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \right]_J^T \cdot \left[\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \right]_J + \sum_{K=1}^{N_t} \mathbf{b} \left[\mathbf{T}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x})) - \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) \right]_K^T \cdot \left[\mathbf{T}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x})) - \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) \right]_K \end{aligned} \quad (3-8)$$

可以看出，泛函式(3-8)中包含加速度的二次项及交叉项，无法采用

类似 Galerkin 法的求解域离散方案，即先空间域离散后时间域离散。所以下面的推导步骤是先利用中心差分的方法离散时间域，然后再用加权最小二乘法离散空间域，具体过程如下：

第 i 点在 t 时刻的位移函数的近似表达式为：

$${}^t \mathbf{u}_i^h = \mathbf{F}_i \cdot {}^t \mathbf{U} \quad (3-9)$$

其中 \mathbf{F}_i 为第 i 点处移动最小二乘近似的近似函数，由于考虑的是小变形情况，所以这里认为 \mathbf{F}_i 与时间 t 无关； ${}^t \mathbf{U}$ 表示 t 时刻全场节点的位移向量。

将(3-9)代入(3-7)中，得到第 i 点在 t 时刻的 Navier 方程：

$$G \nabla^2 (\mathbf{F}_i \cdot {}^t \mathbf{U}) + (\mathbf{I} + G) \nabla \nabla \cdot (\mathbf{F}_i \cdot {}^t \mathbf{U}) = \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_i^h \quad (\forall x \in \Omega) \quad (3-10)$$

由于 ${}^t \mathbf{U}$ 独立于空间坐标、 \mathbf{F}_i 与时间无关，所以有：

$$G \nabla^2 (\mathbf{F}_i) \cdot {}^t \mathbf{U} + (\mathbf{I} + G) \nabla \nabla \cdot (\mathbf{F}_i) \cdot {}^t \mathbf{U} = \mathbf{r} \mathbf{F}_i \cdot {}^t \ddot{\mathbf{U}} \quad (\forall x \in \Omega) \quad (3-11)$$

引入关于空间坐标的微分算子 A ：

$$A = G \nabla^2 + (\mathbf{I} + G) \nabla \nabla \quad (\forall x \in \Omega) \quad (3-12)$$

式(3-11)可以写成：

$$A (\mathbf{F}_i) \cdot {}^t \mathbf{U} = \mathbf{r} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial^2 ({}^t \mathbf{U})}{\partial t^2} \quad (\forall x \in \Omega) \quad (3-13)$$

将中心差分公式：

$${}^t \ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t^2} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{U} - 2 {}^t \mathbf{U} + {}^{t-\Delta t} \mathbf{U}) \quad (\forall x \in \Omega) \quad (3-14)$$

将(3-14)代入(3-13)，化简得：

$$B (\mathbf{F}_i) \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}_i \quad (\forall x \in \Omega) \quad (3-15)$$

其中 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}_i$ 为等效载荷向量：

$$B (\mathbf{F}_i) = \frac{\mathbf{r}}{\Delta t^2} \mathbf{F}_i$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}_i = \left[A (\mathbf{F}_i) + \frac{2\mathbf{r}}{\Delta t^2} \mathbf{F}_i \right] \cdot {}^t \mathbf{U} - \frac{\mathbf{r}}{\Delta t^2} \mathbf{F}_i \cdot {}^{t-\Delta t} \mathbf{U} \quad (3-16)$$

在最小二乘的意义下要求泛函

$$\Pi = \sum_i [B(\mathbf{F}_i)^{t+\Delta t} \mathbf{U} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}_i]^T \cdot [B(\mathbf{F}_i)^{t+\Delta t} \mathbf{U} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}_i] \quad (3-17)$$

对未知量 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}$ 的变分为零

$$\frac{d\Pi}{d{}^{t+\Delta t} \mathbf{U}} = 0 \quad (3-18)$$

得到如下方程组：

$$M(\mathbf{F}) \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q} \quad (3-19)$$

其中 $M(\mathbf{F})$ 为等效质量阵， ${}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}$ 为等效载荷向量：

$$\begin{aligned} M(\mathbf{F}) &= \sum_i B^T(\mathbf{F}_i) \cdot B(\mathbf{F}_i) \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q} &= \sum_i B^T(\mathbf{F}_i) \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}_i \end{aligned} \quad (3-20)$$

简单的观察(3-19)式，可以发现等效质量阵 $M(\mathbf{F})$ 是对称矩阵，同时由于移动最小二乘近似取紧支权函数，所以 $M(\mathbf{F})$ 还具有带状稀疏的特点。

边界条件可以通过罚函数方法引入，考虑到方程系数矩阵的对称性有：

第 i 个位移边界条件 $u_i(x, t) = \bar{u}_i(x, t)$ ：

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i^T \cdot (\mathbf{F}_i \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}) &= \mathbf{F}_i^T \cdot \bar{u}_i(x, t) \\ (\mathbf{F}_i^T \cdot \mathbf{F}_i) \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} &= \mathbf{F}_i^T \cdot \bar{u}_i(x, t) \end{aligned} \quad (3-21)$$

对于所有位移边界条件有：

$$\mathbf{a} \cdot \sum_i (\mathbf{F}_i^T \cdot \mathbf{F}_i) \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = \mathbf{a} \cdot \sum_i \mathbf{F}_i^T \cdot \bar{u}_i(x, t) \quad (3-22)$$

其中 \mathbf{a} 为罚数，本文中一般取弹性模量 E 的立方。

第 j 个力边界条件 $\mathbf{s}_{ij}(x, t) \cdot \mathbf{n}_j(x, t) = \bar{T}_j(x, t)$ 可以表示为：

$$C(\mathbf{F}_j) \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = \bar{T}_j(x, t) \quad (3-23)$$

其中 C 为关于空间坐标的微分算子。然后有：

$$[C^T(\mathbf{F}_j) \cdot C(\mathbf{F}_j)] \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = C^T(\mathbf{F}_j) \cdot \bar{T}_j(x, t) \quad (3-24)$$

对于所有力边界条件有：

$$\mathbf{b} \cdot \sum_j [C^T(\mathbf{F}_j) \cdot C(\mathbf{F}_j)] \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = \mathbf{b} \cdot \sum_j [C^T(\mathbf{F}_j) \cdot \bar{T}_j(x, t)] \quad (3-25)$$

其中 \mathbf{b} 为罚数，本文中一般取弹性模量 E 。

最后将(3-22)和(3-25)的左右端项分别加入(3-19)两端，形成最后的求解方程。可以看到最后形成总的等效质量阵仍然为带状稀疏的对称阵。

3.1.3 DCM和EFG求解方程

直接配点法形成方程的过程很简单：在域内节点处满足平衡方程残差为零；在边界节点处满足边界条件残差为零。

本文中直接配点法同样采用先时域离散后空域离散的方法。对第 i 个域内节点的平衡方程的处理结果同(3-15)，如下：

$$B(\mathbf{F}_i) \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}_i \quad (\forall x \in \Omega) \quad (3-26)$$

边界条件为：

$$\mathbf{F}_j \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = \bar{u}_j(x, t) \quad (\forall x \in \Omega) \quad (3-27)$$

$$C(\mathbf{F}_k) \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = \bar{t}_k(x, t) \quad (\forall x \in \Omega) \quad (3-28)$$

假设有 I 个平衡方程、 J 个位移边界条件和 K 个力边界条件，则 DCM 最后的求解方程为：

$$\begin{cases} B(\mathbf{F}_i) \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}_i & (i=1, 2, \dots, I) & (\forall x \in \Omega) \\ \mathbf{F}_j \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = \bar{u}_j(x, t) & (j=1, 2, \dots, J) & (\forall x \in \Gamma_u) \\ C(\mathbf{F}_k) \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = \bar{t}_k(x, t) & (k=1, 2, \dots, K) & (\forall x \in \Gamma_t) \end{cases} \quad (3-29)$$

可以看到直接配点法形成方程的过程简单，但是最后的等效质量阵不是对称矩阵。

EFG 形成方程的过程非常类似有限元方法，空间域采用 Galerkin 变分、时间域采用中心差分法，期间利用达朗伯-拉格朗日原理和哈密顿原理。不考虑体力和粘滞力时形成的方程为：

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{Q} \quad (3-30)$$

这里的质量阵 \mathbf{M} 、刚度阵 \mathbf{K} 和载荷向量 \mathbf{Q} 分别为：

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \int_{V_\Omega} \mathbf{r} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} dV \\ \mathbf{K} &= \int_{V_\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} dV \\ {}^t \mathbf{Q} &= \int_{\Gamma_f} \mathbf{F}^T \cdot \bar{\mathbf{T}} d\Gamma\end{aligned}\quad (3-31)$$

其中 \mathbf{F} 为移动最小二乘近似函数； \mathbf{B} 的形式如下：

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \quad (3-32)$$

用中心差分法对(3-30)进行时间积分，得到：

$$\hat{\mathbf{M}} \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{Q}} \quad (3-33)$$

其中等效质量阵 $\hat{\mathbf{M}}$ 和等效载荷向量 ${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{Q}}$ 分别为：

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{M}} &= \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \\ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{Q}} &= {}^t \mathbf{Q} - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \cdot {}^t \mathbf{U} - \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \cdot {}^{t-\Delta t} \mathbf{U}\end{aligned}\quad (3-34)$$

对于位移边界条件的处理考虑到对称性的问题，采用罚函数法，同(3-22)如下：

$$\mathbf{a} \cdot \sum_i (\mathbf{F}_i^T \cdot \mathbf{F}_i) \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = \mathbf{a} \cdot \sum_i \mathbf{F}_i^T \cdot \bar{u}_i(x, t) \quad (3-35)$$

其中 \mathbf{a} 为罚数，本文中一般取弹性模量 E 的平方。

最后将(3-35)的左右端项加入(3-33)中形成 EFG 法的求解方程。可以看到等效刚度阵为带状稀疏的对称矩阵，同时形成方程的过程中(3-31)式存在积分，所以需要背景积分网格。

3.1.4 算例分析

3.1.4.1 一维杆在冲击载荷作用下弹性波传播问题

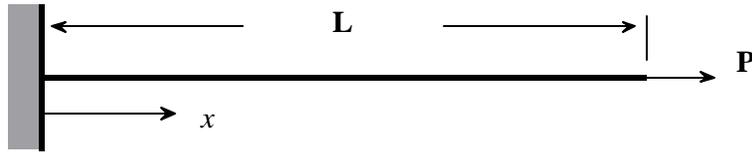


图 3.1 一维杆受冲击载荷模型

长为 \$L\$ 的杆，左端固定，右端受到一个拉伸冲击载荷 \$P\$ 的作用，如图 3.1 所示。问题的基本方程和定解条件为：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 & (0 < x < L) \\ u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0.0, \quad u(0, t) = 0, \quad \sigma(L, t) = p \end{cases} \quad (3-36)$$

其中 \$c = \sqrt{E/r}\$，即波速。

杆中位移场的解析解为：

$$\begin{aligned} u(x, t) = \frac{c}{E} \{ & [H(t + \frac{x-L}{c}) - H(t - \frac{x+L}{c})] - [H(t + \frac{x-3L}{c}) - H(t - \frac{x+3L}{c})] \\ & + [H(t + \frac{x-5L}{c}) - H(t - \frac{x+5L}{c})] - \dots \} \end{aligned} \quad (3-37)$$

其中 \$H(x)\$ 为 Heaviside 阶跃函数：

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

算例中各参量取值为：杨氏模量 \$E=10000\text{MPa}\$，材料密度 \$r=1.0\text{kg/m}^3\$，杆长 \$L=10.0\text{m}\$。这时弹性波波速理论值为 \$c=100\text{m/s}\$，波从一端传至另一端需要 \$0.1\text{s}\$。冲击载荷 \$P\$ 用图 3.2 表示的载荷情况模拟。载荷只作用 \$0.02\text{s}\$，其中在 \$0.01\text{s}\$ 时出现应力峰值 \$100\text{MPa}\$。

计算过程中，采用均布 41 节点，时间步长固定：\$\Delta t = 0.00005\text{s}\$。图 3.3 到图 3.8 给出了用 DCM、EFG 和 WLSM 进行数值计算的结果，其中 EFG 数值积分过程采用两点高斯积分，MLS 近似函数中节点间距乘以放

大系数 2.8 作为各点影响域半径，基函数阶次为二次，高斯截断权函数参数取 $d=1.0$ ， $c=0.2$ 。

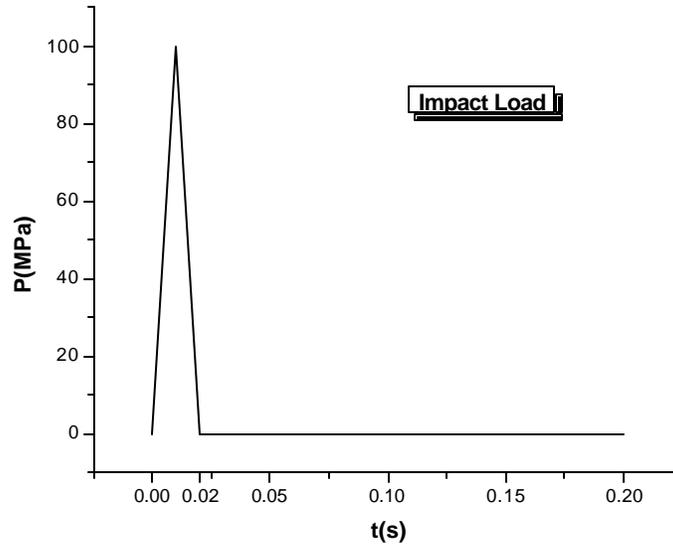


图 3.2 冲击载荷时程曲线

图 3.3 表示 WLSM 计算位移场在五个不同时刻的情况。可以看到位移波传播稳定，很好地满足了理论波速 $c=100\text{m/s}$ 的要求。

图 3.4 表示 WLSM 计算全场应力 s_x 在五个不同时刻的情况。可以看到应力波传播稳定，基本满足理论波速 $c=100\text{m/s}$ 的要求。在固定端 $x=0$ 处，应力的反射系数为 +1，这样该处应力 s_x 反射前的理论峰值为 100MPa，反射时的理论峰值为 200MPa，数值结果基本符合。不过在经过一次反射后， $t=0.120\text{s}$ 时的应力峰值较反射前出现了 13.2% 的衰减，这主要是因为罚函数引入力边界条件，使得反射前拉力波峰后出现本不存在的弱压力波，反射后拉力波和这个弱压力波叠加导致的反射波幅值受到削弱。

图 3.5 表示三种方法计算固定端 $x=0$ 处节点位移的结果曲线。可以看到发生反射时刻的时段内，三种方法很好的满足了固支的位移边界条件，但是相对 DCM，EFG 和 WLSM 的位移计算结果稍差，而且伴随振荡。这是由于 EFG 和 WLSM 两种方法是通过罚函数引入位移边界条件，并不是精确满足的。

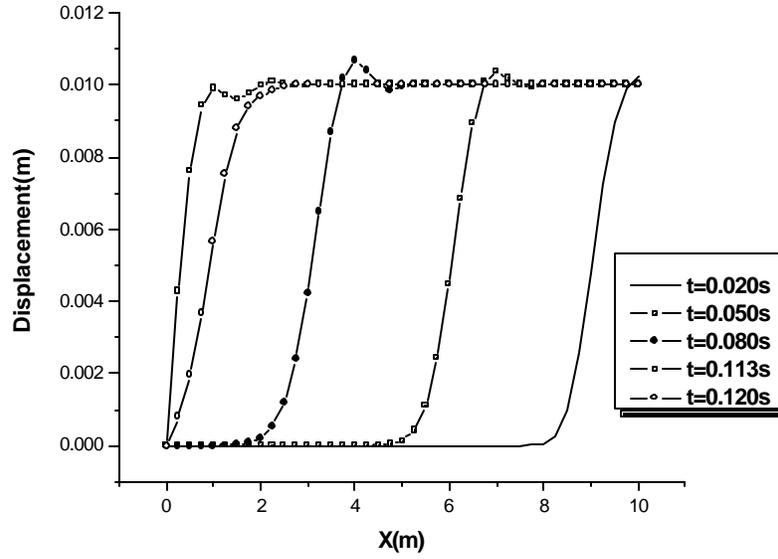


图 3.3 一维杆中位移场随时间的变化

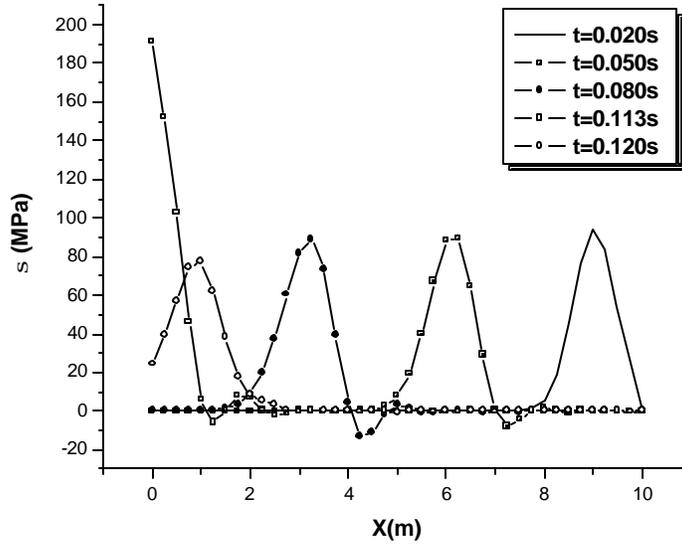


图 3.4 一维杆中全场应力 s_x 随时间的变化

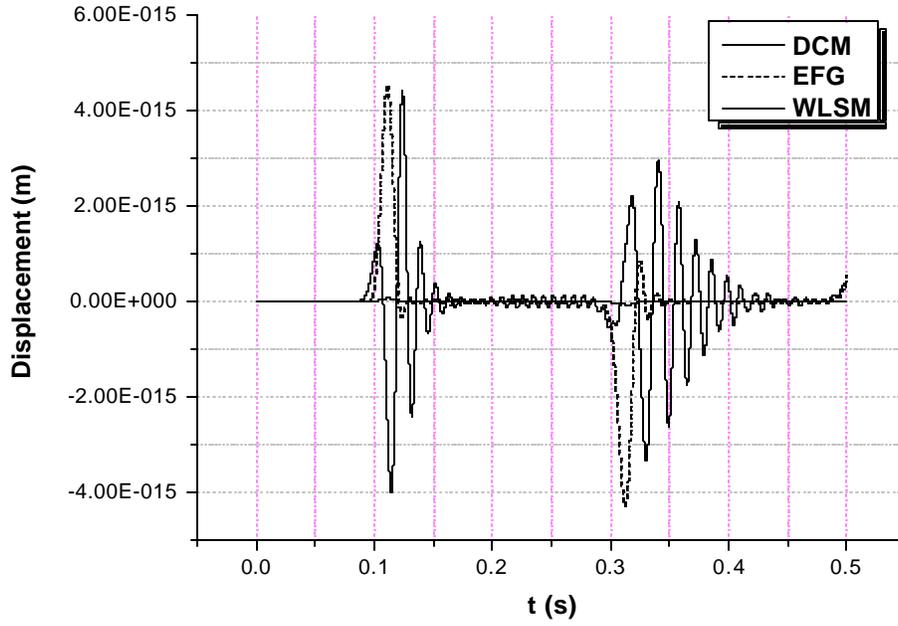


图 3.5 固定端 $x=0$ 处位移变化的时程曲线

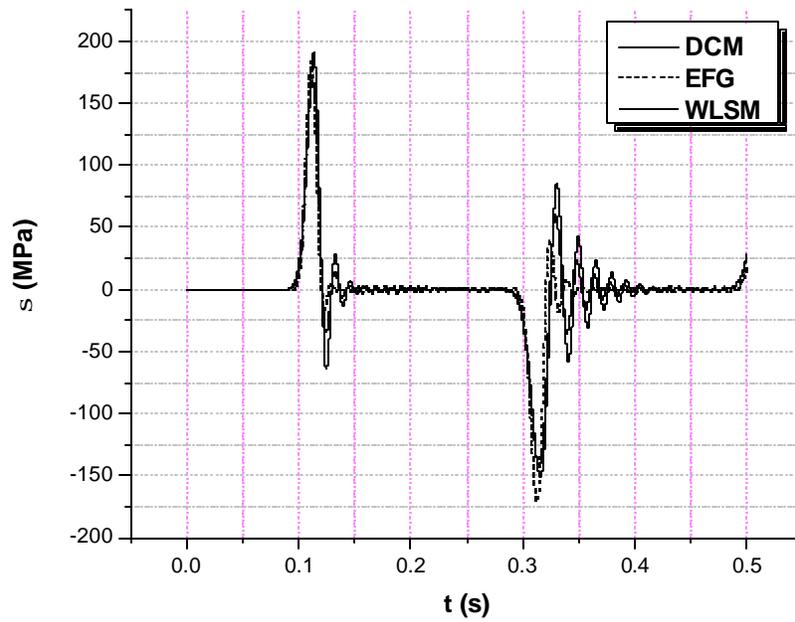


图 3.6 固定端 $x=0$ 处 s_x 变化的时程曲线

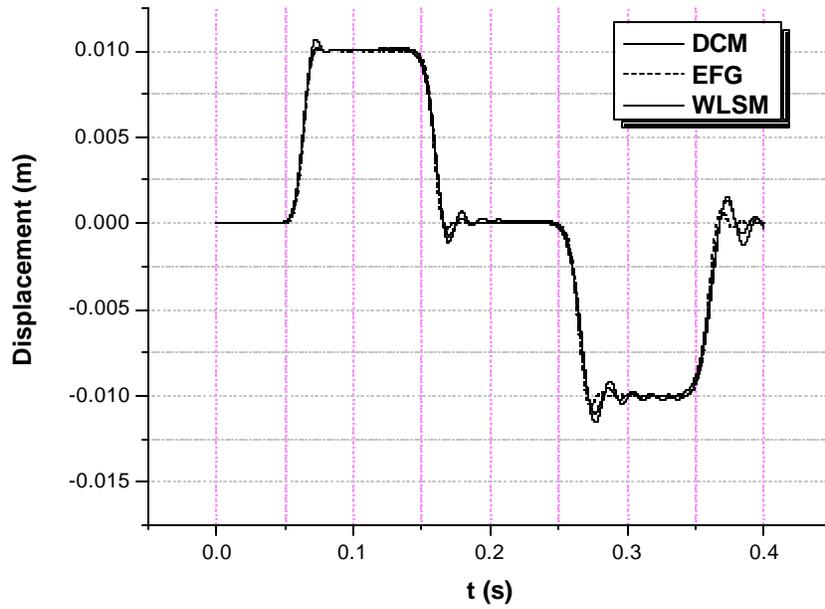


图 3.7 中点 $x = 5$ 处位移变化的时程曲线

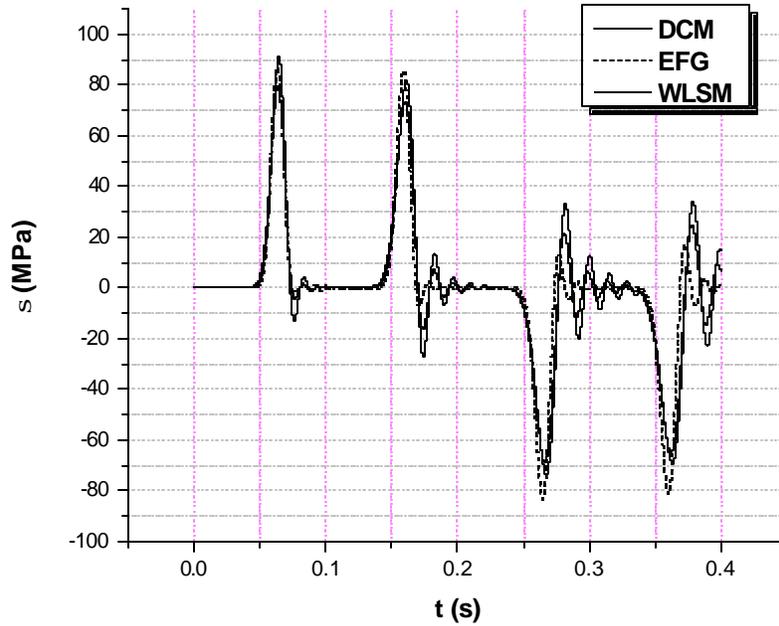


图 3.8 中点 $x = 5$ 处 s_x 变化的时程曲线

图 3.6 表示三种方法计算固定端 $x=0$ 处节点应力 s_x 的结果曲线。可以看到第一次反射过程三种方法的结果一致,到第二次反射的时候 EFG 的应力衰减情况最小。

图 3.7 和图 3.8 分别表示三种方法计算杆中点 $x=5$ 处位移和应力的结果曲线。

表 3.1 给出随布点数的变化, DCM、EFG 和 WLSM 三种方法计算固定端节点应力峰值的结果情况。由表中的数据可以得到如下三点结论:

- (1) EFG 采用两点高斯积分和四点高斯积分对于结果精度的提高并不是很明显。
- (2) EFG 的精度在三种方法中为最高(除了节点数为 101 时的情况)。
- (3) 当节点数量足够密的时候,三种方法的精度都很高,且十分接近。

对于高速碰撞问题来说,一般实际计算时的布点数量非常多,所以通过以上的考察可以预测 WLSM 的精度完全可以和 EFG 相当,甚至可以更好。

表 3.1 固定端节点应力峰值与理想峰值比较

节点数	固定端节点应力峰值/理想峰值 × 100%			
	DCM	EFG		WLSM
		2GP	4GP	
101	92.07	95.46	96.00	96.31
81	88.74	94.07	95.52	93.79
51	87.08	90.86	93.15	90.20
21	79.70	84.25	86.84	83.30
11	55.37	63.52	66.43	63.57

注: GP 表示高斯积分点数

正如前面的推导，算例分析中的时域离散使用显示时间积分，这种方法是条件稳定的，存在允许的最大时间步长 Δt_c 。表 3.2 给出了均布 41 节点时考察时间步长对三种方法的影响情况。

表 3.2 时间步长的影响

	DCM	EFG	WLSM
$\Delta t = 0.0015s$			
$\Delta t = 0.0016s$		×	
$\Delta t = 0.0024s$		×	
$\Delta t = 0.0025s$	×	×	×

注： 表示计算可以进行；×表示计算失效

从表 3.2 可以发现，DCM 和 WLSM 显示格式的最大允许时间步长明显大于 EFG。2000 年 Patrick Smolinski 曾经就一维热传导问题讨论了 EFG 和有限元法 (Finite Element Method, 简称 FEM) 显示格式的最大允许时间步长问题^[36]，最后得到的结果是：

$$\Delta t_c^{EFG} = \frac{L_e d_{\max}}{2}, \quad \Delta t_c^{FEM} = \frac{L_e^2}{2} \quad (3-38)$$

其中 Δt_c^{EFG} 表示 EFG 的最大允许时间步长， Δt_c^{FEM} 表示 FEM 的最大允许时间步长， L_e 表示网格 (对 EFG 来说就是背景积分网格) 的尺寸， d_{\max} 表示无网格法近似中节点影响域的最大尺寸。配点格式的 DCM 和基于配点格式的 WLSM 中泛函形成的过程可以看作是以各节点影响域为背景积分网格的单点高斯积分过程，如果按照 Smolinski 的理论，与(3-38)相应的 DCM 和 WLSM 的最大允许时间步长为：

$$\Delta t_c^{DCM} = \Delta t_c^{WLSM} = \frac{d_{\max}^2}{2} \quad (3-39)$$

其中 Δt_c^{DCM} 表示 DCM 的最大允许时间步长， Δt_c^{WLSM} 表示 WLSM 的最大允许时间步长。考虑到网格尺寸 L_e 和节点间距相当，而节点影响域的最大尺寸 d_{\max} 显然大于节点间距，故：

$$d_{\max} > L_e \quad (3-40)$$

所以不难得到以下结论：

$$\Delta t_c^{\text{DCM}} = \Delta t_c^{\text{WLSM}} > \Delta t_c^{\text{EFG}} > \Delta t_c^{\text{FEM}} \quad (3-41)$$

综合以上的结果分析，EFG 虽然精度较高，但是计算量相对较大，DCM 精度不如 WLSM，所以 WLSM 相对 EFG 和 DCM 体现出在计算精度和速度上的综合优势。

3.1.4.2 Lamb 问题

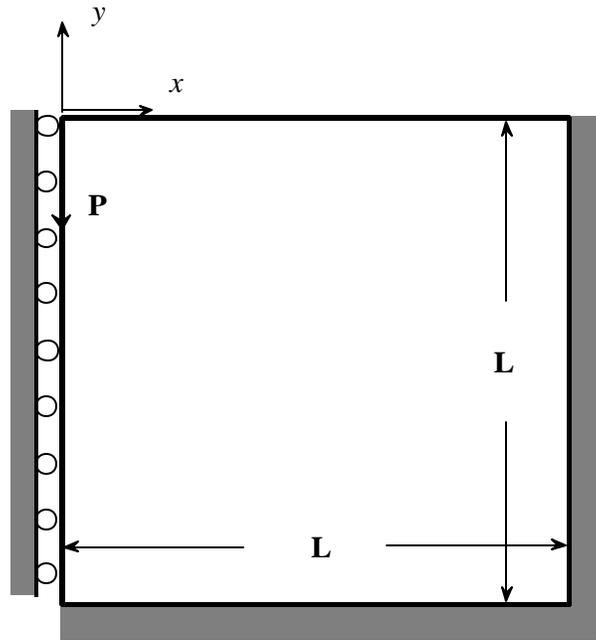


图 3.9 Lamb 问题模型

Lamb 在 1904 年发表了对弹性半空间介质受力后弹性波传播问题的研究结果，此后人们把振源位于半无限介质表面或内部所产生的弹性波传播问题称为 Lamb 问题^[37]。

考虑二维情况中的对称性和弹性波速有限性，Lamb 问题模型可以表示成图 3.9，其中 P 表示载荷线元：

$$P = -Q \cdot d(x) \cdot f(t) \quad (3-42)$$

式(3-42)中 $d(x)$ 表示激振力作用范围很小，在数值计算中，线载荷 P 通过静力等效原则转换为一个作用于小范围区域的振源，如图 3.10。

计算过程中，取杨氏模量

$E = 10000 \text{MPa}$ ，材料密度 $\rho = 100 \text{kg/m}^3$ ，

泊松比 $\nu = 0.3333$ ，这样可以得理论弹性波速为 $c = \sqrt{E/\rho} = 10 \text{m/s}$ 。MLS 近似

函数中节点影响域为圆域，离计算点最近的第 12 点和计算点之间的距离乘以放大系数 1.2 作为该计算点的影响域，基函数阶次为二次，高斯截断权函数参数取 $d = 1.0$ ， $c = 0.2$ 。

由于准备考察 0.7s 以内弹性波传播情况，所以模型尺寸定为 $L = 7.0 \text{m}$ ，均布 21×21 节点，取固定时间步长 $\Delta t = 0.0005 \text{s}$ 。

图 3.11 给出了在四个不同的时刻利用 WLSM 对 $f(t) = \sin(100t)$ 激振力作用下全场应力 s_y 的计算结果。可以看到类似正弦波形的弹性波传播速度很好地满足了理论波速。

若 P 取为随时间线性增加的载荷，如图 3.12。则存在理论解 [35]：

$$\begin{aligned} s_y = -Q & \left[\int_{s_L}^t \frac{df(s)}{ds} G_L(r, \mathbf{q}, t-s) ds \right. \\ & + \int_{s_T}^t \frac{df(s)}{ds} G_T(r, \mathbf{q}, t-s) ds \\ & \left. + \int_{t_{TL}}^{s_r} \frac{df(s)}{ds} G_{TL}(r, \mathbf{q}, t-s) ds \right] \end{aligned} \quad (3-43)$$

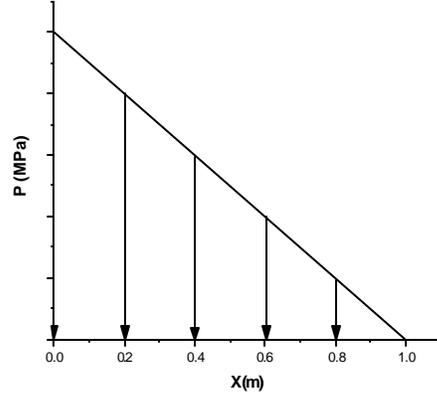


图 3.10 分布式激振载荷

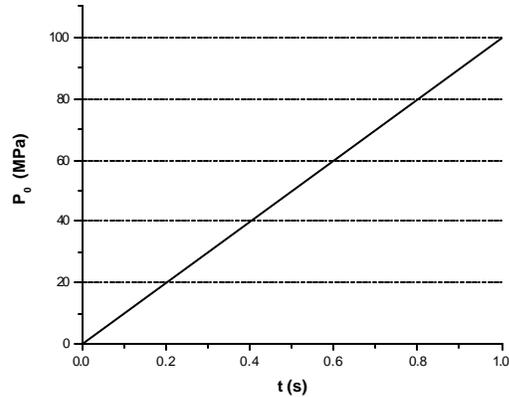


图 3.12 原点处载荷 P_0 随时间的变化

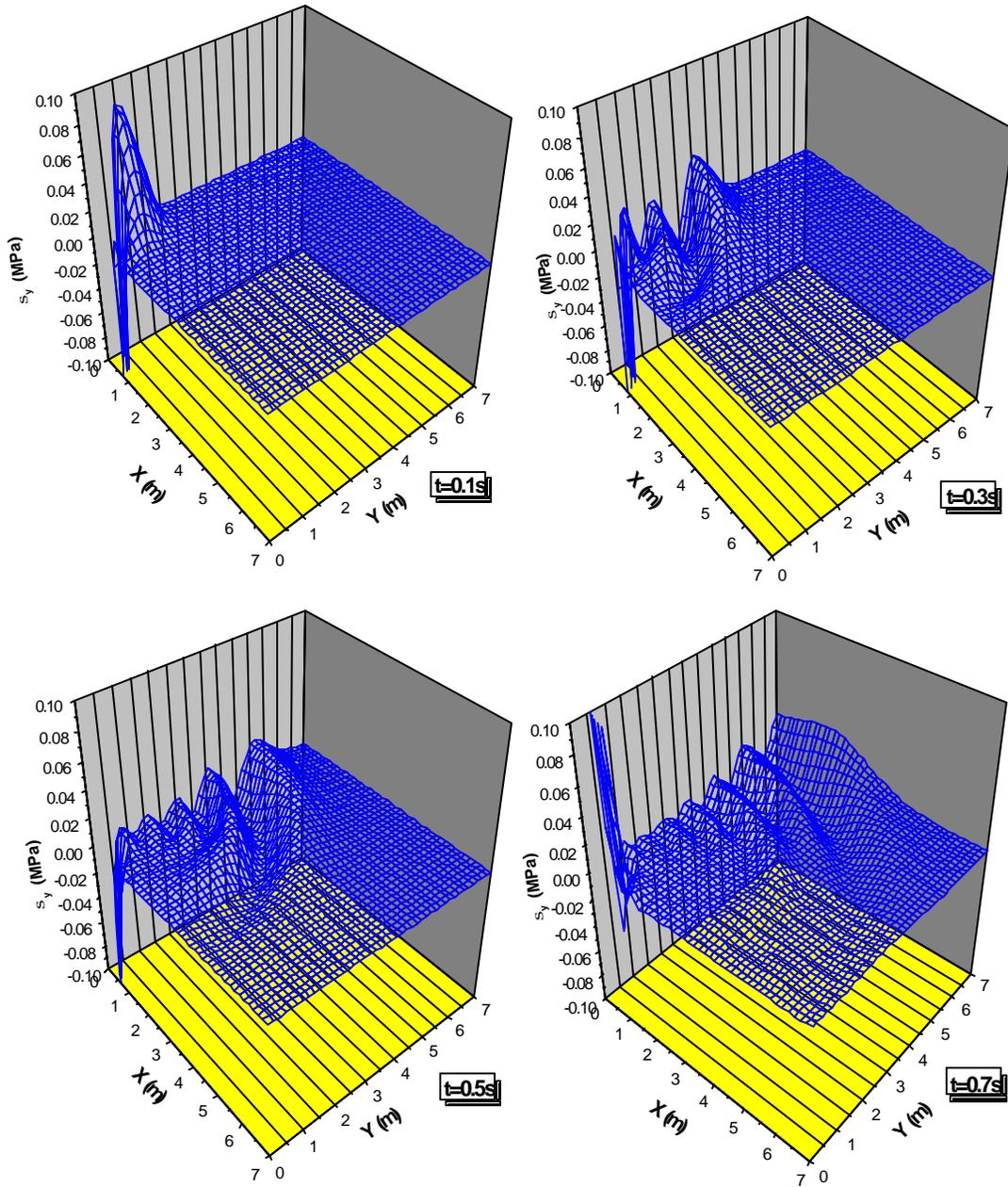


图 3.11 $f(t) = \sin(100t)$ 激振力作用下全场应力 s_y

图 3.13 给出对称线上 $y = -2.0\text{m}$ 处节点应力 s_x 和 s_y 的计算值和理论值。可以看到 WLSM 的计算结果和理论解基本符合。应力 s_y 结果误差

相对较大主要原因是分布力作用范围内节点个数有限（4点），不能完全描述激振力总的效果。

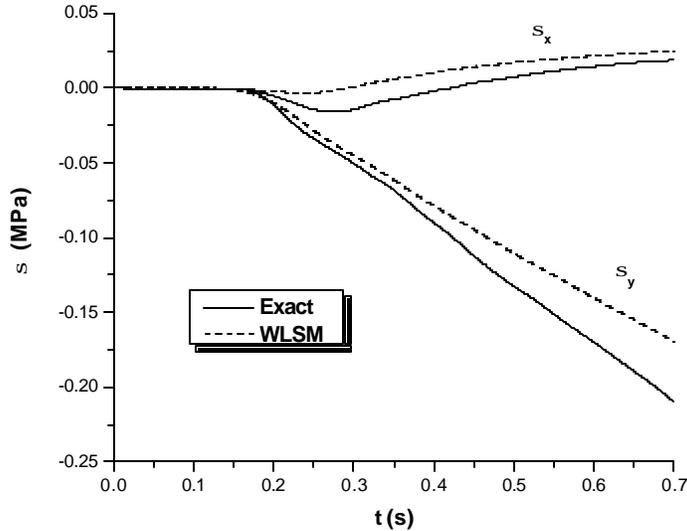


图 3.13 对称线上 $y = -2.0\text{m}$ 处节点 s_x 和 s_y

3.2 大变形问题

3.2.1 Lagrange描述^[38,39]

借助于运动着的具体物质质点（它以基准状态的位置坐标为标记）来考察运动和变形的的方法叫做物质描述或 Lagrange 描述，物质坐标一般用 X_i 表示。

物体的当前坐标 x_i 相对于物质坐标 X_i 的偏导数 $\partial x_i / \partial X_j$ 为变形梯度，它是一个非对称二阶张量。变形梯度实际上可以看成是一个线性变换，它把参考构形中质点 X_i 的邻域映射到当前位形 x_i 的一个邻域；或者说，它把初始的线元 dX_i 变换到当前的线元 dx_i 。所以变形梯度刻划了整个变形，它既包含了线元的伸缩，也包含了线元的转动，在大变形问题的分析中起着重要的作用。

3.2.2 应变、应力的度量和平衡方程的形式

大变形问题中应变的度量通常采用 Green-Lagrange 应变张量 \mathbf{E} ,分量形式为 :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (3-44)$$

其中 u_i 为变形后的位移 , 在这它是 Lagrange 坐标 X_i 的函数。可以看到 Green 应变张量 \mathbf{E} 是一个对称的二阶张量。在小变形情况下 , 忽略(3-44)式中 $(\partial u_k / \partial X_i) \cdot (\partial u_k / \partial X_j)$ 项。

u_i 通过离散点的位移值近似以后 , Green 应变张量 \mathbf{E} 和离散点位移向量 \mathbf{a} 之间以及他们变分之间的关系式推导如下^[38]。

假设移动最小二乘近似可以表示为 :

$$\mathbf{u}_i^h = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{a} \quad (3-45)$$

将 Green 应变张量 \mathbf{E} 表示成线性项和非线性项两个部分 :

$$E_{ij} = E_{ij}^L + E_{ij}^N \quad (3-46)$$

其中 E_{ij}^L 为线性项 , E_{ij}^N 为非线性项 :

$$E_{ij}^L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (3-47)$$

$$E_{ij}^N = \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial X_i}$$

为了便于推导 , 用列矢量表示以上三个张量 :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= [E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{23}, 2E_{31}, 2E_{12}]^T \\ \mathbf{E}_L &= [E_{11}^L, E_{22}^L, E_{33}^L, 2E_{23}^L, 2E_{31}^L, 2E_{12}^L]^T \\ \mathbf{E}_N &= [E_{11}^N, E_{22}^N, E_{33}^N, 2E_{23}^N, 2E_{31}^N, 2E_{12}^N]^T \end{aligned} \quad (3-48)$$

将(3-45)代入(3-47) , 这样(3-48)可表示为 :

$$\mathbf{E}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} & \frac{\partial}{\partial X_2} \\ \frac{\partial}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{B}_L \cdot \mathbf{a} \quad (3-49)$$

$$\mathbf{E}_N = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial X_3} \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial X_3} & \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial X_2} & \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial X_1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_1} \mathbf{I} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_1} \mathbf{I} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial X_1} \mathbf{I} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_2} \mathbf{I} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_2} \mathbf{I} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial X_2} \mathbf{I} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_3} \mathbf{I} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_3} \mathbf{I} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial X_3} \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{B}}_N \cdot \mathbf{a} \quad (3-50)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_N = (\mathbf{B}_L + \tilde{\mathbf{B}}_N) \cdot \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{a} \quad (3-51)$$

由于 \mathbf{A} 与 \mathbf{a} 有关，所以可以看出 Green 应变张量 \mathbf{E} 和节点位移矢量 \mathbf{a} 之间是非线性关系。

由(3-49)有：

$$d\mathbf{E}_L = \mathbf{B}_L \cdot d\mathbf{a} \quad (3-52)$$

由(3-50)得：

$$(\mathbf{dA}) \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{a} \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} \cdot (\mathbf{da}) \quad (3-53)$$

这样由(3-50)和(3-53)得：

$$\mathbf{dE}_N = \frac{1}{2}(\mathbf{dA}) \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{A} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{da} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{da} = 2\tilde{\mathbf{B}}_N \cdot \mathbf{da} \quad (3-54)$$

联立(3-52)和(3-54)得：

$$\mathbf{dE} = (\mathbf{B}_L + 2\tilde{\mathbf{B}}_N) \cdot \mathbf{da} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{da} \quad (3-55)$$

对比(3-51)和(3-55)，发现联系 \mathbf{E} 和 \mathbf{a} 的转换矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}$ 与联系 \mathbf{dE} 和 \mathbf{da} 的转换矩阵 \mathbf{B} 不同，这一点和小变形情况不同。

大变形问题中相对于初始构形定义的且对称的应力张量为第二类 Piola-Kirchhoff 张量 \mathbf{S} ，对于线弹性材料，本构方程可以写成：

$$\mathbf{S} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (3-56)$$

在 Lagrange 构形下无体力时的平衡方程形式为：

$$\frac{\partial}{\partial X_k} [S_{ik} \cdot F_{ij}] = 0 \quad (3-57)$$

其中 F_{ij} 为变形梯度张量的分量：

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \mathbf{d}_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (3-58)$$

3.2.3 最小二乘法求解格式

本节以一维、二维线弹性大变形问题为例，给出域内方程的建立、边界条件的处理以及非线性方程的求解过程。

3.2.3.1 域内方程的建立

采用完全拉氏方法 (Total Lagrange) 格式，考虑无体力时的情况。

在一维问题中，第 i 点平衡方程

$$\frac{d}{dX} \left[S_i \left(1 + \frac{du_i}{dX} \right) \right] = 0 \quad (3-59)$$

其中：

$$\begin{aligned}
 u_i &= \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{a} \\
 E_i &= \left[\frac{d\mathbf{F}_i}{dX} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}_i^T}{dX} \right) \right] \left(\frac{d\mathbf{F}_i}{dX} \right) \cdot \mathbf{a} \\
 S_i &= E \cdot E_i
 \end{aligned} \tag{3-60}$$

最小二乘意义下的泛函及其变分形式：

$$\Pi = \sum_i \frac{d}{dX} \left[S_i \left(1 + \frac{du_i}{dX} \right) \right] \cdot \frac{d}{dX} \left[S_i \left(1 + \frac{du_i}{dX} \right) \right] \tag{3-61}$$

$$\begin{aligned}
 d\Pi &= 2 \sum_i \frac{d}{dX} \left\{ d \left[S_i \left(1 + \frac{du_i}{dX} \right) \right] \right\} \cdot \frac{d}{dX} \left[S_i \left(1 + \frac{du_i}{dX} \right) \right] \\
 &= 2 \sum_i \left[\left(1 + \frac{du_i}{dX} \right) \frac{dS_i}{dX} + \frac{d^2 u_i}{dX^2} S_i \right] \cdot \left[\frac{dS_i}{dX} \left(1 + \frac{du_i}{dX} \right) + dS_i \frac{d^2 u_i}{dX^2} + \frac{d\mathbf{a}^T}{dX} \cdot \frac{dS_i}{dX} + \frac{d^2 \mathbf{a}^T}{dX^2} \cdot S_i \right]
 \end{aligned} \tag{3-62}$$

其中：

$$\begin{aligned}
 du_i &= \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{a} \\
 \frac{du_i}{dX} &= \frac{d\mathbf{F}_i}{dX} \cdot \mathbf{a}, \quad \frac{d^2 u_i}{dX^2} = \frac{d^2 \mathbf{F}_i}{dX^2} \cdot \mathbf{a}, \quad \frac{d\mathbf{a}^T}{dX} = d\mathbf{a}^T \cdot \frac{d\mathbf{F}_i^T}{dX}, \quad \frac{d^2 \mathbf{a}^T}{dX^2} = d\mathbf{a}^T \cdot \frac{d^2 \mathbf{F}_i^T}{dX^2} \\
 dS_i &= d\mathbf{a}^T \cdot E \left[\frac{d\mathbf{F}_i^T}{dX} + \left(\frac{d\mathbf{F}_i^T}{dX} \right) \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}_i}{dX} \right) \cdot \mathbf{a} \right] \\
 \frac{dS_i}{dX} &= E \left[\frac{d^2 \mathbf{F}_i^T}{dX^2} + \mathbf{a}^T \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}_i^T}{dX} \right) \cdot \left(\frac{d^2 \mathbf{F}_i}{dX^2} \right) \right] \cdot \mathbf{a} \\
 \frac{d\mathbf{a}^T}{dX} \cdot E &= d\mathbf{a}^T \cdot E \left[\frac{d^2 \mathbf{F}_i^T}{dX^2} + 2 \left(\frac{d\mathbf{F}_i^T}{dX} \right) \cdot \left(\frac{d^2 \mathbf{F}_i}{dX^2} \right) \cdot \mathbf{a} \right]
 \end{aligned} \tag{3-63}$$

由 $d\mathbf{a}$ 的任意性，当 $d\Pi=0$ 时，得到方程：

$$\Psi_1(\mathbf{a}) = 0 \tag{3-64}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \Psi_1(\mathbf{a}) = \sum_{l=1}^N & \left\{ \left(1 + \frac{d\mathbf{F}_l}{dX} \cdot \mathbf{a} \right) \cdot \left[\frac{d^2\mathbf{F}_l}{dX^2} \cdot \mathbf{a} + \left(\frac{d\mathbf{F}_l}{dX} \cdot \mathbf{a} \right) \cdot \left(\frac{d^2\mathbf{F}_l}{dX^2} \cdot \mathbf{a} \right) \right] \right. \\
 & \left. + \left(\frac{d^2\mathbf{F}_l}{dX^2} \cdot \mathbf{a} \right) \cdot \left[\frac{d\mathbf{F}_l}{dX} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}_l}{dX} \cdot \mathbf{a} \right) \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}_l}{dX} \cdot \mathbf{a} \right) \right] \right\} \\
 & \cdot \left[\left(\frac{d^2\mathbf{F}_l}{dX^2} \right)^T \cdot \left[1 + 2 \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}_l}{dX} \cdot \mathbf{a} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}_l}{dX} \cdot \mathbf{a} \right) \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}_l}{dX} \cdot \mathbf{a} \right) \right] \right. \\
 & \left. + 4 \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}_l}{dX} \right)^T \cdot \left(1 + \frac{d\mathbf{F}_l}{dX} \cdot \mathbf{a} \right) \cdot \left(\frac{d^2\mathbf{F}_l}{dX^2} \cdot \mathbf{a} \right) \right\} \quad (3-65)
 \end{aligned}$$

N 为节点总数。

在二维问题中，第 i 点平衡方程：

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \left[S_{11}^i \cdot \left(1 + \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} \right) + S_{21}^i \cdot \frac{\partial u_1^i}{\partial X_2} \right] + \frac{\partial}{\partial X_2} \left[S_{12}^i \cdot \left(1 + \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} \right) + S_{22}^i \cdot \frac{\partial u_1^i}{\partial X_2} \right] = 0 \quad (3-66a)$$

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \left[S_{21}^i \cdot \left(1 + \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} \right) + S_{11}^i \cdot \frac{\partial u_2^i}{\partial X_1} \right] + \frac{\partial}{\partial X_2} \left[S_{22}^i \cdot \left(1 + \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} \right) + S_{12}^i \cdot \frac{\partial u_2^i}{\partial X_1} \right] = 0 \quad (3-66b)$$

其中：

$$u_j^i = \mathbf{F}_j^i \cdot \mathbf{a}$$

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2, & E_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 \\
 E_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right) \quad (3-67)
 \end{aligned}$$

$$S_{11}^i = \frac{E}{1-\mathbf{u}^2} [E_{11}^i + \mathbf{u} \cdot E_{22}^i], \quad S_{22}^i = \frac{E}{1-\mathbf{u}^2} [E_{22}^i + \mathbf{u} \cdot E_{11}^i]$$

$$S_{12}^i = \frac{E}{2(1+\mathbf{u})} [2E_{12}^i]$$

最小二乘意义下的泛函及其变分形式：

$$\begin{aligned}
 \Pi = & \sum_i \left\{ \frac{\partial}{\partial X_1} \left[S_{11}^i \cdot \left(1 + \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} \right) + S_{21}^i \cdot \frac{\partial u_1^i}{\partial X_2} \right] + \frac{\partial}{\partial X_2} \left[S_{12}^i \cdot \left(1 + \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} \right) + S_{22}^i \cdot \frac{\partial u_1^i}{\partial X_2} \right] \right\} \\
 & \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial X_1} \left[S_{11}^i \cdot \left(1 + \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} \right) + S_{21}^i \cdot \frac{\partial u_1^i}{\partial X_2} \right] + \frac{\partial}{\partial X_2} \left[S_{12}^i \cdot \left(1 + \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} \right) + S_{22}^i \cdot \frac{\partial u_1^i}{\partial X_2} \right] \right\} \\
 + & \sum_i \left\{ \frac{\partial}{\partial X_1} \left[S_{21}^i \cdot \left(1 + \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} \right) + S_{11}^i \cdot \frac{\partial u_2^i}{\partial X_1} \right] + \frac{\partial}{\partial X_2} \left[S_{22}^i \cdot \left(1 + \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} \right) + S_{12}^i \cdot \frac{\partial u_2^i}{\partial X_1} \right] \right\} \\
 & \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial X_1} \left[S_{21}^i \cdot \left(1 + \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} \right) + S_{11}^i \cdot \frac{\partial u_2^i}{\partial X_1} \right] + \frac{\partial}{\partial X_2} \left[S_{22}^i \cdot \left(1 + \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} \right) + S_{12}^i \cdot \frac{\partial u_2^i}{\partial X_1} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{3-68}$$

$$\begin{aligned}
 d\Pi = & 2 \sum_i \left\{ \frac{\partial}{\partial X_1} d \left[S_{11}^i \cdot \left(1 + \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} \right) + S_{21}^i \cdot \frac{\partial u_1^i}{\partial X_2} \right] + \frac{\partial}{\partial X_2} d \left[S_{12}^i \cdot \left(1 + \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} \right) + S_{22}^i \cdot \frac{\partial u_1^i}{\partial X_2} \right] \right\} \\
 & \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial X_1} \left[S_{11}^i \cdot \left(1 + \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} \right) + S_{21}^i \cdot \frac{\partial u_1^i}{\partial X_2} \right] + \frac{\partial}{\partial X_2} \left[S_{12}^i \cdot \left(1 + \frac{\partial u_1^i}{\partial X_1} \right) + S_{22}^i \cdot \frac{\partial u_1^i}{\partial X_2} \right] \right\} \\
 + & 2 \sum_i \left\{ \frac{\partial}{\partial X_1} d \left[S_{21}^i \cdot \left(1 + \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} \right) + S_{11}^i \cdot \frac{\partial u_2^i}{\partial X_1} \right] + \frac{\partial}{\partial X_2} d \left[S_{22}^i \cdot \left(1 + \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} \right) + S_{12}^i \cdot \frac{\partial u_2^i}{\partial X_1} \right] \right\} \\
 & \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial X_1} \left[S_{21}^i \cdot \left(1 + \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} \right) + S_{11}^i \cdot \frac{\partial u_2^i}{\partial X_1} \right] + \frac{\partial}{\partial X_2} \left[S_{22}^i \cdot \left(1 + \frac{\partial u_2^i}{\partial X_2} \right) + S_{12}^i \cdot \frac{\partial u_2^i}{\partial X_1} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{3-69}$$

其中：

$$du_j^i = \mathbf{F}_j^i \cdot d\mathbf{a}$$

$$dE_{11} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial X_1} \right) \cdot d\mathbf{a}$$

$$dE_{22} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial X_2} \right) \cdot d\mathbf{a}$$

$$dE_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial X_2} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial X_1} \right) \cdot d\mathbf{a}$$

$$dS_{11}^i = \frac{E}{1-u^2} [dE_{11}^i + \mathbf{u} \cdot dE_{22}^i], \quad dS_{22}^i = \frac{E}{1-u^2} [dE_{22}^i + \mathbf{u} \cdot dE_{11}^i], \quad dS_{12}^i = \frac{E}{2(1+u)} [2dE_{12}^i] \tag{3-70}$$

由 $d\mathbf{a}$ 的任意性，当 $d\Pi=0$ 时，得到方程：

$$\Psi_1(\mathbf{a}) = 0 \quad (3-71)$$

3.2.3.2 边界条件的处理

在一维问题中，假设第 j 个位移边界条件为：

$$u(X_j) = \hat{u}_j \quad (3-72)$$

对于所有位移边界条件代入移动最小二乘近似函数且考虑对称性要求后有：

$$\mathbf{a} \sum_j \mathbf{F}_j^T \cdot \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \sum_j \mathbf{F}_j^T \cdot \hat{u}_j \quad (3-73)$$

其中 \mathbf{a} 为罚数。

假设第 m 个力边界条件为：

$$S_m = \hat{q}_m \quad (3-74)$$

代入移动最小二乘近似函数后：

$$E \left[\frac{d\mathbf{F}_m}{dX} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}_m^T}{dX} \right) \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}_m}{dX} \right) \right] \cdot \mathbf{a} = \hat{q}_m \quad (3-75)$$

考虑对称性的要求变化为：

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{d\mathbf{F}_m^T}{dX} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{F}_m^T}{dX} \right) \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}_m}{dX} \right) \cdot \mathbf{a} \right] \cdot \left[\frac{d\mathbf{F}_m}{dX} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}_m^T}{dX} \right) \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}_m}{dX} \right) \right] \cdot \mathbf{a} \\ &= \left[\frac{d\mathbf{F}_m^T}{dX} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{F}_m^T}{dX} \right) \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}_m}{dX} \right) \cdot \mathbf{a} \right] \cdot \hat{q}_m \end{aligned} \quad (3-76)$$

对于所有力边界条件整理得：

$$\begin{aligned} & \mathbf{b} \sum_m E \left\{ \left[\frac{d\mathbf{F}_m^T}{dX} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{F}_m^T}{dX} \right) \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}_m}{dX} \right) \cdot \mathbf{a} \right] \cdot \left[\frac{d\mathbf{F}_m}{dX} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}_m^T}{dX} \right) \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}_m}{dX} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{F}_m^T}{dX} \right) \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}_m}{dX} \right) \cdot \hat{q}_m \right\} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \sum_m \left(\frac{d\mathbf{F}_m^T}{dX} \right) \cdot \hat{q}_m \end{aligned} \quad (3-77)$$

其中 \mathbf{b} 为罚数。

将(3-72)和(3-76)的左右端项分别加入(3-64)的两端，得到一维问题最后的求解方程：

$$\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{Q} \quad (3-78)$$

在二维问题中，假设第 j 个位移边界节点在 k 方向上的给定位移为 \hat{u}_{jk} ：

$$u_k(\mathbf{X}_j) = \hat{u}_{jk} \quad (3-79)$$

对于所有位移边界条件代入移动最小二乘近似函数且考虑对称性要求后有：

$$\mathbf{a} \sum_j \sum_k (\mathbf{F}_j^k)^T \cdot \mathbf{F}_j^k \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \sum_j \sum_k (\mathbf{F}_j^k)^T \cdot \hat{u}_{jk} \quad (3-80)$$

其中 \mathbf{a} 为罚数。

假设第 m 个力边界节点处给定应力 S_{nl}^m 为 \hat{q}_{mnl} ：

$$S_{nl}^m = \hat{q}_{mnl} \quad (3-81)$$

代入移动最小二乘近似函数后：

$$A_{nl}(\mathbf{F}_m, \mathbf{a}) = \hat{q}_{mnl} \quad (3-82)$$

其中 A_{nl} 表示关于空间坐标的微分算子。

考虑对称性的要求变化为：

$$B_{nl}(\mathbf{F}_m, \mathbf{a}) \cdot A_{nl}(\mathbf{F}_m, \mathbf{a}) = B_{nl}(\mathbf{F}_m, \mathbf{a}) \cdot \hat{q}_{mnl} \quad (3-83)$$

其中 $\mathbf{d}[A_{nl}(\mathbf{F}_m, \mathbf{a})] = B_{nl}(\mathbf{F}_m, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{d}\mathbf{a}$ 。

对于所有力边界条件整理得：

$$\mathbf{b} \sum_m \sum_n \sum_l [B_{nl}(\mathbf{F}_m, \mathbf{a}) \cdot A_{nl}(\mathbf{F}_m, \mathbf{a}) - C_{nl}(\mathbf{F}_m, \mathbf{a}) \cdot \hat{q}_{mnl}] = \mathbf{b} \sum_m \sum_n \sum_l [D_{nl}(\mathbf{F}_m) \cdot \hat{q}_{mnl}] \quad (3-84)$$

其中 $B_{nl}(\mathbf{F}_m, \mathbf{a}) = C_{nl}(\mathbf{F}_m, \mathbf{a}) + D_{nl}(\mathbf{F}_m)$ ； \mathbf{b} 为罚数。

将(3-79)和(3-83)的左右端项分别加入(3-70)的两端，得到二维问题最后的求解方程：

$$\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{Q} \quad (3-85)$$

3.2.3.3 非线性方程组的求解^[40]

最小二乘法的求解方程组是一个非线性方程组，本文采用增量法求解，具体过程如下：

给 $\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{Q}$ 右端载荷项乘以系数 I ，用以控制载荷步长：

$$\Psi(\mathbf{a}) = I\mathbf{Q} \quad (3-86)$$

在每一个载荷增量步中采用以下两种方法求解：

1. Newton? Raphson? NR? 法

对 $m+1$ 个载荷增量步的第 $n+1$ 次迭代形式为：

$$\Psi(\mathbf{a}_{m+1}^{n+1}) = I_{m+1}\mathbf{Q} \quad (3-87)$$

然后将 $\Psi(\mathbf{a}_{m+1}^{n+1})$ 表示成在 \mathbf{a}_{m+1}^n 附近的仅保留线性项的 Taylor 展开式：

$$\Psi(\mathbf{a}_{m+1}^n) + (\mathbf{K}^T)_{m+1}^n \cdot \Delta\mathbf{a}_{m+1}^n = I_{m+1}\mathbf{Q} \quad (3-88)$$

其中 $(\mathbf{K}^T)_{m+1}^n$ 表示 $m+1$ 个载荷增量步的第 n 次迭代后的切线刚度阵：

$$(\mathbf{K}^T)_{m+1}^n = \left. \frac{d\Psi}{d\mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_{m+1}^n} \quad (3-89)$$

整理(3-87)得：

$$\Delta\mathbf{a}_{m+1}^n = \left[(\mathbf{K}^T)_{m+1}^n \right]^{-1} \cdot \left[I_{m+1}\mathbf{Q} - \Psi(\mathbf{a}_{m+1}^n) \right] \quad (3-90)$$

在本文中每个载荷步中的迭代次数是由 $\|\Delta\mathbf{a}_{m+1}^n\|^2$ 控制的。

一般情况下 NR 法具有良好的收敛性，但是它每次迭代需要重新形成切线刚度阵 $(\mathbf{K}^T)_{m+1}^n$ 和求解关于 $\Delta\mathbf{a}_{m+1}^n$ 的方程组，计算量很大。

2. 修正 Newton? Raphson? mNR? 法：

为了减少 NR 法在迭代过程中由于重新生成切线刚度阵而增加的计算量，mNR 法对 NR 法的迭代过程进行了简化，即对于同一载荷步中每次迭代步使用相同的切线刚度阵，定义为：

$$(\mathbf{K}^T)_{m+1}^n = (\mathbf{K}^T)_{m+1}^0 = (\mathbf{K}^T)(\mathbf{a}_m) \quad (3-91)$$

这样一来，求解(3-89)时系数矩阵只需要分解一次，每次迭代只需回代求解即可。显然计算量相对 NR 法大为减小，但付出的代价是较低的

收敛速度。

3.2.4 算例分析

先用一维、二维大变形静力分析作校核，然后再进行动态大变形算例分析。

3.2.4.1 一维杆拉伸问题

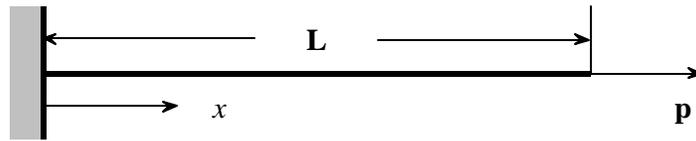


图 3.14 一维杆拉伸模型

一维杆拉伸问题计算模型如图 3.14 所示，计算过程中取杨氏模量 $E=100\text{MPa}$ ，杆长 $L=10\text{m}$ ，端部拉应力 $p=100\text{MPa}$ ，均布 16 节点。在使用载荷增量迭代过程中，分别采用 20 载荷步和 50 载荷步。EFG 数值积分过程采用两点高斯积分，MLS 近似函数中节点间距乘以放大系数 2.5 作为各点影响域半径，基函数阶次为二次，高斯截断权函数参数取 $d=1.0$ ， $c=0.3333$ 。

三种方法对自由端 $x=L$ 处节点位移的计算结果如图 3.15 和图 3.16。

由于考虑了大变形的影响，自由端的位移小于相同载荷条件下小变形解，也就是抗拉刚度增大了，而且由于杨氏模量取值较小，故大变形效果显著。可以看出各种方法的结果都符合的很好，

表 3.3 给出了两种载荷增量步情况下不同方法的迭代收敛情况。可以看出在不同载荷步下的迭代收敛情况方面，EFG 最好，而 WLSM 优于 DCM，当载荷步较多时，三种方法趋于一致。

表 3.3 两种载荷步情况下不同方法迭代收敛平均次数

平均迭代次数	DCM (NR)	WLSM (NR)	WLSM (mNR)	EFG (NR)
20 载荷增量步	3.10	3.05	3.65	3.00
50 载荷增量步	3.04	3.00	3.06	3.00

注：迭代阈值为 1.0×10^{-7}

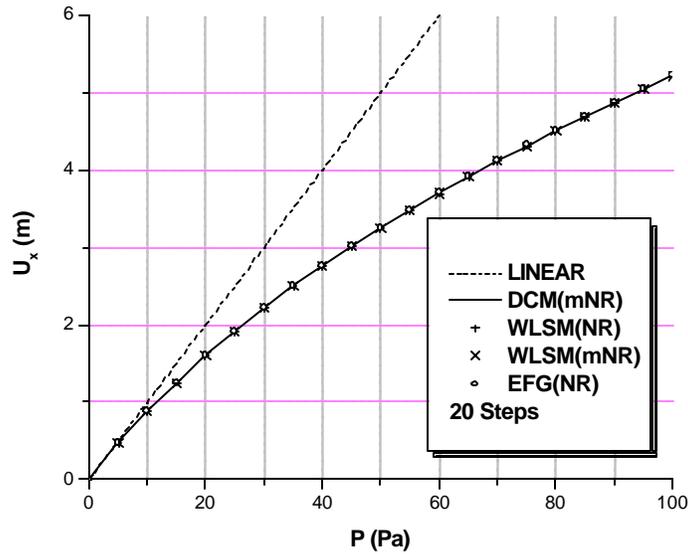


图 3.15 20 载荷增量步 $x = L$ 处位移计算结果

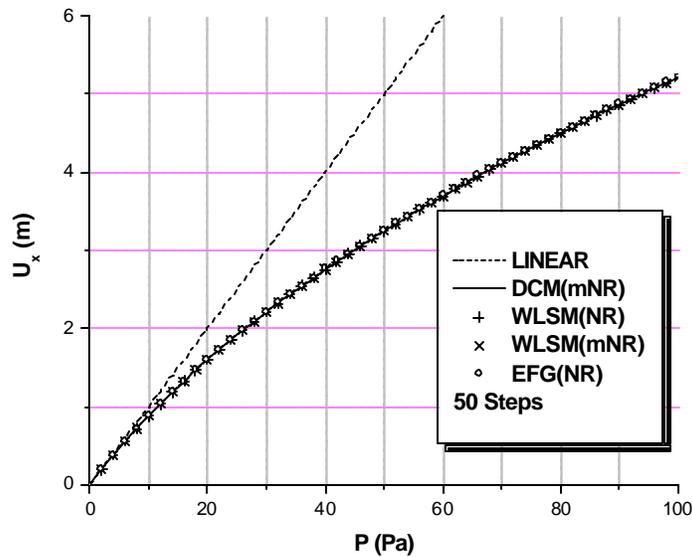


图 3.16 50 载荷增量步 $x = L$ 处位移计算结果

3.2.4.2 二维梁弯曲问题

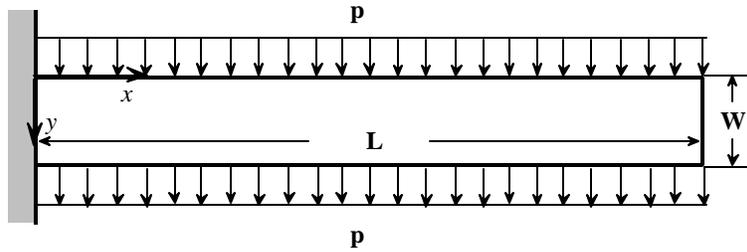


图 3.17 二维梁上下表面受均布载荷模型

二维梁上下表面受相同的均布载荷 p ，梁的尺寸为 $L \times W$ ，如图 3.17 所示。对于大变形问题，外载荷 p 可以分为跟随载荷 (VL) 和铅垂载荷 (FL) 两种方式施加。

(1) 跟随载荷表示载荷 p 的作用方向始终垂直于物面，这时上表面载荷施加情况如图 3.18。由于跟随载荷完全可以在 Lagrange 构形下描述，所以用第二类 Piola-Kirchhoff 张量 S 的分量定义相应的力边界条件为：

$$S_{22} = -p, S_{12} = 0 \quad (3-92)$$

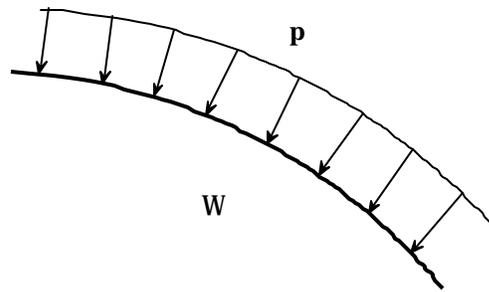


图 3.18 跟随载荷

(2) 铅垂载荷表示无论物面如何变形，载荷 p 的方向始终保持铅垂，这时上表面载荷施加情况如图 3.19。由于这时载荷定义需要涉及 Lagrange 构形和 Euler 构形，所以用第一类 Piola-Kirchhoff 张量 t 定义相应的力边界条件为：

$$t_{112} = -p, t_{111} = 0 \quad (3-93)$$

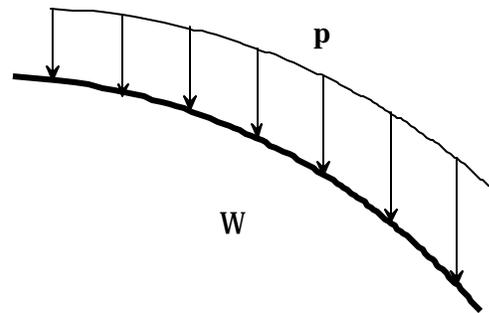


图 3.19 铅垂载荷

其中 t_{112} 表示 Lagrange 构形中法线方向为 X_2 向的表面 (即上、下表面) 上沿 Euler 构形中 x_2 向的应力分量， t_{111} 表示 Lagrange 构形中法线方向为

X_2 向的表面（即上、下表面）上沿 Euler 构形中 x_1 向的应力分量。

由 \mathbf{t} 和 \mathbf{S} 的关系，可以得到用 \mathbf{S} 表示的力边界条件：

$$\mathbf{t}_{n2} = S_{nk} \left(\mathbf{d}_{k2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \right) = -p, \quad \mathbf{t}_{n1} = S_{nk} \left(\mathbf{d}_{k1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \right) = 0 \quad (3-94)$$

在计算过程中，取梁的尺寸为 $L=10\text{m}$, $W=1\text{m}$ ，杨氏模量 $E=1200\text{MPa}$ ，泊松比 $\nu=0.2$ ，均布 41×5 节点。MLS 近似函数中节点影响域为圆域，离计算点最近的第 12 点和计算点之间的距离乘以放大系数 1.2 作为该计算点的影响域，基函数阶次为二次，高斯截断权函数参数取 $d=1.0$ ， $c=0.2$ 。

载荷增量步数设为 100 时，图 3.20 给出 WLSM 对于梁挠度的计算结果，其中 HOLDEN 表示 Holden 解析解^[40]。

可以看到计算结果显著地包含了线性部分和非线性部分，在小变形范围内，计算结果和线性结果符合的很好，而在大变形范围内，结构呈现出比线性分析结果刚硬的情况。另外依赖于变形的跟随载荷使得结构表现得比不依赖于变形的铅垂载荷情况下更柔软一些。WLSM 的计算结果和 Holden 解析解符合得很好。

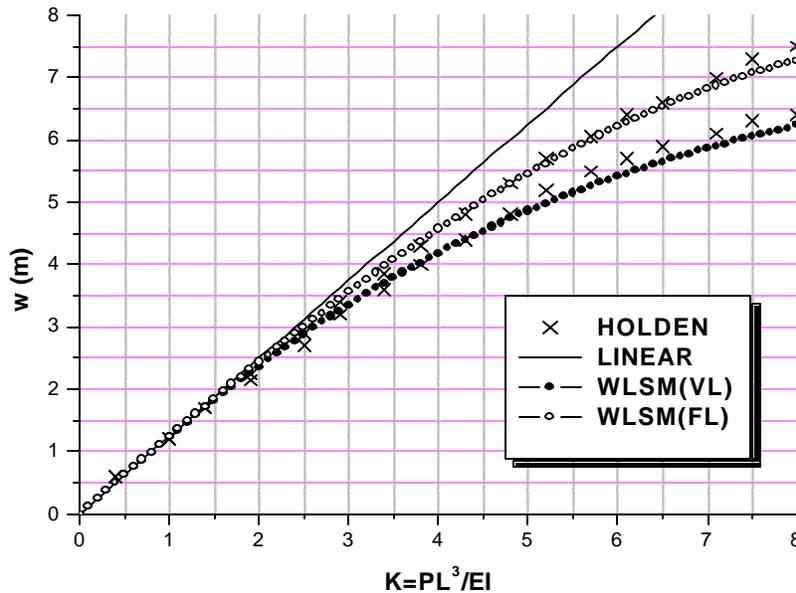


图 3.20 大变形情况下梁挠度计算结果

3.2.4.3 二维杆受冲击载荷问题

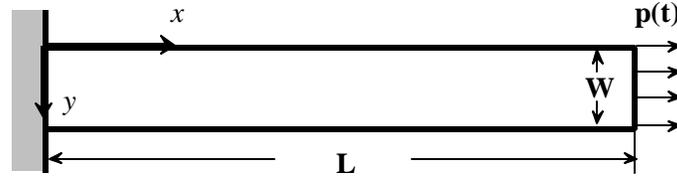


图3.21 受冲击载荷作用二维杆模型

二维杆右端表面受均布冲击拉伸载荷 $p(t)$ 的作用，如图 3.21 所示，这里考虑载荷 $p(t)$ 始终垂直与物面的情况。杆的长度为 L 、宽度为 W 。 $p(t)$ 采用图 3.2 所示的载荷模型，不过峰值设为 1000MPa。

计算过程中，取杆的尺寸为 $L=10\text{m}$ ， $W=2\text{m}$ ，杨氏模量为 $E=10000\text{MPa}$ ，材料密度为 $\rho=1.0\text{kg/m}^3$ ，泊松比为 $\nu=0.1$ ，均布 21×5 节点，时间步长取 $\Delta t=0.0005\text{s}$ 。MLS 近似函数中节点影响域为圆域，离计算点最近的第 12 点和计算点之间的距离乘以放大系数 1.2 作为该计算点的影响域，基函数阶次为二次，高斯截断权函数参数取 $d=1.0$ ， $c=0.2$ 。

图 3.22 表示 $(x,y)=(0,0)$ 处节点应力 S_{11} 和 S_{22} 的计算结果。图 3.23 表示全场应力 S_{11} 随时间变化的情况。

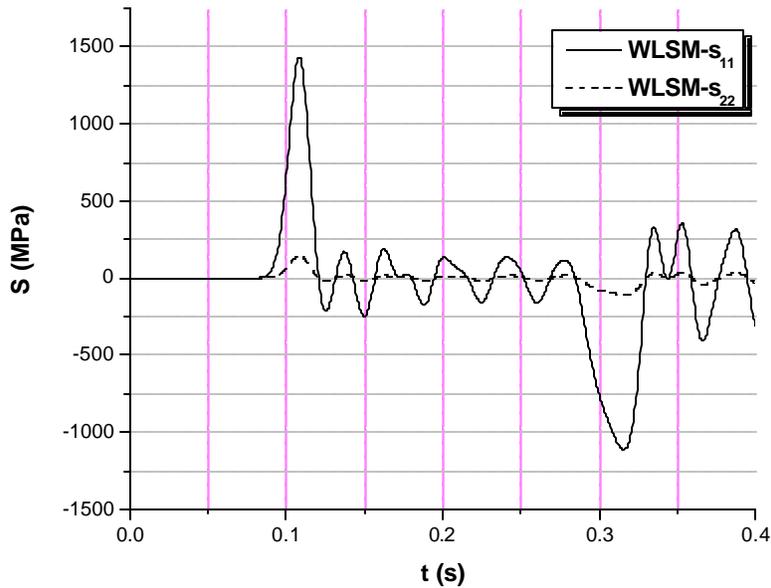


图3.22 $(x,y)=(0,0)$ 处节点应力 S_{11} 和 S_{22}

可以看出 S_{11} 和 S_{22} 计算结果的比值基本等于泊松比, 而且应变最大值的量级已经达到了 0.1, 变形程度比较大, 但是弹性波速的计算结果仍然基本符合理论波速 $c = \sqrt{E/\rho} = 100\text{m/s}$ 。

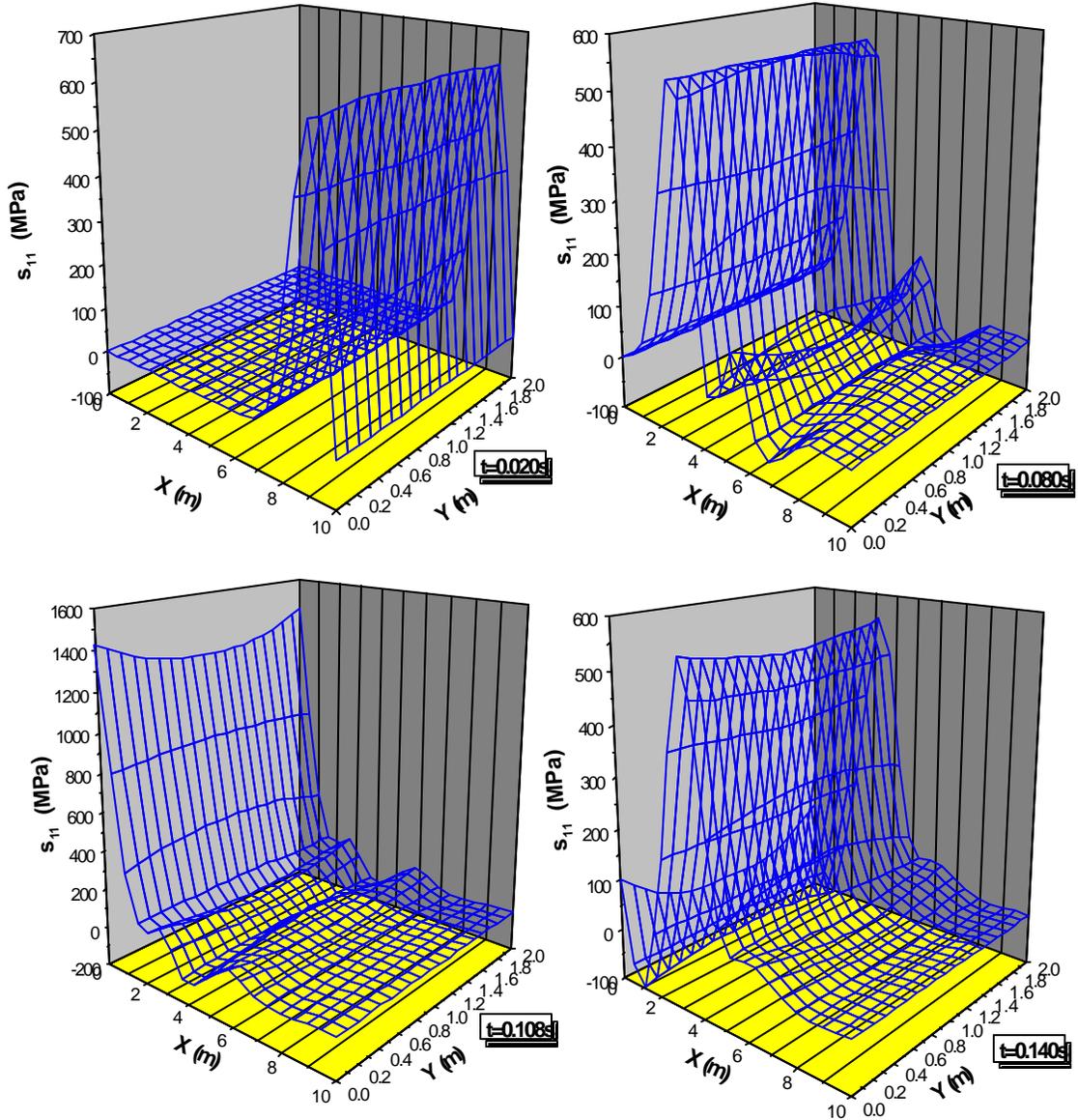


图 3.23 全场应力 S_{11} 随时间变化情况

第四章 超弹性体接触碰撞问题

前面一直是在线弹性本构关系范围内讨论最小二乘法的应用，这一章引入了非线性本构关系——超弹性材料的本构关系。本文选取了经典的 Mooney-Rivlin 材料，由应变能密度形式的本构关系推导了应力和应变分量的关系，并且将其引入最小二乘无网格法的求解过程，给出了若干算例分析的结果。

接触问题是研究碰撞过程中不可避免的问题，它需要满足包括不等式关系在内的各种接触条件，这些条件不能简单地通过前面讨论过的方法引入到求解方程中。本章列出了弹性光滑接触条件的表达形式，并且说明了如何将其作为一种边界条件引入到最小二乘法求解方程中，最后给出了超弹性体与光滑刚性墙正碰的算例分析结果。

4.1 超弹性体问题

4.1.1 超弹性体本构关系

Mooney-Rivlin 材料的本构方程有很多种表达方式，(4-1)是用应变能密度 W 表示的具有三个参数的形式^[41]：

$$W(I_1^C, I_2^C, I_3^C) = C_{10}(I_1^C - 3) + C_{01}(I_2^C - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2 \quad (4-1)$$

其中 C_{10} 、 C_{01} 和 d 为常数，它们由材料的材料剪切模量 m 、泊松比 ν 和初始体积模量 (Initial bulk modulus) K 来确定：

$$\begin{aligned} C_{10} + C_{01} &= m/2 \\ d &= (1 - \nu)/(C_{10} - C_{01}) \\ K &= 2/d \end{aligned} \quad (4-2)$$

泊松比 ν 一般取 0.490~0.495。

式(4-1)中 I_1^C 和 I_2^C 为 Cauchy 应变张量 \mathbf{C} 的第一、第二不变量， J 为变形梯度张量 \mathbf{F} 的行列式值：

$$\begin{aligned} I_1^C &= {}^C I_1 + {}^C I_2 + {}^C I_3 \\ I_2^C &= {}^C I_1 {}^C I_2 + {}^C I_2 {}^C I_3 + {}^C I_3 {}^C I_1 \\ J &= \det(\mathbf{F}) \end{aligned} \quad (4-3)$$

其中 ${}^C I_1$ 、 ${}^C I_2$ 和 ${}^C I_3$ 为 Cauchy 应变张量 \mathbf{C} 的三个特征值。

由于第三章的推导过程中一直使用的应变度量是 Green 应变张量 \mathbf{E} ，所以接下来将(4-1)变化成用 Green 应变张量 \mathbf{E} 的不变量表示的应变能密度形式。

Cauchy 应变张量 \mathbf{C} 、Green 应变张量 \mathbf{E} 以及变形梯度张量 \mathbf{F} 之间有如下关系^[42]：

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (4-4)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (4-5)$$

假设正交阵 \mathbf{Q} 满足：

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} {}^C I_1 & & \\ & {}^C I_2 & \\ & & {}^C I_3 \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

则(4-4)式可以变换成：

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} {}^C I_1 - 1 & & \\ & {}^C I_2 - 1 & \\ & & {}^C I_3 - 1 \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

由(4-7)式可以得：

$$\begin{aligned} {}^C I_1 &= 2{}^E I_1 + 1 \\ {}^C I_2 &= 2{}^E I_2 + 1 \\ {}^C I_3 &= 2{}^E I_3 + 1 \end{aligned} \quad (4-8)$$

其中 ${}^E I_1$ 、 ${}^E I_2$ 和 ${}^E I_3$ 为 Green 应变张量 \mathbf{E} 的三个特征值。

这样就可以得到 Cauchy 应变张量 \mathbf{C} 的不变量和 Green 应变张量 \mathbf{E} 的不变量之间的关系：

$$\begin{aligned} I_1^C &= 2I_1^E + 3 \\ I_2^C &= 4I_2^E + 4I_1^E + 3 \end{aligned} \quad (4-9)$$

其中 I_1^E 和 I_2^E 为 Green 应变张量 \mathbf{E} 的第一、第二不变量。

将(4-5)代入(4-4)：

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (4-10)$$

$$\begin{bmatrix} {}^E I_1 & & \\ & {}^E I_2 & \\ & & {}^E I_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{Q} \quad (4-11)$$

整理(4-11)式得：

$$\begin{vmatrix} 2^E I_1 + 1 & & \\ & 2^E I_2 + 1 & \\ & & 2^E I_3 + 1 \end{vmatrix} = \det(\mathbf{F})^2 = J^2 \quad (4-12)$$

由(4-12)就得到了 J 和 Green 应变张量 \mathbf{E} 三个不变量的关系：

$$J = (8I_3^E + 4I_2^E + 2I_1^E + 1)^{1/2} \quad (4-13)$$

其中 $I_3^E = {}^E I_1^E I_2^E I_3^E$ 为 Green 应变张量 \mathbf{E} 的第三不变量。

将(4-9)和(4-13)代入(4-1)得到：

$$W(I_1^E, I_2^E, I_3^E) = 2C_{10} I_1^E + 4C_{01} (I_1^E + I_2^E) + \frac{1}{d} \left(\sqrt{8I_3^E + 4I_2^E + 2I_1^E + 1} - 1 \right)^2 \quad (4-14)$$

第二类 Piola-Kirchhoff 张量 \mathbf{S} 和 Green 应变张量 \mathbf{E} 为共轭张量，它们满足如下关系：

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \quad (4-15)$$

Green 应变张量 \mathbf{E} 的三个不变量 I_1^E 、 I_2^E 和 I_3^E 对 \mathbf{E} 的导数^[43]：

$$\frac{\partial I_1^E}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial I_2^E}{\partial \mathbf{E}} = I_1^E \cdot \mathbf{I} - \mathbf{E}^T, \quad \frac{\partial I_3^E}{\partial \mathbf{E}} = I_3^E \cdot \mathbf{E}^T \quad (4-16)$$

将(4-14)和(4-16)代入(4-15)整理可得：

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{\partial W(I_1^E, I_2^E, I_3^E)}{\partial \mathbf{E}} \\ &= (2C_{10} + 4C_{01})\mathbf{I} + 4C_{01} (I_1^E \cdot \mathbf{I} - \mathbf{E}^T) + \frac{8I_3^E \cdot \mathbf{E}^T + 4(I_1^E \cdot \mathbf{I} - \mathbf{E}^T) + 2\mathbf{I}}{d} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{8I_3^E + 4I_2^E + 2I_1^E + 1}} \right) \end{aligned}$$

(4-17)

对于一维问题来说，有：

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

相应地有：

$$I_1^E = E_{11}, \quad I_2^E = I_3^E = 0 \quad (4-19)$$

将(4-19)代入(4-17)得：

$$S_{11} = 2C_{10} + 4C_{01} + \frac{1}{d} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+2E_{11}}} \right) \quad (4-20)$$

为了保证初始应力为零，同时考虑(4-2)式，取 $C_{10} = m$ ， $C_{01} = -m/2$ 和 $d = 2(1-u)/3m$ ：

$$S_{11} = \frac{3m}{2(1-u)} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+2E_{11}}} \right) \quad (4-21)$$

当 $m = 1000\text{MPa}$ ， $u = 0.490$ 时，
 $C_{10} = 1000\text{MPa}$ ， $C_{01} = -500\text{MPa}$ ，
 $d = 0.00034\text{MPa}^{-1}$ ，这时应力应变关系曲线如图 4.1。

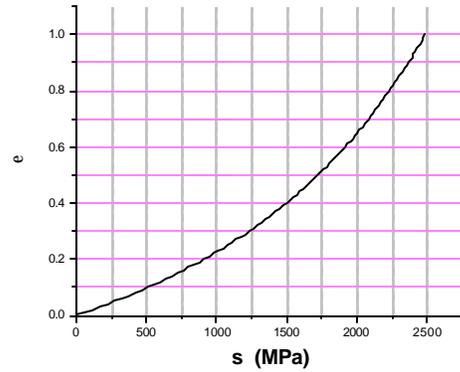


图 4.1 一维情况的本构曲线

对于二维问题来说，有：

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \\ E_{21} & E_{22} & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

相应地有：

$$I_1^E = E_{11} + E_{22}, \quad I_2^E = E_{11}E_{22} - E_{12}^2, \quad I_3^E = 0 \quad (4-23)$$

将(4-23)代入(4-17)，且取 $C_{10} = m$ ， $C_{01} = -m/2$ 和 $d = 2(1-u)/3m$ 得：

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & 2\mathbf{m}[\mathbf{E} - (E_{11} + E_{22})\mathbf{I}] \\ & + \frac{3\mathbf{m}}{2(1-\mathbf{u})} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{4(E_{11}E_{22} - E_{12}^2) + 2(E_{11} + E_{22}) + 1}} \right] [4(E_{11} + E_{22})\mathbf{I} - 4\mathbf{E} + 2\mathbf{I}] \end{aligned} \quad (4-24)$$

将(4-21)式或(4-24)式的非线性本构关系取代第三章的(3-56)式的线弹性本构关系,就可以在大变形问题的最小二乘无网格法求解方程中引入以上 Mooney-Rivlin 材料本构。

4.1.2 算例分析

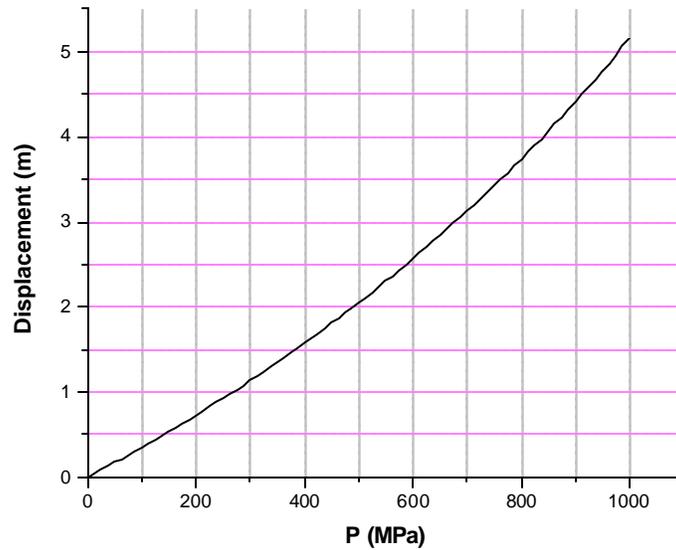
4.1.2.1 一维杆拉伸问题

计算模型见第三章的图 3.14,材料为一维 Mooney-Rivlin 超弹性材料,本构曲线如图 4.1。

计算过程中考虑了大变形的影响,杆尺寸为 $L=10\text{m}$,均布 16 点, $x=10\text{m}$ 处拉应力为 $p=1000\text{MPa}$,采用增量法迭代求解方程,分 80 载荷步。MLS 近似函数中节点间距乘以放大系数 2.5 作为各点影响域半径,基函数阶次为二次,高斯截断权函数参数取 $d=1.0$, $c=0.3333$ 。

利用 WLSM 计算右端 $x=10\text{m}$ 处节点位移结果如图 4.2。

可以看到, $x=10\text{m}$ 处节点最大位移值超过了 5m ,几何大变形影响显著。对比第三章图 3.15,结果曲线凹凸方向完全相反,这是由于图 4.1 所示的本构曲线中,材料抗拉刚度(曲线的斜率)随应变的增大而减小,不仅抵消了大变形的影响,而且使得材料呈现出比线性情况更为柔软的结果。

图 4.2 $x=10\text{m}$ 处节点位移

4.1.2.2 二维杆受冲击载荷问题

计算模型见第三章的图 3.21，材料为二维 Mooney-Rivlin 超弹性材料，密度 $\rho=1.0\text{kg/m}^3$ 。计算过程中考虑了大变形的影响，仍然考虑端部载荷 $P(t)$ 的作用方向始终垂直于材料表面的情况。杆的长度 $L=10\text{m}$ 、宽度 $W=2\text{m}$ 。 $P(t)$ 采用图 3.2 所示的载荷模型，不过峰值设为 100MPa 。均布 21×5 个节点，时间步长 $\Delta t=0.0001\text{s}$ 。MLS 近似函数中节点影响域为圆域，离计算点最近的第 12 点和计算点之间的距离乘以放大系数 1.2 作为该计算点的影响域，基函数阶次为二次，高斯截断权函数参数取 $d=1.0$ ， $c=0.2$ 。

图 4.3 给出了固定边界和下表面交界处 $(x,y)=(0,0)$ 节点应力 S_{11} 和 S_{22} 的计算结果。可以看出应力 S_{11} 和 S_{22} 时程曲线形状基本一致。另外通过对图 3.22 也可以发现，由于采用超弹性材料，杆中宽度方向应力波对长度方向应力波的影响显著，在 $(x,y)=(0,0)$ 节点处发生应力波反射的时间段内，出现两个应力波峰和一个应力波谷，且随后出现的应力波传播情况也更为复杂。

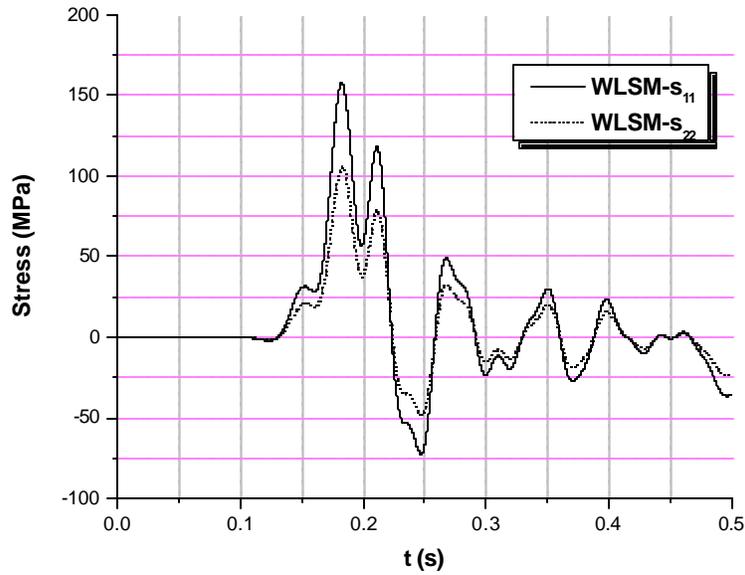


图 4.3 固定边界和下表面交界处 $(x, y) = (0, 0)$ 节点应力 S_{11} 和 S_{22}

利用 WLSM 计算全场在两个不同时刻应力 S_{11} 的结果如图 4.4。对比图 3.23, 同样可以发现应力波传播的行为更加复杂。

如果单考察波速这个指标, 简单考虑各质点初始杨氏模量 E_0 和初始剪切模量 m 之间仍然存在如下近似关系:

$$m \approx \frac{E_0}{2(1+\nu)} \quad (4-25)$$

这样可以估算出 $E_0 \approx 2980\text{MPa}$, 初始波前的移动速度

$c_0 = \sqrt{E_0/\rho} \approx 54.59\text{m/s}$, 可以看到计算结果很好地符合了预测的波速。

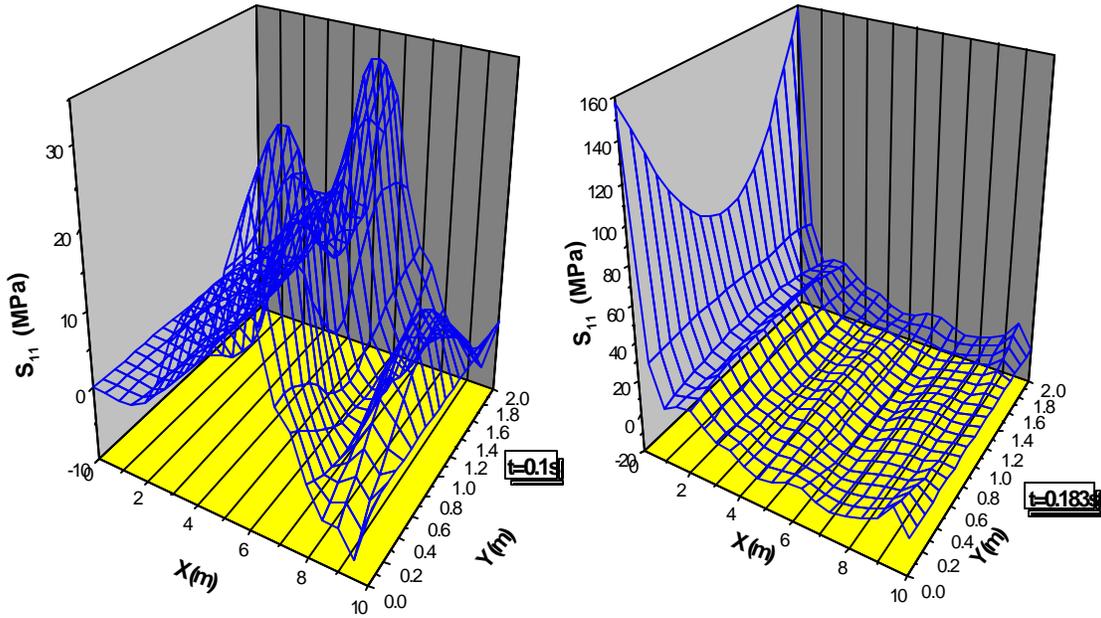


图 4.4 全场应力 S_{11} 在 $t = 0.1s$ 和 $t = 0.183s$ 时的计算结果

4.2 接触问题

接触物体的控制方程与非接触物体的相同，但在接触面处需要施加运动学和动力学接触条件，最重要的是非嵌入条件（Condition of Impenetrability），即接触物体不能相互嵌透^[39]。

4.2.1 弹性光滑接触条件

基本假定：

- (1) 物体的材料特性是弹性的
- (2) 接触表面是连续且光滑的

在接触问题中，区分不同的接触区域是非常重要的。在两个和多个物体接触的地方，有一些联系物体接触表面之间的位移和力条件，称为接触条件。我们可以通过判断出两个或多

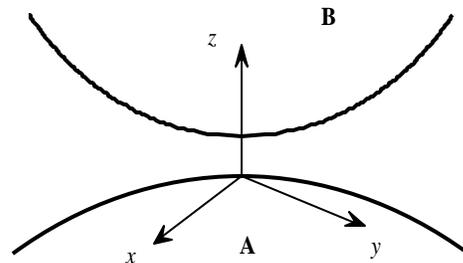


图 4.5 接触面的局部坐标系

个物体之间是以什么状态接触来确定需要满足的接触条件。以下将接触状态分为三类：连续边界、滑动边界和自由边界。

假设物体 A 和 B 发生接触，以 U_{ji} 和 R_{ji} 分别表示在接触面的局部坐标系（如图 4.5）下接触物体 $j(j=A, B)$ 在 $i(i=x, y, z)$ 方向的位移和接触力。

(1) 连续边界条件

$$R_{Ai} = -R_{Bi} \quad (i = x, y, z) \quad (4-26)$$

$$U_{Ai} = U_{Bi} \quad (i = x, y) \quad (4-27)$$

$$U_{Az} = U_{Bz} + \mathbf{d}_z$$

其中 \mathbf{d}_z 表示接触面在 z 方向的初始间隙。

(2) 自由边界条件

$$R_{Ai} = -R_{Bi} = 0 \quad (i = x, y, z) \quad (4-28)$$

$$U_{Az} < U_{Bz} + \mathbf{d}_z \quad (4-29)$$

(3) 滑动边界条件

$$R_{Ai} = -R_{Bi} \quad (i = x, y, z) \quad (4-30)$$

$$U_{Az} = U_{Bz} + \mathbf{d}_z \quad (4-31)$$

上述接触条件表达式中出现的接触面上相对接触体的位移和反力 U_{ji} 和 R_{ji} 通常都是未知的。因此在接触问题求解的每一个时间步，我们必须先假定出它的接触状态，由此求出接触面上的物体的位移和反力，然后再根据解出的结果来判断和修正原来的接触状态，这样不断循环，直到最后的接触状态稳定为止，这实际上是一个通过迭代才能求解的局部几何非线性问题。

4.2.2 刚体位移的处理

很多接触问题中，单提以上的接触条件，不足以给接触物体以足够的约束，因为往往接触物体可能出现刚体位移，导致刚度阵奇异，无法求解。

假设接触物体 A 的求解方程为：

$$\mathbf{K}_A \cdot \mathbf{u}_A = \mathbf{Q}_A \quad (4-32)$$

其中 \mathbf{K}_A 为刚度矩阵， \mathbf{Q}_A 为等效载荷向量。

为了消除刚度阵 \mathbf{K}_A 的奇异性，需要在接触物体的实际情况中引入附加约束。假设给定第 i 点 x 向位移为 \hat{u}_{Ae} 作为附加约束，(4-32)可以写成：

$$\mathbf{K}_A \cdot \mathbf{u}_A + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{F}_i^x)^T \cdot \mathbf{F}_i^x \cdot \mathbf{u}_A = \mathbf{Q}_A + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{F}_i^x)^T \cdot \hat{u}_{Ae} \quad (4-33)$$

其中 \mathbf{a} 为罚数。

对于所有附加约束，(4-33)整理得：

$$\hat{\mathbf{K}}_A \cdot \mathbf{u}_A = \hat{\mathbf{Q}}_A \quad (4-34)$$

引入附加约束后的求解方程的刚度阵 $\hat{\mathbf{K}}_A$ 成为非奇异的。

4.2.3 接触条件引入最小二乘法

本文后面的算例主要讨论超弹性体与光滑刚性墙的接触碰撞问题，所以可以将前面讨论的弹性光滑接触条件做进一步简化。

在超弹性体连续接触面上（本文算例中只存在于附加约束点处），对超弹性体上第 i 个接触点有：

$$\begin{aligned} u_x^i &= 0 \\ u_y^i &= 0 \end{aligned} \quad (4-35)$$

条件(4-35)式引入最小二乘法的求解方程时的形式为：

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{F}_x^i \cdot u_x^i &= 0 \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{F}_y^i \cdot u_y^i &= 0 \end{aligned} \quad (4-36)$$

其中 \mathbf{a} 为罚数。 \mathbf{F}_x^i 为 i 点在 x 方向上的移动最小二乘近似函数， \mathbf{F}_y^i 为 i 点在 y 方向上的移动最小二乘近似函数。

在超弹性体自由接触面上，对超弹性体上第 i 个接触点有：

$$\begin{aligned} S_{11}^i &= 0 & \text{或} & & S_{22}^i &= 0 \\ S_{12}^i &= 0 & & & S_{12}^i &= 0 \end{aligned} \quad (4-37)$$

条件(4-37)式引入最小二乘法的求解方程时的形式为：

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \frac{dS_{11}^i}{d\mathbf{a}} \cdot S_{11}^i = 0 & \quad \mathbf{b} \cdot \frac{dS_{22}^i}{d\mathbf{a}} \cdot S_{22}^i = 0 \\ & \quad \text{或} \\ \mathbf{b} \cdot \frac{dS_{12}^i}{d\mathbf{a}} \cdot S_{12}^i = 0 & \quad \mathbf{b} \cdot \frac{dS_{12}^i}{d\mathbf{a}} \cdot S_{12}^i = 0 \end{aligned} \quad (4-38)$$

其中 \mathbf{b} 为罚数。 \mathbf{a} 为节点位移向量。

在超弹性体滑动接触面上，对第 i 个接触点有：

$$\begin{aligned} S_{12}^i = 0 & \quad \text{或} \quad S_{12}^i = 0 \\ u_x^i = 0 & \quad \text{或} \quad u_y^i = 0 \end{aligned} \quad (4-39)$$

条件(4-39)式引入最小二乘法的求解方程时的形式为：

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \frac{dS_{12}^i}{d\mathbf{a}} \cdot S_{12}^i = 0 & \quad \text{或} \quad \mathbf{b} \cdot \frac{dS_{12}^i}{d\mathbf{a}} \cdot S_{12}^i = 0 \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{F}_x^i \cdot u_x^i = 0 & \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{F}_y^i \cdot u_y^i = 0 \end{aligned} \quad (4-40)$$

4.2.4 算例分析

4.2.4.1 一维杆和光滑刚性墙正碰问题

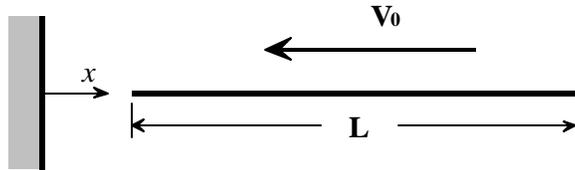


图 4.6 一维杆和光滑刚性墙正碰计算模型

长为 L 的一维杆以初速度 V_0 与表面光滑的刚性墙壁发生碰撞，如图 4.6 所示，以发生碰撞的时刻作为零时刻。

计算过程中：考虑了大变形的影响，材料采用 Mooney-Rivlin 超弹性材料。杆长 $L=1.0\text{m}$ ，材料初始剪切模量 $m=100\text{MPa}$ 、泊松比 $\nu=0.2$ 、密度 $\rho=1.0\text{kg/m}^3$ ，初始速度 $V_0=1\text{m/s}$ 。均布 101 节点，时间步长为 $\Delta t=0.0001\text{s}$ 。MLS 近似函数中节点间距乘以放大系数 4.0 作为各点影响

域半径，基函数阶次为二次，高斯截断权函数参数取 $d=1.0$ ， $c=0.2$ 。

采用 WLSM 计算出杆在 $t=0.1455\text{s}$ 时脱离墙面回弹。图 4.7 显示出接触点应力 S 的变化情况，图 4.8 给出全场应力 S 在碰撞过程中六个不同的时刻的计算结果。

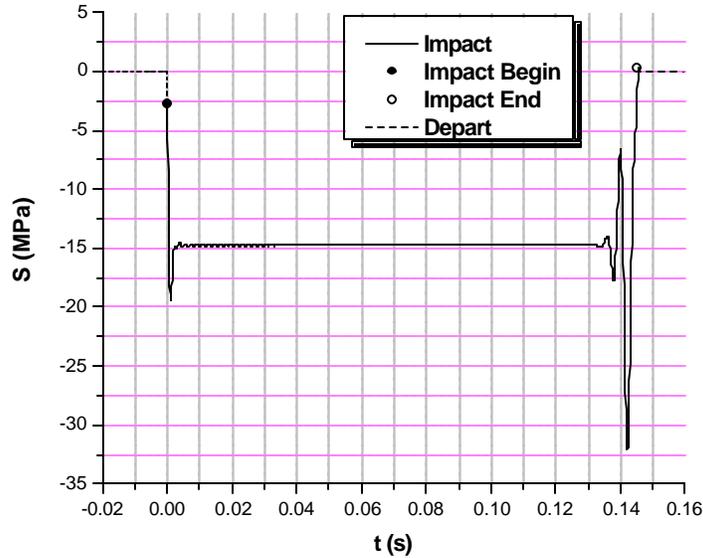


图 4.7 接触点碰撞过程中应力 S 变化曲线

通过观察计算结果，可以明显看到弹性波在碰撞过程中的传播情况，而且在碰撞结束以后，仍然有能量以弹性波的形式存在。和 J.Campbell 等人的计算结果（见图 1.3，考察单个钢棒应力分布曲线，所用材料不同）十分相似。

第四章 超弹性体接触碰撞问题

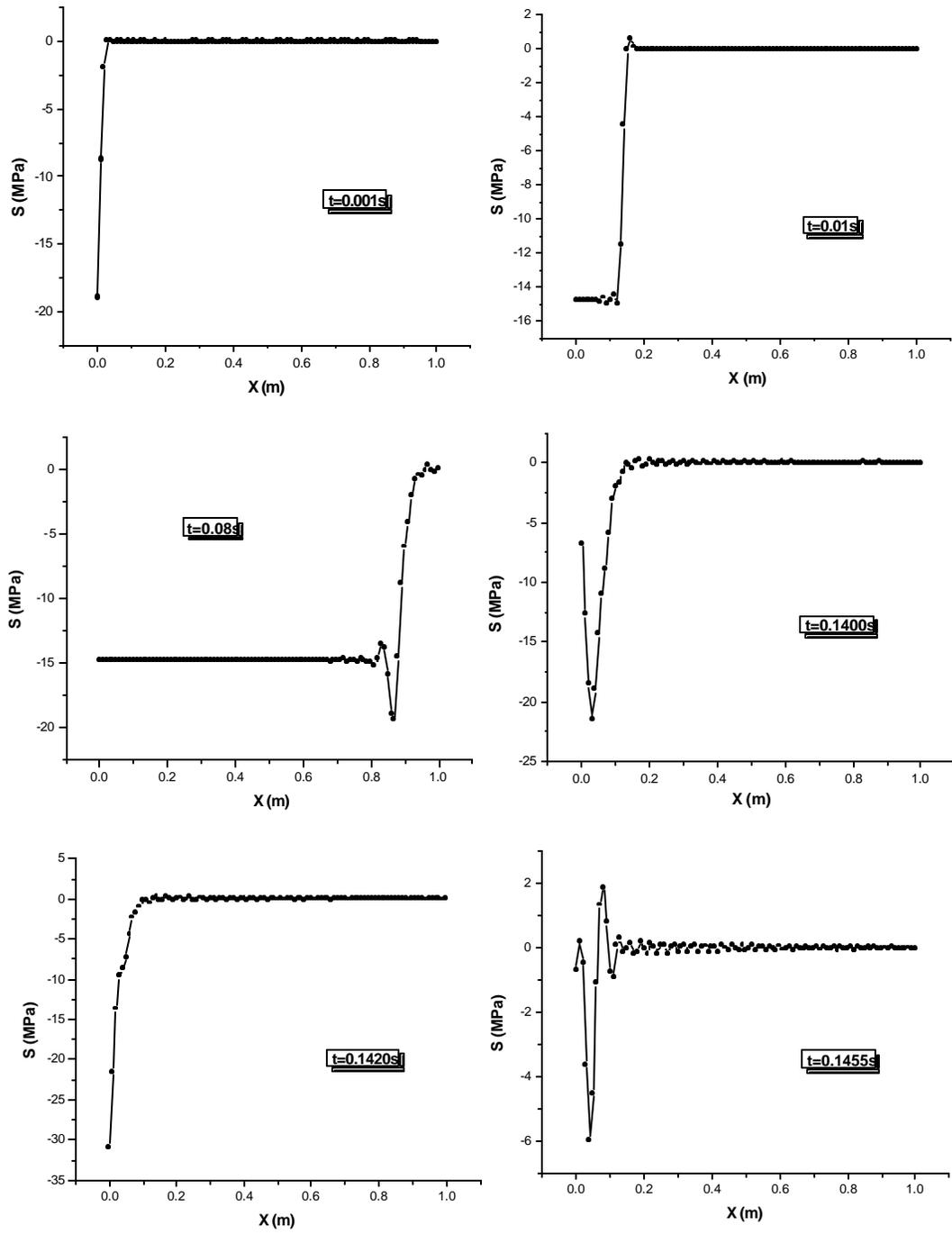


图 4.8 碰撞过程中全场应力 S 的变化

4.2.4.2 正方形板和光滑刚性墙正碰问题

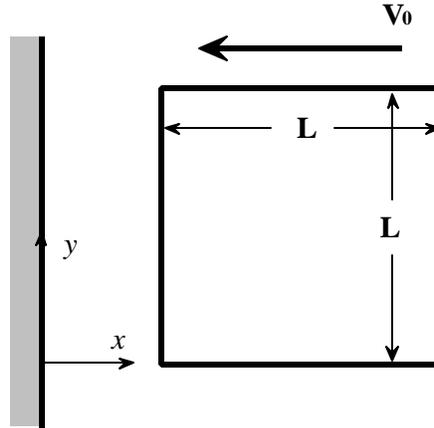


图 4.9 正方形板和光滑刚性墙正碰计算模型

边长为 L 的正方形板以初速度 V_0 与表面光滑的刚性墙壁发生碰撞，如图 4.9 所示，以发生碰撞的时刻作为零时刻。

计算过程中考虑了大变形的影响。材料采用超弹性 Mooney-Rivlin 材料。材料初始剪切模量 $m=100\text{MPa}$ 、泊松比 $\nu=0.49$ 、材料密度 $\rho=1.0\text{kg/m}^3$ 。正方板边长 $L=1\text{m}$ ，初始速度为 $V_0=2.5\text{m/s}$ 。计算时间步长为 $\Delta t=0.0001\text{s}$ 。均布 17×17 点方案，共 289 个节点。MLS 近似函数中节点影响域为圆域，离计算点最近的第 12 点和计算点之间的距离乘以放大系数 1.2 作为该计算点的影响域，基函数阶次为二次，高斯截断权函数参数取 $d=1.0$ ， $c=0.2$ 。

因为墙面光滑，碰撞过程中正方形板存在 y 向刚体位移，所以由对称性在碰撞过程中引入了附加约束：

$$\bar{u}_y = 0 \quad (\text{在接触边的中点处}) \quad (4-41)$$

采用 WLSM 计算出杆在 $t=0.1230\text{s}$ 时脱离墙面回弹。图 4.10 显示出接触边中点应力 S_{11} 的变化情况，图 4.11 至图 4.14 分别给出在碰撞过程中四个不同的时刻全场应力 S_{11} 及节点位置的计算结果。

图 4.10 中 $t=0.09\text{s}$ 附近时段应力 S_{11} 突然等于零，表示这一段时间内

接触边中点附近区域暂时脱离接触，成为自由边界。

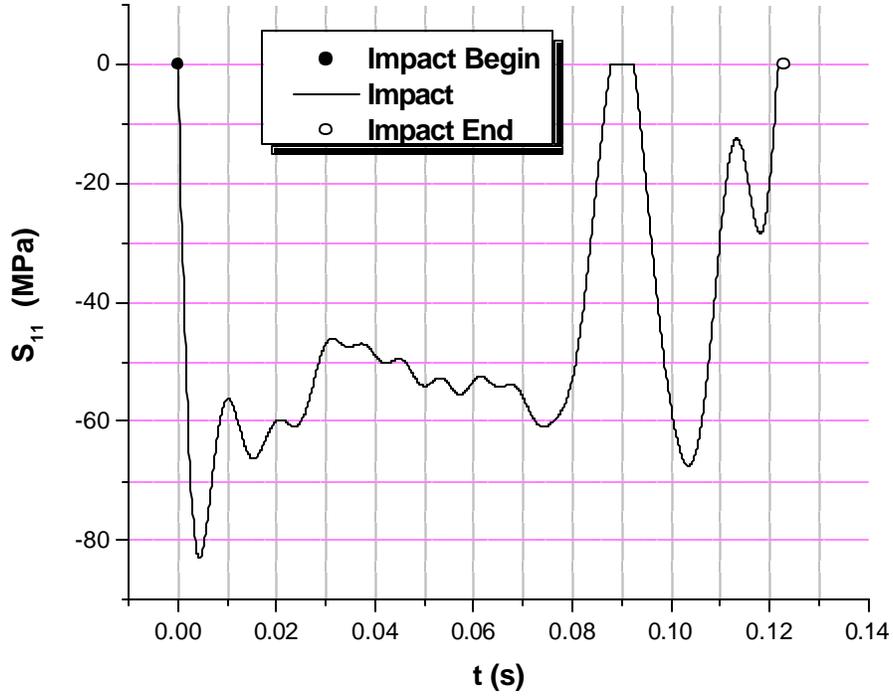


图 4.10 接触边中点碰撞过程中应力 S_{11} 变化曲线

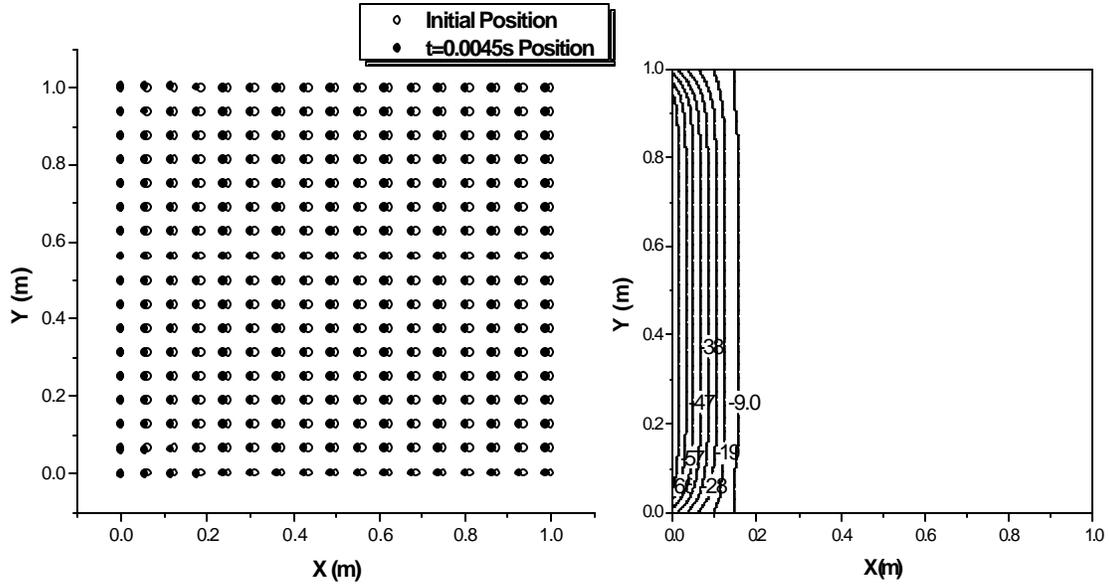


图 4.11 $t = 0.0045s$ 时各节点位置及全场应力 S_{11} 等高线图 (单位: MPa)

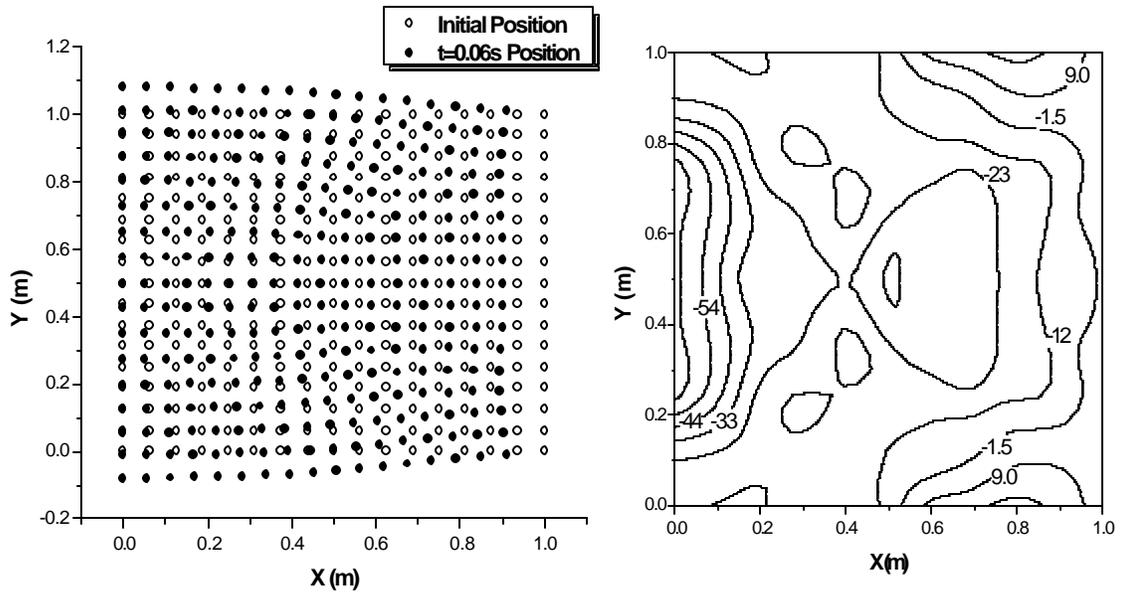


图 4.12 $t = 0.06s$ 时各节点位置及全场应力 S_{11} 等高线图 (单位: MPa)

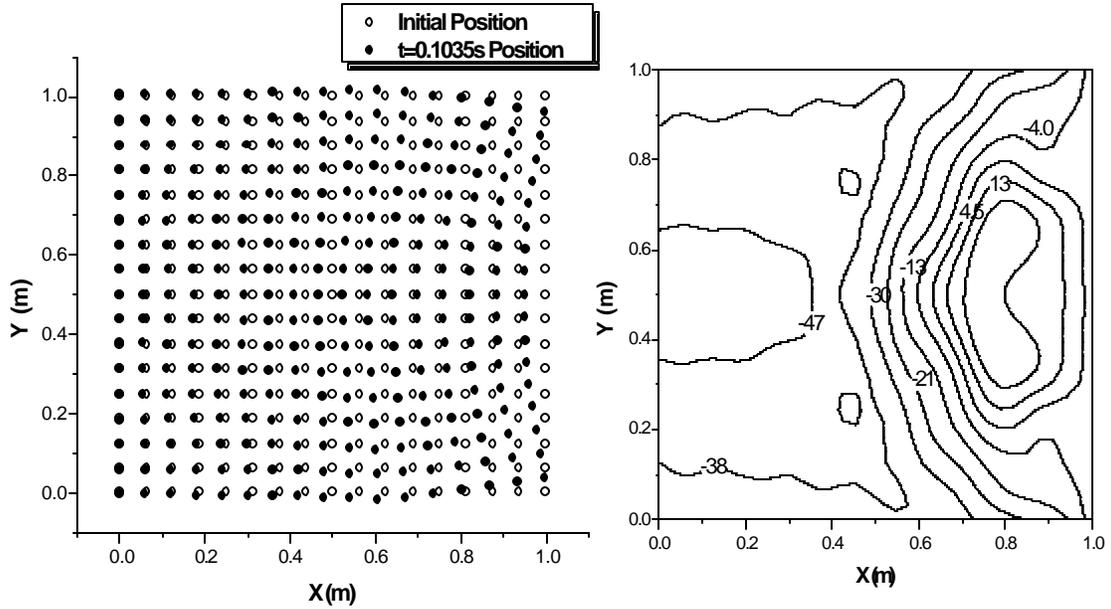


图 4.13 $t = 0.1035s$ 时各节点位置及全场应力 S_{11} 等高线图 (单位: MPa)

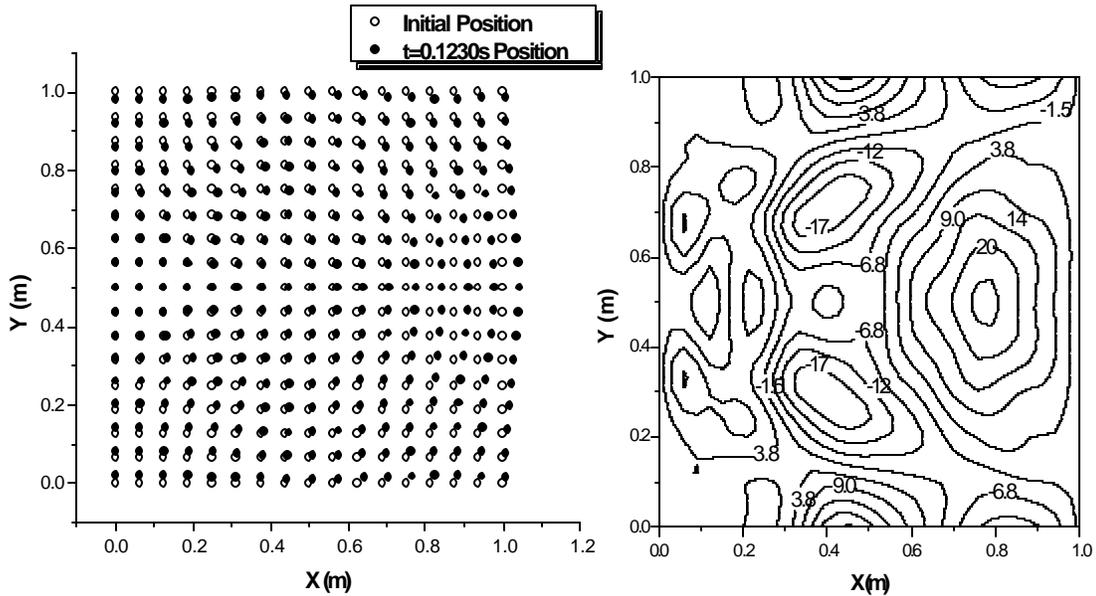


图 4.14 $t = 0.1230s$ 时各节点位置及全场应力 S_{11} 等高线图 (单位: MPa)

结 论

1. 引入了一种新的完全无网格方法——加权最小二乘无网格法。它采用移动最小二乘法构造近似函数，在加权最小二乘意义下消除控制方程残差，利用罚函数法施加边界条件，并且最后得到的系数矩阵具备对称稀疏的特点。通过对悬臂梁和带孔方板算例的分析发现，新方法具有许多优势，比如高精度、高效率等。
2. 通过引入显示时间积分格式，将加权最小二乘法的求解格式由静态发展为动态。一维杆受冲击载荷问题及二维 Lamb 问题的算例分析表明，和 DCM、EFG 比较，新方法在精度和效率上具有综合的优势。
3. 由于加权最小二乘法是完全的无网格方法，可以很方便的在 Lagrange 坐标下讨论大变形问题。本文推导了一维和二维线弹性大变形的 WLSM 求解格式，讨论了对于非线性方程的求解方法，并且对一维静态和二维动态算例进行了结果分析，其中前者和精确解比较，精度令人满意，后者的波速计算结果也符合了理论预期。
4. 超弹性材料是一种非线性弹性材料，本文推导了某一特殊模型的本构分量关系，并将其引入到加权最小二乘的求解方程中。算例分析表明在同时具备材料非线性和几何非线性的情况下，WLSM 对静态和动态问题的求解结果基本符合理论预期。
5. 接触问题在碰撞过程中是不可避免的，本文列举了判断弹性光滑接触的方法和接触条件的提法，并且根据加权最小二乘法的特点，采用罚函数引入接触条件，通过引入附加约束的方法消除刚度矩阵的奇异性。最后对简单弹性正碰的算例进行了分析，结果符合已有的类似算例结果。

参 考 文 献

- [1] Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M., Krysl P. **Meshless methods: An overview and recent developments.** Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1996, 139:3~47
- [2] Lucy L.B. **A numerical approach to the testing of the fission hypothesis.** The Astron. J. 1977, 8(12): 1013~1024
- [3] Monaghan J.J. **An introduction to SPH.** Comput Phys. Comm. 1988, 48:89~96
- [4] Swegle J.W., Hicks D.L., Attaway S.W. **Smoothed particle hydrodynamics stability analysis.** J. Comput. Phys. 1995,116:123~134
- [5] Dyka C.T. **Addressing tension instability in SPH methods.** Technical Report NRL/MR/6384,NRL, 1994
- [6] Johnson G.R., Stryk R.A., Beissel S.R. **SPH for high velocity impact computations.** Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1996,139:347-373
- [7] Nayroles B., Touzot G., Villon P. **Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements.** Comp. Mech. 1992,10:307~318
- [8] Lancaster P., Salkauskas K. **Surfaces generated by moving least squares method.** Math. Comput. 1981,37:141~158
- [9] Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L. **Element-free Galerkin methods.** International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1994,37:229~256
- [10] Lu Y.Y., Belytschko T., et al. **A new implementation of the element free Galerkin method.** Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1994,113:397~414
- [11] Lu Y.Y., Belytschko T., Tabbara M. **Element-free Galerkin methods for wave propagation and dynamic fracture.** Comput. Methods appl. Mech. Engrg. 1995,126:131~153
- [12] Liu W.K., Chen Y. **Wavelet and multiple scale reproducing kernel method.** International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1995,21:901~931
- [13] Liu W.K., Jun S., et al. **Reproducing kernel particle methods for structural dynamics.** International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1995,38:1655~1679
- [14] Duarte C.A., Oden J.T. **An h-p adaptive method using clouds.** Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1996,139:237~262

- [15] Oden J.T., Duarte C.A., Zienkiewicz O.C. **A new cloud-based hp finite element method.** International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1998,50:160~170
- [16] Onate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O.C., et al. **A finite point method in computational mechanics: Applications to convective transport and fluid flow.** International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1996,39:3839~3866
- [17] Liszka T.J., Duarte C.A., Tworzydło W.W. **Hp-meshless cloud method.** Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1996,139:263~288
- [18] Zhang Z.T., Atluri S.N. **A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach.** Comput. Mech. 1998,21:223~235
- [19] Atluri S.N., Zhang Z.T. **A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics.** Comput. Mech. 1998,22:117~127
- [20] 张雄, 宋康祖, 陆明万. 无网格法研究进展及其应用. 计算力学学报, 已录用
- [21] Zhang X., Song K.Z., Lu M.W., Liu X. **Meshless methods based on collocation with radial basis functions.** Comput. Mech. 2000,26:333~343
- [22] Zhang X., Liu X.H., Song K.Z., Lu M.W. **Least-square collocation meshless method.** Int. J. Numer. Meth. Engrg. 2001,51:1089~1100
- [23] Wilkins M.L. **Computer simulation of dynamic phenomena.** Springer,1999
- [24] Monaghan J.J. **Shock simulation by the particle method SPH.** Journal of Computational Physics 1983,52:374~389
- [25] 贝新源, 岳宗五. 三维 SPH 程序及其在斜高速碰撞问题的应用. 计算物理, 1997,14(2): 155~166
- [26] Gray J.P., Monaghan J.J., Swift R.P. **SPH elastic dynamics.** Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2001,190:6641~6662
- [27] Gary A.D. **Moving least-square particle hydrodynamics-I. Consistency and stability.** Int. J. Numer. Meth. Engrg. 1999,44:1115~1155
- [28] Krysl P., Belytschko T. **The element free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks.** Int. J. Numer. Meth. Engrg. 1999,44:767~800
- [29] Chen J.S., Pan C., Wu C.T. **Large deformation analysis of rubber based on a reproducing kernel particle method.** Comput. Mech. 1997,19:211~227
- [30] Li S., Hao W., Liu W.K. **Numerical simulations of large deformation of thin shell structures using meshfree methods.** Comput. Mech. 2000,25:102~116

参 考 文 献

- [31] Liew K.M., Ng T.Y., Wu Y.C. **Meshfree method for large deformation analysis-a reproducing kernel particle approach.** Engineering Structures 2002,24:543~551
- [32] Rao B.N., Rahman S. **A coupled meshless-finite element method for fracture analysis of cracks.** International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2001,78:647~657
- [33] Campbell J., Vignjevic R., Libersky L. **A contact algorithm for smoothed particle hydrodynamics.** Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2000,184:49~65
- [34] 陆明万, 罗学富. 弹性理论基础. 北京: 清华大学出版社, 1990
- [35] 黎在良, 刘殿魁. 固体中的波. 北京: 科学出版社, 1995
- [36] Smolinski P., et al. **Procedures for multi-time step integration of EFGM for diffusion problems.** Comput. & Structures. 2000,77:171~183
- [37] 杨宝俊, 王宝昌, 张伯军. 弹性波理论. 长春: 东北师范大学出版社, 1990
- [38] 殷有泉. 固体力学非线性有限元引论. 北京: 北京大学出版社, 1987
- [39] 张汝清, 詹先义. 非线性有限元分析. 重庆: 重庆大学出版社, 1990
- [40] 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法. 北京: 清华大学出版社, 1997
- [41] Livermore Software Technology Corporation. **LS-DYNA Theoretical Manual.** 1998,16:47~49
- [42] 黄克智, 薛明德, 陆明万. 张量分析. 北京: 清华大学出版社, 1986
- [43] 黄克智, 黄永刚. 固体本构关系. 北京: 清华大学出版社, 1999

致 谢

本课题承蒙国家自然科学基金资助，特致殷切谢意。

衷心感谢导师陆明万教授和指导老师张雄教授对本人的精心指导。他们的言传身教将使我终生受益。

感谢潘小飞、刘艳华、刘岩、张伟、李群仰及计算动力学实验室其他同学的帮助。

感谢父母、老师和同窗们的关心和支持！感谢所有帮助过我的人们！

附录 I MLS 近似形函数关于空间坐标的导数形式

MLS 近似形函数形式为：

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (\text{A-1})$$

为了在形函数导数式中只出现矩阵 \mathbf{A} 的逆，不出现矩阵 \mathbf{A} 导数的逆，利用：

$$\mathbf{A}_{,i}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{,i} \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{A-2})$$

由(A-1)得 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 对空间坐标 x_i 的一阶导数为：

$$\mathbf{F}_{,i}(x) = \mathbf{P}_{,i}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \cdot \left[\mathbf{A}_{,i}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}_{,i}(\mathbf{x}) \right] \quad (\text{A-3})$$

综合(A-2)和(A-3)得到形函数的一阶导数表达式：

$$\mathbf{F}_{,i}(x) = \mathbf{P}_{,i}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \left[\mathbf{B}_{,i} - \mathbf{A}_{,i} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \right] \quad (\text{A-4})$$

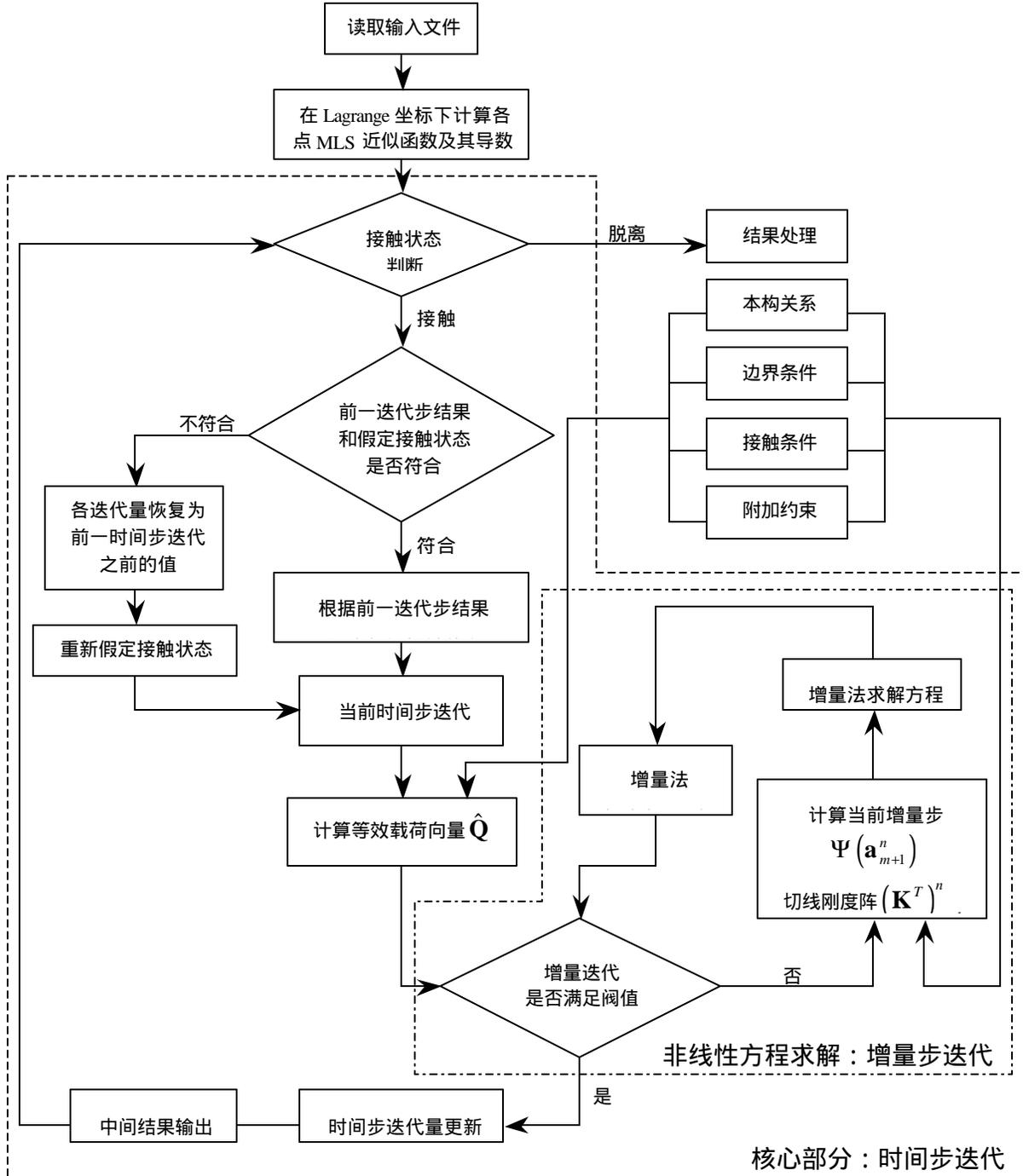
对于二阶导数，同样有：

$$\mathbf{A}_{,ij}^{-1} = -\left[\mathbf{A}_{,j}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{,i} \cdot \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1} \cdot \left(\mathbf{A}_{,ij} \cdot \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}_{,i} \cdot \mathbf{A}_{,j}^{-1} \right) \right] \quad (\text{A-5})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{,ij} = & \mathbf{P}_{,i}^T \cdot \left(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{,j} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{,j} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \right) + \mathbf{P}_{,j}^T \cdot \left(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{,i} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{,i} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \right) \\ & + \mathbf{P}^T \cdot \left\{ \left[\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{,j} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{,i} \cdot \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \left(\mathbf{A}_{,ij} \cdot \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}_{,i} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{,j} \cdot \mathbf{A}^{-1} \right) \right] \cdot \mathbf{B} \right\} \\ & - \mathbf{P}^T \cdot \left(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{,i} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{,j} + \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{,j} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{,i} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{,ij} \right) \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

将(A-5)代入(A-6)可得形函数的二阶导数。（具体形式略）

附录 II 超弹性体接触碰撞问题程序流程图*



*编程环境：Microsoft Visual C++ 6.0 & Matlab 6.5

本人简历

1997.9-2001.7 在清华大学工程力学系学习，并于 2001 年 7 月获工学学士学位

2001 年 9 月直升入清华大学工程力学系固体力学专业攻读硕士学位，师从陆明万教授。

攻读硕士学位期间发表的学术论文

1. 张雄，胡炜，潘小飞，陆明万. 加权最小二乘无网格法. 力学学报. (已录用)
2. Zhang Xiong, Pan XiaoFei, Hu Wei, Lu MingWan. **Meshless Weighted Least-square Method.** Proceedings of Fifth World Congress on Computational Mechanics, Vienna, Austria, July 7-12, 2002