

自适应物质点有限元法及其在冲击侵彻问题中的应用

（申请清华大学工学博士学位论文）

培 养 单 位：航天航空学院
学 科：力学
研 究 生：廉 艳 平
指 导 教 师：张 雄 教 授

二〇一二年五月

An Adaptive Material Point Finite Element Method and its Application in Impact/Penetration Problems

Dissertation Submitted to
Tsinghua University
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Doctor of Philosophy

by
Lian Yan Ping
(in Mechanics)

Dissertation Supervisor : Professor Zhang Xiong

May, 2012

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：

清华大学拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：（1）已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；（2）为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供校内师生阅读，或在校园网上供校内师生浏览部分内容；（3）根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》，向国家图书馆报送可以公开的学位论文。

本人保证遵守上述规定。

（保密的论文在解密后应遵守此规定）

作者签名：_____

导师签名：_____

日 期：_____

日 期：_____

摘 要

开展冲击侵彻问题的数值计算方法研究是计算力学领域的一项重要课题，在国防军事和公共安全中有广泛而重要的应用。由于涉及应力波传播、高应变率、大变形、摩擦和磨损等多种物理现象，冲击侵彻问题往往非常复杂。相比于拉格朗日和欧拉算法，近年来发展的无网格法在处理该类问题时更具有优势。物质点法(MPM)是一种无网格法，采用质点均匀离散材料区域，用背景网格计算动量方程和空间导数，解决了有限元法的网格畸变问题，也避免了欧拉法的缺点。本文主要针对冲击侵彻问题，基于MPM，研究高效稳定的数值计算方法。

针对MPM在模拟钢筋混凝土结构时离散规模庞大的问题，本文提出了杂交物质点有限元法(HFEMP)。在 HFEMP中，将有限元法的杆单元引入物质点法中，构造了离散钢筋的杆单元，很好地解决了这一问题。HFEMP采用质点离散混凝土，用杆单元离散钢筋，避免了在钢筋直径方向上的离散，降低了MPM的离散规模。采用该算法模拟了弹体侵彻钢筋混凝土的问题，结果表明钢筋可以提高混凝土靶体的抗侵彻性能。

在冲击侵彻问题中，大部分材料区域始终处于小变形阶段，而物质点法在计算材料小变形时的精度和效率均低于有限元法。针对该问题，本文提出了耦合物质点有限元法(CFEMP)。在CFEMP中，采用有限元离散仅涉及材料小变形的物体，用质点离散涉及材料特大变形的物体，通过接触算法实现两个离散体之间的相互作用。数值计算表明该算法的计算精度和效率高于物质点法，适合模拟冲击侵彻和流固耦合等问题。

考虑到材料从小变形到特大变形的时间历程，为了充分发挥有限元法计算材料小变形时效率和精度的优势以及物质点法模拟材料特大变形的优势，本文进一步提出了自适应物质点有限元法(AFEMP)。在 AFEMP中，采用有限元离散所有物体，在计算过程中将发生畸变或破坏的单元自动转化为质点，通过背景网格实现同一个物体内部不同离散区域之间的相互作用，采用CFEMP计算各物体之间的接触问题，实现了有限元法到物质点法求解的自适应转化。数值计算表明，在计算精度一致的情况下，AFEMP的计算效率显著高于物质点法。

最终，本文为冲击侵彻及其他涉及材料特大变形的问题建立了一类高效稳定的自适应物质点有限元法。

关键词：冲击侵彻； 无网格法； 物质点法； 有限元法； 接触算法

Abstract

The numerical method for impact and penetration problems is an important research project in computational mechanics, which has broad and significant applications in the national defense, military and public security affairs. However, the impact and penetration problems are often very complicated, due to covering a broad range of physical phenomena, such as stress wave propagation, high strain rate, large strain, friction and abrasion. Compared with the Lagrangian and Eulerian mesh methods, meshless methods developed in recent decades have some advantages to solve such problems. Material point method (MPM) is a meshless method, which discretizes material domain by a set of uniform particles, and uses background grid to solve the momentum equations and calculate spatial derivatives. Therefore, MPM not only eliminates the mesh distortion difficulties in finite element method (FEM), but also avoids the shortcomings of Eulerian methods. In this study, the new efficient and stable numerical methods are researched based on MPM with the aim of solving impact and penetration problems.

When apply MPM for reinforced concrete (RC) structures simulation, the discretization model is large-scale. To solve this problem, a hybrid finite element material point (HFEMP) method is developed by introducing the bar element into MPM for the steel bars in RC. In HFEMP, the concrete is discretized by MPM particles, while the steel bars by bar elements in the length direction without discretization in the diameter direction, which can decrease the scale of the RC discretization model significantly. The RC slab subjected to projectile penetration is studied by HFEMP, which indicates that steel bars can increase the capability of concrete resisting penetration.

In fact, the most part of the material domain is still with the mild deformation in the impact and penetration problems. But for material with mild deformation, both the efficiency and accuracy of MPM are lower than those of FEM. A coupled finite element material point (CFEMP) method is proposed for such problems in this study. CFEMP uses FEM for body with mild deformations and MPM for body with extreme deformations, the interaction between two different discretization bodies is handled by the contact method. The numerical results indicate that CFEMP is more accurate and efficient than MPM, and suitable for impact/penetration and fluid solid interaction problems.

Considering the mild deformation always before extreme deformation, an adaptive finite element material point (AFEMP) method is proposed based on CFEMP to take full advantages of FEM for material mild deformation and MPM for material extreme deformation. In AFEMP, all of the bodies are firstly discretized by finite elements, then the distorted elements are automatically converted into MPM particles during the calculation process, the interaction between finite elements domain and MPM particles domain within the same body is implemented based on the background grid, and the contact between bodies is handled by CFEMP. So the conversion from FEM solver to MPM solver is adaptive by conversion scheme in AFEMP. Numerical results indicate that the efficiency of AFEMP is significantly higher than that of MPM.

Finally, a class of adaptive material point finite element methods is developed for impact/penetration problems and problems involving material extreme deformation in this study.

Key words: impact/penetration; meshless methods; material point method; finite element method; contact method

目 录

第 1 章 引言	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 无网格法研究现状	1
1.2.1 配点型无网格法	2
1.2.2 伽辽金型无网格法	3
1.2.3 其它无网格法	6
1.2.4 无网格法小结	7
1.3 物质点法研究现状	8
1.4 本文主要内容	12
第 2 章 物质点法基本理论和应用	14
2.1 控制方程	14
2.2 控制方程的离散	16
2.3 时间积分	20
2.4 应力更新	21
2.5 人工体积粘性	24
2.6 形函数与边界条件	25
2.7 计算格式和算法实现	27
2.8 MPM与FEM的比较	30
2.8.1 计算精度	30
2.8.2 计算效率	30
2.9 爆轰驱动飞片的物质点法研究	32
2.9.1 材料模型	32
2.9.2 开口非对称板型装药	33
2.9.3 对称板型装药	37
2.10 小结	39
第 3 章 杂交物质点有限元法	40
3.1 杂交物质点有限元法	40
3.1.1 物质点法	41
3.1.2 杆单元	42
3.1.3 背景网格结点间距的影响分析	44
3.2 算法实现	46
3.3 算法验证	47

3.3.1 杆拉伸问题	47
3.3.2 单摆问题.....	48
3.4 算法应用	50
3.4.1 混凝土本构模型	50
3.4.2 钢筋混凝土侵彻问题.....	53
3.4.3 钢筋脱层效应研究	57
3.5 小结	60
第 4 章 耦合物质点有限元法	61
4.1 耦合物质点有限元法	62
4.1.1 控制方程和离散	62
4.1.2 接触算法.....	66
4.1.3 应力更新.....	74
4.1.4 人工体积粘性	75
4.2 算法实现	75
4.3 算法验证	78
4.3.1 共轴撞击问题	78
4.3.2 斜坡上球体滚动问题	82
4.4 算法应用	84
4.4.1 卵形弹斜侵彻问题	84
4.4.2 流固耦合问题	87
4.5 小结	90
第 5 章 自适应物质点有限元法	91
5.1 自适应物质点有限元法.....	92
5.1.1 控制方程和离散	92
5.1.2 转化算法.....	94
5.1.3 耦合算法.....	96
5.2 算法实现	98
5.3 算法验证	99
5.3.1 共轴撞击问题	99
5.3.2 Taylor杆问题模拟I.....	100
5.3.3 Taylor杆问题模拟II.....	101
5.4 算法应用	103
5.4.1 长杆弹侵彻问题	103
5.4.2 边坡失效问题	107
5.5 小结	109

第 6 章 全文总结	110
6.1 研究成果	110
6.2 需进一步开展的工作	111
参考文献	113
致谢	125
声明	126
个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果	127

主要符号对照表

MPM	物质点法 (Material Point Method)
FEM	有限元法 (Finite Element Method)
ρ	密度
E	弹性模量
G	剪切模量
E_T	切线模型
σ_y	屈服应力
ν	泊松比
σ_{ij}	柯西应力张量
s_{ij}	偏应力张量
ε_{ij}	柯西应变张量
p	压力
D_{ij}	变形率张量
Ω_{ij}	旋率张量

第1章 引言

1.1 研究背景及意义

目前,数值计算方法在工程应用和科学研究中得到了广泛应用^[1,2],与理论研究和实验研究组成了现代科学技术的三大支柱^[3],并具有快捷、安全和低成本的优势。但是,对于工程中涉及材料特大变形、破碎甚至发生相变的问题,目前还没有完美无缺的数值计算方法,例如:

1. 冲击侵彻问题,如穿甲弹侵彻装甲及钢筋混凝土防护结构;
2. 流固耦合问题,如溃坝问题;
3. 岩土动力学问题,如边坡失效问题;
4. 爆炸问题,如爆轰驱动飞片问题。

这类问题包含了一系列复杂的物理过程,涉及材料非线性、几何非线性和边界条件非线性,给数值计算方法带来了巨大的挑战。采用基于网格的传统数值计算方法,诸如有限元法(finite element method, FEM)、边界元法(boundary element method)和欧拉算法,处理这类问题时常遇到网格畸变、界面追踪、对流项处理等困扰^[4-6],导致这类问题的求解难度大、精度差。近年来发展的无网格法非常适合处理涉及材料特大变形的问题,受到了计算力学领域学者的高度重视^[7-9]。目前,无网格法还处在发展和完善阶段,在算法稳定性、计算效率上仍有待提高,将其应用于工程问题还需进一步深入研究。

本文以物质点无网格法^[10]为研究基础,针对此类涉及材料特大变形的问题开展高效稳定的数值计算方法研究。

1.2 无网格法研究现状

无网格法的发展最早可追溯到Lucy^[11]和Gingold等人^[12]在1977年的工作,他们提出了光滑质点流体动力学方法(Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH)以求解天体物理问题。由于当时的有限元法研究方兴未艾,该方法未引起广泛而持续的关注。直到20世纪90年代初期,有限元法在基础理论和方法上发展较为成熟^[13],遇到了网格畸变问题等导致的发展瓶颈,国际计算力学界兴起了对无网格法的研究热潮^[7]。无网格法与有限元法的主要区别在于采用无拓扑关系的点离散材料区域,并基于离散点构造近似函数,可以彻底或部分地消除对网格的依赖。

目前, 无网格方法种类繁多, 已达30余种。从偏微分方程数值方法角度来审视, 各种无网格法均可通过加权余量法建立。偏微分方程数值方法分为两大类: 一类是以有限差分法(finite difference method)为代表, 其特点是直接求解微分方程和相应定解条件的近似解, 该类方法主要采用欧拉坐标系, 在流体力学领域内应用较多; 另一类则是以加权余量法(weighted residual methods)为代表, 其特点是先建立和原微分方程及定解条件相等价的积分弱形式, 然后在此基础上建立近似解法, 该类方法主要采用拉格朗日坐标系, 在固体力学领域内应用较多。加权余量法分别采用权函数(test function)和试探函数(trial function)建立余量方程和构造待求变量的近似形式。因此, 各种无网格法的主要区别在于采用了何种权函数和试探函数。无网格法采用的加权余量法主要有伽辽金法、配点法、彼得罗夫-伽辽金法、加权最小二乘法和边界积分方程, 采用的试探函数主要有移动最小二乘近似、核近似、重构核近似、单位分解、径向基函数、点插值、Sibson插值和NURBS法等^[14]。

下面以加权余量法为主线, 结合几种典型的无网格法给出目前无网格法的研究现状和应用范围。由于物质点法(material point method, MPM)与其他的无网格法不尽相同, 因此单独列出一节进行综述。

1.2.1 配点型无网格法

配点型无网格法采用配点法作为权函数, 要求微分方程的余量在域内一组离散点上等于零, 并强迫边界条件余量在边界上的离散点处等于零。该类无网格法包括SPH、hp云团法^[15]、有限点法(finite point method)^[16]和最小二乘配点无网格法^[17]等。下面以SPH为主介绍此类无网格法。

SPH将物体剖分成 n 个面元或体元并称为质点 p , 采用核近似函数作为试探函数。因此, 待求函数 $u(\mathbf{x})$ 可以局部近似为

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) u(\mathbf{x}^*) d\Omega_{\mathbf{x}^*} \quad (1-1)$$

其中, 函数 $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$ 为核函数(kernel function), 又称光滑函数。 $\mathbf{x}^*$ 为计算点 $\mathbf{x}$ 邻域内各点的空间坐标。在数值计算中, 需采用数值积分方案建立式(1-1)的离散形式, 可写为

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{n_p} w_p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) u_p \Delta V_p = \sum_{p=1}^{n_p} N_p(\mathbf{x}) u_p \quad (1-2)$$

其中, ΔV_p 为质点 p 所对应的面积或体积, $\mathbf{x}_p$ 为质点 p 所代表的面元或体元的质心。

在配点型无网格法中，解具有不稳定性，由于余量仅在配点处等于零，各点之间可能存在较大的振荡。采用的核近似函数在边界处一般不满足零阶一致性要求，而在非均匀布点的情况下也不满足一阶一致性要求，因此不能保证收敛^[9]。配点法的特性和核近似函数的缺陷限制了SPH的广泛应用。为此，Swegle^[18]、Balsare^[19]、Dyka^[20]、Chen^[21]和Monaghan^[22]等人对SPH的拉伸不稳定性进行分析，提出了具体的稳定化方案，改善了SPH的不稳定性；Johnson等^[23]提出了可以通过分片试验的归一化光滑函数算法，使SPH满足零阶一致性要求，可以正确模拟常应变状态，提高了其收敛性；由于SPH并不能保证速度场单值，在模拟多个物体之间碰撞接触问题时会发生界面穿透，Campbell等^[24]和Vignjevic等^[25]分别建立了基于罚函数法的接触算法和不需单独建立接触面的接触算法；Vignjevic等^[26]针对SPH的零能模态提出了具体的解决方案。

此外，为了避免SPH的一些缺陷，许多学者将其与有限元法耦合。Attaway等^[27]首次基于主从算法将SPH与FEM进行耦合，在每一个时间步内，一旦监测到从属质点与主单元片发生穿透，通过接触算法施加相应的约束条件将从属质点拉回到主片表面上。此外，Johnson等^[28,29]也采用主从算法对SPH与FEM进行耦合，以解决高速侵彻问题。Johnson和Stryk^[30]在该耦合算法的基础上，进一步提出了单元到质点的转化算法，即将畸变或失效的单元自动转化为质点，从而避免了SPH处理材料拉伸阶段时的不稳定性问题。Vignjevic等^[31]通过将界面处有限元结点处理成质点，建立了SPH与FEM的耦合算法，模拟了侵彻和流固耦合问题。Xiao等^[32]将SPH与FEM进行耦合并将发生畸变的单元转化为质点，开展了冲击问题的数值模拟研究。

在应用层面上，Johnson、Beissel等^[29,30,33]将SPH应用于超高速碰撞以及冲击侵彻问题；Rabczuk和Eibl^[34]采用SPH模拟了冲击爆炸载荷下混凝土的破坏问题；Liu等^[8,35,36]基于SPH开展了一系列爆炸问题的研究。目前，SPH已经成为高速冲击、爆炸等问题中的重要方法，已被加入到AUTODYN和LS-DYNA等商用软件中。

1.2.2 伽辽金型无网格法

伽辽金型无网格法采用取自同一函数空间的权函数和试探函数，建立的刚度矩阵具有对称性。该类无网格法包括无单元伽辽金法(element free Galerkin method, EFGM)^[37]、重构核质点法(reproducing kernel particle method, RKPM)^[38]、单位分解法(partition unit method, PUM)^[39,40]和点插值法(point interpolation method,

PIM)^[41,42]等。下面以EFGM和RKPM两种代表性的无网格法为主介绍此类方法。

在Nayroles等^[43]提出散射元法(diffuse element method, DEM)后, Belytschko对其进行改进, 在计算形函数导数时保留了被Nayroles忽略掉的所有项, 并通过拉格朗日乘子法施加本质边界条件, 建立了EFGM。与配点型无网格法相比, 该方法具有较好的稳定性, 同时其计算精度和收敛速度高于FEM, 但计算效率显著低于FEM。EFGM采用移动最小二乘近似(moving least square, MLS)作为试探函数。因此, 待求函数 $u(\mathbf{x})$ 可以局部近似为

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^n p_i(\mathbf{x}^*) u_i(\mathbf{x}) \quad (1-3)$$

其中, $p_i(\mathbf{x}^*)$ 表示基函数, n 为基函数的个数, $u_i(\mathbf{x})$ 是待定系数。根据最小二乘原则, $u_i(\mathbf{x})$ 的选取应保证函数的局部误差最小, 有

$$L = \sum_{p=1}^{n_p} w_p(\mathbf{x}) \left[u^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) - u(\mathbf{x}_p) \right]^2 \quad (1-4)$$

其中, p 表示节点, n_p 表示节点总数, $w_p(\mathbf{x})$ 为节点 p 的权函数。该权函数仅在节点支撑域 Ω_x 中大于零, 在该支撑域外取零。令 L 取最小值, 由式(1-4)可得待定系数 $u_i(\mathbf{x})$, 再代入式(1-3)可得 $u^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)$ 的求解表达式。MLS近似具有高阶连续性, 可精确重构包含在基底内的任何函数, 因此可依据不同的问题和需求选择不同的函数形式, 如单项式、奇异函数和三角函数等, 以提高解的精度和收敛率。此外, Atluri等^[44]在MLS基础上增加了近似函数导数在各点处误差平方和最小的条件, 进一步提高了近似函数的求解精度, 提出了广义移动最小二乘近似, 但同时也增加了计算量。虽然试探函数中基函数形式的多样性提高了解的精度和连续性, 但是导致了数值积分困难和本质边界条件施加的复杂性。

伽辽金型无网格法与FEM相似, 需要积分。由于此类无网格法采用的基函数一般不再是多项式, 因此高斯积分不能保证积分的精度。为此, Belytschko等^[37]采用背景网格积分, 即在计算区域布置规则的背景网格并将积分转化为对各规则网格的高斯积分之和。但在计算与材料边界相交的网格积分时, 背景网格积分方案可能产生较大的误差, 并且计算效率低。Beissel等^[45]提出了节点积分方案, 但是节点积分存在零能模态, 具有不稳定性。Chen等^[46]研究表明用光滑应变稳定化的方法可消除节点积分方案的不稳定性。Kucherov等^[47]针对节点积分方案中的零能模态, 也提出了具体的解决方法。潘小飞等^[48]建立了质点积分方案, 即在原来节点的基础上引入一组遵循一定规则的辅助点辅助积分, 提高了积分的稳定性。此外, 还有单位分解积分方法^[49]等。

采用伽辽金法建立等效积分弱形式时，要求试探函数预先满足位移边界条件。但是无网格法的近似函数一般不具有插值特性，施加本质边界条件比较困难。Belytschko对DEM的改进之一就是通过在拉格朗日乘子法施加本质边界条件。此外，施加本质边界条件的方法主要有边界配点法、罚函数法、奇异权函数法和边界变换法、达朗贝尔(d'Alembert)原理和边界通量配点法等^[9]。总之目前伽辽金型无网格法施加本质边界条件不如有限元法方便。

此外，许多学者将EFGM与FEM进行耦合，既可以采用有限元离散材料边界区域以避免在EFGM中处理边界条件，又可以借助有限元法的求解效率提高整体求解的效率。Belytschko等^[50]通过在界面处采用一种融合了EFGM和FEM两种形函数的过渡形函数将EFGM与FEM进行耦合。另外，Hegen^[51]通过拉格朗日乘子法将EFGM和FEM进行耦合，Rabczuk等^[52]进一步将该耦合算法扩展应用到非线性问题和接触表面可变形的过程中。

在应用层面上，Belytschko等^[53,54]采用EFGM模拟了二维和三维动态断裂问题；Sukumar等^[55]拓展了EFGM在三维线弹性断裂问题中的应用；Tiago等^[56]基于EFGM计算了钢筋混凝土梁的断裂问题；Rabczuk等^[57]基于阶跃函数建立了粒子断裂法(cracking particles)，采用一组携带裂纹信息的粒子描述裂纹，模拟了裂纹的产生和分岔过程；Rao和Rahman^[58]采用EFGM求解了功能梯度材料的断裂问题。此外，Ren和Liew^[59,60]采用EFGM研究了形状记忆合金在热力耦合作用下的超弹性响应；Guan等^[61]采用EFGM分析了金属成形问题；周维垣等^[62]基于EFGM对某地边坡应力进行了弹性分析；庞作会等^[63]在EFGM中引入界面单元模拟了弹性材料的接触问题；张雄等^[64]采用EFGM对节理岩石进行了研究；杨海天等^[65]基于并行的EFGM研究了热传导问题；龙述尧等人采用EFGM计算了弹塑性^[66]和几何非线性问题^[67]。

伽辽金型无网格法另一代表性方法为RKPM^[38]。Liu等^[38]在核近似函数中引入了校正函数 $C(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)$ ，使得修正后的核函数满足一致性条件，提出了重构核近似函数(reproducing kernel approximation, RK)。RKPM的试探函数采用重构核函数，待求函数 $u(\mathbf{x})$ 可以局部近似为

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} C(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) u(\mathbf{x}^*) d\Omega_{\mathbf{x}^*} \quad (1-5)$$

$C(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)$ 若取为 n 阶完备多项式基函数 p_i 的线性组合，则式(1-5)可满足 n 阶一致性条件，相应可得形如式(1-2)的离散形式。其中，形函数为

$$N_p(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}, \mathbf{x}_p) w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \Delta V_p \quad (1-6)$$

文献[68]表明重构核函数等价于MLS。因此, RK也可重构任何函数, 具有高阶连续性, 如在 $C(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)$ 中引入描述待问题本质特征的解析函数可提高解的精度。Liu等^[69]将小波分析引入RK中, 构造了一系列多尺度重构核近似法(multiple scale reproducing kernel method), 实现了RKPM的自适应分析。此外, Liu等^[70]通过修改过渡区的形函数将重构核质点方法(RKPM)和FEM耦合, 以吸收FEM的优点; Liu和Li等^[71-73]进一步提出了一种吸收FEM和RKPM算法优势的新算法-重构核单元法(RKEM)。

在应用层面上, RKPM在超大变形问题中得到了广泛应用。Chen等在RKPM中采用直接变换法施加位移边界条件, 通过罚函数法引入摩擦接触边界条件, 详细分析了橡胶结构体的大转动、超大变形、膨胀问题^[74-76]和金属冲击、锻造、墩粗等典型的金属成形问题^[77,78]。Lu等^[79]提出了自适应RKPM, 分析了金属成形过程中的屈曲问题。Grindeanu等^[80,81]拓展了RKPM在结构优化问题中的应用。崔青玲等^[82]采用RKPM模拟了三维稳定状态板轧制过程。王东东等^[83]建立了界面加强的RKPM法(interface-enriched RKPM), 求解了基体材料与夹杂界面处的不连续性问题。

1.2.3 其它无网格法

其它的无网格法类型还有彼得洛夫-伽辽金型、加权最小二乘型和边界型等方法。

彼得洛夫-伽辽金法与伽辽金法的主要区别是其检验函数和试探函数取自不同的函数空间。Atluri等^[84,85]基于彼得洛夫-伽辽金法, 建立了局部子域内的微分方程等效积分弱形式, 提出了无网格局部彼得洛夫-伽辽金法(meshless local Petrov-Galerkin, MLPG)。与伽辽金型无网格法积分不同, MLPG方法中积分是在每个子域内进行, 不需借助背景网格。该方法建立了一个无网格法框架, 在该框架下可以采用不同的近似函数和检验函数。因此, Atluri等人^[86-88]进一步采用了六种检验函数和五种近似函数组合给出了多种类型的MLPG方法。在应用层面上, MLPG主要用于大变形问题的模拟。

加权最小二乘型无网格法采用加权最小二乘法建立, 需要在求解域内积分, 但是积分的目的是为了消除控制方程的残差。因此, 最小二乘法中解的精度对积分方法的要求不如伽辽金型无网格法高。张雄等^[89]采用MLS构造近似函数, 使用节点积分方案, 建立了一种加权最小二乘无网格法, 并进一步结合伽辽金法和最小二乘法的优势提出了伽辽金-最小二乘无网格法^[90]。

边界元法将问题的控制方程转换成边界上的积分方程, 然后在边界上进行

离散求解，因此也有网格依赖性。目前，提出的边界型无网格法有局部边界积分方程法^[91,92]、边界点插值法^[93]、杂交边界点无网格法^[94]和奇异边界无网格法^[95]等。

此外，Fahrenthold等^[96-98]研究超高速碰撞和侵彻问题时，提出了杂交质点单元法，该方法采用质点离散材料区域并将相邻的质点连成单元。其中，质点用于计算惯性物理量，单元用于计算材料本构物理量。Idelsohn等^[99,100]基于Voronoi图提出了无网格有限元法，模拟了一系列流固耦合问题。

1.2.4 无网格法小结

作为FEM的扩展，无网格法在近二十年来受到了国际计算力学界的广泛关注，得到了持续发展，在超高速碰撞、冲击侵彻、爆炸、动态断裂、超大变形、流固耦合等问题中展现了其独特的优势：

(1) 在离散方式上，无网格法采用一组无拓扑关系的点离散材料区域，既便于建立三维复杂结构的离散模型，又便于进行前后处理。某些算法需要背景网格，但是背景网格布置相对简单仅是用来积分；

(2) 在近似函数上，无网格法摆脱了FEM对网格协调性的要求，可以采用高阶函数作为基函数，易构造具有高阶连续性的近似函数，既可以方便求解高阶偏微分方程，诸如板壳问题等，也可以将描述待求问题的基本解引入基函数，适用于分析具有高梯度、奇异性的特殊问题，如裂纹扩展问题；

(3) 由于不依赖于网格，无网格法没有网格畸变问题，更不需网格重构；

(4) 由于离散点不具有拓扑关系，可非常方便地增减离散点实现h自适应分析；由于近似函数中基函数的多样性选择，可以非常方便地增加自由度实现p自适应分析；

虽然无网格法在有限元法解决不好或无法解决的问题上展现了潜在的优势，但还存在着如下的问题或缺陷需要解决：

(1) 由于无网格法的研究时间不如FEM长，目前还缺乏严格的数学论证；

(2) 由于采用的近似函数不具有插值特性，导致本质边界条件施加比较困难；

(3) 计算效率较低，如MLS和RKPM等建立近似函数时涉及矩阵求逆，此外由于许多需要积分的无网格法采用的近似函数不再是多项式，需要特殊的积分方案以保证积分精度，增加了计算量；

(4) 计算稳定性较差，对于一些配点型无网格法，虽然提出了多种稳定性方案，但是在算法本质上还是存在着诸如拉伸不稳定的缺陷。

1.3 物质点法研究现状

物质点法是Sulsky等人^[10]于1994年提出的一种无网格法，而其渊源可追溯到20世纪50年代末提出的PIC(particle-in-cell)方法。为了求解复杂的流体力学问题，Las Alamos National实验室的Harlow及其工作组提出了PIC方法。PIC采用拉格朗日和欧拉双重描述材料区域，即采用一组质点离散材料区域，但质点仅携带质量和位置信息以便于跟踪材料界面，用欧拉背景网格计算相应的物理量，通过插值函数完成质点信息与欧拉背景网格信息的交互。由于其独特的优点，该方法得到了充分的发展和广泛的应用。但是，由于质点仅携带质量和位置信息，PIC方法具有较高的数值耗散。为此，Brackbill等人^[101,102]在PIC基础上发展了FLIP(fluid implicit PIC)方法。在FLIP中，质点携带了更多的物理量，如动量和能量等，而本构方程仍然在背景网格上计算。Sulsky为了将FLIP应用于固体力学问题，对FLIP方法进行了如下改进：1. 质点携带所有的物理量，并在质点上计算本构方程以方便处理与历史相关的物理量；2. 通过等效积分弱形式，采用质点离散方案重新推导了动量方程的离散格式；3. 采用显式时间积分。Sulsky将改进后的FLIP命名为物质点法(material point method)。因此，本文将物质点法中的质点称为物质点。此外，PIC还衍生出了其它各类方法，如FLIC、MAC等^[8]。

从加权余量法角度审视，物质点法是一种伽辽金型无网格法，采用的试探函数与有限元法类似。但是，MPM采用物质点离散材料区域。这些物质点在覆盖材料区域的欧拉背景网格内流动，并携带材料的所有物质信息，包括位置、速度、能量、应力应变状态和其他的历史变量等。因此，物质点的位置和携带的物理量表征了材料区域的运动和变形状态，而欧拉背景网格用来计算空间导数并更新物质点信息，从而实现相邻物质点之间的相互作用与联系。

物质点法的计算流程大致为：在每一个时间步开始时，布置规则的背景网格并将物质点与其固连；通过背景网格形函数将物质点的信息映射到背景网格上；在背景网格上求解动量方程，并将计算结果映射回物质点以更新其位置和速度，得到下一时刻物质点所携带的物质信息；最后丢弃已经发生变形的背景网格。由此可知，物质点法不需要处理对流项，同时也没有网格畸变问题，发挥了拉格朗日法和欧拉法各自的优势，避免了其缺点。Sulsky首先采用该方法计算了刚体的大转动和弹性体的碰撞问题，展现了MPM潜在的优势。此后，MPM受到广泛关注并得到了不断研究和发展，下面分别从算法和应用两个层面对物质点法进行综述。

Sulsky在提出MPM时采用的是显式积分算法。针对准静态和结构动力学问题，Cummins^[103]、Sulsky等人^[104]又给出了MPM的隐式积分算法，采用迭代方

法求解动量方程，并且不需显式组装切线刚度矩阵；Guilkey等^[105]则将有限元法中成熟的隐式积分算法引入到物质点法中，提出了需显式组装切线刚度矩阵的迭代方法。

Sulsky在提出MPM之初，采用的背景网格形函数为FEM的标准形函数以实现物质点与背景网格之间的信息交互。Bardenhagen等^[106]通过分析认为，由于此类形函数的导数在背景网格结点处不连续，导致物质点穿越背景网格单元边界时产生数值噪音。为此，他们采用彼得洛夫-伽辽金法对MPM进行推广，提出了广义插值物质点法(*generalized interpolation material point method, GIMP*)^[106]，建立了一族具有 C_1 连续性的形函数，有效减弱了数值噪音。在GIMP中，物质点的影响范围由其特征函数表示，在此称为物质点的形状。一般，物质点不仅影响其所在的背景网格单元的结点，还对相邻的单元结点有影响，增加了计算量。在具体计算过程中，需要实时计算该物质点的形状以判断其影响范围。为了避免实时计算物质点形状，一般假定物质点的形状不变，通过其现时位置和初始形状大小判断其具体影响范围，该方法称为uGIMP^[107]。最近，Zhang等^[108]建立了一种新的形函数导数计算方式，避免了物质点穿越网格引起的噪音。该方法不需要跟踪计算物质点的形状，并且物质点仅影响其所在的单元结点，因此便于非结构化背景网格的计算。Htike和Chen等^[109]则采用径向基函数(*radial basis function, RBF*)建立了高度光滑的MPM形函数，丰富了MPM的形函数类型。

在MPM中，动量方程在背景网格上求解。因此，需要建立背景网格单元的质量阵，类似于有限元法既可采用集中质量阵，也可采用协调质量阵。Tan等^[110]指出协调质量阵能够获得更好的能量守恒性质；Love等^[111]则分析了质量阵形式对能量和动量守恒性的影响，结果表明协调质量阵有较好的能量守恒性。但在具体应用时，MPM主要采用集中质量阵以提高计算效率。

在MPM中，物质点和背景网格之间采用单值映射函数，因此自然地满足了物体间非穿透条件。对于无滑移粘着接触，MPM自动满足，不需采取额外的处理；对于需要考虑滑移接触的问题，则需要建立相应的接触算法。York等^[112]首先提出了一种简单的接触算法：在物体发生接触分离前按正常单值速度场计算，当检测到物体发生接触分离时采用物体各自独立的速度场进行计算，从而实现了接触物体之间的正确分离，但该算法未考虑接触物体之间的摩擦作用。Bardenhagen等^[113]借鉴FEM中接触算法的思想，建立了考虑摩擦的物质点接触算法，实现了物体间的接触、滑移和分离过程的模拟，随后又对接触判断条件进行了改进^[114]。针对Bardenhagen等^[113]给出的界面法向量计算方法无法满足共线条件问题，Huang和Zhang等^[5,115]提出了一种新的接触界面法向量计算方法，

并将其用于中低速冲击侵彻问题，保证了计算过程中的动量守恒，解决了物质点法中粘着接触条件导致的侵彻阻力过大的问题。Chen等^[116]则从多重背景网格的思路建立了物质点法的接触算法，通过公共背景网格更新接触界面上的法向速度，在物体各自的背景网格上计算其他物理量。Ma和Zhang等^[117]在此基础上建立了局部多重背景网格接触算法，降低了内存使用量，提高了接触算法效率。由于物质点接触算法在背景网格结点上实施，Ma和Zhang等^[117]指出仅利用非穿透条件判断接触易导致接触的提前发生，并给出了一种计算物体之间相邻最近点距离的公式，改进了物质点法中接触判断方法。

物质点法采用物质点离散，各物质点之间无拓扑关系，因此易开展h自适应分析。Tan等^[110]建立了物质点和背景网格的层级结构化自适应分析算法，通过局部加密物质点和背景网格计算了裂纹尖端的能量释放率。针对冲击爆炸问题中易出现的数值断裂非物理现象，Ma和Zhang等^[118]提出了物质点自适应分裂的物质点法，有效避免了数值断裂问题。

在与其他算法耦合方面，Zhang等^[119]提出了显式物质点有限元法，该算法采用有限元离散所有材料区域，并在可能发生材料大变形的空间区域布置背景网格，一旦物体进入该网格，则强制将有限元结点转化为物质点求解，以避免网格畸变问题。Guilkey等^[120]建立了多物质欧拉法和MPM的耦合方法，分别采用多物质欧拉法模拟流体区域，用物质点法模拟固体结构。Anvar和Sumanta^[121]将MPM与浸没边界法(immersed boundary method)进行耦合，采用MPM求解固体结构，用浸没边界法求解具有复杂流动边界的流体区域。此外，Ayton等^[122]通过界面层信息交互机制将物质点法与分子动力学方法(molecular dynamics, MD)耦合，开展了类脂混合双层膜多尺度模拟；Guo和Yang^[123]采用握手区方法建立了MD和MPM的耦合算法，模拟了Cu-Cu和Si-Si的群簇高能碰撞问题。Lu等^[124]通过将MPM背景网格结点间距逐步细化到分子尺度，并在过渡区建立物质点和分子的一一对应关系，提出了MPM与MD的无缝耦合方法，分析了硅在纳米尺度下的拉伸过程。Chen等^[125]采用耦合的MD/MPM进行了纳米尺度的切削和薄膜生产过程的多尺度分析。

在并行算法方面，Parker等^[126,127]基于消息传递模型(MPI)研究了MPM的并行算法，开发了Uintah程序。黄鹏和张雄等^[128,129]提出了基于信息共享模型(OpenMP)的MPM并行算法，Zhang等^[130]则进一步建立了基于OpenMP的区域信息交错更新的MPM并行算法，精巧地避免了数据竞争问题。Ma和Lu等^[131]基于并程序开发平台SAMRAI^[132]建立了GIMP的并行算法。至此，已经建立了基于两种并行机制的MPM并行算法。

在物质点法中,本构方程在物质点上计算,而物质点的应变增量通过背景网格的速度场计算。目前,既有在背景网格动量方程更新前计算应变的计算格式,也有在动量方程更新后计算应变的计算格式。**Bardenhagen**分析了两种次序对能量守恒性的影响,结果表明前者能量守恒性优于后者^[133]。**Wallstedt**和**Guilkey**^[134]具体分析物质点速度到背景网格映射过程中的精度问题,并提出了一种改进方案。**Steffen**等^[135]对MPM进行了误差分析。

物质点法经过不断的发展和开发,已经在超高速碰撞、冲击侵彻、爆炸、裂纹扩展、材料破坏、颗粒材料流动和岩土冲击失效等一系列涉及材料特大变形的问题中展现了优势。目前已开展的应用具体如下:

在超高速碰撞问题方面,**Ma**和**Zhang**等^[136,137]以空间碎片防护问题为背景采用MPM研究了弹丸超高速碰撞薄板和厚板等问题,**Huang**和**Zhang**等^[128]则进一步采用并行的MPM方法精细模拟了超高速碰撞问题中的碎片云问题。

在冲击侵彻问题方面,**Sulsky**等^[138,139]模拟了Taylor杆问题、金属成形问题和钢球侵彻铝靶体的问题。**Huang**和**Zhang**等^[115]采用物质点接触算法模拟了中低速的冲击侵彻问题,所得计算结果与实验结果吻合。**Zhang**等^[108,140]采用物质点法模拟了弹体侵彻金属靶体的问题。

在爆炸问题方面,**Hu**和**Chen**^[141]基于物质点法模拟了爆炸对混凝土墙的破坏作用。**Ma**和**Zhang**等^[118,142]将MPM应用于高能炸药爆轰问题;王宇新等^[143-145]采用MPM系统研究了爆炸焊接问题。**张忠**等^[146]基于MPM分析了非均质固体炸药的爆轰过程及其对金属材料的破坏作用。

在裂纹扩展问题方面,**Nairn**的研究组采用MPM做了大量工作,模拟了二维、三维的裂纹扩展问题,通过多重速度场描述裂纹面以避免裂纹面之间的穿透^[147],并在物质点法中建立相关算法计算了裂纹尖端处的各种参数,如动态J积分、I、II和III型裂纹的应力强度因子^[148,149],模拟了脆性材料的断裂问题并计算了材料断裂过程中的能量释放率^[150]。此外,**Gilabert**等^[151]采用MPM模拟了陶瓷材料中裂纹萌生和扩展的过程;**Daphalapurkar**等^[152]在GIMP中实现了内聚力模型(cohesive zone model),模拟了延性和脆性材料中II型裂纹动态扩展的问题;**Wang**等^[153]采用非规则的背景网格计算了二维混合型裂纹动态扩展的问题。

在模拟材料失效问题方面,**Chen**的研究组做了大量工作,采用MPM模拟了冲击载荷下脆性材料的动态失效问题^[154,155]、薄膜受压状态下的脱层问题^[156]和材料在局部加热情况下的失效问题^[157]等。**Shen**^[158]采用MPM模拟了玻璃在冲击载荷作用下的失效破碎问题。**Schreyer**和**Sulsky**等^[159,160]在MPM中采用脱粘本构模型(constitutive equation for decohesion)研究了复合材料中的脱层失效模

式。Ionescu等^[161]采用MPM模拟了各项异性软组织的失效问题。Li和Pan等^[162]基于MPM研究了脆性材料在冲击载荷作用下的失效问题。

在岩土冲击动力学问题方面，Coetzee等^[163]采用二维物质点法模拟了岩土中锚墩受力问题。Andersen等^[164]基于GIMP分析了边坡失效问题。黄鹏^[5]采用MPM模拟了半球壳体侵彻岩土和边坡失效问题。

在颗粒材料流动问题方面，Wieckowski等^[165]采用MPM模拟了贮料垛内的颗粒流动过程。Bardenhagen等^[113]基于MPM接触算法模拟了颗粒物受剪作用下的流动过程。Coetzee等^[166]采用MPM模拟了挖斗铲玉米颗粒堆的过程；王津龙等^[167]基于MPM模拟了柱状堆石成型过程。

此外，MPM在泡沫铝材料压缩问题^[168]、海冰动力学问题^[169]、切削问题^[165,170]、碳纳米管增强型复合材料问题^[171,172]、薄膜流固耦合问题^[112,173]和多孔介质的动力学响应分析^[174-178]等问题中也有应用。

综上，物质点法采用拉格朗日物质点离散材料区域避免了对流项处理，易于跟踪材料界面，适合对复杂几何体的离散；采用欧拉背景网格计算空间导数和动量方程积分避免了网格畸变问题，适合模拟涉及材料大变形和破碎的问题。Ma和Zhang等^[179]从形函数特性、影响点搜索、接触算法、稳定性和边界条件等方面对MPM和SPH进行了详细比较，研究表明物质点法具有较高的计算效率和稳定性。但是，在模拟仅涉及材料小变形问题时，MPM的计算效率和精度不如有限元法。针对冲击侵彻、流固耦合等问题中存在大量材料区域仅涉及小变形的情况，需要进一步研究高效的数值计算方法。

1.4 本文主要内容

本文的主要工作基于以下问题：

(1) 钢筋混凝土是一类应用广泛的建筑材料，研究钢筋混凝土在冲击侵彻下的动力学行为有着重要的理论和工程意义。为考虑钢筋的承载作用，需单独建立钢筋的离散模型。但是，采用MPM建立混凝土和钢筋的离散模型时，由于钢筋的直径尺寸相比于混凝土结构的尺寸太小导致离散模型规模过于庞大，计算耗时。因此，需要建立一种既可考虑钢筋承载作用，又可不显著增加离散模型规模的数值计算方法。

(2) 采用MPM模拟冲击侵彻和流固耦合类问题时，侵彻体和非流体材料往往仅涉及小变形，而物质点法在模拟小变形物体时的精度和效率不如有限元法。因此，可以采用有限元法离散小变形物体。为此，需要建立物质点离散体和有限元

离散体之间相互作用的耦合算法，从而结合MPM和FEM的优势计算此类问题。

(3) 材料在变形过程中，首先是发生小变形，进而发生大变形；此外，在超高速碰撞、边坡失效问题中，涉及特大变形的材料区域范围较小。如果直接采用MPM模拟材料的变形全过程及整个材料区域，计算将是耗时的，并没有充分发挥MPM的优势。因此，需要进一步研究针对此类问题的数值计算方法。

基于以上问题，本文将有限元法中的杆单元引入物质点法中，提出了杂交物质点有限元法，解决了MPM在模拟钢筋混凝土侵彻问题时的难题。针对冲击侵彻和流固耦合类问题，建立了耦合物质点有限元法，并进一步提出了自适应物质点有限元法，充分吸收了物质点法和有限元法在各自适用范围内的优势。本文共分六章，各章内容如下：

第一章即本章，介绍了本文的研究背景及内容，同时介绍了无网格法的研究现状，重点综述了物质点法的研究现状和应用范围。

第二章详细介绍了物质点法的基本理论、算法格式和具体实现等问题，并将MPM与FEM进行了比较，最后基于物质点法开展了爆轰驱动飞片的应用研究。

第三章针对钢筋混凝土结构侵彻问题建立了杂交物质点有限元法。将有限元法的杆单元引入到物质点法中，在物质点法中构造了模拟钢筋的杆单元，避免了在钢筋直径方向上的离散，降低了计算规模，并有效地考虑了钢筋在混凝土中的承载作用。采用杆拉伸和单摆问题验证了该算法的有效性，最后采用该方法模拟了卵形弹侵彻钢筋混凝土靶体的问题。

第四章内容为耦合物质点有限元法研究。在侵彻和流固耦合问题中，采用有限元法离散仅涉及材料小变形的物体，用物质点法离散涉及材料特大变形的物体，通过接触算法实现两个离散体之间的接触作用。采用杆共轴撞击和斜坡上球体滚动问题验证了该算法的精度和高效性，最后采用该算法模拟了侵彻问题和流固耦合问题。

第五章内容为自适应物质点有限元法研究，建立了单元到物质点的自适应转化算法和未转化的有限元离散区域与物质点离散区域相互作用的耦合算法。采用杆共轴撞击和Taylor杆碰撞问题验证了该方法的精度，最后采用该方法模拟了超高速侵彻问题和边坡失效问题，结果表明其计算效率明显高于物质点法。

第六章内容为全文总结并展望需进一步开展的工作。

第2章 物质点法基本理论和应用

物质点法采用具有拉格朗日属性的物质点和具有欧拉属性的背景网格双重离散材料区域。物质点携带其所代表材料区域的所有物质信息，包括位置、速度、应力、应变和其它历史变量等，描述了材料区域的运动与变形；背景网格则用于动量方程和空间导数的求解，实现了各物质点之间的相互作用和联系。因此，物质点法具有拉格朗日算法和欧拉算法的优势，可描述材料的大变形甚至破碎。相比于一般的无网格法，物质点法基于背景网格构造近似函数而非离散质点，类似于有限元法。

本章将基于更新拉格朗日格式的控制方程推导物质点法的求解格式，进而介绍物质点法中一些细节问题并将其与显式有限元法进行比较。本章最后给出了基于物质点法开展的爆轰驱动飞片的应用研究。除非特殊说明，本文涉及到的物理量和方程均采用笛卡尔直角坐标系。

2.1 控制方程

依据连续介质力学的连续性基本假设，物体可以看做质点的连续集合。各质点在不同时刻占有不同的空间位置，在一定时刻所占据的空间区域集合称为构形。物体在 $t = 0$ 时刻的构形称为初始构形，记为 V_0 ，在当前时刻的构形称为现时构形，记为 V ，如图2.1所示。为了度量物体的运动和变形，需要选取一个特定时刻的构形作为参照，称为参考构形。

质点的运动方程为

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (2-1)$$

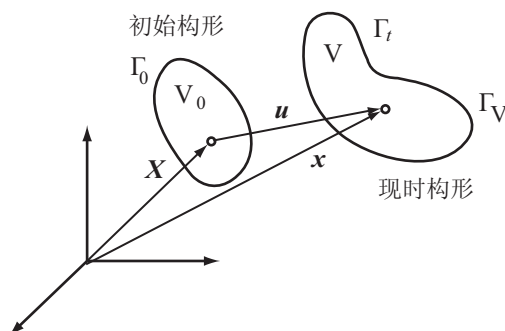


图 2.1 初始构形和现时构形

其中, $\mathbf{X}$ 表示质点, 称为物质坐标或拉格朗日坐标, $\mathbf{x}$ 表示质点 $\mathbf{X}$ 在空间所占的位置, 又称欧拉坐标。在研究物体运动时, 主要有两种方法: 拉格朗日方法和欧拉方法。在拉格朗日方法中, 通过物体中固定的点来定义和描述其运动和变形, 所研究的是在给定质点上各物理量随时间的变化, 以及这些物理量在相邻质点之间的变化。因此, 物理量 ψ 是质点 $\mathbf{X}$ 和时间 t 的函数, 有

$$\psi = F(\mathbf{X}, t) \quad (2-2)$$

令 $\mathbf{X}$ 保持不变, 物理量对时间的导数称为物质导数, 也称全导数, 有

$$\frac{d\psi}{dt} = \left. \frac{\partial F(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} \quad (2-3)$$

在欧拉法中, 通过固定空间点来定义和描述物体的运动与变形, 所研究的是在给定空间点上以不同时刻到达该点的不同质点物理量随时间的变化, 以及这些物理量在相邻空间点之间的变化。因此, 物理量 ψ 是空间点 $\mathbf{x}$ 和时间 t 的函数, 有

$$\psi = f(\mathbf{x}, t) \quad (2-4)$$

将式(2-1)代入式(2-4)中, 利用复合函数求导法则可得 $f(\mathbf{x}, t)$ 的物质导数, 有

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} v_i \quad (2-5)$$

其中, 偏导数 $\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$ 表示空间点 $\mathbf{x}$ 处物理量的变化率, 称为空间时间导数, v_i 为质点的速度。

在采用拉格朗日法建立控制方程时, 选取不同的参考构形分别有更新拉格朗日格式和完全更新拉格朗日格式。此处仅介绍更新拉格朗日格式。在更新拉格朗日格式中, 取现时构形为参考构形: 虚功方程的积分在现时构形上计算; 物理量均是对空间坐标求导数; 应力应变度量则分别选用相对于现时构形定义的柯西应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 和变形率张量 $\mathbf{D}$, 并且两者在功率上是共轭的。其中, $\boldsymbol{\sigma}$ 既是对称张量, 又是与变形相关的真实应力, 由本构方程计算, 即

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}(\mathbf{D}, \dots) \quad (2-6)$$

$\mathbf{D}$ 是真实应变的速率 $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, 通过速度梯度计算, 即

$$D_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (2-7)$$

更新拉格朗日格式的控制方程主要由质量、动量和能量守恒方程组成, 具体为:

$$\rho(\mathbf{X}, t)J(\mathbf{X}, t) = \rho_0(\mathbf{X}) \quad (2-8)$$

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2-9)$$

$$\rho \dot{w}^{\text{int}} = D_{ij} \sigma_{ij} \quad (2-10)$$

本构关系为：

$$\sigma^\nabla = \sigma^\nabla(D_{ij}, \sigma_{ij}, \text{etc.}) \quad (2-11)$$

边界条件为：

$$n_j \sigma_{ji} |_{\Gamma_t} = \bar{t}_i \quad (2-12)$$

$$\dot{u}_i |_{\Gamma_v} = \bar{v}_i \quad (2-13)$$

在 $t = 0$ 时刻，现时构形与初始构形重合，因此材料区域的速度和位移初始条件可以分别表示为：

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) \quad (2-14)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}(\mathbf{X}) \quad (2-15)$$

其中，下标 i 和 j 表示空间坐标分量，并遵守Einstein求和约定，下标0表示初始时刻的值， $\cdot$ 表示对时间的导数。 ρ 表示当前时刻的密度， J 表示变形梯度的行列式， f_i 表示体力， $\mathbf{u}$ 表示位移， w^{int} 表示单位质量的内能。 Γ_t 和 Γ_v 分别表示现时构形中的指定面力边界和速度边界， $\bar{t}_i$ 和 $\bar{v}_i$ 分别表示面力边界和速度边界上面力和速度。 n_j 表示材料边界的单位外法线方向。

在冲击侵彻问题中，柯西应力一般分解为偏应力 s_{ij} 和压力 p ，有

$$\sigma_{ij} = s_{ij} - p \delta_{ij} \quad (2-16)$$

其中， δ_{ij} 为Kronecker符号， $p = -\frac{1}{3} \sigma_{ii}$ 。因此，能量方程(2-10)可改写为

$$\rho \dot{w}^{\text{int}} = \dot{\varepsilon}_{ij} s_{ij} - \dot{\varepsilon}_{kk} p \quad (2-17)$$

2.2 控制方程的离散

物质点法采用物质点和背景网格离散材料区域，如图2.2所示。其中，每个物质点代表一块材料区域并携带该材料区域的所有物质信息，如质量、速度、应力和应变等，所有物质点的集合代表了整个材料区域；背景网格则用来积分动量方程和计算空间导数。在物质点法中，采用伽辽金法建立方程(2-9)的等效积分形

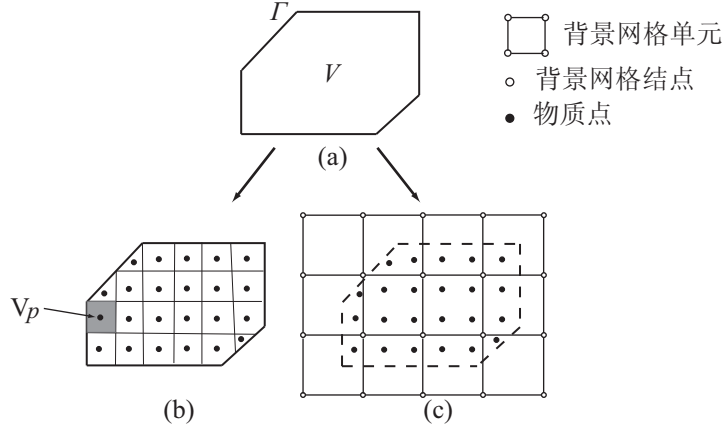


图 2.2 物质点法示意图：(a) 材料区域；(b) 物质点代表区域；(c) 物质点离散

式。取虚位移 δu_i 作为权函数，利用加权余量法，得

$$\int_V \delta u_i (\sigma_{ij,j} + \rho b_i - \rho \ddot{u}_i) dV = 0 \quad (2-18)$$

利用分部积分和边界条件(2-12)和(2-13)，并考虑到 $\delta u_i|_{\Gamma_v} = 0$ (Γ_v 处位移已知，故其变分为0)，有

$$\begin{aligned} \int_V \delta u_i \sigma_{ij,j} dV &= \int_V [(\delta u_i \sigma_{ij})_{,j} - \delta u_{i,j} \sigma_{ij}] dV \\ &= \int_{\Gamma} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_V \delta u_{i,j} \sigma_{ij} dV \\ &= \int_{\Gamma_t} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_V \delta u_{i,j} \sigma_{ij} dV \end{aligned} \quad (2-19)$$

将上式代入式(2-18)，得

$$\int_V \delta u_i \rho \ddot{u}_i dV + \int_V \delta u_{i,j} \sigma_{ij} dV - \int_V \delta u_i \rho b_i dV - \int_{\Gamma_t} \delta u_i \bar{t}_i d\Gamma = 0 \quad (2-20)$$

式(2-20)即为式(2-9)和边界条件的等效积分弱形式，所包含的位移函数 u_i 对坐标的导数最高阶次为1，比式(2-9)降低了一阶。因此，位移函数 u_i 仅需满足 C_0 阶连续性。式(2-20)也称虚功方程，可改写为

$$\delta w = \delta w^{\text{int}} - \delta w^{\text{ext}} + \delta w^{\text{kin}} = 0 \quad (2-21)$$

其中

$$\delta w^{\text{int}} = \int_V \delta u_{i,j} \sigma_{ij} dV \quad (2-22)$$

$$\delta w^{\text{ext}} = \int_V \delta u_i \rho b_i dV + \int_{\Gamma_t} \delta u_i \bar{t}_i d\Gamma \quad (2-23)$$

$$\delta w^{\text{kin}} = \int_V \delta u_i \rho \ddot{u}_i dV \quad (2-24)$$

分别是内力系的虚功、外力系的虚功和惯性力系的虚功。

在物质点法中，位移函数 u_i 采用的近似函数与有限元法一致，即多项式，并通过背景网格单元构造。背景网格结点 I 在现时构形中坐标为 x_{iI} ，在参考构形中坐标标记为 X_{iI} 。因此，物质点 p 在任一时刻的空间坐标 $x_{ip}(t)$ 可以近似表示为

$$x_{ip}(t) = \sum_{I=1}^{n_g} N_I(\mathbf{x}_p) x_{iI}(t) \quad (2-25)$$

其中， n_g 表示背景网格结点总数， $N_I(\mathbf{x}_p)$ 为背景网格结点 I 在物质点 p 处的形函数值。背景网格结点 I 的位移为

$$u_{iI} = x_{iI}(t) - X_{iI} \quad (2-26)$$

因此，背景网格中物质点 p 的位移可以用背景网格单元结点位移近似表示，有

$$u_{ip} = \sum_{I=1}^{n_g} N_{Ip} u_{iI} \quad (2-27)$$

将式(2-27)分别对时间求二阶导和对坐标求偏导，得

$$\ddot{u}_{ip} = \sum_{I=1}^{n_g} N_{Ip} \ddot{u}_{iI} \quad (2-28)$$

$$u_{ip,j} = \sum_{I=1}^{n_g} N_{Ip,j} u_{iI} \quad (2-29)$$

因此，虚位移也可近似表示为

$$\delta u_i = \sum_{I=1}^{n_g} N_{Ip,j} \delta u_{iI} \quad (2-30)$$

其中， δu_{iI} 表示背景网格结点 I 的虚位移。将式(2-28)、(2-29)和(2-30)代入式(2-20)，得

$$\delta u_{iI} \left(\int_V N_{Ip} \rho N_J \ddot{u}_{iJ} dV + \int_V N_{Ip,j} \sigma_{ij} dV - \int_V N_{Ip} \rho b_i dV - \int_{\Gamma_t} N_{Ip} \bar{t}_i d\Gamma \right) = 0 \quad (2-31)$$

在给定的速度边界上 $\delta u_{iI} = 0$ ，而在其它所有结点上 δu_{iI} 是任意的，因此有

$$\int_V N_{Ip} \rho N_J \ddot{u}_{iJ} dV + \int_V N_{Ip,j} \sigma_{ij} dV - \int_V N_{Ip} \rho b_i dV - \int_{\Gamma_t} N_{Ip} \bar{t}_i d\Gamma = 0 \quad (2-32)$$

式(2-32)等号左端的第一项为惯性力 f_{il}^{kin} ，第二项为结点内力 f_{il}^{int} ，第三项和第四项为结点外力 f_{il}^{ext} ，有

$$f_{il}^{\text{kin}} = M_{IJ} \ddot{u}_{iJ} \quad (2-33)$$

$$f_{il}^{\text{int}} = - \int_V N_{Ip,j} \sigma_{ij} dV \quad (2-34)$$

$$f_{il}^{\text{ext}} = \int_V N_{Ip} \rho b_i dV + \int_{\Gamma_i} N_{Ip} \bar{t}_i d\Gamma \quad (2-35)$$

其中

$$M_{IJ} = \int_V N_{Ip} \rho N_{Jp} dV \quad (2-36)$$

为系统的质量阵。将式(2-33)、(2-34)和(2-35)代入式(2-32)中，得

$$M_{IJ} \ddot{u}_{iJ} = f_{il}^{\text{ext}} + f_{il}^{\text{int}} \quad (2-37)$$

在物质点法中，本构方程在代表材料区域的物质点上计算。为将积分式(2-34)和(2-35)转化为各个分区域的积分之和，定义 $\sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}}{\rho}$ 为比应力， $\bar{t}_i^* = \frac{\bar{t}_i}{\rho}$ 为比边界力。因此，式(2-34)和(2-35)可分别改写为：

$$f_{il}^{\text{int}} = - \int_V \rho N_{Ip,j} \sigma_{ij}^* dV \quad (2-38)$$

$$f_{il}^{\text{ext}} = \int_V N_{Ip} \rho b_i dV + \int_{\Gamma_i} \rho N_{Ip} \bar{t}_i^* d\Gamma \quad (2-39)$$

由于物质点携带了材料区域的质量并集中在物质点位置处，所以材料区域的密度 ρ 可近似为

$$\rho(x_i) = \sum_{p=1}^{n_p} m_p \delta(x_i - x_{ip}) \quad (2-40)$$

其中， n_p 表示物质点总数， m_p 表示物质点所代表区域的质量， δ 为Dirac-delta函数。将式(2-40)代入式(2-36)、(2-38)和(2-39)，即可将在材料域和边界上的积分转换为对物质点代表的材料区域积分求和的形式，有

$$f_{il}^{\text{int}} = - \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{Ip,j} \sigma_{ijp}^* = - \sum_{p=1}^{n_p} N_{Ip,j} \sigma_{ijp}^* \frac{m_p}{\rho_p} \quad (2-41)$$

$$\begin{aligned} f_{il}^{\text{ext}} &= \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{Ip} b_i + \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{Ip} h^{-1} \bar{t}_i^* \\ &= \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{Ip} b_i + \sum_{p=1}^{n_p} N_{Ip} h^{-1} \bar{t}_i^* \frac{m_p}{\rho_p} \end{aligned} \quad (2-42)$$

其中, h 是为了将式(2-39)中第二项边界积分转化为体积分而引入的假想边界层厚度。在具体计算中, 可定义边界物质点, 施加边界面力。由式(2-41)和(2-42)可知, 物质点法中的积分方案为物质点积分, 而非有限元法中采用的高斯点积分。

在物质点法中, 背景网格在空间中固定不动, 因此 M_{IJ} 和时间相关, 在每一个时间步中都需要重新计算。为了减少计算量, 一般采用集中质量阵, 即

$$M_I = \sum_{J=1}^{n_g} \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{Ip} N_{Jp} = \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{Ip} \quad (2-43)$$

因此, 式(2-37)可改写为

$$\dot{p}_{iI} = f_{iI}^{\text{ext}} + f_{iI}^{\text{int}} \quad (2-44)$$

其中, $p_{iI} = M_I \dot{u}_{iI} = M_I v_{iI}$ 为背景网格结点 I 的动量。背景网格结点 I 速度 v_{iI} 由质点映射到背景网格上的动量获得, 即

$$v_{iI} = \frac{\sum_{p=1}^{n_p} m_p v_{ip} N_{Ip}}{M_I} \quad (2-45)$$

在背景网格结点上完成动量方程(2-44)式计算后, 通过背景网格形函数将积分结果映射回物质点以更新物质点信息, 具体参见第2.3节的介绍。物质点应力更新时的应变增量通过背景网格速度场计算, 具体参见第2.4节, 如物质点 p 的应变率张量 D_{ijp} 为

$$D_{ijp} = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{n_g} (N_{Ip,j} v_{iI} + N_{Ip,i} v_{jI}) \quad (2-46)$$

综上可知, 物质点法的离散方程与有限元法一致, 均采用网格构造近似函数。当采用多项式近似函数时, 有限元法采用高斯点积分可精确积分多项式, 但是物质点法采用的物质点积分不如高斯积分精度高。因此, 物质点法一般通过加密背景网格单元内的物质点来提高精度, 但增加了计算量。在物质点法中, 物质点携带物质信息, 背景网格并不存储任何信息, 因此不存在网格畸变问题。但是, 需要通过背景网格形函数将物质点携带的物质信息映射到背景网格上以得到背景网格结点所需的信息, 相比于有限元法增加了额外的计算量。

2.3 时间积分

在分析冲击侵彻和爆炸类问题时, 应力波效应在材料的变形与破坏中起主导作用, 一般宜采用显式积分求解。因此, 通常采用变步长的中心差分法求解动量

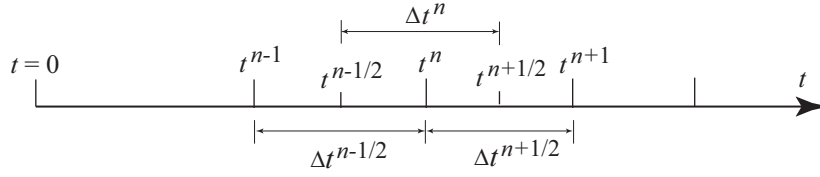


图 2.3 显式时间积分

方程(2-44)式，如图2.3所示。其中， $t^{n+1/2} = (t^{n+1} + t^n)/2$ ， $\Delta t^{n+1/2} = t^{n+1} - t^n$ ， $\Delta t^n = t^{n+1/2} - t^{n-1/2}$ 。

在物质点法中，时间积分包括两部分：背景网格结点的动量方程计算和物质点的运动学量更新。首先求解背景网格结点的动量方程， $t^{n+1/2}$ 时刻背景网格结点 I 的动量为

$$p_{il}^{n+1/2} = p_{il}^{n-1/2} + (f_{il}^{n,int} + f_{il}^{n,ext})\Delta t^n \quad (2-47)$$

其次，分别利用背景网格的加速度场和速度场更新物质点的速度和位置，有

$$v_{ip}^{n+1/2} = v_{ip}^{n-1/2} + \sum_{J=1}^{n_g} N_{Ip}(f_{il}^{n,int} - f_{il}^{n,ext})\Delta t^n / M_I \quad (2-48)$$

$$x_{ip}^{n+1} = x_{ip}^n + \sum_{J=1}^{n_g} N_{Ip}p_{il}^{n+1/2}\Delta t^{n+1/2} / M_I \quad (2-49)$$

由于中心差分法是条件稳定算法，其时间步长 Δt 必须小于临界时间步长 Δt_{cr} ，即必须满足CFL(Courant-Friedrichs-Lewy)条件，有

$$\Delta t = \alpha \Delta t_{cr} \quad (2-50)$$

其中， α 是一个常数。 α 的取值应保证整个计算过程中能量守恒，建议取为 $0.5 \leq \alpha \leq 0.9$ 。 Δt_{cr} 的物理含义为，波在一个时间步内的传播距离不能超过一个背景网格单元的特征长度，以保证足够的求解精度。因此，临界时间步长取为

$$\Delta t_{cr} = \min \frac{l_e}{c} \quad (2-51)$$

其中， l_e 为背景网格单元的特征尺寸， c 表示材料当前声速。在物质点法中，一般采用规则的背景网格，因此 l_e 为背景网格结点间距。

2.4 应力更新

在物质点法中，物质点 p 的应力更新方式为

$$\sigma_{ijp}(t + dt) = \sigma_{ijp}(t) + \dot{\sigma}_{ijp}dt \quad (2-52)$$

由于柯西应力张量 σ_{ijp} 不是客观张量，因此在本构方程计算中采用客观张量焦曼应力率 σ_{ij}^∇ ，而焦曼应力率 σ_{ij}^∇ 与柯西应力率 $\dot{\sigma}_{ijp}$ 之间的关系为

$$\dot{\sigma}_{ijp} = \sigma_{ijp}^\nabla + \sigma_{ikp}\Omega_{jkp} + \sigma_{jkp}\Omega_{ikp} \quad (2-53)$$

其中， Ω_{ikp} 表示物质点 p 的旋率张量，是速度梯度的反对称部分，表征了物质点 p 邻域内材料的刚体转动，有

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) \quad (2-54)$$

参考式(2-46)，有

$$\Omega_{ijp} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n_g} (N_{Ip,j} v_{il} - N_{Ip,i} v_{jl}) \quad (2-55)$$

σ_{ijp}^∇ 可根据本构关系由变形率张量 $\dot{\epsilon}_{ijp}$ 求得，即

$$\sigma_{ijp}^\nabla = S_{ijkl} \dot{\epsilon}_{klp} \quad (2-56)$$

其中 S_{ijkl} 表示材料的本构张量。

采用中心差分法时，程序仅存储 $t^{n+1/2}$ 时刻的旋率张量 $\Omega_{ik}^{n+1/2}$ 和 t^n 时刻的柯西应力 σ_{ijp}^n 。因此， $t^{n+1/2}$ 时刻柯西应力率的求解式为

$$\dot{\sigma}_{ijp}^{n+1/2} = \sigma_{ijp}^{\nabla n+1/2} + \sigma_{ikp}^n \Omega_{jkp}^{n+1/2} + \sigma_{jkp}^n \Omega_{ikp}^{n+1/2} \quad (2-57)$$

将式(2-57)代入式(2-52)，得

$$\sigma_{ijp}^{n+1} = \sigma_{ijp}^n + \dot{\sigma}_{ijp}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} = \sigma_{ijp}^n + r_{ijp}^n + \Delta \sigma_{ijp}^{n+1/2} \quad (2-58)$$

其中

$$r_{ijp}^n = (\sigma_{ikp}^n \Omega_{jkp}^{n+1/2} + \sigma_{jkp}^n \Omega_{ikp}^{n+1/2}) \Delta t^{n+1/2} \quad (2-59)$$

$$\Delta \sigma_{ijp}^{n+1/2} = S_{ijkl} \dot{\epsilon}_{klp}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \quad (2-60)$$

柯西应力分解为偏应力和压力，各自根据强度模型和状态方程更新。相应的应变率张量分解成偏应变率张量 $\dot{\epsilon}'_{ij}$ 和体积应变率两部分，有

$$D_{ij} = \dot{\epsilon}'_{ij} + \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ij} \quad (2-61)$$

对照式(2-58)，偏应力张量 s_{ij} 的更新格式为

$$s_{ijp}^{n+1} = (\sigma_{ijp}^n + p_p^n \delta_{ij}) + r_{ijp}^n + S_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \quad (2-62)$$

压力由状态方程更新。在状态方程中，压力一般由体积 V 、能量 e 和温度 T 来计算，即

$$p = p(V, e) = p(V, T) \quad (2-63)$$

因此，计算 p^{n+1} 前先对能量方程(2-17)积分。 t^{n+1} 时刻的物质点内能为

$$\begin{aligned} e^{n+1} &= e^n + m_p \dot{w}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \\ &= e^n + V^{n+1/2} s_{ij}^{n+1/2} D_{ij}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} - V^{n+1/2} p^{n+1/2} D_{kk}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \end{aligned} \quad (2-64)$$

考虑到

$$V^{n+1/2} = \frac{1}{2}(V^n + V^{n+1}) \quad (2-65)$$

$$s_{ij}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(s_{ij}^n + s_{ij}^{n+1}) \quad (2-66)$$

$$p^{n+1/2} = \frac{1}{2}(p^n + p^{n+1}) \quad (2-67)$$

$$V^{n+1/2} \varepsilon_{ij}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} = V^{n+1} - V^n = \Delta V \quad (2-68)$$

式(2-64)可改写为

$$e^{n+1} = e^{*n+1} - \frac{1}{2} p^{n+1} \Delta V \quad (2-69)$$

其中， e^{*n+1} 为物质点的内能估计值，有

$$e^{*n+1} = e^n + V^{n+1/2} s_{ij}^{n+1/2} D_{ij}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} - \frac{1}{2} \Delta V p^n D_{kk}^{n+1/2} \quad (2-70)$$

若状态方程是线性的，则有

$$p^{n+1} = A^{n+1} + B^{n+1} e^{n+1} \quad (2-71)$$

联立式(5.6)和(2-69)，可解得物质点 t^{n+1} 时刻的压力，有

$$p^{n+1} = (A^{n+1} + B^{n+1} e^{*n+1}) / [1 + B^{n+1} \Delta V / (2V_0)] \quad (2-72)$$

将压力代入式(2-69)，可得 t^{n+1} 时刻物质点的内能。

若状态方程是非线性的，对状态方程进行一次迭代求得压力的近似解，并代入到式(2-69)中更新物质点 t^{n+1} 时刻的内能。物质点 t^{n+1} 时刻的压力最终可由 $p^{n+1} = p(V^{n+1}, e^{n+1})$ 求得。

2.5 人工体积粘性

在求解涉及冲击波问题时，波阵面前后压力、密度、速度和能量等将发生突变(跳跃)，导致物理量在波阵面上的导数存在强间断，给运动微分方程的求解带来了很大的困难。为此，借鉴 FEM 中冲击波的处理方式，在物质点法中采用 Von Neumann 和 Richtmyer 提出的人工体积粘性来处理该问题，即在压力项中加入一项人工体积粘性力项 q ，把冲击波的强间断面模糊成在一个相当狭窄的过渡区域内急剧变化但连续的波阵面，如图 2.4 所示。

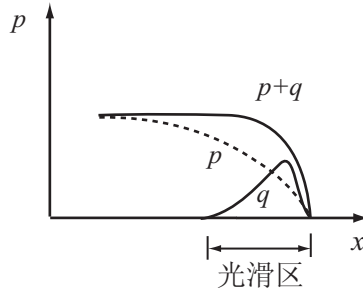


图 2.4 人工体积粘性力

人工体积粘性项有两种形式，分别是线性形式和二次形式。线性形式为

$$q = \begin{cases} -c_1 \rho l_e c \dot{\epsilon}_{ii} & \dot{\epsilon}_{ii} < 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_{ii} \geq 0 \end{cases} \quad (2-73)$$

二次形式为

$$q = \begin{cases} c_0 \rho l_e^2 (\dot{\epsilon}_{ii})^2 & \dot{\epsilon}_{ii} < 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_{ii} \geq 0 \end{cases} \quad (2-74)$$

其中， c_0 和 c_1 为无量纲常数，分别建议取值1.5和0.06， l_e 为背景网格单元特征长度，即背景网格结点间距。在物质点法中，通常采用线性和二次形式的组合形式，即

$$q = \begin{cases} c_0 \rho l_e^2 (\dot{\epsilon}_{ii})^2 - c_1 \rho l_e c \dot{\epsilon}_{ii} & \dot{\epsilon}_{ii} < 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_{ii} \geq 0 \end{cases} \quad (2-75)$$

在引入人工体积粘性项后，压力的求解公式应改为

$$p = -\frac{1}{3} \sigma_{ii} - q \quad (2-76)$$

人工体积粘性项本质上是一种阻尼项，在压力中添加 q 后，相当于在系统中引入了阻尼，等效阻尼比为

$$\xi = -\frac{q}{\rho l_e c \dot{\epsilon}_{kk}} = \frac{Q}{c} \quad (2-77)$$

其中

$$Q = \begin{cases} c_0 c - c_1 \rho l_e c \dot{\epsilon}_{kk} & \dot{\epsilon}_{kk} < 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_{kk} \geq 0 \end{cases} \quad (2-78)$$

因此，单元的临界时间步长应改写为

$$\Delta t_e = \frac{l_e}{Q + (Q + c^2)^{1/2}} \quad (2-79)$$

通过在压力项中添加人工体积粘性项，光滑了冲击波间断面，基本上不影响过渡区外的计算结果。

2.6 形函数与边界条件

在物质点法中，背景网格一般采用规则的形式，如在二维问题中，背景网格由规则的四边形单元组成，而在三维问题中，背景网格由规则的六面体单元组成。由于物质点携带所有的材料信息，在每一个时间步计算中，需要将物质点携带的物理量通过背景网格形函数映射到背景网格结点上，详见第2.2节。Bardenhagen等^[106]采用Petrov-Galerkin离散方案建立了广义插值物质点法(GIMP)，给出了物质点法统一的背景网格形函数形式。不同的形函数决定了物质点影响的背景网格结点范围不同，因此可依据物质点的影响域来划分物质点法中的背景网格形函数，主要分两类。第一类背景网格形函数是直接采用有限元法

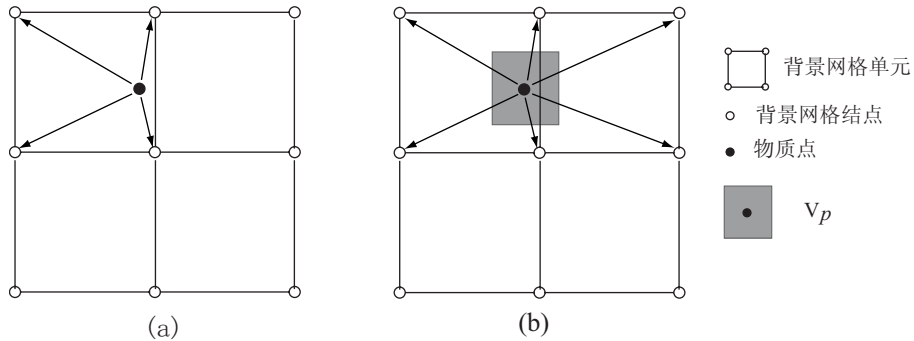


图 2.5 物质点的影响域：(a) 其所在单元，(b) 其所在及相邻单元

中四边形单元和六面体单元的形函数，物质点仅影响其所在背景网格单元相连的

结点，如图2.5(a)所示。因此，在二维问题中，背景网格形函数为

$$N_I = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_I)(1 + \eta\eta_I), \quad I = 1, 2, 3, 4 \quad (2-80)$$

其中， (ξ, η) 表示物质点在四边形母单元中的自然坐标，取值 $[-1, 1]$ ， (ξ_I, η_I) 表示单元结点 I 的自然坐标，取值为 ± 1 。因此， N_I 取值范围为 $0 \sim 1$ 。当质点位于结点 I 处时， $N_I = 1$ ；当质点位于单元外时， $N_I = 0$ 。在三维问题中，背景网格形函数为

$$N_I = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_I)(1 + \eta\eta_I)(1 + \zeta\zeta_I), \quad I = 1, 2, \dots, 8 \quad (2-81)$$

该类形函数具有插值特性，本质边界条件可在单元结点上直接施加，类似于有限元法。但是，该类形函数的导数在背景网格结点处具有不连续性，导致物质点跨越背景网格单元边界时产生数值噪音，造成应力振荡。此时，一般在背景网格单元内多布置物质点以降低数值噪音的影响。

第二类背景网格形函数形式与物质点的变形相关，物质点对其代表的材料区域涵盖的背景网格单元相连的结点均有影响，如图2.5(b)所示。该类形函数一般可写为

$$S_{Ip} = \frac{1}{V_p} \int_{\Omega_p \cap \Omega} \Psi_p(x) N_I(x) d\Omega \quad (2-82)$$

其中， $\Psi_p(x)$ 定义了物质点所占据的空间区域体积分数，是物质点当前位置和变形状态的函数，称为物质点的特征函数。该特征函数满足单位分界条件，有

$$\sum_p^{n_p} \Psi_p(x) = 1 \quad (2-83)$$

以一维问题为例，取

$$\Psi_p(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega_p \\ 0 & x \notin \Omega_p \end{cases} \quad (2-84)$$

$$N_I(x) = \begin{cases} 0 & x - x_I \leq -L \\ 1 + (x - x_I)/L & -L < x - x_I \leq 0 \\ 1 - (x - x_I)/L & 0 < x - x_I \leq L \\ 0 & L < x - x_I \end{cases} \quad (2-85)$$

其中， L 为背景网格结点间距。

将式(2-85)和(2-84)代入式(2-82)，得

$$S_{Ip} = \begin{cases} 0 & x_p - x_I \leq -L - l_p \\ \frac{(L+l_p+(x_p-x_I)^2)}{4Ll_p} & -L - l_p < x_p - x_I \leq -L + l_p \\ 1 + \frac{x_p - x_I}{L} & -L + l_p < x_p - x_I \leq -l_p \\ 1 - \frac{(x_p - x_I)^2 + l_p^2}{2Ll_p} & -l_p < x_p - x_I \leq l_p \\ 1 - \frac{x_p - x_I}{L} & l_p < x_p - x_I \leq L - l_p \\ \frac{(L+l_p+(x_p-x_I)^2)}{4Ll_p} & L - l_p < x_p - x_I \leq L + l_p \\ 0 & L + l_p < x_p - x_I \end{cases} \quad (2-86)$$

其中， l_p 为物质点 p 特征长度的一半。对于三维问题，则有

$$S_{Ip}(x) = S_{Ip}(\xi)S_{Ip}(\eta)S_{Ip}(\zeta) \quad (2-87)$$

该类形函数具有 C_1 连续性，与有第一类形函数相比更光滑，可有效控制数值噪音。但是需要实时计算物质点的 l_p 以确定该物质点的影响范围，并且形函数形式比较复杂，显著增加了计算量。此外，该类形函数不再具有插值特性，给本质边界条件的施加带来了一定的影响。

2.7 计算格式和算法实现

综上，物质点法的求解步骤大致为：

- (1) 定义背景网格，将所有物质点的质量、动量映射到背景网格上；
- (2) 在物质点上进行应力更新，并利用物质点积分获得背景网格结点的结点力；
- (3) 在背景网格上积分动量方程；
- (4) 利用背景网格结点的速度更新物质点的位置，利用背景网格结点的加速度更新物质点的速度。

其中，应力更新时采用的速度场既可以是动量方程更新前的背景网格速度场，也可以是动量方程更新后的背景网格速度场，即(2)和(3)可以互换。目前，物质点法在进行应力更新时采用的背景网格速度主要有以下三种格式：

- (1) 利用更新前的结点动量 $p_{il}^{n-1/2}$ 来计算结点速度，即

$$v_{il}^{n-1/2} = p_{il}^{n-1/2}/m_I^n = \sum_{p=1}^{n_p} m_p v_{ip}^{n-1/2} N_{Ip}^n / m_I^n \quad (2-88)$$

此格式称为USF(update stress first)格式。

(2) 利用更新后的结点动量 $p_{il}^{n+1/2}$ 来计算结点速度，即 $v_{il}^{n+1/2} = p_{il}^{n+1/2}/m_l^n$ ，此格式称为USL(update stress last)格式。

(3) 将更新后的物质点动量 $p_{ip}^{n+1/2}$ 映射到背景网格上，利用再次计算的背景网格结点速度，即

$$v_{il}^{n+1/2} = \sum_{p=1}^{n_p} p_{ip}^{n+1/2} N_{lp}^n / m_l^n \quad (2-89)$$

此格式称为MUSL(modified update stress last)格式，是对USL格式的一种改进。它不直接利用更新的结点动量来计算结点速度，而是用将更新的物质点动量映射回背景网格后的结点速度。因此MUSL比USL和USF的计算量大。

Bardenhagen^[133]和Nairn^[147]的研究表明，USL具有较强的数值耗散和不稳定性，而USF和MUSL具有较好的能量守恒性。以第 n 时间步为例，下面仅给出物质点法USF和MUSL两种格式的具体计算流程：

1. 重新定义背景网格

将各物质点的质量和动量映射到背景网格上，计算背景网格结点的质量和动量，有

$$m_l^n = \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{lp}^n \quad (2-90)$$

$$p_{il}^{n-1/2} = \sum_{p=1}^{n_p} m_p v_{ip}^{n-1/2} N_{lp}^n \quad (2-91)$$

2. 施加边界条件

依据具体边界条件，将位于材料边界上的背景网格结点动量进行置零操作。如，对于固定边界条件，令 $p_l^{n-1/2} = 0$ 。

3. 应力和密度更新，该步仅适用于USF格式

(a) 由背景网格结点的速度 $v_{il}^{n-1/2}$ 计算各物质点的变形率张量和旋率张量，有

$$D_{ijp}^{n-1/2} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n_g} (N_{lp,j}^n v_{il}^{n-1/2} + N_{lp,i}^n v_{jl}^{n-1/2}) \quad (2-92)$$

$$\Omega_{ijp}^{n-1/2} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n_g} (N_{lp,j}^n v_{il}^{n-1/2} - N_{lp,i}^n v_{jl}^{n-1/2}) \quad (2-93)$$

(b) 由体积应变增量更新物质点密度，有

$$\rho_p^n = \rho_p^{n-1} / (1 + D_{iip}^{n-1/2} \Delta t^n) \quad (2-94)$$

(c) 利用 $D_{ijp}^{n-1/2}$ 和 $\Omega_{ijp}^{n-1/2}$ 依据具体的本构关系和状态方程更新物质点的偏应力和压力。

4. 计算背景网格结点力并施加边界条件

背景网格结点的结点内力为

$$f_{il}^{\text{int},n} = - \sum_{p=1}^{n_p} \frac{m_p}{\rho_p} \sigma_{ijp} N_{Ip,j}^n \quad (2-95)$$

背景网格结点的结点外力为

$$f_{il}^{\text{ext},n} = \sum_{p=1}^{n_p} m_p f_{ip}^n N_{Ip}^n + \sum_{p=1}^{n_p} \frac{m_p}{\rho_p} \bar{t}_{ip}^n h^{-1} N_{Ip}^n \quad (2-96)$$

对于USF格式，此处的 $\sigma_{ijp} = \sigma_{ijp}^n$, $\rho_p = \rho_p^n$ ，为第3步计算结果；对于MUSL格式， σ_{ijp} , ρ_p 为上一个时间步中的计算结果。再次施加边界条件，如对于固定边界条件，则相应结点力应置零。

5. 积分动量方程

在背景网格上对所有结点遍历循环，更新结点动量，有

$$p_{il}^{n+1/2} = p_{il}^{n-1/2} + (f_{il}^{\text{ext},n} + f_{il}^{\text{int},n}) \Delta t^n \quad (2-97)$$

6. 更新物质点

分别利用背景网格结点速度场和加速度场更新物质点的位置和速度，有

$$x_{ip}^{n+1} = x_{ip}^n + \sum_{l=1}^{n_g} N_{Ip}^n \frac{p_{il}^{n+1/2}}{m_l^n} \Delta t^{n+1/2} \quad (2-98)$$

$$v_{ip}^{n+1/2} = v_{ip}^{n-1/2} + \sum_{l=1}^{n_g} N_{Ip}^n \frac{f_{il}^n}{m_l^n} \Delta t^n \quad (2-99)$$

7. 应力和密度更新，该步仅适用于MUSL格式

(a) 利用更新后的物质点速度重新计算背景网格的结点速度

$$v_{il}^{n+1/2} = \sum_{p=1}^{n_p} p_{ip}^{n+1/2} N_{Ip}^n / m_l^n \quad (2-100)$$

(b) 由背景网格结点的速度 $v_{il}^{n+1/2}$ 计算各物质点的变形率张量和旋率张量，有

$$D_{ijp}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n_g} (N_{Ip,j}^n v_{il}^{n+1/2} + N_{Ip,i}^n v_{jl}^{n+1/2}) \quad (2-101)$$

$$\Omega_{ijp}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n_g} (N_{Ip,j}^n v_{il}^{n+1/2} - N_{Ip,i}^n v_{jl}^{n+1/2}) \quad (2-102)$$

(c) 由体积应变增量更新物质点密度, 有

$$\rho_p^{n+1} = \rho_p^n / (1 + D_{iip}^{n+1/2} \Delta t) \quad (2-103)$$

(d) 利用 $D_{ijp}^{n+1/2}$ 和 $\Omega_{ijp}^{n+1/2}$ 依据具体的本构关系和状态方程更新物质点的偏应力和压力。

8. 至此物体的所有物质信息均已存储在物质点上, 因此可以丢弃已经变形的背景网格, 并在一下个时间步中采用新的规则背景网格。

以三维问题为例, 如果采用六面体单元的形函数, 在上式中 $n_g = 8$; 如果采用第二类形函数, 则 $n_g = 8 \sim 27$, 具体值依据其影响范围确定。

2.8 MPM与FEM的比较

由第2.7节可知, 在单步计算内物质点法的计算过程类似于显式有限元法。下面分别从计算效率和计算精度对物质点法和有限元法进行比较, 其中有限元法是指采用显式积分的有限元法。

2.8.1 计算精度

MPM和FEM均采用中心差分法积分动量方程, 用网格离散材料区域。当背景网格结点间距和单元尺寸一致时, 两者在精度上的差异取决于采用的积分方案和对材料大变形的处理方式。MPM和FEM均采用多项式近似函数, 但FEM采用高斯积分可以保证积分精度, 而MPM采用的是物质点积分。因此, MPM的积分方案精度低于FEM的高斯积分。但是, 在处理材料大变形时, FEM存在网格畸变问题。一旦单元发生畸变, 网格的Jacobian矩阵的行列式值趋近于零, 导致计算精度显著下降。此时, FEM的精度将低于MPM, 并且网格畸变到一定程度将导致FEM计算意外终止。为解决该问题, FEM采用侵蚀算法, 即将变形较大的单元删除。但是, 删除单元将导致系统的质量不守恒, 同时也对压力计算带来扰动。另外一种解决方法为网格重划分, 但网格重划分需要对历史变量重分配将导致历史信息的丢失, 同时计算代价很大。因此, 对于小变形问题, MPM的计算精度不如FEM; 对于涉及材料特大变形的问题, MPM的精度高于FEM。

2.8.2 计算效率

算法的计算效率取决于单步内的计算量和时间步长。图2.6比较了MPM和FEM的计算流程。对比图2.6可知, MPM的USF格式比FEM多两个计

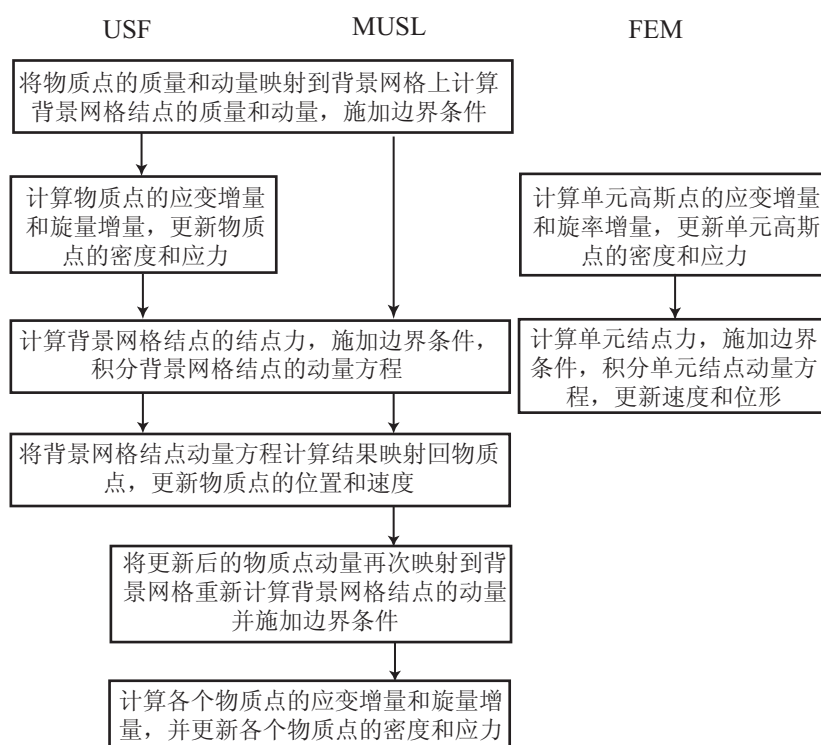


图 2.6 MPM与FEM显式积分算法流程图的比较

算步骤，即将物质点信息映射到背景网格上和将背景网格结点信息映射回物质点两步，而MPM的MUSL计算格式则多三个计算步骤。此外，物质点法采用物质点积分，平均每个背景网格内具有4个(二维问题)或者8个(三维问题)物质点，而FEM采用单元高斯积分。由于在应力更新和结点力计算时涉及到对物质点和高斯点操作，MPM在这两个计算步内的计算量大于FEM。因此，在单个时间步内，MPM的计算量远大于FEM，效率低于FEM。

MPM和FEM均采用中心差分法，时间步长取决于单元的特征长度和材料声速。物质点法的特征长度为背景网格结点间距，在计算过程中不会改变；而FEM的单元特征长度随着单元的变形发生改变，通常是变小。在声速计算上，两者没有差异。因此，如果MPM的背景网格结点间距等于FEM中单元的初始特征长度，则在计算过程中，FEM的时间步长将小于MPM，总的计算步数多于MPM。在小变形问题中，FEM的单元特征长度的变化不会导致时间步长过小，且FEM的单步计算量小于MPM，因此FEM的整体计算效率将高于MPM；在涉及材料特大变形的问题中，FEM单元特征长度急剧减少，将导致时间步长过小，大幅度地增加计算步数，因此FEM整体计算效率低于MPM。

综上，在计算小变形问题时，MPM的计算效率和精度不如FEM，但在计算涉及材料特大变形问题时，MPM的计算效率和精度高于FEM。此外，物质点法

的USF计算格式与FEM的计算流程相似。

2.9 爆轰驱动飞片的物质点法研究

爆轰驱动飞片是测量炸药做功能力常用的实验方法，也是获得高速物体常用的加载方式。在预测飞片终态速度的方法中，Gurney公式是最简单和应用最广泛的工程经验公式。Gurney^[180]通过实验测量，指出飞片的速度取决于飞片(M)和炸药(C)之间的质量比。假设炸药的化学能全部转化为爆轰产物与飞片的动能，Gurney基于动量守恒和能量守恒得到了飞片速度的估计式。Roth^[181]通过系统的调查，认为简单的Gurney理论与更加复杂的理论同样可靠，不过其局限性在于不能处理到达终态前以及 M/C 趋于零时的情形。此外，爆轰驱动飞片过程涉及到爆轰波、冲击波、爆轰产物膨胀及其与飞片之间的相互作用等问题，一般仅能得到其一维的几何结构和解析解。对于板形装药来说，基于一维假设的Gurney公式预测值将偏高。为此，本文基于物质点法研究了开口非对称板型装药和对称板型装药加速飞片的过程，并基于MPM的计算结果提出了对称板型装药结构的Gurney公式修正方案。在本问题中，炸药采用TNT，飞片采用金属钢，模拟时间设置足够长以保证加速充分。

2.9.1 材料模型

为模拟TNT炸药爆轰过程，本文基于CJ理论采用JWL(Jones-Wilkins-Lee)状态方程^[182]描述爆轰产物。JWL状态方程是一种不显含化学反应的经验状态方程，可较好地描述爆轰产物膨胀做功的过程，压力表达式为

$$p = A(1 - \frac{\omega}{R_1 V})e^{-R_1 V} + B(1 - \frac{\omega}{R_2 V})e^{-R_2 V} + \frac{\omega E}{V} \quad (2-104)$$

其中， A , B , R_1 , R_2 和 ω 是炸药的材料参数，由实验确定。 $V = v/v_0$ 是相对体积， $E = \rho_0 e$ 是初始单位体积的内能。在数值模拟中，该状态方程结合空材料模型可模拟炸药的爆轰过程。TNT炸药的密度为 $\rho = 1.63 \times 10^{-3} \text{g/mm}^3$ ，爆轰速度为 $D = 6930 \text{m/s}$ ，Gurney特征速度为 $\sqrt{2E} = 2370 \text{m/s}$ ，JWL状态方程的材料参数列于表2.1。

表 2.1 TNT炸药JWL状态方程材料参数

$A(\text{MPa})$	$B(\text{MPa})$	R_1	R_2	ω	$E_0(\text{mJ/mm}^3)$
371200	3210	4.15	0.95	3	6.993

表 2.2 飞片Johnson-Cook模型材料参数

$\rho(\text{g/mm}^3)$	$E(\text{MPa})$	ν	$A(\text{MPa})$	$B(\text{MPa})$	n
0.0078	200000	0.3	300	200	0.5

本文采用Johnson-Cook 材料模型^[183]计算飞片在爆炸载荷下的应变率强化效应。在Johnson-Cook模型中，材料的动态屈服应力为

$$\sigma_y = (A + B\varepsilon^p)(1 + C \ln \dot{\varepsilon}^*)(1 - T^{*m}) \quad (2-105)$$

其中， A ， B ， n 和 m 是材料参数， ε^p 表示等效塑性应变， $\dot{\varepsilon}^* = \dot{\varepsilon}^p / \dot{\varepsilon}_0$ 表示无量纲的塑性应变率，且 $\dot{\varepsilon}_0 = 1\text{s}^{-1}$ 。 $T^* = (T - T_{\text{room}}) / (T_{\text{melt}} - T_{\text{room}})$ 为无量纲温度， T_{melt} 表示材料的融化温度， T_{room} 表示室温。由于爆轰过程极短，此处采用简化形式的Johnson-Cook模型，通过令式(2-105)中 $m=0$ ，得

$$\sigma_y = (A + B\varepsilon^p)(1 + C \ln \dot{\varepsilon}^*) \quad (2-106)$$

飞片材料参数见表2.2。

2.9.2 开口非对称板型装药

开口非对称板型装药结构如图2.7所示。其中，左侧为TNT炸药，右侧为飞片。两者具有相同的横向尺寸 w ，各自厚度分别为 e_M 和 e_E 。针对该类构型，预测飞片终态速度的Gurney公式^[184]为

$$v = \sqrt{2E} \left[\frac{3}{1 + 5(M/C) + 4(M/C)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2-107)$$

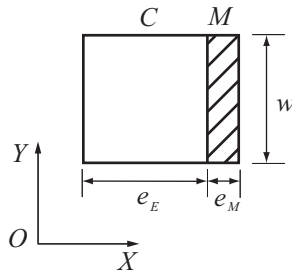


图 2.7 开口非对称板型装药结构示意图

2.9.2.1 一维模型

首先采用一维离散模型计算该类装药构型下飞片的速度,如图2.8所示,固定TNT炸药的厚度为 $e_E=20\text{mm}$ 。背景网格仅采用一排单元,质点则布置在背景网格X向的中心线上。背景网格除其左侧和右侧为自由边界条件外,其余边界条件均设为对称边界条件。在炸药左侧定义点起爆,起爆时间为0时。

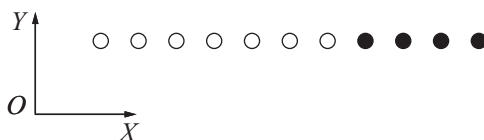


图 2.8 一维离散模型: 空心点表示离散炸药的物质点, 实心点表示离散飞片的物质点

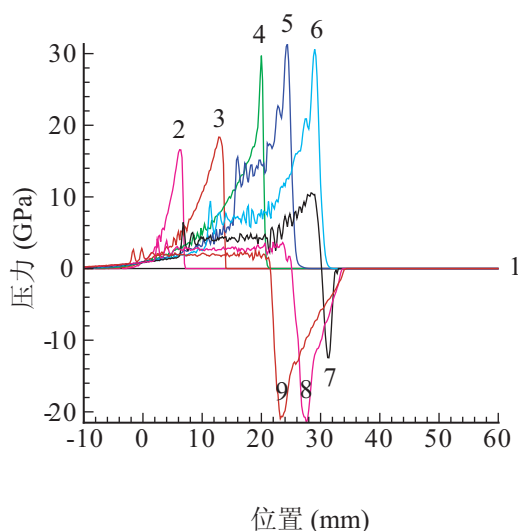
给定飞片厚度为 $e_M=12\text{mm}$, 采用不同的背景网格结点间距进行收敛性分析。表2.3给出了各种离散间距下飞片速度MPM的计算结果。对比表2.3可知, 随着背景网格和物质点的加密, 飞片速度的计算结果收敛于Gurney公式预测值($M/C=2.8712$)。

表 2.3 飞片终态速度数值解收敛性分析

	工况1	工况2	工况3	工况4	工况5	Gurney值
物质点间距 (mm)	0.8	0.4	0.2	0.1	0.04	-
背景网格结点间距 (mm)	4	2	1	0.5	0.2	-
V(mm/ms)	575	581	589	592	592	590.5

此外, 依据工况5的计算结果, 图2.9给出了 $0 \sim 8\mu\text{s}$ 内以 $1\mu\text{s}$ 为时间间隔的压力曲线。由爆轰速度可知, TNT炸药的爆燃过程在 $2.886\mu\text{s}$ 完成。因此, 在爆燃完成前(曲线2和3), 爆轰波的压力峰值趋近于C-J压力 $1.957 \times 10^4 \text{MPa}$ [36]。在爆轰产物与飞片的接触界面处, 产生透射波(进入飞片)和反射波。对比图2.9可知, 飞片区域内的透射波(第4、5和6条曲线)峰值大于入射波, 这是由于钢的波阻抗大于爆轰产物的波阻抗(透射系数大于1)所致。随后, 由自由面反射回的拉伸波削弱了爆轰产物内的压缩波。

固定TNT炸药的厚度, 改变飞片的厚度, 采用物质点法计算飞片速度随质量比变化的曲线。在计算中, 背景网格结点间距取为 0.5mm , 质点间距取为 0.1mm 。图2.10比较了飞片速度MPM的计算结果与Gurney公式的预测值, 整体结果吻合。但当 M/C 较小时, Gurney公式的预测值偏低, 这是由于Gurney模型过于简化所致。Aziz等[185]假设飞片为刚体, 采用理想气体状态方程描述爆轰产

图 2.9 在爆轰驱动飞片过程中沿着 x 向的压力曲线

物，推导了该类构型下飞片速度的解析解，有

$$\frac{V}{D} = 1 - \frac{27M}{16C} \left[\left(1 + \frac{32C}{27M} \right)^{1/2} - 1 \right] \quad (2-108)$$

该解析式可以描述 M/C 趋于零时的情形。因此，图2.10比较了式(2-108)的解与MPM的计算结果，表明MPM可以很好地预测开口非对称板型装药一维问题中飞片的速度。

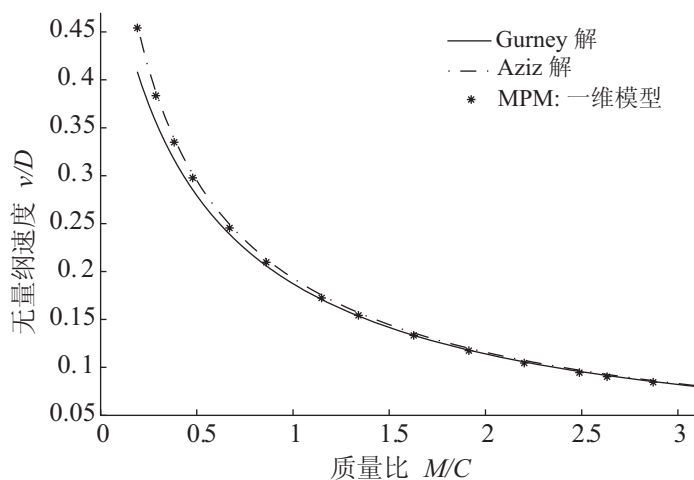


图 2.10 开口非对称板型装药一维问题飞片无量纲终态速度曲线

2.9.2.2 二维模型

为了研究横向效应^[186]的影响，此处考虑开口非对称板型装药的二维问题。在该问题中，炸药和飞片在横向为有限尺寸，固定炸药和飞片横向尺寸

为20mm，炸药厚度为10mm，而飞片的厚度依据质量比确定。考虑到对称性，建立1/2离散模型，如图2.11所示。同时采用一层背景网格，背景网格结点间距为0.5mm，质点间距为0.1mm，各物质点均位于背景网格Z向的中心面上。其中，离散炸药的质点数为10000个，离散飞片的质点数依据不同质量比而不同，范围为400~3400。在背景网格X向两侧及Y向上侧设置自由边界条件，其它边界设置对称边界条件。在炸药左侧定义线起爆，起爆时间为0时。

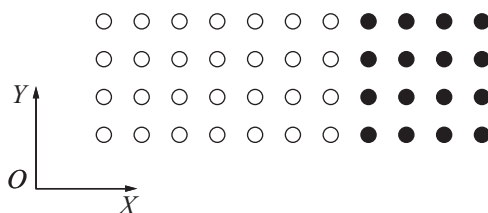


图 2.11 二维离散模型：空心点表示离散炸药的物质点，实心点表示离散飞片的物质点

图2.12给出了不同质量比下的飞片速度的MPM计算结果和Gurney公式预测结果。对比图2.12可知，在 M/C 值较小时，两者吻合；当 M/C 较大时，两者相差较大。这是因为在炸药爆燃过程中，爆轰波在横向的自由面不断产生稀疏波(即拉伸波)抵消了爆轰产物中持续做功的压缩波，此即横向效应。当 M/C 比值较大时，炸药加速飞片的时间越长，横向效应越明显，必须予以考虑^[186]。这时炸药的化学能已不能完全转化为飞片和爆轰产物的动能，因此Gurney公式的预测值偏高。Kennedy^[187]推荐采用如图2.13所示的方法，将炸药的横向效应从 C 中扣除，以此对Gurney公式进行修正。由图2.12可知，MPM计算结果与修正后的Gurney公式预测值吻合，说明 Kennedy修正可以很好地引入非对称板型装药横向效应的影响。

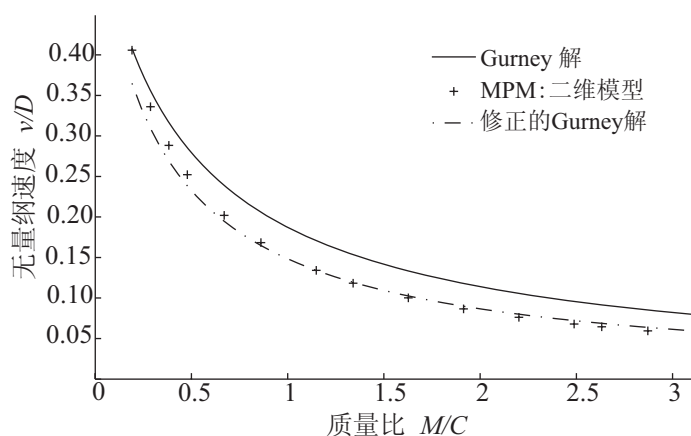


图 2.12 开口非对称板型装药二维问题飞片无量纲终态速度曲线

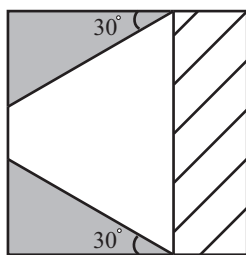


图 2.13 炸药压力的侧向飞散使得炸药侧面质量要扣除的示意图，不计算阴影部分的炸药质量

2.9.3 对称板型装药

对于开口非对称板型装药，MPM的一维计算结果与Gurney公式吻合，二维计算结果与修正后的Gurney公式吻合。此处，研究金属-炸药-金属装置的对称板型装药下驱动飞片的过程，如图2.14所示。该类构形下，预测飞片终态速度的Gurney公式^[184]为

$$v = \sqrt{2E}(M/C + 1/2)^{-\frac{1}{2}} \quad (2-109)$$

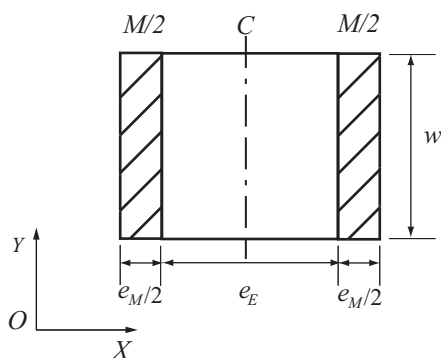


图 2.14 对称板型装药结构示意图

2.9.3.1 一维模型

首先采用一维离散模型计算该类装药构型下飞片的速度。考虑到对称性，建立1/2离散模型，如图2.8所示。固定TNT炸药厚度为20mm，改变飞片厚度以计算飞片速度随质量比变化的曲线。在计算中，背景网格结点间距取为0.5mm，质点间距取为0.1mm，离散炸药的物质点数为200个，离散飞片的物质点数范围为8 ~ 68。在背景网格左侧设置对称边界条件，其它同一维开口非对称板型装药中的设置。在炸药左侧定义点起爆，起爆时间为0时。

图2.15给出了飞片速度的MPM计算结果和Gurney公式预测值。对比图2.15可知，MPM计算结果与Gurney预测值在整体上吻合。

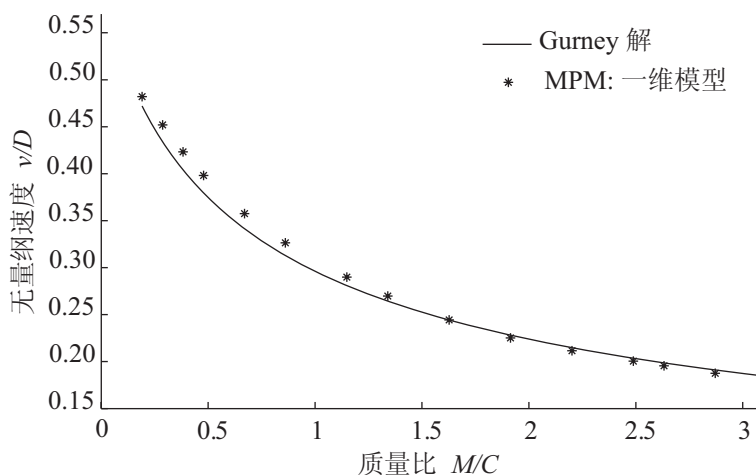


图 2.15 对称板型装药一维问题飞片无量纲终态速度曲线

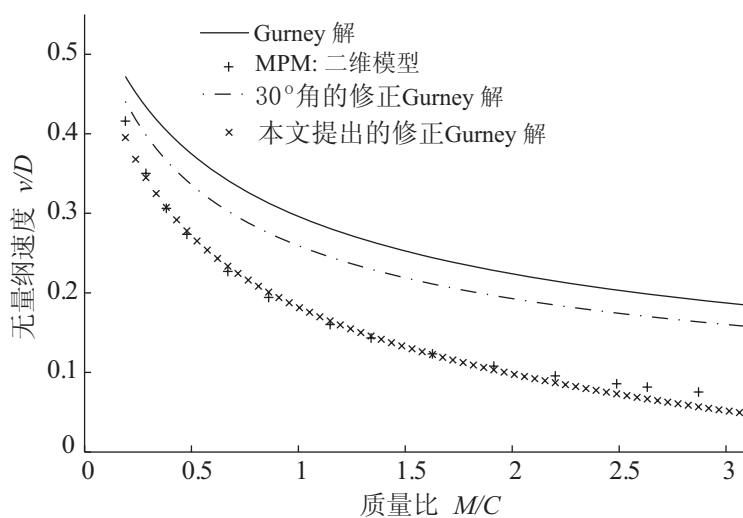


图 2.16 对称板型装药二维问题飞片无量纲终态速度曲线

2.9.3.2 二维模型

采用二维离散模型分析横向效应的影响。考虑到对称性，建立1/4模型，如图2.11所示。此处，固定TNT炸药和飞片的横向尺寸为20mm，TNT炸药的厚度为10mm，改变飞片的厚度以计算飞片速度随质量比变化的曲线。背景网格、质点位置设置均同开口非对称板型装药的二维离散模型，背景网格的左侧设置为对称边界条件。此处采用线起爆，起爆时间为0时。

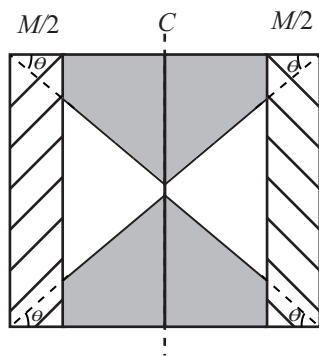


图 2.17 炸药压力的侧向飞散使得炸药侧面质量要扣除的示意图，不计算阴影部分的炸药质量

图2.16给出了飞片速度的MPM计算结果与Gurney公式预测值。对比图2.16可知，横向效应影响很明显。因此，依据图2.13中 30° 角的质量扣除方式对式(2-109)进行修正。图2.16比较了修正后的Gurney预测值和MPM的计算结果，表明该方式并未充分考虑对称板型装药构形中的横向效应影响。为此，从质量扣除的思路，我们提出了如图2.17所示的质量扣除方式，改变初始位置并提高扣除角度到 45° ，修正后的Gurney预测值与MPM计算结果吻合较好，见图2.16。

2.10 小结

本章详细阐述了物质点法的基本理论和具体实现步骤，并将其与有限元法进行了对比，表明物质点法在求解小变形物体时的精度和效率不如有限元法，但在求解涉及材料特大变形问题时的计算精度和效率高于有限元法。最后，基于物质点法开展了爆轰驱动飞片的应用研究，模拟了板型装药下爆轰驱动飞片的过程，飞片速度MPM计算结果与经验公式和解析解吻合，并针对对称板型装药二维问题中Gurney公式预测值偏高的缺点提出了一种简单有效的修正方案。

第3章 杂交物质点有限元法

钢筋混凝土是一类重要的建筑材料，在民用建筑和军事防护工程中有着广泛应用。目前，针对钢筋混凝土结构开展了大量数值模拟工作^[188-194]，采用的方法以有限元法和欧拉算法为主，离散模型以等效模型为主^[190,191,194,195]。在冲击爆炸载荷作用下，钢筋混凝土结构将涉及材料的大变形和破碎，如图3.1所示。采用有限元法将遇到网格畸变问题，而欧拉法并非模拟固体力学问题的最佳方法。因此，本文采用物质点无网格法模拟此类问题。

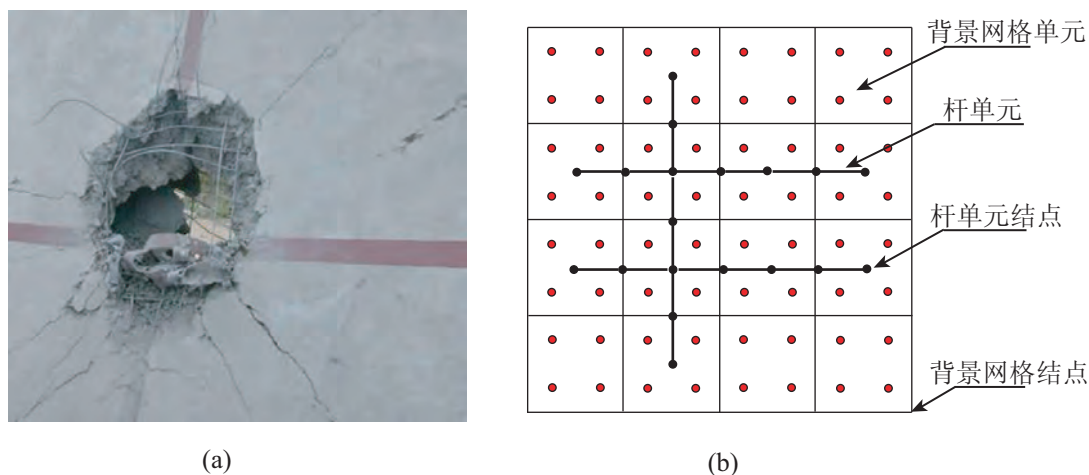


图 3.1 (a) 弹体侵彻后的钢筋混凝土靶体, (b) 杂交物质点有限元法示意图

为了考虑钢筋在混凝土中的承载作用，需分别建立钢筋和混凝土的离散模型。如图3.1(a)所示，钢筋直径的尺寸与混凝土结构尺寸相差悬殊。如果采用等间距的物质点离散钢筋和混凝土将导致离散模型规模过于庞大，计算耗时。考虑到钢筋在混凝土中以承受拉伸载荷为主，本文将FEM中杆单元引入物质点法，在物质点法中构造了一种离散钢筋的杆单元，提出了杂交物质点有限元法(Hybrid Finite Element Material Point Method, 简称为HFEMP)。如图3.1(b)所示，HFEMP采用物质点离散混凝土，用杆单元离散钢筋，避免了在钢筋直径方向上的离散，降低了计算规模，而钢筋与混凝土的相互作用则通过物质点法的背景网格实现。

3.1 杂交物质点有限元法

本算法主要包括物质点法和构造的杆单元法两部分。其中，杆单元的应力更新通过单元两端结点计算，而单元结点的动量方程同物质点一起在背景网格上计

算。因此，杆单元的动量方程求解格式及能量积分与物质点法相同，在此不再推导，可参考第2章相关内容。

3.1.1 物质点法

在本文中，采用物质点离散混凝土。为方便与构造的杆单元计算格式对比，此处列出物质点法求解 $t^{n+1/2}$ 和 t^{n+1} 时刻物理量的公式。以三维问题为例，背景网格形函数采用有限元六面体单元形函数，并采用MPM的USF计算格式。

$t^{n-1/2}$ 时刻物质点 p 的变形率张量和旋率张量分别为

$$D_{ijp}^{n-1/2} = \varepsilon_{ijp}^{n-1/2} = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^8 [N_{Ip,j}^n v_{il}^{n-1/2} + N_{Ip,i}^n v_{jl}^{n-1/2}], \quad (3-1)$$

$$\Omega_{ijp}^{n-1/2} = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^8 [N_{Ip,j}^n v_{il}^{n-1/2} - N_{Ip,i}^n v_{jl}^{n-1/2}], \quad (3-2)$$

其中 $v_{il}^{n-1/2} = p_{il}^{n-1/2}/m_I^n$ 表示背景网格结点 I 的速度。柯西应力计算格式为

$$\sigma_{ijp}^n = \sigma_{ijp}^{n-1} + \dot{\sigma}_{ijp}^{n-1/2} \Delta t^n \quad (3-3)$$

$\dot{\sigma}_{ij}$ 表示柯西应力率，由焦曼应力率 σ_{ij}^∇ 依据相应的本构方程和状态方程计算，有

$$\dot{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^\nabla + \sigma_{ik} \Omega_{jk} + \sigma_{jk} \Omega_{ik} \quad (3-4)$$

背景网格结点 I 在 $t^{n+1/2}$ 时刻的动量为

$$p_{il}^{n+1/2} = p_{il}^{n-1/2} + (f_{il}^{n,\text{int}} + f_{il}^{n,\text{ext}}) \Delta t^n \quad (3-5)$$

其中

$$p_{il}^{n-1/2} = \sum_{p=1}^{n_p} m_p v_{ip}^{n-1/2} N_{Ip}^n \quad (3-6)$$

$$f_{il}^{n,\text{int}} = - \sum_{p=1}^{n_p} N_{Ip,j}^n \sigma_{ijp}^n m_p / \rho_p^n \quad (3-7)$$

$$f_{il}^{n,\text{ext}} = \sum_{p=1}^{n_p} N_{Ip}^n \bar{t}_{ip} h^{-1} m_p / \rho_p^n + \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{Ip}^n f_{ip}^n \quad (3-8)$$

物质点 p 在 $t^{n+1/2}$ 时刻的速度和 t^{n+1} 时刻的位置分别为：

$$v_{ip}^{n+1/2} = v_{ip}^{n-1/2} + \Delta t^n \sum_{I=1}^{n_g} f_{il}^n N_{Ip}^n / m_I^n \quad (3-9)$$

$$x_{ip}^{n+1} = x_{ip}^n + \Delta t^{n+1/2} \sum_{l=1}^{n_g} p_{il}^{n+1/2} N_{lp}^n / m_l^n \quad (3-10)$$

3.1.2 杆单元

本文中的杆单元同FEM的杆单元不尽相同，区别是杆单元结点动量方程同物质点一起在背景网格上求解，与物质点法相同；杆单元又与物质点不尽相同，对比第3.1.1节，区别是杆单元的应力更新通过杆长的变化率计算，与FEM的杆单元相同。这也是杂交物质点有限元法名称的由来。除非特殊说明，下文中的杆单元是指本文中构造的杆单元。

如图3.2所示，采用杆单元离散钢筋，用物质点离散混凝土。杆单元结点和物质点在同一背景网格中运动，保证了杆单元和物质点位移场和速度场的一致性。为了体现钢筋在混凝土中的承载作用，在每一个时间步开始时，将杆单元结点和物质点的质量和动量映射到同一背景网格上，在背景网格上求解杆单元结点和物质点的混合动量方程。

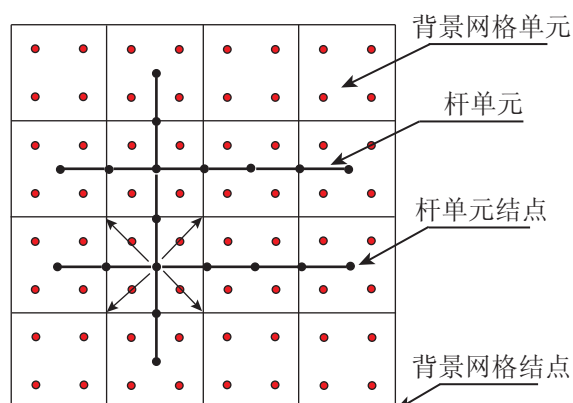


图 3.2 钢筋混凝土离散示意图

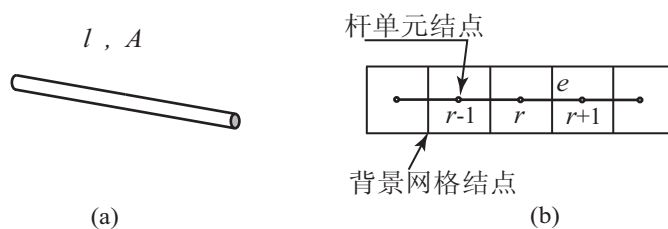


图 3.3 (a) 钢筋，(b) 钢筋的离散模型

为方便起见，以一条钢筋的离散为例介绍杆单元算法。钢筋长 L ，横截面积为 A ，采用4个杆单元离散，如图3.3所示。 t^n 时刻杆单元 e 的应变增量为

$$\Delta \varepsilon_e^n = (l_e^n - l_e^{n-1}) / l_e^{n-1} \quad (3-11)$$

其中 l_e^n 表示杆单元 e 在 t^n 时刻的长度。 t^{n+1} 时刻该单元的应力 σ_e^{n+1} 为

$$\sigma_e^{n+1} = \sigma_e^n + \Delta\sigma_e^n \quad (3-12)$$

其中 $\Delta\sigma_e^n$ 表示杆单元的应力增量，可通过相应的本构模型由单元的应变增量 $\Delta\epsilon_e^n$ 计算得到。由应力 σ_e 可得单元的轴力，有

$$F_e = A\sigma_e \quad (3-13)$$

注意，此时的应变增量、应力和轴力计算均是在杆长方向上计算。该方向在全局坐标系下的方向余弦为 $\cos\theta_{ie}$ ，有

$$\cos\theta_{ie} = (x_{i,r+1}^n - x_{i,r}^n)/l_e^n \quad (3-14)$$

由轴力和方向余弦可得杆单元结点 r 的内力在全局坐标系下的表达式，有

$$f_{ir}^{\text{int}} = \sum_{e=1}^{n_e} \Lambda_{re} F_e \cos\theta_{ie} \quad (3-15)$$

在式(3-15)中， $\Lambda_{re} = \pm 1$ ，当结点位于相应单元的起始端时取1，否则取-1。

为实现杆单元结点的动量方程同物质点一起在背景网格上求解，将杆单元结点的质量、动量和结点力通过背景网格形函数映射到背景网格上。因此，背景网格节点 I 各物理量(结点质量 m_I 、结点动量 p_{Ii} 、结点内力 f_{Ii}^{int} 和结点外力 f_{Ii}^{ext})的公式可改写为：

$$m_I = \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{Ip} + \sum_{r=1}^{n_r} m_r N_{Ir} \quad (3-16)$$

$$p_{Ii} = \sum_{p=1}^{n_p} m_p v_{ip} N_{Ip} + \sum_{r=1}^{n_r} m_r v_{ir} N_{Ir} \quad (3-17)$$

$$f_{Ii}^{\text{int}} = - \sum_{p=1}^{n_p} N_{Ip,j} \sigma_{ijp} m_p / \rho_p + \sum_{r=1}^{n_r} N_{Ir} f_{ir}^{\text{int}} \quad (3-18)$$

$$f_{Ii}^{\text{ext}} = \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{Ip} f_{ip} + \sum_{p=1}^{n_p} N_{Ip} \bar{t}_{ip} h^{-1} m_p / \rho_p + \sum_{r=1}^{n_r} m_r N_{Ir} f_{ir}^{\text{ext}} \quad (3-19)$$

其中， n_r 表示杆单元的结点总数， m_r 和 v_{ir} 分别表示杆单元结点 r 的质量和速度， f_{ir}^{ext} 表示杆单元的结点外力。

在背景网格上积分动量方程后，采用背景网格的速度场和加速度场更新杆单元结点 r 的位置和速度，有

$$v_{ir}^{n+1/2} = v_{ir}^{n-1/2} + \Delta t^n \sum_{I=1}^{n_g} f_{Ii}^n N_{Ir}^n / m_I^n \quad (3-20)$$

$$x_{ir}^{n+1} = x_{ir}^n + \Delta t^{n+1/2} \sum_{l=1}^{n_g} p_{il}^{n+1/2} N_{lr}^n / m_l^n \quad (3-21)$$

综上所述，通过引入有限元的杆单元应力更新方式考虑了钢筋的拉伸过程；通过背景网格实现了钢筋与其周围混凝土的相互作用，在式(3-16)~(3-19)中等号右端最后一项均是杆单元对背景网格结点的贡献项。另外，通过引入失效模型，可模拟钢筋的断裂过程，即将满足失效准则的杆单元删除并保留相应的杆单元结点。对于不与任何单元相连的杆单元结点，通过背景网格的速度场和加速度场分别更新其位置和速度，以考虑其惯性效应。

3.1.3 背景网格结点间距的影响分析

由第3.1.2节可知，在杂交物质点有限元法中有两种离散尺寸，背景网格结点间距和杆单元尺寸。假定杆单元尺寸不变，不同的背景网格结点间距设置对杆单元计算结果有影响。下面以一条钢筋的离散给出分析。

如图3.4所示，一条钢筋用一组杆单元离散。杆单元编号为 e_r ，杆单元结点编号为 r 。对于结点 r 来讲，通过杆单元 e_r 计算的轴力为 F_r ，方向如图3.4所示，通过杆单元 e_{r-1} 计算的轴力为 F_{r-1} 。此处，考虑两种典型的背景网格结点间距，编号为工况1和工况2，且杆单元位于背景网格的中心线上，如图3.4所示。为了定量分析背景网格结点间距导致的影响，考查杆单元结点 r 通过背景网格求解的加速度 a_r 。因此，首先将杆单元结点 r 的质量和轴力映射到其所影响的背景网格结点1、2、3和4上，然后将背景网格结点1、2、3和4的加速度映射回杆单元结点 r 即可。

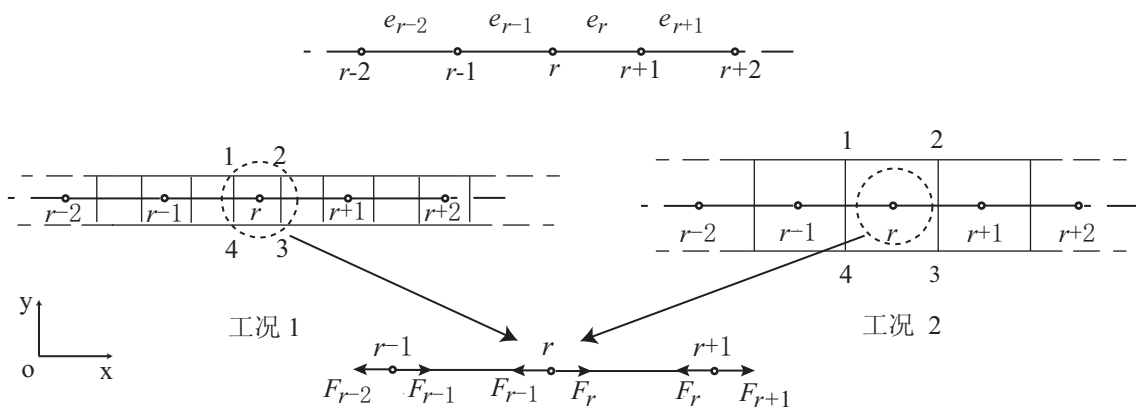


图 3.4 背景网格结点间距对杆单元计算结果的影响分析

3.1.3.1 工况1

在工况1中,背景网格结点间距为杆单元尺寸的1/2。因此,背景网格的每个结点最多仅受1个杆单元结点的影响。背景网格结点1、2、3和4的结点力为:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_4 = N_{1r}(F_r - F_{r-1}) \\ f_2 &= f_3 = N_{2r}(F_r - F_{r-1}) \end{aligned} \quad (3-22)$$

结点质量为:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_4 = N_{1r}m_r \\ m_2 &= m_3 = N_{2r}m_r \end{aligned} \quad (3-23)$$

其中, m_r 表示杆单元结点 r 的集中质量, N_{Ir} 表示背景网格结点 I 的形函数在杆单元结点 r 处的值。

杆单元结点 r 的加速度为

$$a_r = \sum_{I=1}^4 N_{Ir}f_I/m_I = (F_r - F_{r-1})/m_r \quad (3-24)$$

式(3-24)等价于FEM的杆单元计算结果。因此,如果每个背景网格结点最多受一个杆单元结点影响,则杆单元的计算结果等价于FEM的杆单元。

3.1.3.2 工况2

在工况2中,背景网格结点间距与杆单元尺寸相等。因此,背景网格每个结点至少受2个杆单元结点的影响。背景网格结点1、2、3和4的结点力为:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_4 = N_{1n}(F_n - F_{n-1}) + N_{1(n-1)}(F_{n-1} - F_{n-2}) \\ f_2 &= f_3 = N_{2n}(F_n - F_{n-1}) + N_{2(n+1)}(F_{n+1} - F_n) \end{aligned} \quad (3-25)$$

结点质量为:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_4 = N_{1n}m_n + N_{1(n-1)}m_{n-1} \\ m_2 &= m_3 = N_{2n}m_n + N_{2(n+1)}m_{n+1} \end{aligned} \quad (3-26)$$

通过对比式(3-25、3-26)和式(3-22、3-23)可知,工况2中杆单元不完全等价于FEM的杆单元。由于同一个背景网格结点受到两个杆单元结点的影响,平均了相应的物理量,等价于引入了一种阻尼机制,见第3.3节。

综上,对比工况1和工况2可知,杆单元尺寸与背景网格结点间距的相对比值影响杆单元的计算结果。当该比值大于等于2时,杆单元完全等价于FEM的杆单

元；当比值小于2时，杆单元等价于在FEM的杆单元基础上引入了一种阻尼，该阻尼有益于求解涉及冲击波的问题。

3.2 算法实现

程序中实现了针对杆单元的本构方程，包括线弹性、弹塑性模型等。下面给出单步内的计算流程，与物质点法大致相同。

1. 重新定义背景网格

将各物质点和杆单元结点的质量和动量映射到背景网格上，即分别由式(3-16)和(3-17)计算背景网格结点 I 的质量 m_I^n 和动量 $p_{II}^{n-1/2}$ 。

2. 施加边界条件

对位于材料边界上的背景网格结点，依据相应的边界条件调整其动量。

3. 应力和密度更新

- (a) 对所有的物质点进行遍历循环，分别由式(3-1)和(3-2)计算物质点的应变率和旋率张量，密度采用下式更新

$$\rho_p^n = \rho_p^{n-1} / (1 + \Delta \varepsilon_{ii}^{n-1/2}) \quad (3-27)$$

通过式(3-3)依据具体的本构模型和状态方程更新物质点的应力；

- (b) 对所有的杆单元进行遍历循环，由式((3-11))计算应变增量 $\Delta \varepsilon_e^n$ ，密度采用下式更新

$$\rho_e^{n+1} = \rho_e^n / (1 + \Delta \varepsilon_e^n) \quad (3-28)$$

通过式(3-12)更新杆单元的应力(此时的应力仍是在杆单元的随体系上计算)。

4. 计算背景网格的结点力

- (a) 采用式(3-13)计算杆单元轴力，进而通过式(3-15)计算杆单元结点力；
 (b) 分别通过式(3-18)和(3-19)计算背景网格的结点内力和结点外力；
 (c) 对位于材料边界上的背景网格结点遍历循环，依据具体的边界条件重置其结点力。

5. 对所有的背景网格结点遍历循环，依据式(3-5)计算动量方程。

6. 更新各物质点和杆单元结点：

分别通过式(3-9) 和(3-10)更新质点的位置和速度，杆单元结点的更新方式与物质点相同。

7. 丢弃已经变形的背景网格，并重新定义规则的背景网格用于下一步计算。

3.3 算法验证

3.3.1 杆拉伸问题

为了考查本文提出的HFEMP法计算精度，考虑一端固定另一端受拉伸载荷的弹性杆动力响应问题，如图3.5(a)所示。其中，弹性杆的初始长度为 $L=0.4\text{m}$ ，初始横截面积为 $A=0.785\text{m}^2$ ，拉力 $F=10000\text{N}$ 。杆材料的各项参数为 $\rho=8.9 \times 10^3\text{kg/m}^3$ ， $E=1.17 \times 10^{11}\text{Pa}$ 。

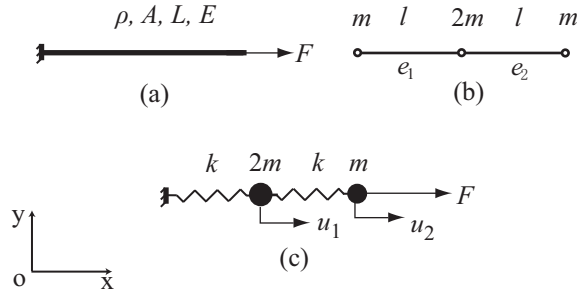


图 3.5 (a) 物理模型, (b) 离散模型, (c) 等效模型

采用2个杆单元离散，如图3.5(b)所示。其中， $l=L/2$ ， $m=\rho AL/4$ 。由于仅考虑轴向的拉伸压缩，该离散模型等价于一弹簧质量系统，如图3.5(c)所示，其中 $k=EA/l$ 。由哈密顿原理可建立该系统的运动方程，通过振型叠加法可求得该问题的位移响应解析解，有

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\sqrt{2}F}{4m} \{ [1 - \cos(\omega_1 t)]/\omega_1^2 - [1 - \cos(\omega_2 t)]/\omega_2^2 \} \\ u_2 &= \frac{F}{2m} \{ [1 - \cos(\omega_1 t)]/\omega_1^2 - [1 - \cos(\omega_2 t)]/\omega_2^2 \} \end{aligned} \quad (3-29)$$

其中 $\omega_1 = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})k}{2m}}$ ， $\omega_2 = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})k}{2m}}$ 。因此，两单元的轴力变化解析解为：

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{u_1}{l} EA \\ F_2 &= \frac{u_2 - u_1}{l} EA \end{aligned} \quad (3-30)$$

本算例分别考虑背景网格结点间距为0.1m和0.2m两种工况，如图3.6所示。在两种工况中，仅在 z 方向上布置一层背景网格，杆单元沿着背景网格中心线布置，并固定单元 e_1 的左端结点。

图3.7给出了工况1中两个杆单元轴力的时程曲线。由第3.1.3节中的讨论可知，工况1中杆单元等价于FEM的杆单元，没有阻尼。对比图3.7可知，两单元的轴力数值解与弹簧质量系统解析解吻合。

图3.8比较了工况2中杆单元的轴力数值解和解析解。对比图3.8可知，轴力数值解逐渐衰减到稳态解 F 。由第3.1.3节中的分析可知，这是由于背景网格结点受

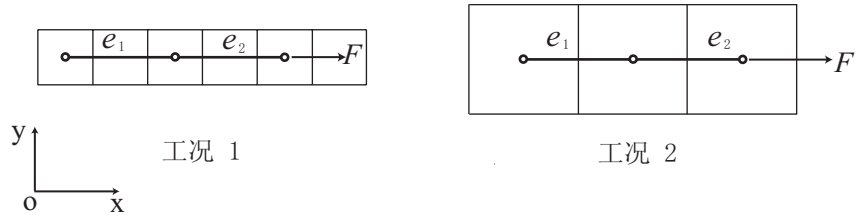


图 3.6 各工况的背景网格设置

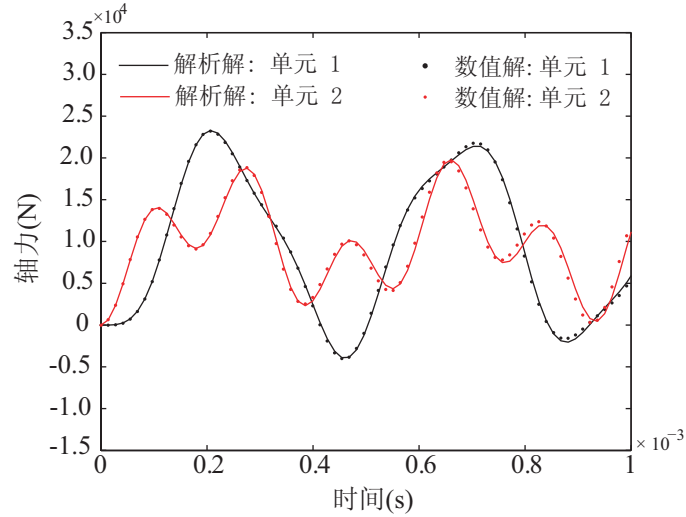


图 3.7 工况1中的各单元轴力时程曲线

到至少2个杆单元结点影响而引入的阻尼所致。

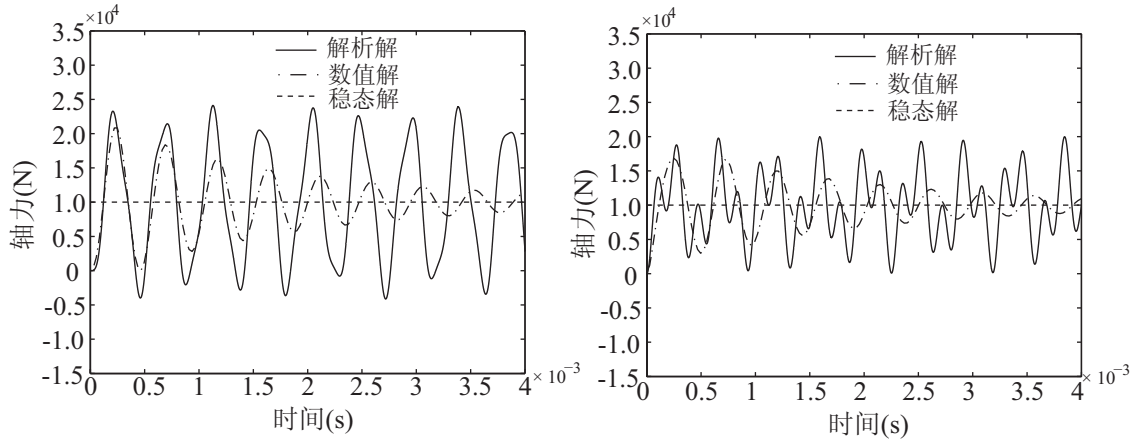


图 3.8 工况2中各单元轴力时程曲线：左图为杆单元1，右图为杆单元2

3.3.2 单摆问题

进一步采用重力作用下单摆问题考查该算法的精度。此处，采用无量纲参数。质量为 $m=3.3$ 的摆球上端连接在墙壁上的球铰上。单摆的摆长为 $L=0.73$ ，初

始倾角为 $\theta_0=19.8^\circ$ ，如图3.9所示。为了采用杆单元离散求解，假定单摆的横截面积为 $A=0.01$ ，摆材料的参数为 $\rho=1.0$ ， $E=10^6$ 。

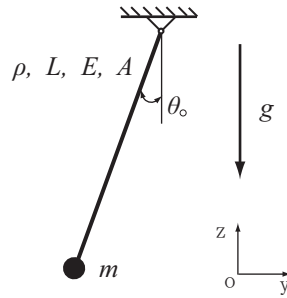


图 3.9 单摆的力学模型

在计算中，考虑了不同杆单元尺寸与背景网格结点间距的离散模型，共分四种，如图3.10所示，其中仅给出杆单元结点。在离散模型(a)和(b)中，杆单元尺寸均为0.2433，背景网格结点间距则分别为0.2和0.1；在离散模型(c)和(d)中，杆单元尺寸均为0.104286，背景网格结点间距则分别为 0.1和0.05。

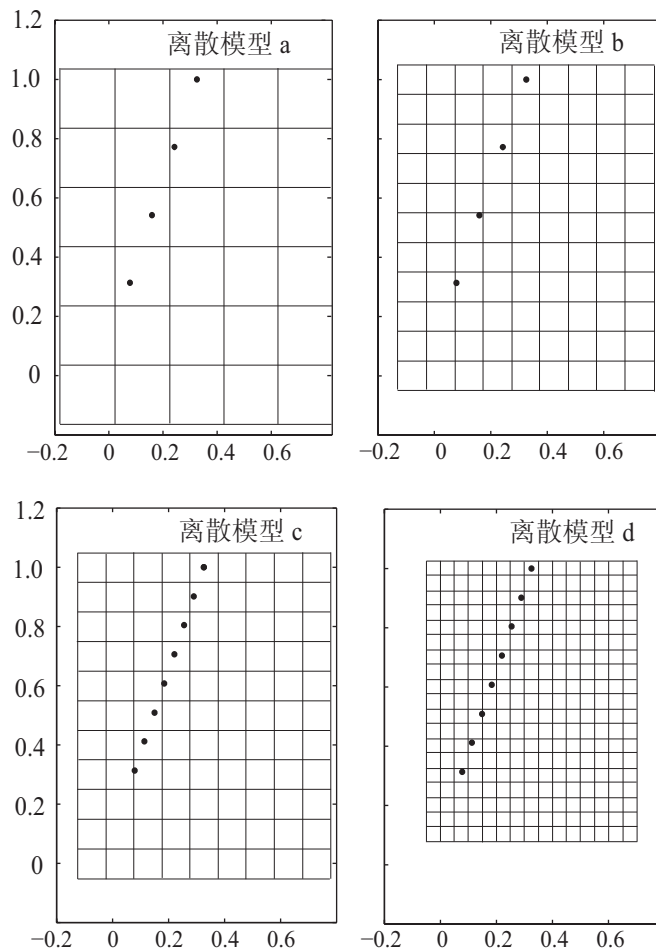


图 3.10 四种工况的离散模型

图3.11给出了摆角 θ 时程曲线在四种离散模型中的计算结果，并与有限元计算结果^[173]进行了比较。依据第3.1.3节的分析，离散模型(b)和(d)的解与有限元解等价，见图3.11。在离散模型(a)和(c)中，由于背景网格部分结点受到两个杆单元结点的影响，相比于有限元数值解存在着一定的阻尼。但是对比图3.11中离散模型(a)和(c)的数值解可知，该阻尼会随着网格的细化而削弱。

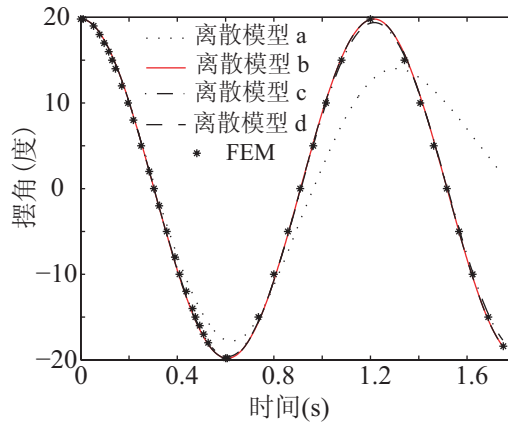


图 3.11 摆角 θ 的时程曲线

3.4 算法应用

通过第3.3节的算例，验证了杂交物质点有限元法的精度，同时也分析了背景网格结点间距对杆单元计算结果的影响。下面，进一步将该算法用于计算弹体侵彻钢筋混凝土结构的问题。由于混凝土本构模型参数较多，在此之前先介绍本文采用的混凝土本构模型。

3.4.1 混凝土本构模型

目前，混凝土的本构模型有多种类型，如Holmquist-Johnson-Cook(HJC)^[196]、RHT^[197]和“混凝土损伤模型”^[188]等。其中，HJC模型是一种率式本构，可模拟混凝土在大变形、高压和高应变率下的力学行为，并考虑了混凝土内的孔洞坍塌效应，在混凝土侵彻问题中得到了广泛应用^[33,198,199]。Polanco-Loria等^[200]研究表明，HJC模型很好地折衷了在模拟大尺度模型上的精度和公式上的易理解性。因此，本文采用HJC模型模拟混凝土。

HJC模型包括三部分，分别是强度模型、状态方程和损伤模型，如图3.12所示，下面分别简要介绍。

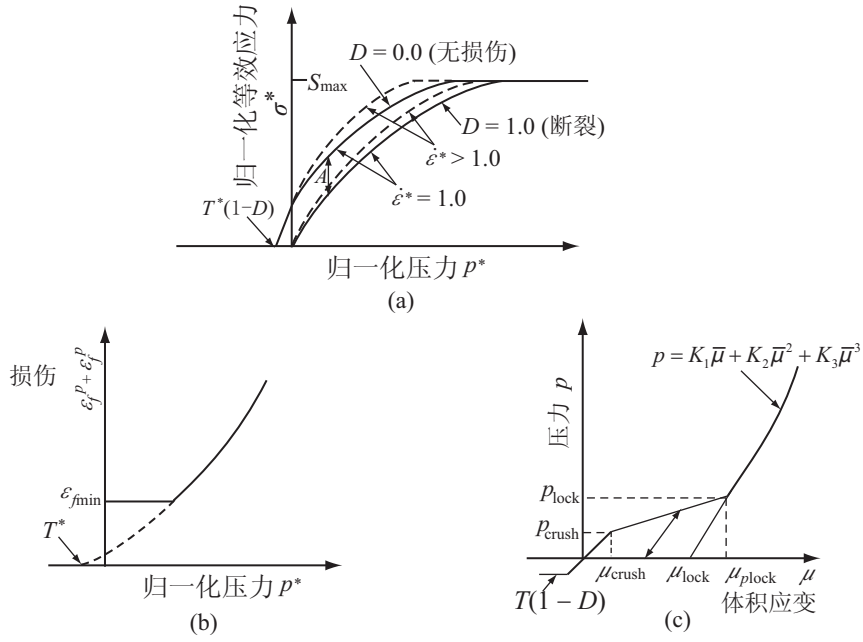


图 3.12 HJC本构模型：(a) 强度模型，(b) 损伤模型，(c) 状态方程

3.4.1.1 HJC强度模型

为便于引入混凝土的抗压强度，HJC强度模型采用了归一化等效应力，有

$$\sigma^* = \sigma / f'_c \quad (3-31)$$

其中， σ 表示等效应力， f'_c 表示准静态单轴抗压强度。在HJC模型中，归一化屈服应力为

$$\sigma^* = [A(1 - D) + Bp^{*N}](1 + C \ln \dot{\epsilon}^*) \quad (3-32)$$

其中， σ^* 表示无量纲的等效屈服应力， $p^* = p / f'_c$ 表示归一化的无量纲压力， p 表示当前压力， $\dot{\epsilon}^* = \dot{\epsilon} / \dot{\epsilon}_0$ 表示无量纲的应变率， $\dot{\epsilon}$ 表示当前应变率， $\dot{\epsilon}_0 = 1.0 \text{s}^{-1}$ 为参考应变率。 A ， B ， N ， C 分别表示内聚力强度，压力强化系数，压力硬化系数和应变率系数。 D 为损伤因子，由HJC损伤模型确定。

由式(3-32)可知， σ^* 随着 p^* 的增长而无穷增长。实际上， σ^* 存在一个极限值，因此引入归一化的最大强度 $S_{\max}$ ，并令 $\sigma^* \leq S_{\max}$ 。另外，考虑到混凝土所能够承受的最大静水拉应力 T ，引入归一化最大静水拉应力 $T^* = T / f'_c$ ，如图3.12(a)所示。

3.4.1.2 HJC损伤模型

混凝土材料的内聚强度将随着孔洞的坍塌而削弱，而孔洞坍塌将产生塑性体

积应变。因此，为考虑孔洞坍塌产生的损伤，HJC损伤模型结合了塑性体积应变和等效塑性应变对损伤的影响，如图3.12(b)所示。损伤因子表达式为

$$D = \sum (\Delta \varepsilon^p + \Delta \mu^p) / (\varepsilon_f^p + \mu_f^p) \quad (3-33)$$

其中， D 的取值范围为0 ~ 1， $\Delta \varepsilon^p$ 和 $\Delta \mu^p$ 分别为当前时间步的等效塑性应变增量和塑性体积应变增量。同时，有

$$\varepsilon_f^p + \mu_f^p = D_1 (p^* + T^*)^{D_2} \quad (3-34)$$

其中 D_1 和 D_2 为材料损伤参数。由式(3-34)可知，当 $p^* + T^* = 0$ 时，混凝土材料不能承受任何塑性应变；当 $p^* + T^* > 0$ 时， $\varepsilon_f^p + \mu_f^p$ 之和随 p^* 的增长而增长。为了避免混凝土在小幅拉伸载荷作用下发生损伤失效，引入最小塑性应变 ε_{fmin} ，如图3.12(b)所示。

3.4.1.3 HJC状态方程

考虑到高压和混凝土中的空隙，HJC模型中的状态方程 (EOS) 包括三个不同的响应区域，分线弹性区、过渡区和压实区，如图3.12(c)所示。

(1) 线弹性区

当压力 p 低于孔洞坍塌时的压力 p_{crush} 时，材料的压力响应处于弹性阶段，压力表达式为

$$p = K_{elastic} \mu, \quad p \leq p_{crush} \quad (3-35)$$

其中， μ 表示体积应变， $K_{elastic} = p_{crush} / \mu_{crush}$ 表示弹性体积模量， μ_{crush} 表示材料压碎时对应的弹性极限体积应变。

(2) 过渡区

当混凝土开始破碎直至完全压实前为弹性区到压实区的过渡阶段，在该阶段内孔洞被逐渐排除，塑性体积开始累积。

(a) 处于加载时，压力表达式为

$$p = p_{crush} + K_{tran} (\mu - \mu_{crush}), \quad p_{crush} \leq p \leq p_{lock} \quad (3-36)$$

其中， $K_{tran} = (p_{lock} - p_{crush}) / (\mu_{plock} - \mu_{crush})$ 为过渡区的体积模量， p_{lock} 和 $\mu_{plock} = p_{lock} (1 + \mu_{lock}) / K_1 + \mu_{lock}$ 分别表示所有孔洞全部坍塌压实时的压力和对应的体积应变， K_1 是材料参数。 $\mu_{lock} = \rho_{grain} / \rho_0 - 1$ 表示压缩孔洞产生的体积应变， ρ_{grain} 表示混凝土中颗粒物的密度。

(b) 处于卸载时，压力表达式为：

$$p = p_{\text{crush}} + K_{\text{tran}}(\mu_{\text{max}} - \mu_{\text{crush}}) + [(1 - F)K_{\text{elastic}} + FK_1](\mu - \mu_{\text{max}}) \quad (3-37)$$

其中， $F = (\mu_{\text{max}} - \mu_{\text{crush}})/(\mu_{\text{plock}} - \mu_{\text{crush}})$ 表示一种内插的系数， μ_{max} 为卸载前所达到的最大体积应变。

(3) 压实区

在该阶段内，混凝土材料处于完全压实状态，压力-体积关系取为三次多项式。

(a) 处于加载时，压力表达式为

$$p = K_1\bar{\mu} + K_2\bar{\mu}^2 + K_3\bar{\mu}^3 \quad (3-38)$$

其中， $\bar{\mu} = (\mu - \mu_{\text{lock}})/(1 + \mu_{\text{lock}})$ 表示修正的体积应变， K_1, K_2 和 K_3 为材料参数。

(b) 处于卸载时，压力表达式为

$$p = K_1\bar{\mu}_{\text{max}} + K_2\bar{\mu}_{\text{max}}^2 + K_3\bar{\mu}_{\text{max}}^3 + K_1(\mu - \mu_{\text{max}}) \quad (3-39)$$

混凝土材料在各阶段受拉伸时服从的规律与所在阶段类似，但须满足静水拉应力不能超过 $T(1 - D)$ 的限制。

综上所述，HJC模型中需要测定材料参数较多，详见文献[196]中的介绍。

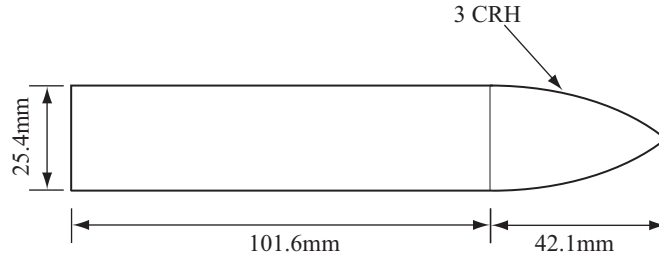


图 3.13 弹体的几何尺寸(0.5kg)

3.4.2 钢筋混凝土侵彻问题

在本算例中，考虑了Hanchak等^[201]开展的卵形钢弹侵彻钢筋混凝土靶体的实验。在实验中，卵形钢弹以301~1058m/s的速度正侵彻钢筋混凝土靶体，并避开钢筋网络，实测弹体剩余速度为0~947m/s。弹体的端部曲径比为3，直径为25.4mm，几何结构如图3.13所示；钢筋混凝土靶体的尺寸为610mm × 610mm × 178mm(厚度)，含有三层正交布置的钢筋网络，钢筋直径为5.59 mm，如图3.14所示。

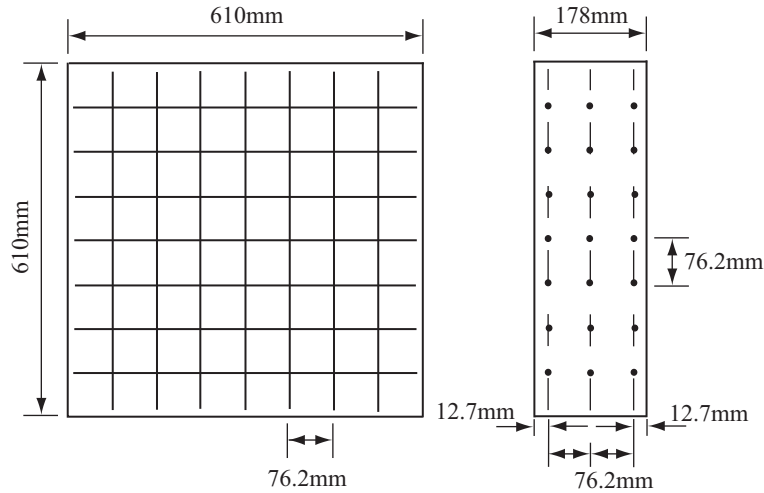


图 3.14 钢筋混凝土的几何尺寸以及钢筋的位置

表 3.1 混凝土HJC强度和损伤模型材料参数

A	B	N	C	f'_c (MPa)	$S_{\max}$	G (GPa)	T (GPa)	D_1	D_2	$\varepsilon_{f\min}$
0.79	1.60	0.61	0.007	48	7.0	14.86	4	0.04	1.0	0.01

侵彻后的卵形钢弹仅在弹尖处有少量的磨蚀，并没有发生明显的塑性应变^[201]。因此，在计算中采用弹性本构模型计算弹体，弹体材料的各项参数为 $\rho=8.147 \times 10^{-3} \text{g/mm}^3$ ， $E=2.124 \times 10^5 \text{MPa}$ ， $\nu=0.3$ ；采用HJC模型模拟混凝土材料，靶体混凝土材料密度为 $\rho=2.44 \times 10^{-3} \text{g/mm}^3$ ，其它材料参数值取自文献[196]，列于表3.1和3.2；采用理想弹塑性本构模型模拟钢筋，钢筋材料的各项参数为 $\rho=7.5 \times 10^{-3} \text{g/mm}^3$ ， $E=2.10 \times 10^5 \text{MPa}$ ， $\sigma_y=235 \text{MPa}$ ；采用塑性应变失效模型模拟钢筋的断裂，塑性应变失效值为0.26。

首先，考虑初速为749m/s的弹体侵彻靶体实验，实测剩余弹速615m/s。考虑到对称性，建立1/4离散模型，如图3.15所示。为考察钢筋的作用，此处设置三种工况：工况1，靶体仅由混凝土构成，称为素混凝土靶体；工况2，靶体为钢筋混凝土，且弹体未打中钢筋，该工况与实验设置相同；工况3，靶体为钢筋混凝土，且弹体打中三层钢筋。同时，进行收敛性分析：每种工况均采用三种不同的背景网格结点间距，分别为 $\Delta=0.4 \text{mm}$ ， 0.5mm 和 0.6mm ，相应的物质点间距为背景网格结点间距的1/2，杆单元的尺寸取为背景网格结点间距。

表 3.2 混凝土HJC状态方程材料参数

P_{crush} (MPa)	μ_{crush}	K_1 (GPa)	K_2 (GPa)	K_3 (GPa)	P_{lock} (GPa)	μ_{lock}
16	0.001	85	-171	208	0.8	0.10

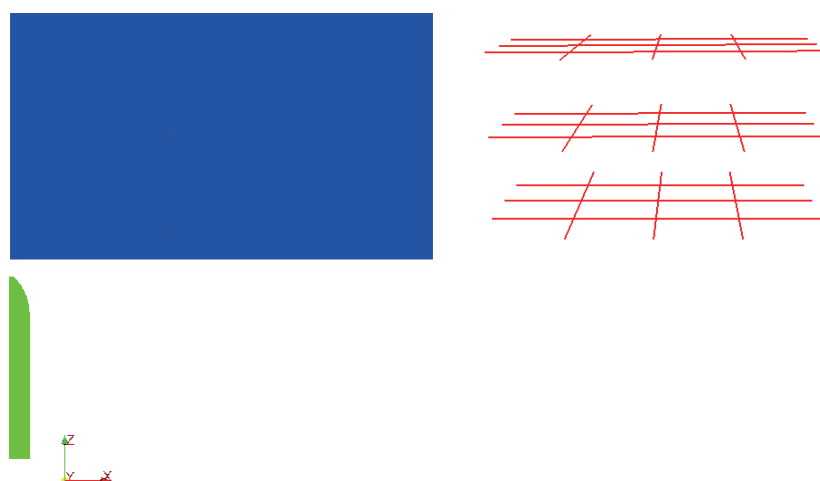


图 3.15 弹体侵彻钢筋混凝土靶体和钢筋的离散模型

表 3.3 各种工况下的弹体剩余速度计算结果(m/s)

	$\Delta = 0.4\text{mm}$	$\Delta = 0.5\text{mm}$	$\Delta = 0.6\text{mm}$
工况 1	585	572	563
工况 2	585	571	561
工况 3	556	542	534

表3.3给出了各种工况下弹体剩余速度的计算结果。对比表3.3中纵向数据可知：在工况1和工况2中，弹体侵彻钢筋混凝土靶体和素混凝土靶体后的剩余速度没有显著差异；工况3中的剩余弹速明显低于另外两种工况。结果表明：在该问题中，当弹体打中钢筋时，钢筋可以起到降低剩余弹速的作用，提高钢筋混凝土结构的抗侵彻能力。这是因为，在高速侵彻问题中，材料仅发生局部的损伤破坏，此时只有打中钢筋，才有可能通过钢筋网络将载荷传递到更大范围的材料区域，进而提高整体的抗侵彻性能。对比表3.3横向数据可知：背景网格结点间距为 $\Delta=0.4\text{mm}$ 时，工况2中的弹体剩余速度计算结果为585m/s，与实验结果615m/s的相对误差为4.9%。此外，图3.16比较了 $\Delta=0.4\text{mm}$ 时，三种工况中靶体被弹体贯穿后的前后表面损伤结果。对比图3.16可知，钢筋有效抑制了靶体的损伤破坏面范围。另外，图3.17给出了工况3中0.5ms时刻的钢筋混凝土靶体的损伤破坏形状和钢筋的断裂状况。

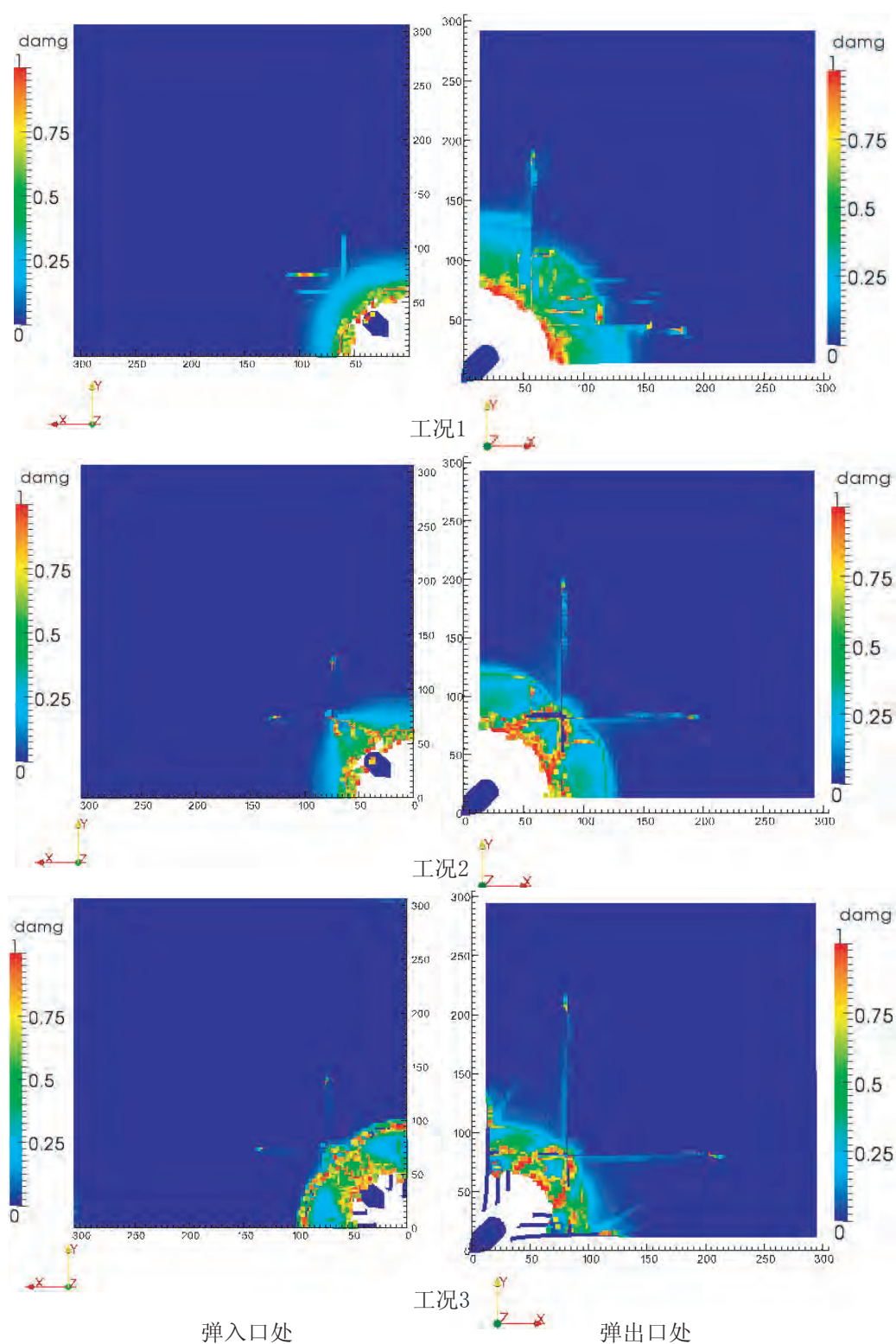


图 3.16 靶体贯穿口损伤云图的比较

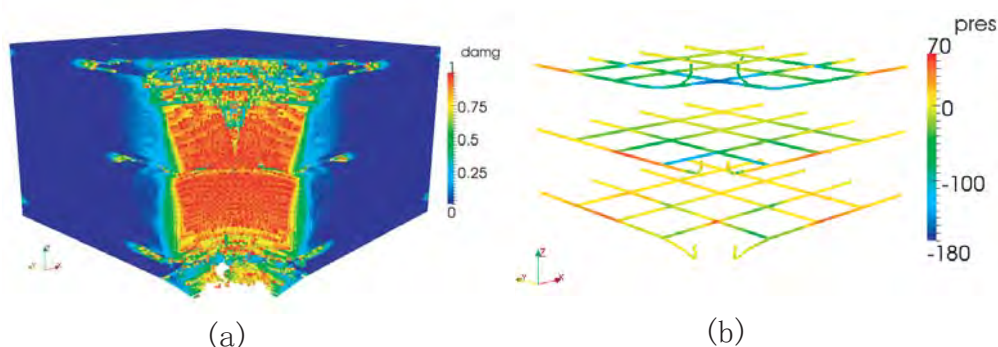


图 3.17 0.5ms时刻工况3中靶体计算结果: (a)混凝土的损伤云图, (b) 钢筋的断裂状况和轴力云图

最后, 将背景网格结点间距取为 $\Delta=0.4\text{mm}$, 针对工况2和工况3中的设置, 模拟了不同初始速度下弹体侵彻实验, 剩余弹速计算结果见图3.18。对比图3.18可知, 工况2的计算结果与实验结果吻合, 但在高速侵彻时略有差别。对比工况2和工况3的计算结果可知, 工况3中的剩余弹速始终位于工况2计算结果的下面, 表明弹体打中钢筋后剩余弹速有所降低。

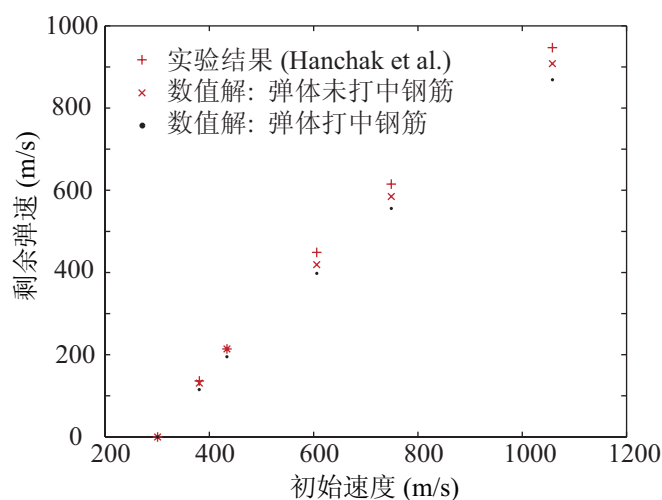


图 3.18 弹体剩余速度计算结果与实验结果的比较($\Delta=0.4\text{mm}$)

3.4.3 钢筋脱层效应研究

为了进一步研究钢筋在混凝土中起到的作用, 本节设计了一个弹体侵彻钢筋混凝土靶体的二维问题, 如图3.19所示。其中, 弹体的尺寸为 $50\text{mm} \times 20\text{mm}$, 靶体尺寸为 $400\text{mm} \times 100\text{mm}$ 。弹体的初始速度为 749m/s , 并考虑两类靶体: 工况1, 靶体为素混凝土; 工况2, 靶体为钢筋混凝土并含三层钢筋, 钢筋直径等效为 2mm , 如图3.19中虚线所示。

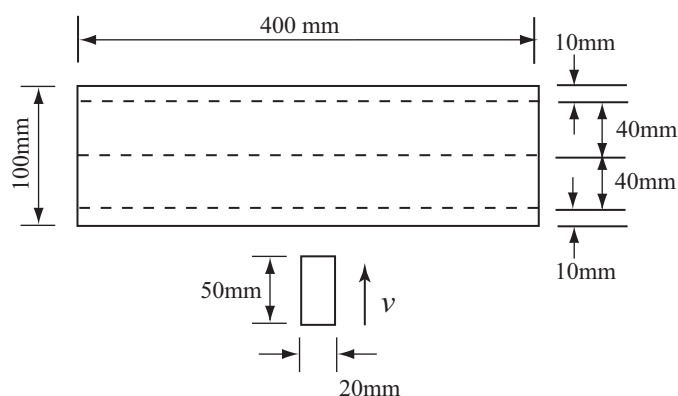


图 3.19 弹体侵彻靶体的示意图及几何尺寸(钢筋的直径为2mm)

材料模型和相应的参数值同第3.4.2节中的设置。考虑到对称性，建立1/2离散模型，背景网格结点间距取为 $\Delta=0.4\text{mm}$ ，物质点间距取为 0.2mm ，杆单元尺寸取为 0.4mm 。

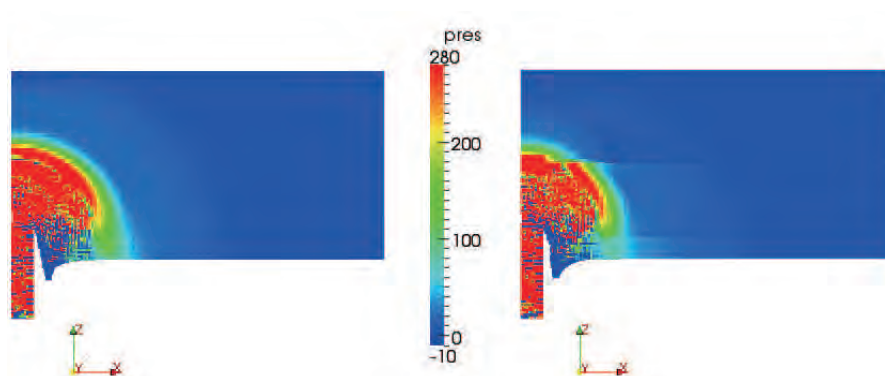


图 3.20 弹体在侵彻过程中0.02ms时靶体内的压力波形：左图为素混凝土靶体，右图为钢筋混凝土靶体

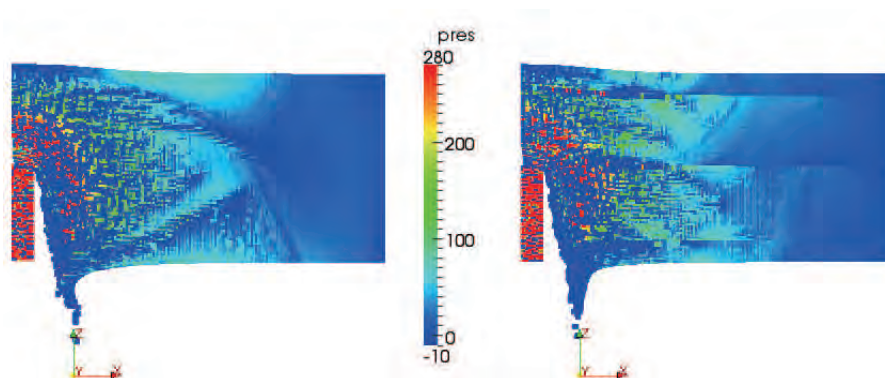


图 3.21 弹体在侵彻过程中0.04ms时靶体内的压力波形：左图为素混凝土靶体，右图为钢筋混凝土靶体

首先分析弹体侵彻过程中靶体内的应力分布。图3.20给出了0.02ms时刻素混凝土靶体和钢筋混凝土靶体中的应力云图。对比图3.20可知，应力波传至混凝土与钢筋界面处发生反射和透射。由于钢筋的波阻抗大于素混凝土，反射加载，透射过去的应力波再次遇到界面时被卸载，控制了损坏范围。图3.21进一步给出了0.04ms时刻两类靶体中的应力云图，两者已显著不同。对比图3.21可知，钢筋混凝土中应力云图呈沿钢筋的层状分布，并且影响范围较素混凝土靶体小。

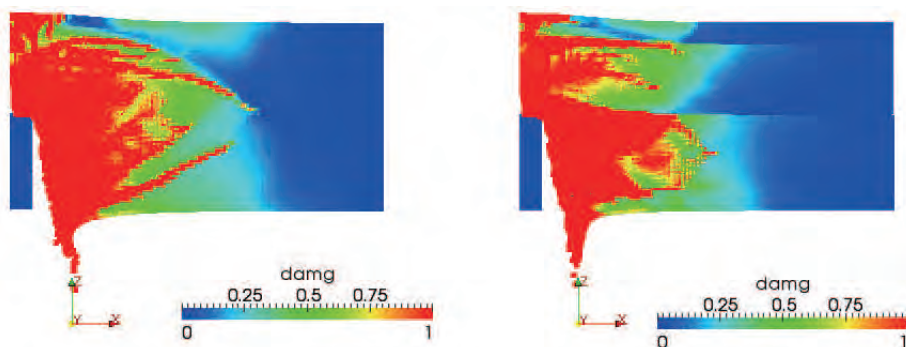


图 3.22 弹体侵彻过程中0.08ms时靶体的损伤云图：左图为素混凝土靶体，右图为钢筋混凝土靶体

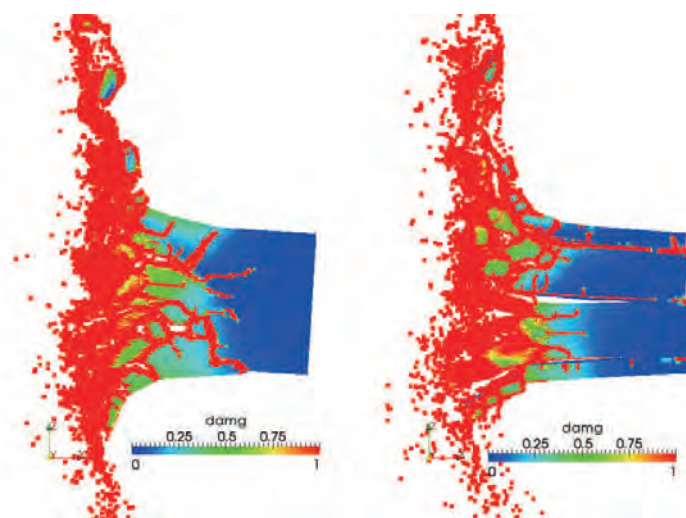


图 3.23 弹体侵彻过程中0.74ms时靶体损伤云图：左图为素混凝土靶体，右图为钢筋混凝土靶体

其次，分析弹体侵彻过程中靶体内的损伤范围。图3.22 给出了0.08ms时素混凝土靶体与钢筋混凝土靶体内的损伤云图。对比图3.22可知，钢筋混凝土靶体中的损伤路径除了沿弹体侵彻方向外还沿钢筋布置的方向分布，并且其损伤区域小于素混凝土靶体。图3.23比较了0.74ms时两种靶体的损伤云图，此时钢筋混凝土靶体出现了明显的层状分裂，且与钢筋的布置位置一致，表明发生了钢筋脱层现

象。但是，钢筋混凝土靶体的损伤区域整体上小于素混凝土靶体，这是由于一旦材料损伤值达到1，混凝土材料便不能承受拉应力，但此时的钢筋还可以承受载荷，可将冲击载荷传递到整体结构中，提高了混凝土整体的抗侵彻能力，损伤也因此沿着钢筋布置方向传播，并被限制在局部范围内。

本算例结果表明，钢筋的加入可以改变混凝土内应力的传播形式和影响范围，同时将载荷沿着钢筋的布置方向传递，使承受载荷的材料区域范围更大，提高了混凝土的抗侵彻能力。

3.5 小结

本文提出了杂交物质点有限元法，构造了一种用于离散钢筋混凝土中钢筋的杆单元，避免了在钢筋直径方向上的离散，降低了采用物质点法模拟钢筋混凝土结构时的离散模型规模。采用杆拉伸问题和单摆问题验证了该方法的精度。最后，采用该方法模拟了弹体侵彻钢筋混凝土靶体的问题，所得计算结果与实验值吻合较好，表明钢筋可以提高混凝土结构的抗侵彻能力。该方法为钢筋混凝土靶体抗侵彻性能研究和设计提供了一类高效稳定的数值计算方法。

第4章 耦合物质点有限元法

如图4.1所示，在中低速冲击侵彻和流固耦合等问题中，材料强度高的物体如弹体和坝体仅发生小变形，而材料强度低的物体则发生材料大变形甚至破碎。此时，物质点法并不是求解此类问题的最佳方案。



图 4.1 (a) 穿甲弹侵彻靶体, (b) 小浪底水坝

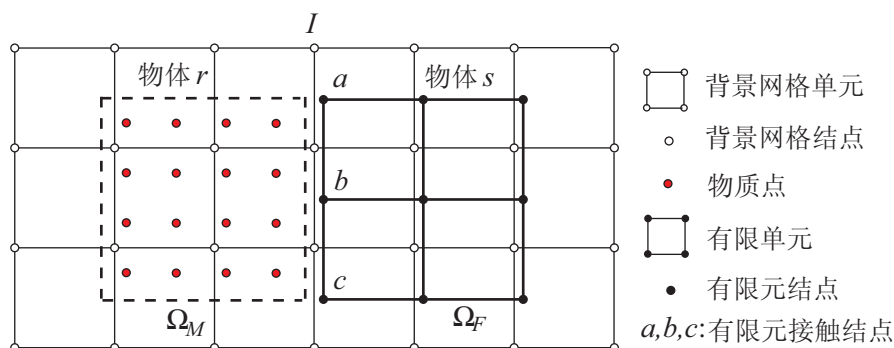


图 4.2 耦合物质点有限元法示意图

由第2.8节可知，物质点法在模拟小变形问题时的精度和效率不如有限元；另外，从计算机内存利用量上来讲，物质点法需要更多的物理内存来存储质点和背景网格的变量。因此，可以采用有限元法计算侵彻和流固耦合等问题中仅涉及小变形的物体。为此，本文通过将物质点法和有限元法进行耦合来模拟此类问题，提出了耦合物质点有限元法(Coupled Finite Element Material Point Method, 简称为CFEMP)，如图4.2所示。在该算法中，采用物质点离散涉及材料大变形的物体，用有限元离散涉及材料小变形的物体，通过接触算法实现两个物体间的相互作用。本文建立了这类问题的三维求解格式，出于问题描述的方便，文章采用二

维示意图。

4.1 耦合物质点有限元法

4.1.1 控制方程和离散

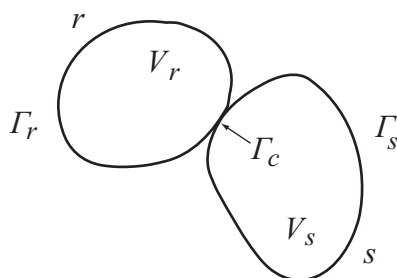


图 4.3 相互接触的两个物体

考虑两个物体 r 和 s 的接触问题，如图4.3所示，分别以 V_r 和 V_s 表示两个物体的材料区域。其中， Γ_r 和 Γ_s 分别表示物体 r 和 s 的边界， $\Gamma_c = \Gamma_r \cap \Gamma_s$ 表示接触边界，而接触界面条件一般表述为非嵌透条件和接触面力条件。

通常采用速率的形式描述非嵌透条件。在接触界面法向上，物体 r 和 s 的两个接触点要么继续保持接触，要么相互分离，因此有

$$\gamma_N = (\mathbf{v}^r - \mathbf{v}^s) \cdot \mathbf{n}^r \leq 0 \quad (4-1)$$

其中， $\mathbf{v}^r$ 和 $\mathbf{v}^s$ 分别表示接触点处物体 r 和 s 的速度， $\mathbf{n}^r$ 表示接触界面上物体 r 的单位外法线方向，并且两个接触物体在接触界面上需满足法向量共线条件，即

$$\mathbf{n}^r + \mathbf{n}^s = 0 \quad (4-2)$$

在切向上，两个接触点要么粘合在一起，要么发生相互滑动。一般采用摩擦模型描述切向的速度，有

$$\gamma_T = \mathbf{v}_T^r - \mathbf{v}_T^s = \begin{cases} 0 & \text{粘着接触} \\ -k\mathbf{t}_T & \text{滑移接触} \end{cases} \quad (4-3)$$

其中， $\mathbf{t}_T$ 表示接触力。

由牛顿第三定律可知，接触面力属于系统内力，应满足合力为零的条件，有

$$\mathbf{t}^r + \mathbf{t}^s = 0 \quad (4-4)$$

上式可进一步写成分量的形式，即

$$t_N^r + t_N^s = 0 \quad (4-5)$$

$$t_T^r + t_T^s = 0 \quad (4-6)$$

其中， $t_N^r = \mathbf{t}^r \cdot \mathbf{n}^r$ 和 $t_N^s = \mathbf{t}^s \cdot \mathbf{n}^r$ 分别表示物体 r 和 s 的法向接触力， $t_T^r = \mathbf{t}^r - t_N^r \mathbf{n}^r$ 和 $t_T^s = \mathbf{t}^s - t_N^s \mathbf{n}^s$ 分别表示切向接触力。如果两个接触点之间不存在粘接力，则接触界面之间不存在拉应力，则有

$$t_N^r = -t_N^s \leq 0 \quad (4-7)$$

在第2.1节的基础上，加入接触界面条件式(4-4)和(4-7)即可构成描述两个接触物体的完整控制方程。在建立其动量方程的等效积分弱形式时，采用拉格朗日乘子法引入接触约束条件，得

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} \rho f_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_c} t_i^{\text{ct}} \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (4-8)$$

其中，拉格朗日乘子向量 t_i^{ct} 表示接触力，其余各符号的意义参见第2.2节。

下面分别采用物质点法和有限元法建立式(4-8)的离散方程，并假设物体 r 采用物质点离散，物体 s 用有限元离散求解，如图4.4所示。

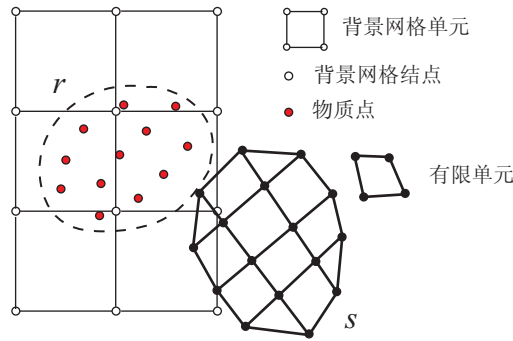


图 4.4 物体 r 和 s 的离散示意图

4.1.1.1 物质点法的求解格式

在MPM中，材料区域用一组物质点离散，每个物质点携带质量、位置、速度、应力和应变等物理量，动量方程在背景网格上计算，如图4.4所示。材料区域的密度近似式为

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{n_p} m_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \quad (4-9)$$

其中, n_p 表示物质点总数, m_p 表示物质点 p 的质量, $\mathbf{x}_p$ 表示物质点 p 的位置, δ 是Dirac-delta函数。基于第2.2节的推导过程, 在此直接给出接触问题的MPM求解格式。背景网格结点 I 的动量更新格式为

$$\dot{p}_{iI} = f_{iI} \quad I = 1, 2, \dots, n_g \quad (4-10)$$

其中

$$p_{iI} = m_I v_{iI} \quad (4-11)$$

为背景网格结点 I 的动量,

$$f_{iI} = f_{iI}^{\text{ext}} + f_{iI}^{\text{int}} + f_{iI}^{\text{ct}} \quad (4-12)$$

为背景网格结点 I 的结点力, f_{iI}^{ct} 表示接触界面上背景网格结点的接触力,

$$f_{iI}^{\text{int}} = - \sum_{p=1}^{n_p} N_{Ip,j} \sigma_{ijp} \frac{m_p}{\rho_p} \quad (4-13)$$

为背景网格结点 I 的结点内力,

$$f_{iI}^{\text{ext}} = \sum_{p=1}^{n_p} N_{Ip} \bar{t}_{ip} h^{-1} \frac{m_p}{\rho_p} + \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{Ip} f_{ip} \quad (4-14)$$

为背景网格结点 I 的结点外力, $\sigma_{ijp} = \sigma_{ij}(\mathbf{x}_p)$, $f_{ip} = f_i(\mathbf{x}_p)$, $\bar{t}_{ip} = \bar{t}_i(\mathbf{x}_p)$, h 表示材料区域边界层的厚度。

4.1.1.2 有限元法求解格式

在FEM中, 材料区域采用网格离散, 如图4.4所示。在变形过程中, 网格固连在材料区域上。因此, 材料区域内任意点 $\mathbf{X}$ 的位移 u_i 由有限元结点的形函数插值近似, 有

$$u_i(\mathbf{X}, t) = \sum_{d=1}^{n_d} N_d(\xi(\mathbf{X})) u_{id}(t) \quad (4-15)$$

其中, 下标 d 表示有限元结点, n_d 表示有限元结点总数, u_{id} 表示有限元结点 i 方向上的位移。所以, 式(4-8)中的体积分可以转化为所有单元 e 积分之和。在不考虑弱形式(4-8)中的接触力项时, 将式(4-15)代入式(4-8), 并采用集中质量阵, 即可建立有限元结点的动量方程, 有

$$\dot{p}_{id} = f_{id} \quad (4-16)$$

其中

$$p_{id} = m_d v_{id} \quad (4-17)$$

为有限元结点 d 的动量,

$$f_{id} = f_{id}^{\text{int}} + f_{id}^{\text{ext}} \quad (4-18)$$

为有限元结点力,

$$f_{id}^{\text{int}} = - \sum_e \int_{V_e} N_{d,j} \sigma_{jie} dV \quad (4-19)$$

为有限元结点内力,

$$f_{id}^{\text{ext}} = \sum_e \left(\int_{V_e} \rho N_d f_i dV + \int_{\Gamma_{te}} N_k \bar{t}_i d\Gamma \right) \quad (4-20)$$

为有限元结点外力。在显式算法中, FEM采用单点高斯积分。因此, 式(4-19)和(4-20)中的体积分可近似为

$$f_{ik}^{\text{int}} = - \sum_e N_{ke,j} \sigma_{jie} V_e \quad (4-21)$$

$$f_{ik}^{\text{ext}} = \sum_e \left(m_e N_{ke} f_{ie} + \int_{\Gamma_{te}} N_k \bar{t}_i d\Gamma \right) \quad (4-22)$$

在式(4-21)和(4-22)中, 下标 e 表示单元形心, 并且 $m_e = \rho_e V_e$ 。

采用单点高斯积分虽然可以节省数据存储量和减少计算量, 但由此引发的沙漏模态会导致计算不稳定, 使结果失真甚至发散。为此, 可以在动量方程的右端增加一项与沙漏模态变形方向相反的沙漏阻尼力 f_{ik}^{HG} 。常用的沙漏阻尼力计算方式有两种, 即标准阻尼形式和Flanagan-Belytschko阻尼形式^[202,203]。其中, 标准阻尼形式与刚体转动模态不正交, 不适合处理具有刚体大转动问题, 而Flanagan-Belytschko 阻尼形式是与刚体转动模型正交的沙漏阻尼力。下面以8结点六面体单元为例给出Flanagan-Belytschko 阻尼计算格式

$$f_{ik}^{\text{HG}} = \sum_{\beta=1}^4 -\alpha_h g_{i\beta} \gamma_{\beta k} \quad (4-23)$$

其中

$$\alpha_h = Q_h \rho_e V_e^{2/3} c_e / 4 \quad (4-24)$$

$$\gamma_{\beta k} = \Gamma_{\beta k} - N_{k,i} \sum_{J=1}^8 x_{iJ} \Gamma_{\beta J} \quad (4-25)$$

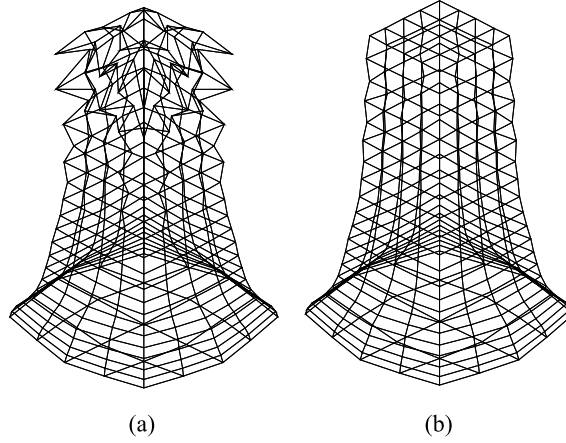


图 4.5 沙漏模态的影响：(a) 没有沙漏模态控制，(b) 采用沙漏模态控制

$$g_{i\beta} = \sum_{J=1}^8 v_{iJ} \gamma_{\beta J} \quad (4-26)$$

上式中， c_e 表示单元高斯点的声速， Q_h 为用户定义的常数，取值0.05 ~ 0.15， $\Gamma_{\beta k}(\beta = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2, 3 \dots, 8)$ 表示沙漏基矢量。由于沙漏模态与其他实际变形的基矢量正交，沙漏粘性阻力做的功在总能量中可以忽略。图4.5为不控制沙漏模态和控制沙漏模态的三维结构碰撞计算结果，表明添加沙漏阻尼力保证了计算结果的正确性。

4.1.2 接触算法

通过背景网格建立物质点离散体和有限元离散体之间的接触算法，求解式(4-8)中的接触力项。为此，在每一个时间步中，将有限元离散区域外表面结点和物质点的信息映射到同一背景网格，在背景网格上搜索接触面，通过令接触面上背景网格结点速度场连续和加速度场连续来计算接触力并施加到两个物体上。

为方便起见，取两个规则的物体来说明CFEMP中的接触算法。如图4.6所示，物体 r 所占的区域用 Ω_M 表示并用物质点离散，物体 s 所占的区域以 Ω_F 表示并用有限元离散。假设两个物体发生接触，将两个物体的信息映射到背景网格上。同时含有两个物体信息的背景网格结点表征了接触界面，在本文中，称此类背景网格结点为背景网格接触结点，如背景网格结点 I 。将既位于有限元离散体外表面，又对背景网格接触结点有影响的有限元结点定义为有限元接触结点，如有限元结点 a, b, c 。为了计算接触力，在背景网格上求解有限元接触结点的动量方程。在给出具体的接触面探测和接触力计算方法前，为统一MPM和FEM求解区域内各物理量的更新时间，先介绍耦合物质点有限元法中采用的时间积分方法。

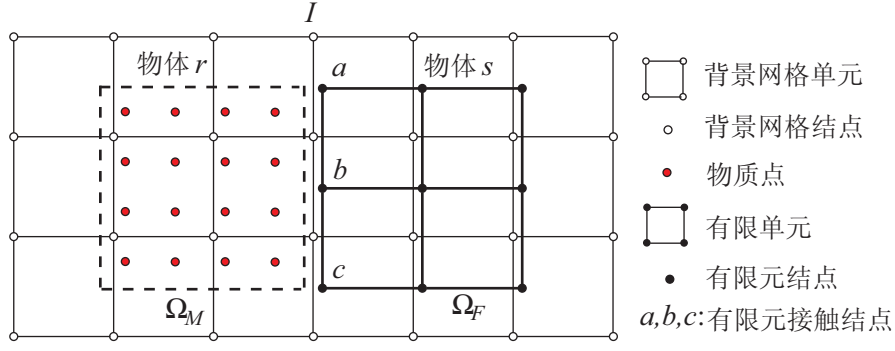


图 4.6 基于接触算法的耦合物质点有限元法示意图

4.1.2.1 时间积分

在物质点法和有限元法中，显式积分算法均采用变步长的中心差分法。因此，本文也采用变步长的中心差分法求解动量方程，如图4.7所示。其中， $t^{n+1} = t^n + \Delta t^{n+1/2}$, $t^{n+1/2} = t^n + \Delta t^{n+1/2}/2 = t^{n-1/2} + \Delta t^n$ 和 $\Delta t^n = (\Delta t^{n-1/2} + \Delta t^{n+1/2})/2$ 。

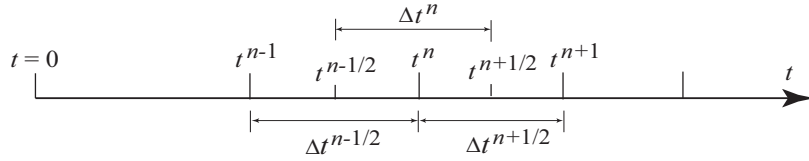


图 4.7 显式时间积分

由于中心差分法是条件稳定算法，因此临界时间步长取为

$$\Delta t = \min(L_e/c) \quad (4-27)$$

对于物质点离散区域， L_e 表示背景网格单元的特征尺度，即背景网格结点间距，对于有限元离散区域， L_e 表示单元的特征长度， c 表示材料的当地声速。为保持物质点离散区域和有限元离散区域在每个时间步中计算的一致协调性，取MPM和FEM的最小临界时间步长作为计算循环的临界时间步长。中心差分法的其他介绍详见第2.3节。

在下面的推导过程中，用上标 n 表示相应的物理量在 t^n 时刻的值，并假设 $t^{n-1/2}$ 和 t^n 时刻各物理量已知，求解各物理量在 t^{n+1} 时刻的值。

在 Ω_M 区域，物质点更新方式同第2.3节。因此， $t^{n+1/2}$ 时刻背景网格结点 I 的动量为

$$p_{il}^{n+1/2} = p_{il}^{n-1/2} + f_{il}^n \Delta t^n \quad (4-28)$$

物质点在 t^{n+1} 时刻的位置和 $t^{n+1/2}$ 时刻的速度更新为:

$$x_{ip}^{n+1} = x_{ip}^n + \Delta t^{n+1/2} \sum_{I=1}^{n_g} p_{il}^{n+1/2} N_{Ip}^n / m_I^n \quad (4-29)$$

$$v_{ip}^{n+1/2} = v_{ip}^{n-1/2} + \Delta t^n \sum_{I=1}^{n_g} f_{il}^n N_{Ip}^n / m_I^n \quad (4-30)$$

在 Ω_F 区域, 对于有限元接触结点 t , 其更新方式与一般有限元结点不同。首先将其结点内力和外力映射到背景网格, 在背景网格计算接触力, 利用背景网格速度场和加速度场更新其位置和速度, 有

$$x_{it}^{n+1} = x_{it}^n + \Delta t^{n+1/2} \left(\sum_{I=1}^{n_g} p_{il}^{n+1/2} N_{it}^{n+1/2} / m_I^{n+1/2} + \Delta t^n f_{it}^{\Gamma, n} / m_t \right) \quad (4-31)$$

$$v_{it}^{n+1/2} = v_{it}^{n-1/2} + \Delta t^n \sum_{I=1}^{n_g} f_{il}^n N_{it}^n / m_I^n + f_{ik}^{\Gamma, n} \Delta t^n / m_k \quad (4-32)$$

由于沙漏阻尼力具有反对称性, 映射到背景网格会部分抵消而不能控制沙漏模态, 因此在式(4-32)中添加沙漏阻尼项。对于其他有限元结点, t^{n+1} 时刻位置和 $t^{n+1/2}$ 时刻的速度更新分别为

$$x_{ik}^{n+1} = x_{ik}^n + v_{ik}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \quad (4-33)$$

$$v_{ik}^{n+1/2} = v_{ik}^{n-1/2} + f_{ik}^n \Delta t^n / m_k \quad (4-34)$$

4.1.2.2 接触探测

背景网格覆盖了所有材料区域, 将各物体的特征信息映射到背景网格上以甄别接触状态。在每一个时间步开始时, 将离散物体 r 的物质点质量和动量通过背景网格形函数映射到背景网格上, 有

$$m_I^{r, n} = \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{Ip}^n \quad (4-35)$$

$$p_{il}^{r, n-1/2} = \sum_{p=1}^{n_p} m_p v_{ip}^{n-1/2} N_{Ip}^n \quad (4-36)$$

同时将有限元区域内位于物体 s 表面的有限元结点质量和动量用相同的形函数映射到背景网格上, 有

$$m_I^{s, n} = \sum_{d=1}^{n_s} m_d N_{Id}^n \quad (4-37)$$

$$p_{il}^{s,n-1/2} = \sum_{d=1}^{n_s} m_d v_{id}^{n-1/2} N_{Id}^n \quad (4-38)$$

其中 n_s 仅表示有限元离散体外表面上结点数。此时，背景网格同时表征了物体 r 和 s 的速度场。因此，物体 b 在背景网格结点 I 的速度为

$$v_{il}^{b,n-1/2} = \frac{p_{il}^{b,n-1/2}}{m_I^{b,n}} \quad (4-39)$$

其中，上标 b 表示从物体 b 映射得到的物理量， $m_I^{b,n}$ 和 $p_{il}^{b,n-1/2}$ 分别表示背景网格结点 I 的质量和动量。因此，可依据背景网格结点 I 处的速度判断接触状态，具体为：

- (1) 若 $v_{il}^{r,n-1/2} = 0$ 或 $v_{il}^{s,n-1/2} = 0$ ，则说明两个物体未发生接触；
- (2) 若 $v_{il}^{r,n-1/2} \neq 0$ ， $v_{il}^{s,n-1/2} \neq 0$ ，并满足下面的条件

$$(v_{il}^{r,n-1/2} - v_{il}^{s,n-1/2})n_{il}^{r,n} > 0 \quad (4-40)$$

则说明两个物体正在相互接近，可能发生接触。在式(4-40)中， $n_{il}^{r,n}$ 为物体 r 外表面在背景网格结点 I 的单位外法线。

- (3) 若 $v_{il}^{r,n-1/2} \neq 0$ ， $v_{il}^{s,n-1/2} \neq 0$ ，并满足条件

$$(v_{il}^{r,n-1/2} - v_{il}^{s,n-1/2})n_{il}^{r,n} < 0 \quad (4-41)$$

则说明两个已经接触的物体相互分离。

- (4) 若 $v_{il}^{r,n-1/2} \neq 0$ ， $v_{il}^{s,n-1/2} \neq 0$ ，并满足下面的条件

$$(v_{il}^{r,n-1/2} - v_{il}^{s,n-1/2})n_{il}^{r,n} = 0 \quad (4-42)$$

则说明两个物体处于发生嵌透的临界状态，利用该等式可以求解接触力。

综上，两个物体在结点 I 处发生接触的判断条件为式(4-40)。为了避免背景网格结点 I 的质量偏小引起式(4-39)计算的结点速度产生奇异，在公式(4-40)两边同时乘上 $m_I^{r,n}m_I^{s,n}$ ，得接触判断条件的动量格式，有

$$(m_I^{s,n}p_{il}^{r,n-1/2} - m_I^{r,n}p_{il}^{s,n-1/2})n_{il}^{r,n} > 0 \quad (4-43)$$

相应的嵌透临界状态条件为

$$(m_I^{s,n}p_{il}^{r,n-1/2} - m_I^{r,n}p_{il}^{s,n-1/2})n_{il}^{r,n} = 0 \quad (4-44)$$

仅凭式(4-43)还不能准确判断接触是否发生。当两个物体之间的距离小于两个背景网格单元尺寸时，两个物体就会对同一个背景网格结点有影响。因此，虽

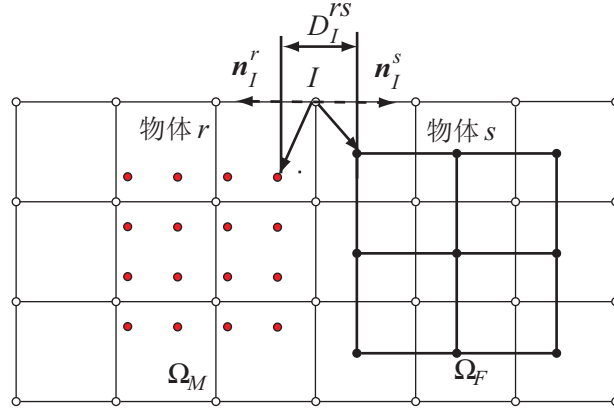


图 4.8 接触距离计算示意图

然两个物体的材料区域并没有发生重叠，但式(4-43)已满足，由此导致接触提前发生。为此，张雄等人^[117]提出了一种辅助接触判断条件，通过计算两个物体之间的物理距离辅助式(4-43)进行接触判断，即计算两个物体表面与接触结点 I 最近的距离在该结点法线方向上投影之和 D_I^{rs} ，如图4.8所示。如果 $D_I^{rs} \leq 0$ ，则表明两个物体发生材料区域的重叠，接触发生。因此，修正的接触判断条件为

$$\begin{cases} (m_I^{s,n} p_{il}^{r,n-1/2} - m_I^{r,n} p_{il}^{s,n-1/2}) n_{il}^{r,n} > 0 \\ D_I^{rs} \leq \lambda d_c \end{cases} \quad (4-45)$$

其中， d_c 表示背景网格的结点间距以考虑物质点所代表的材料区域范围， λ 取值范围为0 ~ 0.25，若 λ 取值太小会导致界面穿透。

4.1.2.3 接触法线计算

采用式(4-43)判断接触时，需要计算物体的表面外法线向量。

在物质点离散区域，通过计算物体 r 在背景网格结点处的质量梯度来计算物体表面在结点 I 处的法向量 $n_{il}^{s,n}$ ^[113]，即

$$n_{il}^{r,n} = \frac{1}{\left| \sum_{p=1}^{n_p} N_{Ip,i}^n m_p \right|} \sum_{p=1}^{n_p} N_{Ip,i}^n m_p \quad (4-46)$$

在有限元离散区域，物体 s 表面在背景网格结点 I 处的法向量计算包括两步。第一步计算与有限元接触结点 I 相连接的所有单元表面法向量之和，即

$$n_{it}^{s,n} = \sum_{e=1}^{e_n} n_{ie} \quad (4-47)$$

第二步将各有限元接触结点的法向量赋给其所在背景网格单元的各结点并进行归一化，可得物体 s 表面在背景网格结点 I 处的法向量 $n_{il}^{s,n}$ ，有

$$n_{il}^{s,n} = \frac{1}{\left| \sum_{i=1}^{n_t} n_{il}^{s,n} \right|} \sum_{i=1}^{n_t} n_{il}^{s,n} \quad (4-48)$$

式(4-46)和(4-48)为物体表面外法线的近似计算方法，不能严格满足接触界面处法向量的共线条件，将导致动量不守恒和界面穿透。因此，需对式(4-46)和(4-48)进行修正，令其满足接触面上法向量的共线条件。可采用如下方法进行修正：

1. 考虑到有限元离散体变形较小且刚度大于物质点离散体，采用有限元离散体来计算接触界面法向量，即令 $n_{il}^{s,n} = -n_{il}^{r,n}$ 。
2. 如果有限元离散体的外表面是凹面，而物质点离散体外表面是凸面或者平面，则采用物质点离散体计算接触界面法向量，即令 $n_{il}^{r,n} = -n_{il}^{s,n}$ 。

4.1.2.4 接触力计算

当检测到接触发生时，在背景网格上计算接触力，包括法向接触力和切向接触力两部分。其中，法向接触力通过令动量的试探值满足临界条件(4-44)求得，而切向接触力由摩擦模型给出。假设物体 r 和 s 在背景网格结点 I 处发生接触，下面推导求解背景网格结点 I 的接触力计算公式。

为计算接触力，将有限元接触结点质量、动量和结点力映射到背景网格上。因此，物体 r 和 s 在背景网格结点 I 处的结点力分别为：

$$f_{il}^{r,n} = f_{il}^{\text{ext},n} + f_{il}^{\text{int},n} \quad (4-49)$$

$$f_{il}^{s,n} = \sum_{i=1}^{n_t} (f_{il}^{\text{ext},n} + f_{il}^{\text{int},n}) N_{It}^n \quad (4-50)$$

其中， $f_{il}^{\text{ext},n}$ 和 $f_{il}^{\text{int},n}$ 分别为物质点离散区域背景网格的结点外力和内力， $f_{it}^{\text{ext},n}$ 和 $f_{it}^{\text{int},n}$ 分别为有限元接触结点的结点外力和内力。在采用单点高斯积分的有限单元中，各结点的沙漏粘性阻力具有反对称性，将其映射到背景网格上会部分抵消。因此，沙漏粘性阻尼力仅用于结点速度的更新并不映射到背景网格上。由式(4-28)可得物体 r 和 s 在背景网格结点上 $t^{n+1/2}$ 时刻的动量试探解 $\bar{p}_{il}^{b,n+1/2}$ ，有

$$\bar{p}_{il}^{b,n+1/2} = p_{il}^{b,n-1/2} + \Delta t^n f_{il}^{b,n} \quad (4-51)$$

其中, b 在物质点离散区域表示 r , 在有限元离散区域表示 s 。假设在结点 I 处应施加接触力 $f_{il}^{b,c,n}$, 则物体 b 在背景网格结点上的真实动量 $p_{il}^{b,n+1/2}$ 为

$$p_{il}^{b,n+1/2} = \bar{p}_{il}^{b,n+1/2} + \Delta t^n f_{il}^{b,c,n} \quad (4-52)$$

并满足式(4-44), 有

$$(m_I^{s,n} p_{il}^{r,n+1/2} - m_I^{r,n} p_{il}^{s,n+1/2}) n_{il}^{r,n} = 0 \quad (4-53)$$

将式(4-52)代入式(4-53), 得法向接触力 $f_I^{\text{nor},n} = f_{il}^{r,c,n} n_{il}^{r,n} = -f_{il}^{s,c,n} n_{il}^{r,n}$, 有

$$f_I^{\text{nor},n} = -\frac{(m_I^{s,n} \bar{p}_{il}^{r,n+1/2} - m_I^{r,n} \bar{p}_{il}^{s,n+1/2}) n_{il}^{r,n}}{(m_I^{r,n} + m_I^{s,n}) \Delta t} = f_{I,1}^{\text{nor},n} + f_{I,2}^{\text{nor},n} \quad (4-54)$$

其中

$$f_{I,1}^{\text{nor},n} = -\frac{(m_I^{s,n} p_{il}^{r,n-1/2} - m_I^{r,n} p_{il}^{s,n-1/2}) n_{il}^{r,n}}{(m_I^{r,n} + m_I^{s,n}) \Delta t} \quad (4-55)$$

$$f_{I,2}^{\text{nor},n} = -\frac{(m_I^{s,n} f_{il}^{r,n} - m_I^{r,n} f_{il}^{s,n}) n_{il}^{r,n}}{(m_I^{r,n} + m_I^{s,n})} \quad (4-56)$$

如果物体 r 和 s 完全光滑, 则它们在切向上的运动相互独立, 切向接触力为零。此时, $f_{il}^{r,c,n} = f_I^{\text{nor},n} n_{il}^{r,n}$ 。如果两个物体之间存在摩擦, 它们在切向上可能处于粘着状态或滑动状态。此时, 切向接触力等于摩擦力。为计算摩擦力, 需先计算切向单位矢量, 有

$$t_{il}^{r,n} = \frac{\gamma_{il}^{\text{tan},n-1/2}}{|\gamma_{il}^{\text{tan},n-1/2}|}, \quad t_{il}^{r,n} = -t_{il}^{s,n} \quad (4-57)$$

其中

$$\gamma_{il}^{\text{tan},n-1/2} = (v_{il}^{r,n-1/2} - v_{il}^{s,n-1/2}) - (v_{jl}^{r,n-1/2} - v_{jl}^{s,n-1/2}) n_{jl}^{r,n} \quad (4-58)$$

为 $t^{n-1/2}$ 时刻两物体在结点 I 处的切向相对速度。

本文采用库仑摩擦准则(Coulomb friction)计算摩擦力, 则两个物体之间的最大静摩擦力为 $\mu f_I^{\text{nor},n}$ 。假设两个物体在接触面切向上处于粘着状态, 则真实动量 $p_{il}^{b,n+1/2}$ 在切向上满足条件

$$(m_I^{s,n} p_{il}^{r,n+1/2} - m_I^{r,n} p_{il}^{s,n+1/2}) t_{il}^{r,n} = 0 \quad (4-59)$$

将式(4-52)代入式(4-59), 可得切向摩擦力 $f_I^{\text{tan},n} = f_{il}^{r,c,n} t_{il}^{r,n} = -f_{il}^{s,c,n} t_{il}^{r,n}$ 的表达式

$$f_I^{\text{tan},n} = \frac{(m_I^{s,n} \bar{p}_{il}^{r,n+1/2} - m_I^{r,n} \bar{p}_{il}^{s,n+1/2}) t_{il}^{r,n}}{(m_I^{r,n} + m_I^{s,n}) \Delta t}$$

$$= \frac{(m_I^{s,n} p_{il}^{r,n-1/2} - m_I^{r,n} p_{il}^{s,n-1/2}) t_{il}^{r,n}}{(m_I^{r,n} + m_I^{s,n}) \Delta t} + \frac{(m_I^{s,n} f_{il}^{r,n} - m_I^{r,n} f_{il}^{s,n}) t_{il}^{r,n}}{(m_I^{r,n} + m_I^{s,n})} \quad (4-60)$$

摩擦力不能超过最大静摩擦力，因此摩擦力最终可写为

$$f_I^{\text{tan},n} = \min(\mu f_I^{\text{nor},n}, f_I^{\text{tan},n}) t_{il}^{r,n} \quad (4-61)$$

综上，施加到物体 b 的接触力为

$$f_{il}^{b,c,n} = f_I^{\text{nor},n} n_{il}^{b,n} + f_I^{\text{tan},n} t_{il}^{b,n} \quad (4-62)$$

4.1.2.5 动量修正

物质点和单元的应变分别基于背景网格结点速度和有限元结点速度计算，因此在此在计算应变之前应保证两速度场之间满足非嵌透条件。耦合物质点有限元法在背景网格上施加非嵌透条件，但是在每一个时间步末丢弃已满足非嵌透条件的背景网格，并在下一个时间步中采用新的规则背景网格。此时，由各物体动量映射获得的新背景网格速度场就不一定满足非嵌透条件(4-1)，需要进行调整，否则在计算应变时可能引入人为数值扰动导致应力计算不稳定^[115]。因此，在背景网格质量和动量初始化后，对背景网格接触结点 I 的动量 $p_{il}^{b,n-1/2}$ 进行修正使其满足非嵌透条件(4-1)，修正后的动量用 $p_{il}^{*b,n-1/2}$ 表示。

物体 r 和 s 在结点 I 处的初始动量经修正后，应满足临界嵌透条件(4-44)式，即

$$m_I^{s,n} p_{il}^{*r,n+1/2} n_{il}^{r,n} - m_I^{r,n} p_{il}^{*s,n+1/2} n_{il}^{r,n} = 0 \quad (4-63)$$

根据动量守恒定理，修正前后的法向动量应相等，有

$$(p_{il}^{r,n+1/2} + p_{il}^{s,n+1/2}) n_{il}^{r,n} = (p_{il}^{*r,n+1/2} + p_{il}^{*s,n+1/2}) n_{il}^{r,n} \quad (4-64)$$

联立上述两式，得

$$p_{il}^{*r,n+1/2} = p_{il}^{r,n+1/2} - \frac{(m_I^{s,n} p_{il}^{r,n-1/2} - m_I^{r,n} p_{il}^{s,n-1/2}) n_{il}^{r,n}}{(m_I^{r,n} + m_I^{s,n}) \Delta t} \Delta t n_{il}^{r,n} \quad (4-65)$$

将式(4-55)代入式(4-65)，得

$$p_{il}^{*r,n+1/2} = p_{il}^{r,n+1/2} + f_{I,1}^{\text{nor},n} \Delta t n_{il}^{r,n} \quad (4-66)$$

由此可知，法向接触力式(4-54)中第一项 $f_{I,1}^{\text{nor},n}$ 的物理含义为：将背景网格接触结点的初始动量场修正为满足非嵌透条件的动量场所应施加的接触力。那么，法向接触力式(4-54)中的第二项 $f_{I,2}^{\text{nor},n}$ 的物理含义是什么呢？下面进一步分析。

假设力 $f_{I,1}^{\text{nor},n}$ 在背景网格动量场初始化后已经施加，将 $p_{il}^{*b,n+1/2}$ 取代 $p_{il}^{b,n+1/2}$ 代入法向接触力式(4-54)中，有

$$f_I^{\text{nor},n} = f_{I,2}^{\text{nor},n} \quad (4-67)$$

此时，背景网格接触结点 I 的法向加速度为

$$m_I^{r,n} a_{il}^{r,n} n_{il}^{r,n} = f_I^{r,\text{nor},n} \quad (4-68)$$

$$m_I^{s,n} a_{il}^{s,n} n_{il}^{s,n} = f_I^{s,\text{nor},n} \quad (4-69)$$

其中

$$f_I^{r,\text{nor},n} = \hat{f}_I^{r,\text{nor},n} + f_{I,2}^{\text{nor},n} \quad (4-70)$$

$$f_I^{s,\text{nor},n} = \hat{f}_I^{s,\text{nor},n} - f_{I,2}^{\text{nor},n} \quad (4-71)$$

式中 $\hat{f}_I^{r,\text{nor},n}$ 表示由式(4-49)和式(4-50)计算的背景网格结点力在接触法向上的分量。综合式(4-49)、(4-67)、(4-50)、(4-68)和(4-69)，可得

$$a_{il}^{r,n} n_{il}^{r,n} = a_{il}^{s,n} n_{il}^{s,n} \quad (4-72)$$

上式表明接触面上加速度连续，所以法向接触力中的第二项 $f_{I,2}^{\text{nor},n}$ 的物理含义为：为保证背景网格接触结点法向加速度连续所应施加的接触力。

综上，分别施加接触力 $f_{I,1}^{\text{nor},n}$ 和 $f_{I,2}^{\text{nor},n}$ 后，可保证计算应变时的背景网格速度场满足非嵌透条件。由于有限元离散区域的单元应变计算通过单元结点速度场计算，所以在背景网格接触结点速度修正后，采用接触法向力 $f_{I,1}^{\text{nor},n}$ 对有限元接触结点进行速度修正，即

$$\tilde{v}_{it}^{s,n-1/2} = v_{it}^{s,n-1/2} + \Delta t^n \sum_{l=1}^{n_g} n_{il}^s f_{I,1}^{\text{nor},n} N_{It}^n / m_t^{s,n} \quad (4-73)$$

4.1.3 应力更新

在耦合物质点有限元法中，物质点离散区域在物质点上进行应力更新，有限元离散区域则在高斯积分点上进行应力更新。两者采用相同的更新方式，有

$$\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^n + \dot{\sigma}_{ij}^{n-1/2} \Delta t^{n+1/2} \quad (4-74)$$

其中 $\dot{\sigma}_{ij}$ 表示应力率，通过焦曼应力率 σ_{ij}^∇ 进行计算，即

$$\dot{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^\nabla + \sigma_{il} \Omega_{lj} + \sigma_{jl} \Omega_{li} \quad (4-75)$$

其中 σ_{ij}^{∇} 通过相应的本构关系由应变率 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 计算。在物质点和有限元离散区域，有限元高斯点的能量方程积分同物质点能量方程积分方式一致，详见第2.4节内容。

以三维问题为例，背景网格形函数采用六面体单元的形函数。在 Ω_M 材料区域中，物质点的应变率和旋率张量的计算公式分别为：

$$\dot{\epsilon}_{ijp} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^8 (N_{lp,j} v_{il} + N_{lp,i} v_{jl}) \quad (4-76)$$

$$\Omega_{ijp} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^8 (N_{lp,j} v_{il} - N_{lp,i} v_{jl}) \quad (4-77)$$

在 Ω_F 材料区域，六面体单元高斯点的应变率和旋率张量的计算公式分别为：

$$\dot{\epsilon}_{ije} = \frac{1}{2} \sum_{d=1}^8 (N_{de,j} v_{id} + N_{de,i} v_{jd}) \quad (4-78)$$

$$\Omega_{ije} = \frac{1}{2} \sum_{d=1}^8 (N_{de,j} v_{id} - N_{de,i} v_{jd}) \quad (4-79)$$

4.1.4 人工体积粘性

在本算法中，物质点离散区域和有限元离散区域均采用人工体积粘性来处理冲击波的强间断，具体详见第2.5节相关内容。在此，仅给出人工体积粘性力 q 的计算公式，有

$$q = \begin{cases} c_0 \rho L_e^2 (\dot{\epsilon}_{ii})^2 - c_1 \rho L_e c \dot{\epsilon}_{ii} & \text{当 } \dot{\epsilon}_{ii} < 0 \\ 0 & \text{当 } \dot{\epsilon}_{ii} \geq 0 \end{cases} \quad (4-80)$$

其中， c_0 和 c_1 为无量纲参数， c 表示当地声速， $\dot{\epsilon}_{ii}$ 表示体积应变率。 L_e 在物质点离散区域中表示背景网格单元特征尺度，在有限元离散区域中表示单元的特征尺度。参照第2章相关内容，采用人工体积粘性项对各自的压力和临界时间步长进行修正。

4.2 算法实现

在耦合物质点有限元法中，积分格式采用能量守恒性较好的USF格式，下面给出单步内的计算流程：

1. 重新定义背景网格

对物质点离散体 r 内的物质点遍历循环, 计算背景网格上的结点质量 $m_I^{r,n}$ 和动量 $p_{il}^{r,n-1/2}$

$$m_I^{r,n} = \sum_{p=1}^{n_p} m_p^r N_{Ip}^n \quad (4-81)$$

$$p_{il}^{r,n-1/2} = \sum_{p=1}^{n_p} m_p^r v_{ip}^{r,n-1/2} N_{Ip}^n \quad (4-82)$$

为了检测接触界面, 将有限元离散体外表面的有限元结点的结点质量 $m_I^{s,n}$ 和动量 $p_{ii}^{s,n-1/2}$ 映射到背景网格上, 计算公式同式(4-81)和(4-82)。

2. 施加边界条件

依据具体的边界条件, 将位于材料边界上的背景网格结点的动量分量进行置零操作。如, 对于固定边界条件, 即令 $p_I^{n-1/2} = 0$ 。

3. 接触判断

对背景网格结点遍历循环, 如果结点同时被物体 r 和 s 占据, 则依据第4.1.2.3节内容计算表面法向量, 根据式(4-45)进行接触判断。如果发生接触, 则将该背景网格标记为背景网格接触结点, 将对背景网格接触结点有影响的有限元结点标记为有限元接触结点, 同时依据第4.1.2.5节内容对背景网格接触结点和有限元接触结点进行速度修正并用于应变计算; 如果未发生接触, 则不做任何特殊处理。

4. 应力和密度更新

- (a) 依据第4.1.3节内容分别对物质点离散区域和有限元离散区域内的物质点和单元高斯点进行应力更新;
- (b) 物质点和单元高斯点的密度更新公式统一为

$$\rho^n = \rho^{n-1} / (1 + \Delta \varepsilon_{ii}^{n-1/2}) \quad (4-83)$$

其中 $\Delta \varepsilon_{ii}^{n-1/2} = \dot{\varepsilon}_{ii} \Delta t$ 表示体积应变增量。

5. 计算背景网格结点力和有限元结点力

- (a) 在 Ω_M 区域内, 背景网格的结点内力 $f_{il}^{r,int,n}$ 和结点外力 $f_{il}^{r,ext,n}$ 分别为

$$f_{il}^{r,int,n} = - \sum_{p=1}^{n_p} N_{Ip,j}^n \sigma_{ijp}^n \frac{m_p}{\rho_p^{n+1}} \quad (4-84)$$

$$f_{il}^{r,ext,n} = \sum_{p=1}^{n_p} N_{Ip}^n \bar{t}_{ip} h^{-1} \frac{m_p}{\rho_p^n} + \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{Ip}^n f_{ip}^n \quad (4-85)$$

(b) 在 Ω_F 区域内, 有限元结点的结点力为

$$f_{id}^n = f_{id}^{\text{ext},n} + f_{id}^{\text{int},n} + f_{id}^{\Gamma,n} \quad (4-86)$$

其中 $f_{ik}^{\text{int},n}$ 、 $f_{ik}^{\text{ext},n}$ 、 $f_{ik}^{\Gamma,n}$ 分别为结点内力、结点外力和沙漏粘性阻尼力, 分别采用式(4-21)、(4-22)和(4-23)计算。同时施加边界条件, 如对于固定边界条件, 即令 $f_d^n = 0$ 。

(c) 如果有接触发生, 利用式(4-50)将有限元接触结点的结点力映射到背景网格上, 然后计算背景网格接触结点上的接触力, 即分别采用式(4-56)计算接触法向力 $f_{I,2}^{\text{nor},n}$, 式(4-61)计算切向力 $f_I^{\text{tan},n}$ 。

6. 积分动量方程并更新物质点

(a) 利用下式求解背景网格结点动量方程

$$p_{il}^{b,n+1/2} = \tilde{p}_{il}^{b,n-1/2} + \Delta t^n (f_{il}^{b,n} + f_{I,2}^{\text{nor},n} n_{il}^{b,n} + f_I^{\text{tan},n} t_{il}^{b,n}) \quad (4-87)$$

(b) 利用下式更新物质点的速度

$$v_{ip}^{r,n+1/2} = v_{ip}^{r,n-1/2} + \Delta t^n \sum_{I=1}^{n_g} [f_{il}^{r,n} + (f_{I,1}^{\text{nor},n} + f_{I,2}^{\text{nor},n}) n_{il}^{r,n} + f_I^{\text{tan},n} t_{il}^{r,n}] N_{Ip}^n / m_I^n \quad (4-88)$$

利用式(4-29)更新物质点的位置。

7. 更新有限元结点速度和位置

在有限元离散区域, 有限元接触结点的速度计算式为

$$v_{it}^{n+1/2} = v_{it}^{n-1/2} + \Delta t^n \sum_{I=1}^{n_g} (f_{il}^{r,n} + f_{I,2}^{\text{nor},n} n_{il}^{r,n} + f_I^{\text{tan},n} t_{il}^{r,n}) N_{It}^n / m_I^n + f_{ik}^{\Gamma,n} \Delta t^n / m_k \quad (4-89)$$

有限元接触结点位置更新采用式(4-31), 对于其他的有限元结点分别采用式(4-33)和(4-34)更新位置和速度。

8. 丢弃已经变形的背景网格, 在下一个时间步中采用新的规则背景网格, 同时重新确定有限元接触结点。

在本算法中, 物质点离散体与有限元离散体的接触关系在背景网格上定义, 并在背景网格结点上计算接触力。与有限元接触算法相比, 该接触算法为结点-结点的接触关系。此外, 该方法也可计算有限元离散体与有限元离散体间的接触问题。

4.3 算法验证

4.3.1 共轴撞击问题

为了考查耦合物质点有限元法的精度和效率，考虑两截面尺寸相同的杆 B_1 和 B_2 纵向共轴撞击问题，如图4.9所示。假设撞击前杆中的初应力均为零，初始速度分别为 v_1 和 v_2 ，长度分别为 L_1 和 L_2 。由一维应力波理论，可得该问题的解析解。此处，计算了两个完全相同的弹性杆和弹塑性杆的共轴撞击以及非对称的弹性杆共轴撞击问题。为了采用三维程序模拟，令弹性杆的横截面积为 $3 \times 3 \text{ mm}^2$ ，泊松比为 $\nu=0$ ，并采用平面应变假设。同时采用物质点法模拟了该问题，物质点间距为 0.25 mm ，背景网格结点间距为 0.5 mm 。

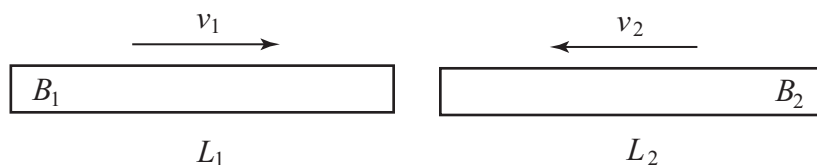


图 4.9 两截面尺寸相同的杆纵向共轴撞击

4.3.1.1 弹性杆对称撞击

首先计算两个完全相同的弹性杆共轴撞击问题，杆长为 $L_1=L_2=21 \text{ mm}$ ，碰撞速度为 $v_1=v_2=100 \text{ m/s}$ ，弹性杆材料的各项参数为 $\rho_0=2.75 \times 10^{-3} \text{ g/mm}^3$ ， $E=6.5 \times 10^4 \text{ MPa}$ ，材料间的摩擦系数为零。

杆材料的弹性波速为 $c_0=\sqrt{E/\rho_0}=4.8617 \times 10^3 \text{ m/s}$ ，由一维应力波理论可知，撞击面处的应力为

$$\sigma = -\frac{v_1 + v_2}{\frac{1}{\rho_0 c_0} + \frac{1}{\rho_0 c_0}} = -\sqrt{E\rho_0}v_1 = -1.34 \times 10^3 \text{ MPa} \quad (4-90)$$

两杆从开始接触到相互分离的时间为 $t=2L_1/c_0=8.63 \mu\text{s}$ 。由一维应力波理论中的特征线法可知各时刻杆中应力的分布情况。

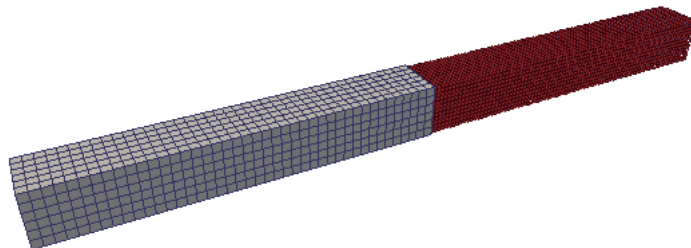


图 4.10 弹性杆的离散模型

两个弹性杆初始间距为零，离散模型如图5.7所示。其中，弹性杆 B_1 用规则的六面体单元离散，单元尺寸为0.5mm，弹性杆 B_2 采用均匀分布的物质点离散，物质点间距为0.25mm，背景网格结点间距为0.5mm。为得到光滑的应力曲线，物质点离散区域采用第二类形函数。模拟时间为 $15\mu\text{s}$ 。

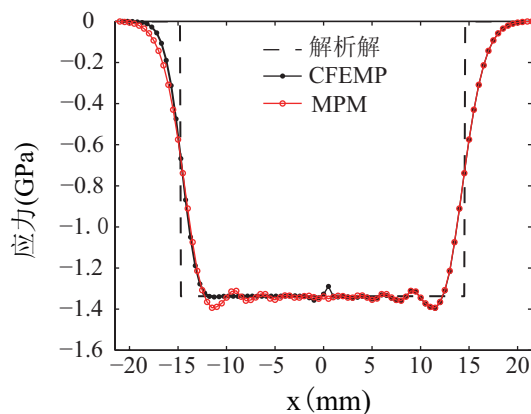


图 4.11 两弹性杆撞击过程中 $3.0\mu\text{s}$ 时杆上的应力分布曲线

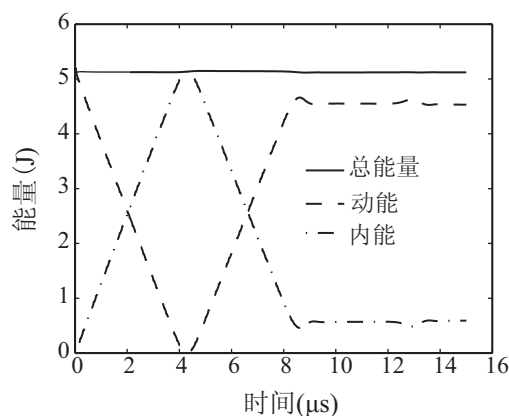


图 4.12 两弹性杆撞击过程中的能量变化曲线

CFEMP和MPM计算结果表明两个弹性杆在 $8.7\mu\text{s}$ 开始分离，与解析解 $t=8.63\mu\text{s}$ 吻合。进一步，图4.11给出了 $3.0\mu\text{s}$ 时刻杆中应力分布曲线的数值解和解析解。对比图4.11可知，杆 B_1 部分CFEMP的计算结果较MPM光滑，这是由于物质点法采用的物质点积分并非高斯积分不能严格保证对多项式积分的精度所致。同时也表明，在模拟小变形问题时，有限元的求解精度高于物质点法。两个弹性杆在撞击过程中的能量变化曲线如图4.12所示，撞击过程中动能转化为内能，撞击结束后动能恢复，但并未恢复到撞击前的水平，这是由于撞击结束后，弹性杆内仍然有应变能。此外，表4.1从离散模型规模和计算效率对CFEMP与MPM进行了比较。结果表明，CFEMP和MPM所花费的CPU时间大约

是1:2, 并且CFEMP的杆 B_1 部分计算精度好于MPM。

表 4.1 两弹性杆共轴撞击问题数值模拟效率比较

	单元数	物质点数	时间步数	CPU(s)
CFEMP	1512	12096	695	50
MPM	—	24192	695	97

在CFEMP中, 有两种网格离散尺寸设置, 分别是有限单元的尺寸和背景网格结点间距。此处, 定义有限单元尺寸与背景网格结点间距比值为 R 。为了考察两种单元尺寸比值对计算结果的影响, 考虑四种 R 值, 分别是 $R=0.5, 1, 2, 3$ 。固定背景网格结点间距为0.5mm, 物质点间距为0.25mm, 则每种工况中有限单元尺寸分别为0.25mm、0.5mm、1mm和1.5mm。图4.13中给出了各种工况下 $3.0\mu\text{s}$ 时杆上的应力分布曲线。对比图4.13可知, 当 R 值小于2时, CFEMP数值解与解析解吻合较好, 而当 R 值大于1时, 接触面处数值振荡剧烈并伴随不同程度的界面穿透。由于CFEMP在背景网格上建立了结点-结点类型的接触算法, 当 R 越大时, 单元尺寸与背景网格结点间距匹配性越差将导致接触点不匹配。因此, 为保证计算精度, 在CFEMP中需保证 $R \leq 1$ 。

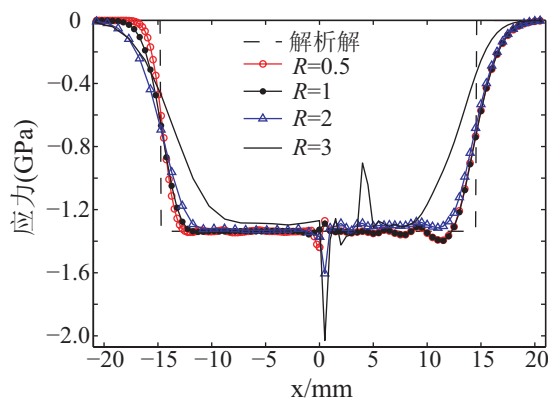


图 4.13 不同 R 取值, 两弹性杆撞击过程中 $3.0\mu\text{s}$ 时杆上的应力分布曲线

4.3.1.2 弹塑性杆对称撞击

下面考查两完全形同的弹塑性材料杆对称共轴撞击问题。杆材料的各项参数为 $\rho=2.75 \times 10^{-3}\text{g/mm}^3$, $E=6.5 \times 10^4\text{MPa}$, $E_T=3.0 \times 10^4\text{MPa}$, $\sigma_y=300\text{MPa}$ 。此处, 材料的屈服临界速度为 $v_y=\sigma_y/\sqrt{E\rho_0}=22.439\text{m/s}$ 。为在杆撞击过程中产生塑性波, 杆的撞击速度为 $v_1=v_2=100\text{m/s}$ 。其他几何参数和离散参数均采用弹性杆对称撞击问题中相应参数设置($R=1$)。由应力波理论可知, 在该对称弹塑性杆撞击过程

中会产生双波结构：弹性波和塑性波将以不同幅值和速度沿着杆传播，波速分别为 $c_e = \sqrt{E/\rho_0} = 4.8617 \times 10^3 \text{ m/s}$ 和 $c_p = \sqrt{E_T/\rho_0} = 3.3029 \times 10^3 \text{ m/s}$ 。弹性波值为屈服应力值，而塑性波值为

$$\sigma_1 = -(\sigma_y + \sqrt{E_T \rho_0 (v_1 - v_y)}) = -1.005 \times 10^3 \text{ MPa} \quad (4-91)$$

图4.14给出了撞击过程 $3.7\mu\text{s}$ 时刻两杆中弹性和塑性应力分布曲线的数值解和解析解

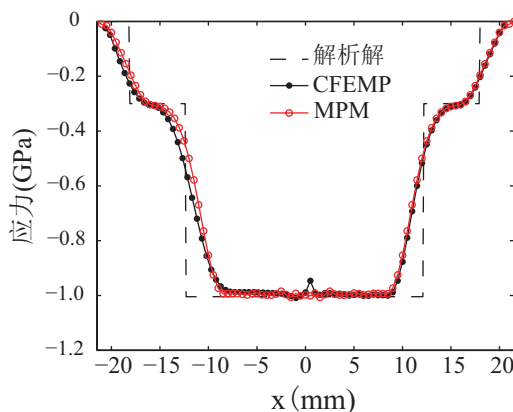


图 4.14 两弹塑性杆撞击过程中 $3.7\mu\text{s}$ 时杆上的应力分布曲线

解。对比可知，数值解与解析解吻合，验证了CFEMP的精度。

4.3.1.3 不同长度的弹性杆撞击

最后，考虑非对称弹性杆的撞击问题。此处， $L_1 = 42 \text{ mm}$ ， $L_2 = 21 \text{ mm}$ 。为保证撞击面上波阻抗(ρc)匹配，设杆 B_1 材料的弹性模量为 $E_1 = 6.5 \times 10^4 \text{ MPa}$ ，密度为 $\rho_1 = 2.75 \times 10^{-3} \text{ g/mm}^3$ ；杆 B_2 材料的弹性模量为 $E_2 = 3.25 \times 10^4 \text{ MPa}$ ，密度为 $\rho_2 = 5.5 \times 10^{-3} \text{ g/mm}^3$ 。由此可知，杆 B_1 与 B_2 弹性波速比为 2:1，长度比为 2:1。因此，两个杆撞击分离时间为 $t = 17.28\mu\text{s}$ ，模拟时间设为 $20.0\mu\text{s}$ 。采用FEM离散杆 B_1 ，用MPM离散杆 B_2 ，其他的参数采取第4.3.1.1节中的设置($R=1$)。

CFEMP和MPM计算结果表明两个不同长度弹性杆在 $17.3\mu\text{s}$ 时开始分离，与解析解 $t = 17.28\mu\text{s}$ 吻合。图4.15(a)给出了 $6.8\mu\text{s}$ 时杆中应力分布曲线的解析解和数值解。4.15(b)则给出了两杆共轴撞击过程中的能量变化曲线，表明了该算法的能量守恒性。另外，表4.2从离散模型规模和计算效率对CFEMP和MPM进行了比较，两种方法所花费的CPU时间大约是1:3。结果表明CFEMP的效率高于MPM并依赖于有限元离散区域相对物质点离散区域的比值，当该比值越大，CFEMP的效率越高。

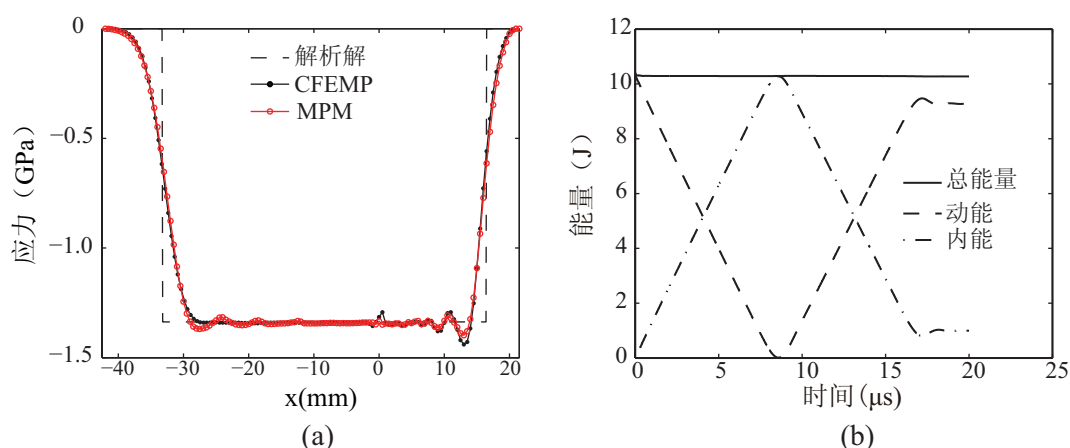


图 4.15 两非对称弹性杆共轴撞击：(a) $6.8\mu\text{s}$ 时杆上的应力分布曲线，(b) 撞击过程中的能量变化曲线

表 4.2 两非对称弹性杆共轴撞击问题数值模拟效率比较

	单元数	物质点数	时间步数	CPU(s)
CFEMP	3024	12096	2756	212
MPM	—	36288	2777	582

4.3.2 斜坡上球体滚动问题

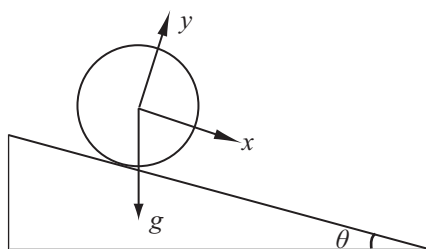


图 4.16 斜坡上球体滚动问题

为进一步考查CFEMP的计算精度和效率，考虑重力作用下球体在斜坡上的滚动问题，如图4.16所示。其中， θ 表示斜坡的倾角， g 表示重力加速度，方向如图中所标。球与斜坡之间的摩擦系数为 μ 。由刚体动力学可知，当斜坡倾角和摩擦系数满足条件 $\tan\theta > 3\mu$ 时，球体在坡面上做既滑又滚运动；否则，球体在坡面上做纯滚动。依据图4.16中坐标系设置，球体质心的运动方程为

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + \frac{1}{2}gt^2(\sin\theta - \mu\cos\theta) & \text{当 } \tan\theta > 3\mu \text{ (既滚又滑)} \\ x_0 + \frac{5}{14}gt^2\sin\theta & \text{当 } \tan\theta \leq 3\mu \text{ (纯滚动)} \end{cases} \quad (4-92)$$

其中 $x_0=0$ 为球体质心在 x 方向的初始位置。

在该问题中，球体的半径为 $R=1.6\text{m}$ ，初始速度为零。坡面用一长方体模拟，其尺寸为 $20\text{m} \times 4\text{m} \times 0.8\text{m}$ 。球体和长方体均采用弹性材料近似模拟刚体，其中球体材料的密度为 $\rho=1000\text{kg/m}^3$ ，弹性模量为 $E=4.2 \times 10^6\text{Pa}$ ，泊松比为 $\nu=0.4$ ；长方体材料的相应参数为 $\rho=10000\text{kg/m}^3$ ， $E=4.2 \times 10^7\text{Pa}$ ， $\nu=0.4$ 。在计算中，长方体的底面固定，模拟时间设为 2s 。



图 4.17 斜坡上球体滚动问题的离散模型

离散模型如图4.17所示，采用规则的六面体单元离散长方体，用均匀布置的物质点离散球体。其中，单元尺寸为 0.2m ，物质点间距为 0.1m ，背景网格结点间距为 0.2m ，保证 $R=1$ 。同时采用物质点法也模拟了该问题，物质点间距取为 0.1m ，背景网格结点间距取为 0.2m 。

在该算例中，考虑4种工况：在工况1和工况2中，倾角均为 $\theta=\pi/4$ ，而摩擦系数分别为 $\mu=0.1$ 和 0.4 ；在工况3和4中，倾角均为 $\theta=\pi/3$ ，而摩擦系数分别为 $\mu=0.2$ 和 0.6 。由球体纯滚动条件可知，工况1和4的参数设置决定了球体做既滚又滑运动，在其他工况中球体则做纯滚动运动。

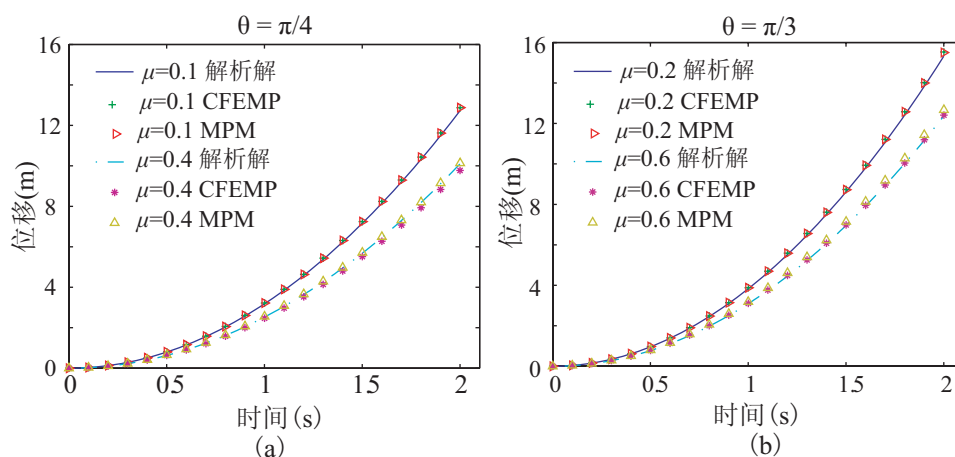


图 4.18 球体质心位置解析解与数值解的比较：(a) 工况1和2，(b) 工况3和4

图4.18给出了四种工况中球体质心位移的数值解和解析解。由图4.18(a)可知，工况1和工况2数值解与解析解非常接近；由图4.18(b)可知，工况3和4中球体

表 4.3 工况1中数值模拟效率比较

	单元数	物质点数	时间步数	CPU(s)
CFEMP	8000	17259	3391	144
MPM	–	81259	3622	456

质心位置数值解和解析解也非常接近，表明CFEMP中有限元离散体与物质点离散体间考虑摩擦时的接触力计算也是正确的。此外，表4.3比较了CFEMP和MPM模拟工况1时的计算效率，在保证精度一致的情况下，两种方法所花费的CPU时间大约是1:3，表明CFEMP的效率高于MPM。

4.4 算法应用

通过第4.3节中的算例验证了耦合物质点有限元法的精度，同时也表明该方法的效率高于物质点法，并依赖于问题中有限元离散区域相对物质点离散区域的比值。下面，采用该方法模拟工程中的侵彻和流固耦合问题，其中第一个是卵形弹斜侵彻金属铝靶体的问题，第二个问题是水柱在重力作用下的垮塌并与弹性障碍物相互作用的过程。

4.4.1 卵形弹斜侵彻问题

此处，考虑高强度钢卵形弹侵彻倾斜角为 30° 的A6061-T651铝合金靶体的问题，相关实验数据见文献[204]。其中，卵形弹几何结构如图4.19所示，靶体尺寸为 $110\text{mm} \times 110\text{mm} \times 26.3\text{mm}$ (厚度)。在实验中，虽然弹体形貌保持完整，但观察

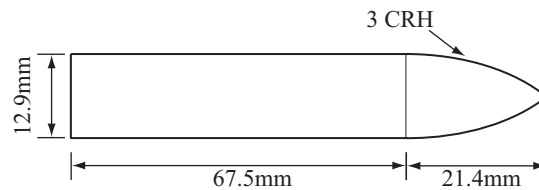


图 4.19 卵形弹几何尺寸

到了明显的永久变形。因此，采用各向同性弹塑性本构模型模拟弹体，材料参数从文献[204]中提供的高强度钢应力应变曲线拟合得出，列于表4.4。

表 4.4 弹体弹塑性模型材料参数

$\rho(\text{g/mm}^3)$	$E(\text{GPa})$	ν	$\sigma_y(\text{GPa})$	$E_T(\text{GPa})$
0.00785	202	0.3	1.43	14.759

靶体材料的密度为 $\rho=2.7 \times 10^{-3} \text{g/mm}^3$ ，偏应力采用Johnson-Cook模型计算，参数列于表4.5^[204,205]，压力采用Mie-Grüneisen状态方程更新，有

$$p = p_H(1 - \frac{\gamma\mu}{2}) + \gamma_0 E \quad (4-93)$$

其中 γ 是Grüneisen参数，满足关系式 $\gamma_0\rho_0 = \gamma\rho$ ， $\mu = \rho/\rho_0 - 1$ 为体积压缩系数。依据不同的 μ 值， p_H 值不同，有

$$p_H = \begin{cases} \rho_0 c_0^2 [\mu + (2s-1)\mu^2 + (s-1)(3s-1)\mu^3] & \text{当 } \mu \geq 0 \\ \rho_0 c_0^2 \mu & \text{当 } \mu < 0 \end{cases} \quad (4-94)$$

其中， c_0 、 s 和 γ_0 为Grüneisen状态方程参数。靶体材料的 $c_0=5350 \text{m/s}$ ， $s=1.34$ 和 $\gamma_0=2.0$ ，取自文献[204,205]。采用等效塑性应变失效模型计算侵彻过程中靶体材料的失效，失效值取为 $\varepsilon_{\text{fail}}=1.6$ 。当材料的等效塑性应变值超过该失效值后，材料的偏应力便置为零。

表 4.5 铝Johnson-Cook模型材料参数

E (MPa)	ν	A (MPa)	B (MPa)	n	C	m	T_{melt} (K)	T_{room} (K)
69	0.3	262	52.1	0.41	0	0.859	875	293

在计算中，分别采用有限元离散弹体，用物质点离散靶体，弹体与靶体间的摩擦系数设为零。首先，考虑初始弹速为 $v_0=575 \text{m/s}$ 的侵彻实验，采用四种不同的离散尺寸工况进行网格收敛性分析，具体参数设置列于表4.6。在各种工况中，物质点间距取为所在工况中背景网格结点间距的一半，并且有限单元尺寸的最大值为背景网格结点间距，弹体剩余速度计算结果 v_r 列于表4.6中。由表4.6可知，随着单元尺寸的降低，数值解收敛于实验值。

表 4.6 收敛性分析

工况 编号	背景网格 间距(mm)	靶体 物质点数	弹体 单元数	v_r (m/s)
1	3	90593	5440	286
2	2	314600	18144	418
3	1.5	756315	42752	433
4	1	2516800	145152	456
实验	—	—	—	455

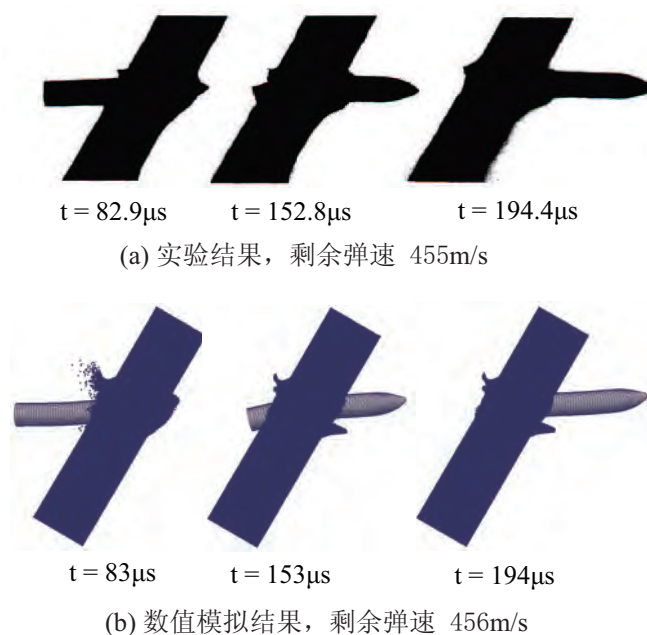
图 4.20 弹靶相互作用的实验结果和模拟结果 $v_0 = 575\text{m/s}$

图4.20比较了不同时刻弹靶相互作用的数值模拟结果和实验结果，其中数值解取自工况4的计算结果。对比图4.20可知，弹体的变形过程与实验结果吻合。此外，在计算过程中，工况4中的总能量相对误差变化不超过5.5%，如图4.21所示。

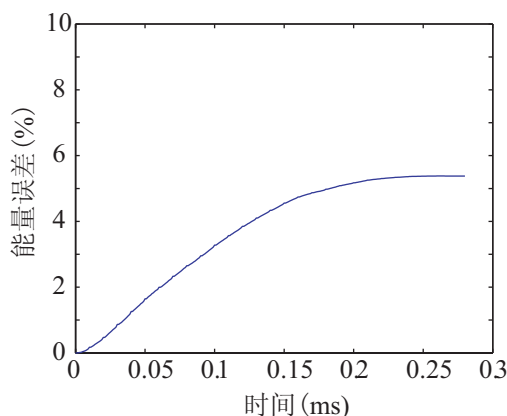


图 4.21 弹体侵彻过程中的总能量误差曲线，取工况4的计算结果

为了进一步考查CFEMP的适用性，模拟了不同初始速度下卵形弹的侵彻过程，离散参数同工况4中的设置。此外，采用物质点法也模拟了相同的问题。表4.7给出了不同初始速度下弹体剩余速度的数值解和实验结果。对比表4.7中数据可知，CFEMP计算的剩余弹速与MPM计算结果有所差异，但与实验结果更接近。当弹体初始速度为 $v_0=400\text{m/s}$ 时，弹体的运行轨迹和变形机制与初速 $v_0=575\text{m/s}$ 的实验结果不同。因此，图4.22比较了 $v_0=400\text{m/s}$ 时弹体侵彻过程中

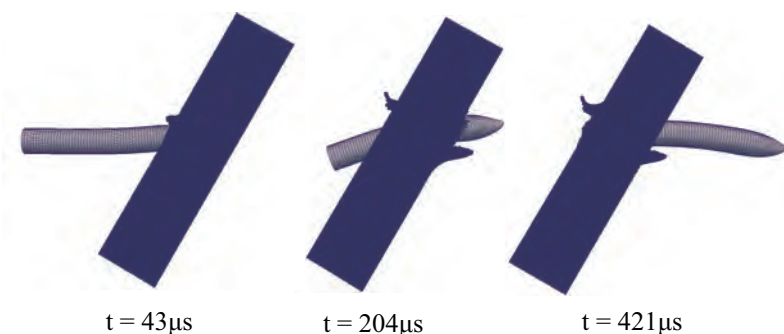
弹靶相互作用的实验结果和CFEMP的计算结果，表明CFEMP计算的弹体弯曲和偏转与实验结果吻合。

表 4.7 不同初始速度 v_0 下弹体的剩余弹速 v_r (m/s)

v_0	实验	CFEMP	MPM
400	217	229	241
446	288	293	306
575	455	456	471
730	655	631	652



(a) 实验结果，剩余弹速 217m/s



(b) 数值模拟结果，剩余弹速 229m/s

图 4.22 弹靶相互作用的实验结果和模拟结果 $v_0 = 400\text{m/s}$

综上，表4.7表明耦合物质点有限元法计算的弹体剩余速度比物质点法更接近实验值，而图4.20和4.22表明耦合物质点有限元模拟的弹靶之间相互作用过程与实验结果吻合。

4.4.2 流固耦合问题

此处，采用CFEMP计算了一个二维流固耦合问题：凹形槽内一水柱在重力作用下垮塌并流经一弹性障碍物，如图4.23所示。其中，水柱的宽为 $L=146\text{mm}$ ，高为 $2L$ ；弹性障碍物的宽为 $b=12\text{mm}$ ，高为 80mm ；水柱与障碍物之间的距离为 L 。假设不存在空气，水柱在重力加速度作用下发生垮塌并自由流动。采用Mie-

Grüneisen状态方程计算水的压力，材料参数列于表4.8，采用弹性本构模型模拟障碍物，障碍物材料的各项参数为 $\rho=2.5 \times 10^{-3} \text{g/mm}^3$ ， $E=1 \text{MPa}$ ， $\nu=0$ 。

在计算中，为了采用三维程序计算，令水柱和障碍物的厚度为4mm，同时施加平面应变条件。采用物质点离散水柱，物质点间距取为2mm，质点个数为10608，背景网格结点间距取为4mm，但在厚度方向尺寸为4.2mm；采用有限元离散障碍物，单元尺寸为4mm，单元总数为60。

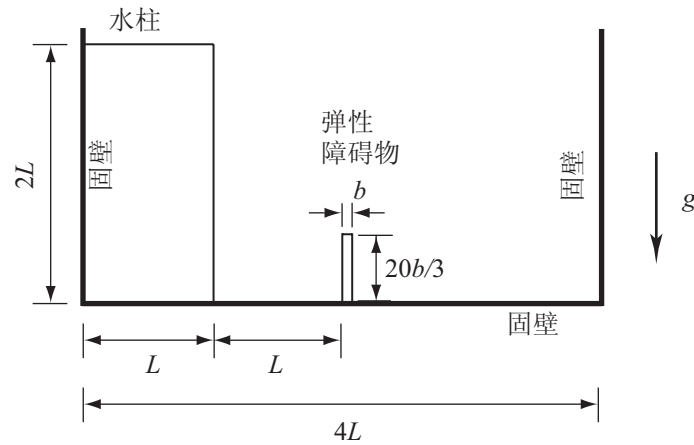


图 4.23 流固耦合问题示意图及几何尺寸

表 4.8 水材料参数

$\rho(\text{kg/m}^3)$	$c_0(\text{m/s})$	s	γ_0
1000	1647	1.921	0.1

Idelsohn等^[206]采用PFEM，Walhorn等^[207]用有限元与欧拉法的耦合算法模拟了该问题。为此，将本文的计算结果与他们的计算结果进行比较。

首先，图4.24比较了不同时刻水与障碍物相互作用的CFEMP计算结果和PFEM计算结果，两者吻合。然后，图4.25给出了障碍物左上角点的横向挠度时程曲线。对比图4.25可知，CFEMP的计算结果介于其他两组计算结果之间，并与Idelsohn等的计算结果较吻合。最后，图4.26给出了水柱在垮塌过程中的能量变化曲线，表明计算过程中的能量守恒性。

总之，由图4.24和4.25可知，CFEMP的计算结果与其他学者采用别的算法模拟结果吻合，间接验证了该算法在模拟流固耦合类问题的精度。

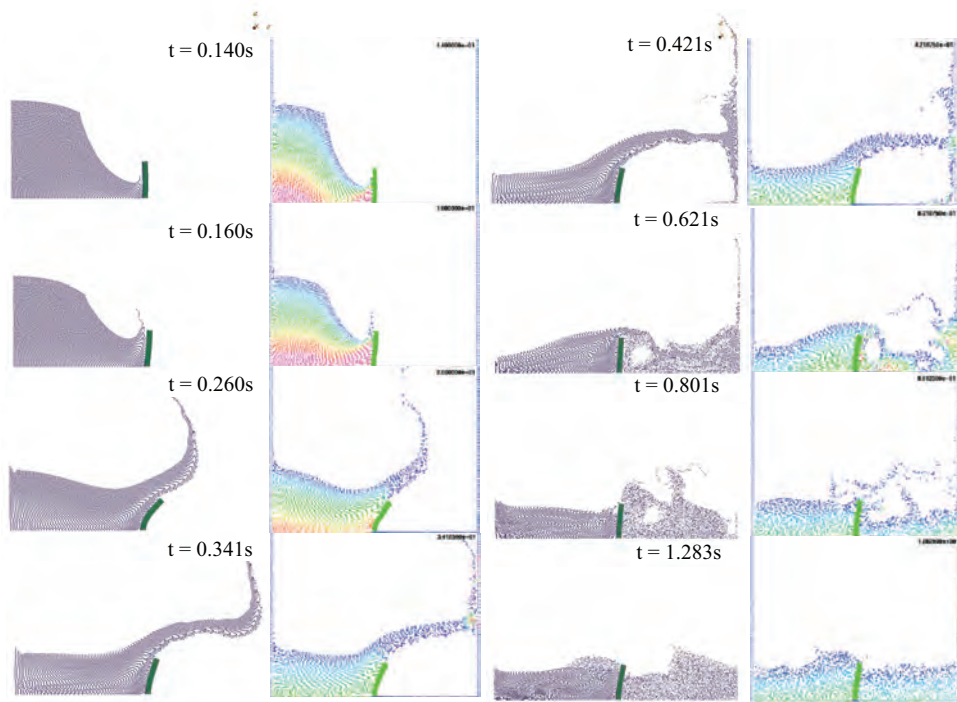


图 4.24 水柱在流动过程中与障碍物的相互作用，第一列和第三列为本文算法结果，其余为Idelsohn等^[206]采用PFEM的计算结果

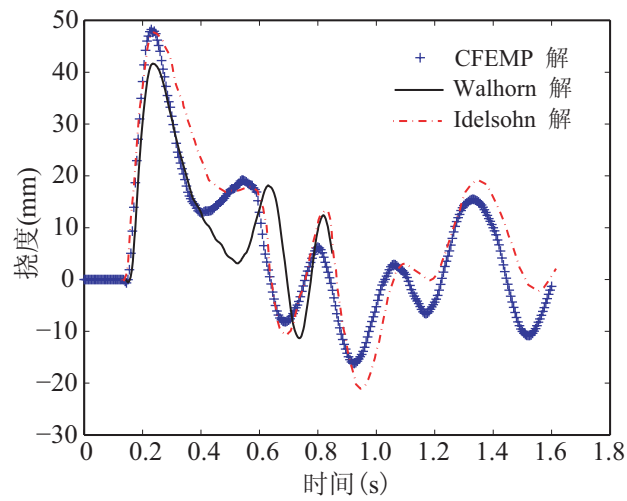


图 4.25 弹性障碍物左上角点横向挠度时程曲线

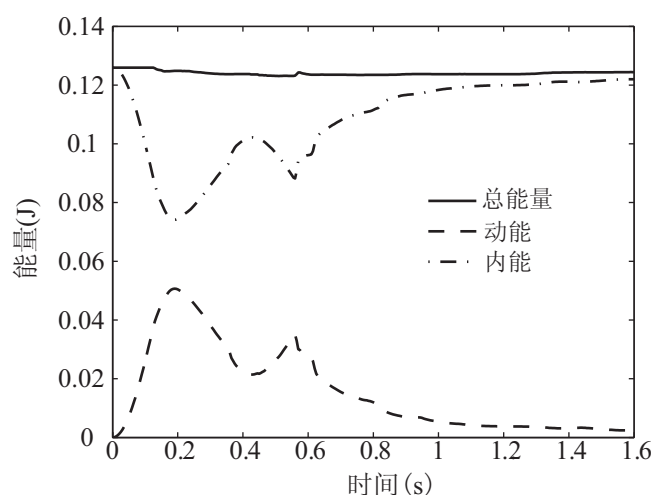


图 4.26 水柱垮塌过程中的能量变化曲线

4.5 小结

针对冲击侵彻和流固耦合问题，本文提出了耦合物质点有限元法。该算法采用有限元离散仅涉及材料小变形的物体，用物质点离散涉及材料大变形的物体，避免了将物质点法用于该类问题中涉及小变形物体模拟时精度和效率低的缺陷。通过杆共轴撞击问题和斜坡上球体滚动问题验证了该算法的精度和效率，然后采用该算法计算了侵彻问题和流固耦合问题，所得计算结果与其他文献中的结果吻合。算例表明，本文提出的算法可以高效稳定地求解涉及材料大变形的冲击侵彻、流固耦合等问题。

第5章 自适应物质点有限元法

图5.1为穿甲弹贯穿后的金属靶体以及山体滑坡的典型特征示意图。由图5.1可知，材料大变形和破碎等现象仅发生在局部范围内，远离载荷作用处的材料区域并没有发生大变形；另外，从时间历程上来看，材料先发生小变形，逐渐发生大变形直至破碎。由第2.8节内容可知，将物质点法用于材料全域和变形全阶段的模拟并不是最佳的求解方案。

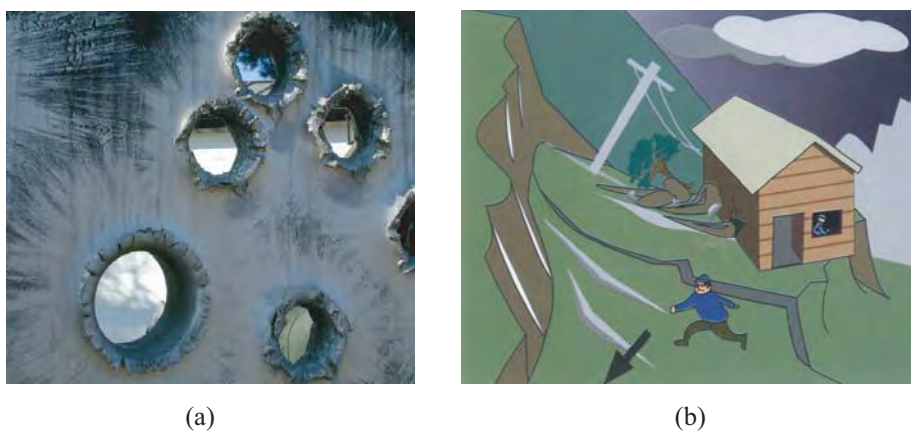


图 5.1 (a) 穿甲弹贯穿后的金属靶体, (b) 山体滑坡示意图

张雄等人^[119]将物质点法引入有限元法中，建立了显式物质点有限元法，应用于超高速碰撞问题。在该算法中，采用有限元离散材料区域，同时在可能发生大变形的空间区域布置背景网格。一旦物体进入该网格就将有限元结点转化为物质点求解，以避免有限元网格畸变的问题。但是该算法采用的转化方案较为粗狂，即使进入背景网格的单元仍处于小变形阶段也被转化为物质点。此外，在超高速碰撞问题中，材料已经破碎融化，近似流体，不需额外考虑接触问题。但在冲击侵彻和山体滑坡等问题中，物体间的滑移接触必须予以考虑。为此，本文在张雄等人^[119]的基础上进一步提出了自适应物质点有限元法(Adaptive Finite Element Material Point Method, 简称为AFEMP)，以充分发挥物质点法计算材料大变形时的优势和有限元法计算小变形时高精度和高效率的优势。

AFEMP的基本思想如图5.2所示：首先采用有限元离散材料区域，在计算过程中将发生畸变或破坏的单元自动转化为物质点求解。其中，采用转化算法来实现单元到质点的选择性自动转化，通过背景网格实现同一物体的有限元离散区域与物质点离散区域之间的相互作用，采用CFEMP处理各个物体间的接触问题。因

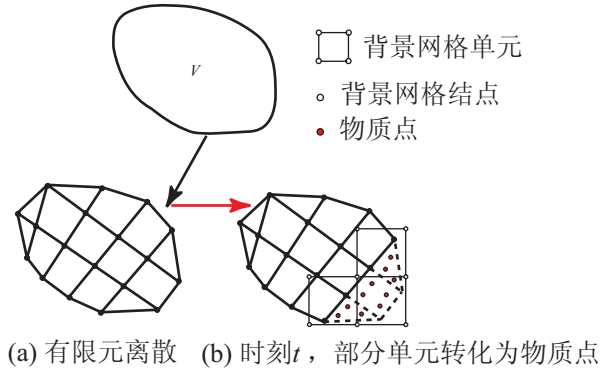


图 5.2 自适应物质点有限元法示意图

此，AFEMP建立了物质点法和有限元法的统一求解框架，实现了有限元法求解到物质点法求解的自适应转化，并且有限元法仅用于求解处于小变形阶段的材料区域，而物质点法仅用于求解处于大变形阶段的材料区域，从而充分吸收了有限元法和物质点的优势，避免了其缺点。本文建立的算法是三维求解格式，出于问题描述的方便，文中采用二维示意图。

5.1 自适应物质点有限元法

5.1.1 控制方程和离散

本文建立的自适应物质点有限元法采用的控制方程为更新拉格朗日格式，详见第2.1节。采用加权余量法可得动量方程的等效积分弱形式为

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} \rho b_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (5-1)$$

式中各符号的物理含义参见第2.2节内容。

由于在求解过程中将发生畸变的单元转化为物质点求解，AFEMP中包含两种离散方法，如图5.2(b)所示。结合物质点法和有限元法的离散格式，可推导出式(5-1)的两种离散方程，具体推导过程详见第2章和第4章。为了本文公式引用上的方便，在此直接给出有限元法和物质点法的离散方程。

在有限元离散区域，动量方程在有限单元结点上求解，有

$$\dot{p}_{id} = f_{id}^{\text{int}} + f_{id}^{\text{ext}} \quad (5-2)$$

$$p_{id} = m_d v_{id} \quad (5-3)$$

$$f_{id}^{\text{int}} = - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{V_e} N_{d,j} \sigma_{ji} dV \quad (5-4)$$

$$f_{id}^{\text{ext}} = \sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_{V_e} \rho N_d b_i dV + \int_{\Gamma_e} N_d \bar{t}_i d\Gamma \right) \quad (5-5)$$

其中，下标*i*和*j*表示物理量的空间坐标分量，下标*d*表示有限元结点，下标*e*表示单元， f_{id}^{int} 为有限元结点内力， f_{id}^{ext} 为有限元结点外力， m_d 为有限元结点质量， v_{id} 为有限元结点速度， p_{id} 表示有限元结点动量。若采用单点高斯积分，则式(5-4)和(5-5)可以近似求解为

$$f_{id}^{\text{int}} = - \sum_{e=1}^{n_e} N_{de,j} \sigma_{jie} V_e \quad (5-6)$$

$$f_{id}^{\text{ext}} = \sum_e (m_e N_{de} b_{ie} + \int_{\Gamma_e} N_{ed} \bar{t}_i d\Gamma) \quad (5-7)$$

其中， $m_e = \rho_e V_e$ 。为控制单点高斯积分引起的沙漏模态，在式(5-5)等号右端加入沙漏模态粘性阻尼力 f_{ik}^Γ ，计算方式见第4.1.1.2节。因此，有限元结点*d*的结点力包含三部分，即

$$f_{id} = f_{id}^{\text{ext}} + f_{id}^{\text{int}} + f_{id}^\Gamma \quad (5-8)$$

在物质点离散区域，物质点的动量方程在背景网格上求解，有

$$\dot{p}_{il} = f_{il}^{\text{int}} + f_{il}^{\text{ext}} \quad (5-9)$$

其中，下标*l*表示背景网格结点。将物质点的动量映射到背景网格可得背景网格结点*l*的动量 p_{il} ，有

$$p_{il} = \sum_{p=1}^{n_p} N_{lp} m_p v_{ip} \quad (5-10)$$

其中，下标*p*表示物质点， n_p 表示物质点总数。将物质点的质量映射到背景网格可得背景网格结点*l*的质量 m_l ，有

$$m_l = \sum_{p=1}^{n_p} N_{lp} m_p \quad (5-11)$$

在物质点进行应力更新后，可通过物质点积分得到背景网格结点*l*的结点内力，有

$$f_{il}^{\text{int}} = - \sum_{p=1}^{n_p} N_{lp,j} \sigma_{ijp} \frac{m_p}{\rho_p} \quad (5-12)$$

将物质点上的外力映射到背景网格可得到背景网格结点外力，有

$$f_{il}^{\text{ext}} = \sum_{p=1}^{n_p} N_{Ip} \bar{t}_{ip} h^{-1} \frac{m_p}{\rho_p} + \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{Ip} f_{ip} \quad (5-13)$$

采用变步长的中心差分法积分动量方程式(5-2)和(5-9)，详见第4.1.2.1节。因此有限元结点 I 的速度和位置更新分别为

$$v_{id}^{n+1/2} = v_{id}^{n-1/2} + (f_{id}^{n,\text{int}} + f_{id}^{n,\text{ext}} + f_{id}^{\Gamma}) \Delta t^n / M_d \quad (5-14)$$

$$x_{id}^{n+1} = x_{id}^n + v_{id}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \quad (5-15)$$

在物质点离散区域，物质点 p 的位置和速度分别通过背景网格的速度场和加速度场更新，有

$$v_{ip}^{n+1/2} = v_{ip}^{n-1/2} + \Delta t^n \sum_{I=1}^{n_g} f_{il}^n N_{Ip}^n / m_I^n \quad (5-16)$$

$$x_{ip}^{n+1} = x_{ip}^n + \Delta t^{n+1/2} \sum_{I=1}^{n_g} p_{il}^{n+1/2} N_{Ip}^n / m_I^n \quad (5-17)$$

其中， $p_{il}^{n+1/2} = p_{il}^{n-1/2} + f_{il}^n \Delta t^n$ 。

在计算过程中，有限元区域内的网格始终与材料区域固连在一起，而物质点区域内的背景网格在每一个时间步开始时被新的规则背景网格替代。

5.1.2 转化算法

从单元到物质点的转化算法是自适应物质点有限元法的重要组成部分，实现了有限元法求解到物质点法求解的自适应转化。该转化算法包括转化判据和转化方案两部分内容，以实现适时且精确的转化。

5.1.2.1 转化判据

当单元发生畸变时将其转化为物质点，那么如何衡量单元的畸变程度呢？本节给出了两个简单高效的转化判据，分别是等效塑性应变准则和单元特征长度比值准则。

(1) 等效塑性应变准则

塑性应变为永久性应变，对于许多金属材料在静水压力不大的情况下，塑性应变则表征了材料的畸变程度。因此，如果材料为弹塑性材料，则以等效塑性应变 ε^p 作为判据，即当单元的等效塑性应变值达到用户设定的阈值时将单元转化为物质点。

(2) 单元特征长度比值准则

中心差分法中的临界时间步长为单元特征长度与声速的比值，单元的特征长度在一定程度上表征了单元的畸变程度。因此，采用单元的特征长度现时值与初始值的比值作为判据，即当单元该比值低于用户设定的阈值时将单元转化为物质点。

两个判据也可同时使用，满足其一即可将单元转化为物质点。

5.1.2.2 转化方案

当单元满足判据时，那么一个单元转化为几个物质点，物质点携带的各物理量值又如何确定呢？单元到物质点的转化其实是一种离散格式到另外一种离散格式的转化，因此在转化过程中需保证系统的质量、动量和能量守恒，相应的场量梯度应不失真。基于该准则，本文针对有限元法和物质点法的离散特点建立了相应的转化方案。下面举例说明。

如图5.3所示，材料区域采用四边形单元离散，边界以有限元结点 $a, \dots, n$ 描述，并假设单元A和B是待转化单元。针对物质点法中背景网格结点间距为质点间距2倍的离散特性，此处一个四边形单元转化成4个物质点。下面以单元A为例给出具体的转化步骤。

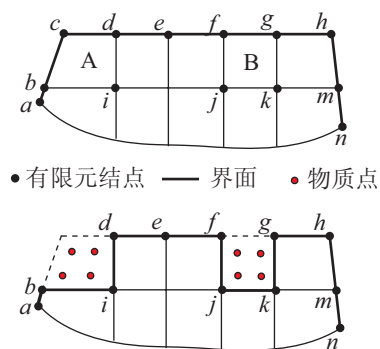


图 5.3 单元转化物质点算法示意图

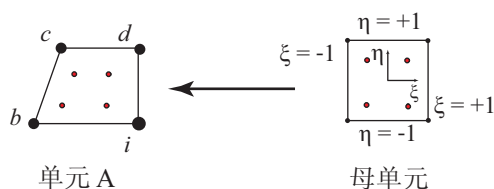


图 5.4 转化的物质点位置计算示意图

1. 物质点所代表的材料区域物理量分配

单元所代表的材料区域由四个物质点均分。因此，单元的质量、体积和内能平均分配到四个物质点上，而物质点的位置应位于各自代表区域的形心。此处借鉴等参元的思想确定物质点在全局坐标系中的位置。如图5.4所示，赋予四个物质点自然坐标依次为 $(-0.5, -0.5)$ 、 $(+0.5, -0.5)$ 、 $(+0.5, +0.5)$ 和 $(-0.5, +0.5)$ ，利用等参变换计算各个物质点的位置，有

$$x_{ip} = \sum_{d=1}^4 N_d(\pm 0.5, \pm 0.5) x_{id} \quad (5-18)$$

其中 x_{id} 表示有限元结点 d 在全局坐标系中的位置。

2. 物质点的速度分配

有限元法通过结点的速度表征材料域的速度场。因此，各物质点的速度取其临近的有限元结点速度值。这样处理虽不能严格替代有限元结点表征的速度梯度场，但随着网格的细化由此引入的人为差异性可忽略，并且这样的处理简单高效，可保证系统的动量和能量守恒。

3. 物质点的状态量分配

由于有限元采用单点高斯积分，因此可将四个物质点的应力、应变和其它的材料状态量均取为单元A高斯点的相应物理量值。

4. 删除被转化的单元，如单元A。

5. 界面上单元结点的处理

对于与所删除单元相连的有限元结点，其质量应减去该单元代表的离散区域质量的贡献部分。将不与任何单元相连的有限元结点删除，如有限元结点 c ，同时将位于有限单元与物质点区域界面上的有限元结点标记为有限元过渡结点，便于识别两种离散区域的界面，如结点 b, i, d, f, j, k 和 g 。

综上，本节建立的转化方案将一个四边形单元转化为四个物质点，并保证了转化过程中系统的质量、动量和能量守恒。因此，将畸变的有限单元转化为物质点本质上是将高斯点积分转化为物质点积分，有限元网格转化为在每个时间步开始时重划分的背景网格。对于三维问题，一个六面体单元转化成8个物质点，各个物质点的变量值采用相同的方式确定。

5.1.3 耦合算法

如何实现未转化的有限元离散区域与物质点离散区域相互作用是自适应物质点有限元法的另一重要组成部分，即建立求解同一物体的有限元法和物质点法的耦合算法。

在物质点法中，采用背景网格表征的速度场计算物质点的应变以实现相邻物质点之间的影响，通过在背景网格上求解动量方程实现相邻物质点之间的联系。物质点法通过背景网格实现了相邻物质点之间的相互影响和联系。因此，为实现同一物体的有限元离散区域与物质点离散区域的相互影响和联系，本文提出了基于背景网格的有限元法和物质点法的耦合算法。

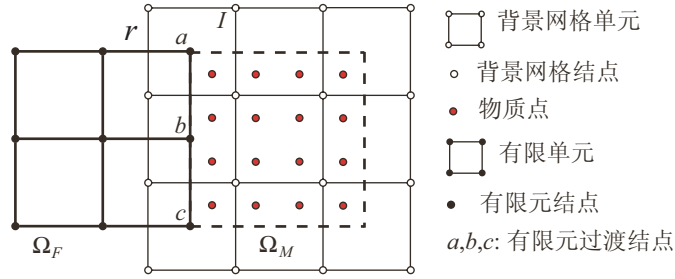


图 5.5 有限元法与物质点法耦合示意图

如图5.5所示，物体 r 左半部分采用有限元离散，其他部分用物质点离散，位于两种离散区域界面上的有限元结点分别为 a 、 b 和 c 。依据第5.1.2.2节中的定义， a 、 b 和 c 为有限元过渡结点。为了实现两者之间的相互影响，在计算与有限元过渡结点相连的单元应变时，采用背景网格速度场重置有限元过渡结点速度，以保证计算过渡区材料应变时的速度场一致。为了实现有限元区域与物质点区域的相互联系，将有限元过渡结点动量方程同物质点一起在背景网格上求解。采用同一背景网格的速度场和加速度场更新有限元过渡结点和物质点的位置和速度，保证过渡区界面上位移和速度场的连续性。

在每一个时间步中，将有限元过渡结点和物质点的质量、动量同时映射到背景网格上，并将有限元过渡结点的结点力映射并累加到通过物质点计算的背景网格结点力上，如图5.6所示。以背景网格结点 I 为例，其质量计算公式为

$$m_I = \sum_{p=1}^{n_p} N_{Ip} m_p + \sum_{t=1}^{n_t} N_{It} m_t \quad (5-19)$$

其中，下标 t 表示过渡结点， n_t 表示总的过渡结点数。背景网格结点 I 的动量和结点力分别为

$$p_{iI} = \sum_{p=1}^{n_p} N_{Ip} p_{ip} + \sum_{t=1}^{n_t} N_{It} p_{it} \quad (5-20)$$

$$f_{iI} = \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{Ip} f_{ip} - \sum_{p=1}^{n_p} N_{Ip,j} \sigma_{ijp} \frac{m_p}{\rho_p} + \sum_{t=1}^{n_t} N_{It} f_{it} \quad (5-21)$$

式(5-21)中的 f_i 表示有限元过渡结点的结点力但不包括沙漏粘性阻尼力,这是由于单元结点的沙漏粘性阻尼力具有反对称性,映射到背景网格会部分抵消而不能抑制沙漏模态。

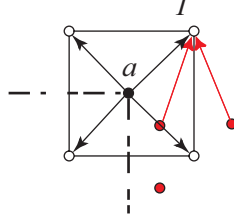


图 5.6 过渡区背景网格结点物理量的计算方式

在背景网格的动量方程积分后,过渡结点的位置和速度更新方式分别为

$$x_{it}^{n+1} = x_{it}^n + \Delta t^{n+1/2} \left(\sum_{I=1}^{n_g} p_{il}^{n+1/2} N_{il}^{n+1/2} / m_I^{n+1/2} + \Delta t^n f_{it}^\Gamma / m_t \right) \quad (5-22)$$

$$v_{it}^{n+1/2} = v_{it}^{n-1/2} + \Delta t^n \sum_{I=1}^{n_g} f_{il}^{n+1/2} N_{il}^{n+1/2} / m_I^{n+1/2} + f_{it}^\Gamma / m_t \Delta t^n \quad (5-23)$$

其中 f_{it}^Γ 表示有限元过渡结点的沙漏粘性阻尼力。

此外,有限元法中单元应变增量是基于有限元结点速度场计算,而物质点法则是用背景网格速度场计算。因此,为了保证计算单元和物质点的应变增量采用的速度场一致,将有限元过渡结点的速度依据其所在的背景网格速度场进行修正,有

$$v_{it} = \sum_{I=1}^{n_g} N_{il} \frac{p_{il}}{m_I} \quad (5-24)$$

综上,通过调整有限元过渡结点的速度和动量方程计算方式,实现了有限元离散区域和物质点离散区域的耦合。由于背景网格映射的单值性,有限元离散区域和物质点离散区域在界面上的速度场和位移场保持了连续性。

对于冲击波、能量方程积分以及有限元离散区域与物质点离散区域的接触处理参见前面各章节,在此不再赘述。

5.2 算法实现

自适应物质点有限元法的具体实现过程只是在第4.2节的基础上增加了单元转化和耦合算法部分。因此,下面仅给出单步内不包含接触部分的计算流程。

1. 重新定义背景网格,利用式(5-19)和(5-20)将物质点和有限元过渡结点的质量和动量映射到背景网格上,计算背景网格的结点质量和结点动量。

2. 通过式(5-24)修正有限元过渡结点速度。
3. 对物质点和有限单元进行应力更新。
4. 采用式(5-8)计算有限元结点的结点力，采用式(5-21)计算背景网格结点力。
5. 在背景网格上求解有限元过渡结点和物质点的动量方程。
6. 采用式(5-14)和(5-15)更新有限元结点，采用式(5-16)和(5-17)更新物质点，采用式(5-22)和(5-23)更新有限元过渡结点。
7. 单元转化

对位于有限元离散区域边界上的单元进行遍历循环，依据第5.1.2节中的方法将符合转化准则的单元转化为物质点，同时标记新的有限元过渡结点。

8. 丢弃已经发生变形的背景网格，并在下一个时间步中采用新的规则背景网格。

5.3 算法验证

5.3.1 共轴撞击问题

为了考查自适应物质点有限元法中耦合算法的计算精度，考虑两完全相同的弹性杆纵向共轴撞击问题。该问题详细介绍参见第4.3.1节。



图 5.7 两弹性杆的离散模型

该问题的离散模型如图5.7所示。其中，每个杆有限元离散区域的长度为10mm，其余部分采用物质点离散，共用90个六面体单元和792个物质点。单元尺寸和背景网格结点间距均为0.5mm，物质点间距为0.25mm，与第4.3.1.1节设置保持一致。在计算中，不启用单元转化算法。

AFEMP和MPM计算结果表明两个杆在 $8.7\mu\text{s}$ 分离，与第4.3.1.1节中数值解相同，和解析解 $8.63\mu\text{s}$ 吻合。进一步，图5.8给出了不同时刻杆中应力分布曲线的数值解和解析解。对比图5.8(a)和图5.8(b)中的AFEMP和MPM计算结果可知，在两种离散区域界面处有相对幅度较小的应力振荡，这主要是由于两种离散界面处波阻抗不同造成的。对比AFEMP计算结果和解析解可知，界面应力波反射影响的区域局限在较小范围内，不影响整体求解精度。撞击过程中的能量变化曲线如图5.9所示，表明该算法具有很好的能量守恒性。

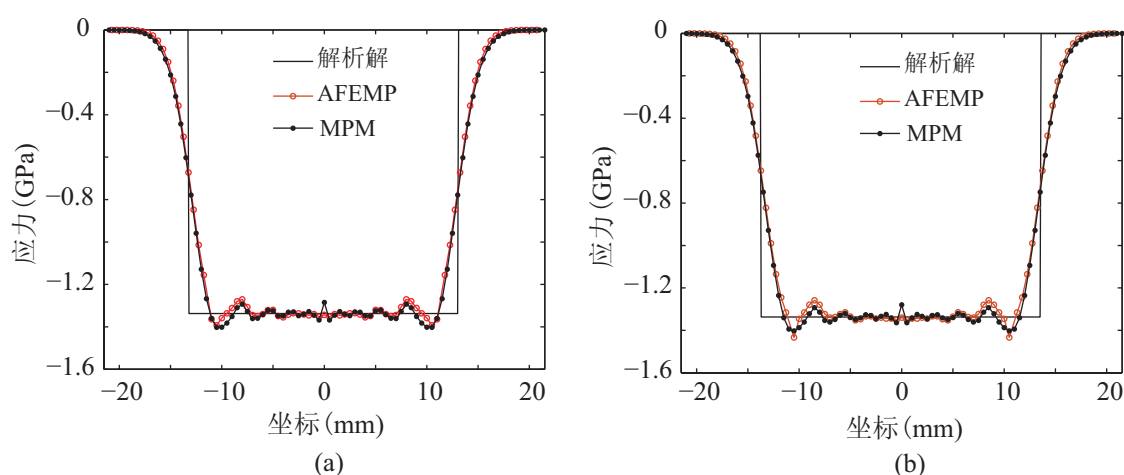
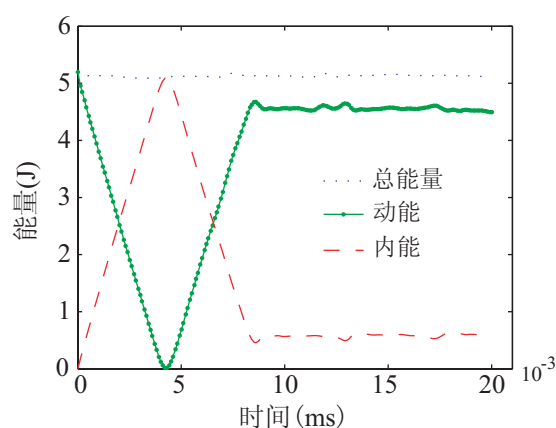
图 5.8 两弹性杆撞击过程中杆上应力分布曲线: (a) $2.7 \mu\text{s}$, (b) $2.8 \mu\text{s}$ 

图 5.9 两弹性杆撞击过程中的能量变化曲线

5.3.2 Taylor杆问题模拟I

为了进一步考查AFEMP中耦合算法的精度, 考虑冲击动力学程序经典考题之Taylor杆碰撞问题。Taylor杆碰撞是指一个柱状金属杆高速撞击刚性墙的实验, 如图5.10所示。此处, 采用AFEMP模拟了 Johnson等人^[208]开展的Taylor杆撞击实验。

杆的初始长度为 $L_0=25.4\text{mm}$, 初始直径为 $D_0=7.6\text{mm}$, 以 190m/s 的速度撞击刚性墙。杆的材料为铜, 密度为 $\rho=8.93 \times 10^{-3}\text{g/mm}^3$ 。采用Johnson-Cook模型模拟杆, 材料参数列于表5.1。

表 5.1 铜Johnson-Cook模型材料参数

$E(\text{MPa})$	ν	$A(\text{MPa})$	$B(\text{MPa})$	n	C
117×10^3	0.35	157	425	1.0	0.0

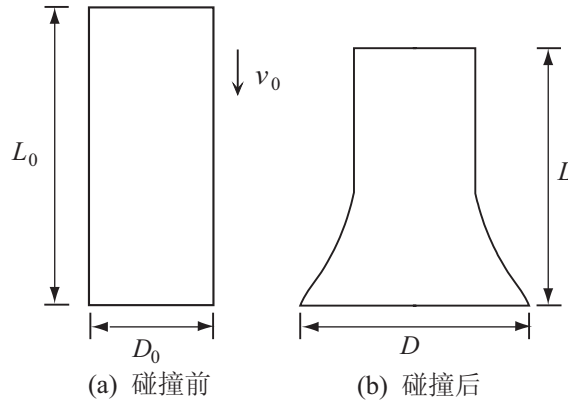


图 5.10 Taylor杆碰撞示意图

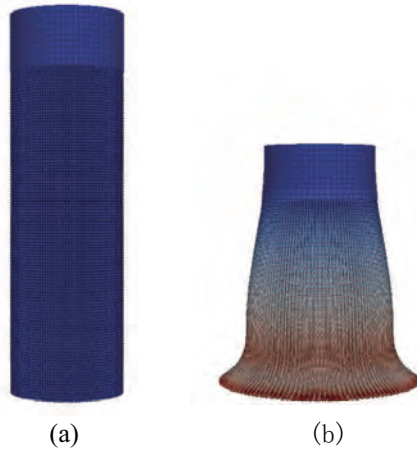


图 5.11 Taylor杆问题: (a) 初始离散模型, (b) 最终构型

在计算中, 采用有限元离散距上端面3.8mm内的材料区域, 用物质点法离散其余部分, 离散模型如图5.11(a)所示。其中, 有限元离散区域共用7680个六面体单元和8811个有限元结点, 单元的最大尺寸为0.36mm; 物质点离散区域共用144324个质点, 背景网格结点间距为0.36mm。同时, 采用物质点法也模拟了同样的问题。

图5.11(b)给出了撞击后杆的最终构型, 其长度 L 和端部直径 D 列于表5.2中。对比表5.2中的计算结果和实验结果可知, AFEMP计算结果和实验结果吻合, 验证了该耦合算法的精度。

5.3.3 Taylor杆问题模拟II

本节继续考虑第5.3.2节中的Taylor杆问题, 并考查AFEMP的转化算法。

在该算例中, 采用有限元离散杆, 共用51456个六面体单元, 单元的最大尺寸为0.38mm, 离散模型如图5.12(a)所示。为启用转化算法, 采用等效塑性应变

表 5.2 Taylor杆问题数值解和实验结果的比较

	$L(\text{mm})$	$D(\text{mm})$
实验	16.2	13.5
AFEMP	16.21	13.2
MPM	16.21	13.2

表 5.3 不同阈值下Taylor杆问题数值解和实验结果的比较

	阈值	$L(\text{mm})$	$D(\text{mm})$
实验		16.2	13.5
AFEMP	0.7	16.33	13.28
AFEMP	0.8	16.32	13.34
AFEMP	0.9	16.32	13.35
AFEMP/FEM	∞	16.31	13.36

作为转化判据，即当单元的等效塑性应变超过阈值时，则将该单元转化成8个质点，相应的背景网格结点间距取为0.38mm。此处，考察了不同的阈值，分别为0.7、0.8、0.9。如果阈值无穷大，AFEMP则退化为FEM。

图5.12(b)给出了阈值为0.7时的杆最终构型计算结果，其中等效塑性应变大于0.7的材料区域均转化成了物质点。表5.3给出了采用不同阈值时杆长与端部直径的AFEMP计算结果。由表5.3可知，随着阈值的增大，计算结果收敛于FEM计算结果，但差异较小，与实验结果吻合。计算表明单元何时转化为物质点及转化的比例对计算结果有一定的影响，但对整体结果计算精度影响较小。

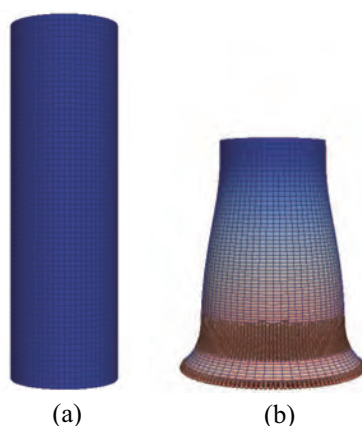


图 5.12 Taylor杆问题：(a) 初始离散模型，(b) 最终构型

表5.4进一步比较了FEM、带转化的AFEMP和MPM三种算法在模拟该问题时的时间步长和CPU时间。其中，AFEMP的数据取自阈值为0.7的计算结果。

表 5.4 各算法的时间步长和效率比较

	$\Delta t_{\max}(\mu s)$	$\Delta t_{\min}(\mu s)$	时间步数	CPU (s)
FEM	1.27×10^{-2}	0.60×10^{-2}	10752	929
MPM	3.46×10^{-2}	3.01×10^{-2}	2423	970
AFEMP	1.27×10^{-2}	1.19×10^{-2}	6672	1208

由表5.4可知，FEM的最小时间步长与最大时间步长比约是1:2，表明在该算例中基本上没有网格畸变。因此，在该问题中FEM的效率比另外两种算法高。对比FEM与AFEMP中最小时间步长可知，单元转化有效提高了时间步长；对比AFEMP和MPM的数据可知，虽然AFEMP的CPU时间多于MPM，但其单步的效率高于MPM。通过该算例的计算数据表明，FEM在求解未发生网格畸变问题时求解效率高于MPM。

5.4 算法应用

通过第5.3节中的算例验证了AFEMP中的转化算法有效性和耦合算法的精度。然后，本节将自适应物质点有限元法应用于冲击侵彻和边坡失效问题。其中，第一个算例是重钨合金(WHA)长杆弹斜侵彻薄钢板的问题，第二个算例模拟了无粘沙土边坡失效的等效实验，干燥铝棒堆积物的流动。由于有限元法在模拟此类问题时有网格畸变问题，因此不再给出此类问题的有限元计算结果，重点在于比较 AFEMP和MPM的计算效率。

5.4.1 长杆弹侵彻问题

如图5.13所示，WHA长杆弹以不同的初始速度侵彻不同厚度的钢板，相关实验数据见文献[209]。其中，WHA长杆弹的初始长度 $L_0=75\text{mm}$ ，直径 $D_0=5\text{mm}$ ，钢板的尺寸分别为 $150\text{mm} \times 150\text{mm} \times 5\text{mm}$ (厚度) 和 $150\text{mm} \times 150\text{mm} \times 10\text{mm}$ (厚度)。此处，考虑两种实验工况。在工况1中，长杆弹以 1500m/s 的初始速度侵彻厚度为 5mm 的靶体；在工况2中，长杆弹以 2500m/s 的初始速度侵彻厚度为 10mm 的靶体。

在本算例中，分别采用Johnson-Cook模型和Mie-Grüneisen状态方程计算弹体和靶体的偏应力和压力，材料参数取自文献[209–211]，并列于表5.5和5.6。采用等效塑性应变失效模型模拟侵彻过程中材料的失效，失效值取为 $0.9^{[211]}$ ，模拟时间为 0.14ms 。

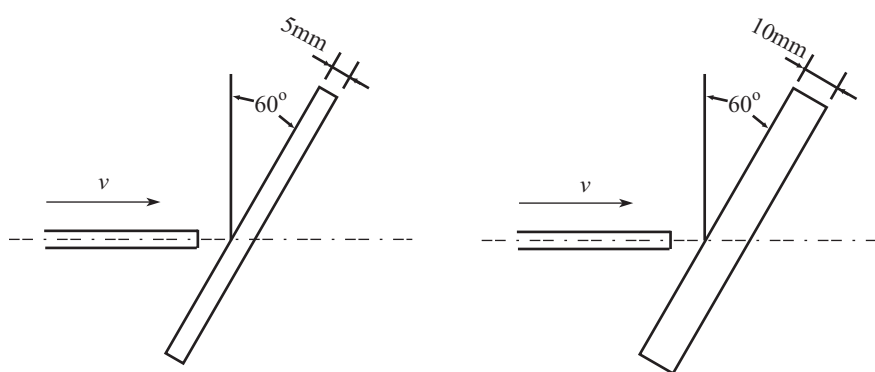


图 5.13 长杆弹侵彻钢板几何尺寸示意图

表 5.5 弹体和靶体Johnson-Cook 模型材料参数

	$A(\text{MPa})$	$B(\text{MPa})$	n	C	m	$T_{\text{ref}}(\text{K})$	$T_{\text{melt}}(\text{K})$
弹体材料	1050	177	0.12	0.0275	1	293	1723
靶体材料	750	1150	0.49	0.014	1	293	1700

考虑到对称性，建立1/2离散模型，如图5.14所示。其中，采用规则的六面体单元离散靶体，单元尺寸为1mm，在工况1中共计56250个单元，工况2中共计101250个单元；采用单元尺寸最大为1mm的六面体单元离散弹体，共计1824个六面体单元。采用等效塑性应变转化准则，阈值为 0.9，背景网格结点间距为2mm。

图5.15和5.16分别给出了工况1和工况2中不同时刻弹体侵彻和单元转化的计算结果，随着弹体侵彻不断深入，等效塑性应变累积到0.9的单元不断转化为物质点，从而实现了仅将物质点法用于材料大变形阶段的模拟，并避免了有限元离散区域的网格畸变问题。图5.17比较了弹体最终构型的AFEMP计算结果与实验结果，两者吻合。表5.7定量给出了弹体剩余速度比和剩余长度比的AFEMP计算结果和实验结果，其中剩余速度比为弹体的剩余速度与初始速度比值，剩余长度比为弹体的剩余长度与初始长度比值。由表5.7可知，AFEMP的计算结果与实验结果吻合。

为体现AFEMP法计算效率，采用物质点法也模拟了同样的问题，并取质点间

表 5.6 弹体和靶体Grüneisen状态方程材料参数

	$c_0(\text{m/s})$	s	γ_0
弹体材料	4030	1.24	1.8
靶体材料	3570	1.92	1.8



图 5.14 离散模型

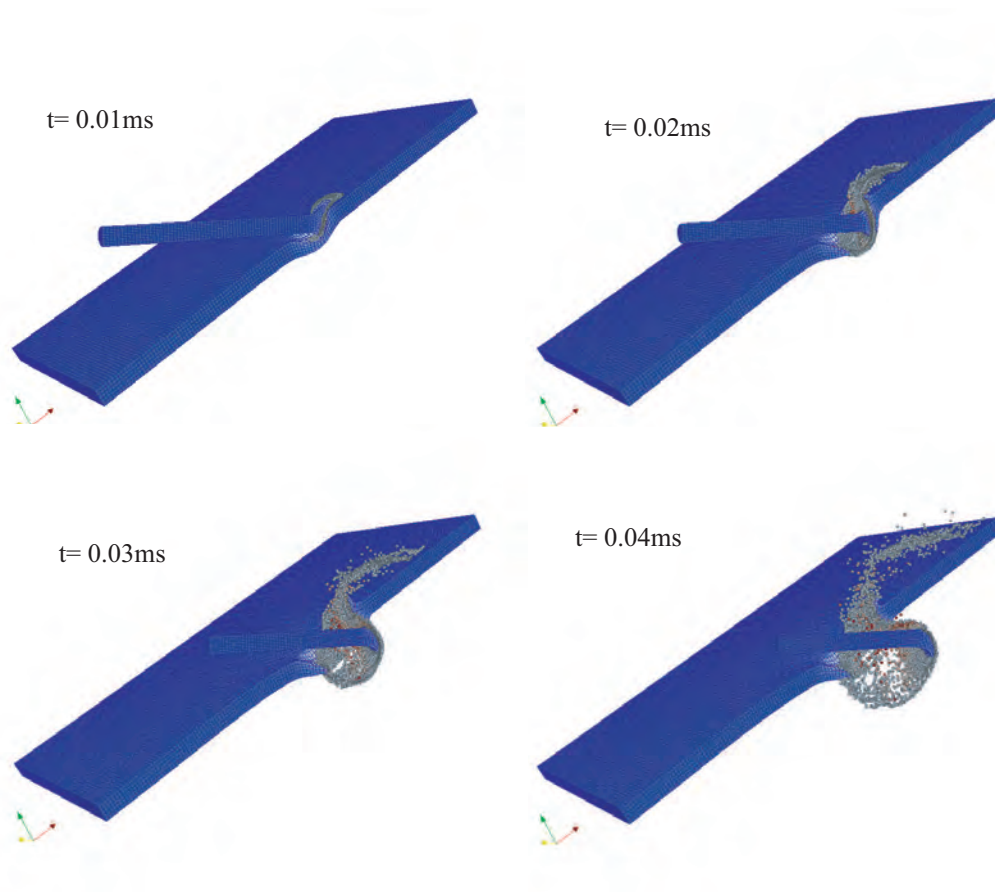


图 5.15 工况1弹体侵彻过程中不同时刻的变形计算结果

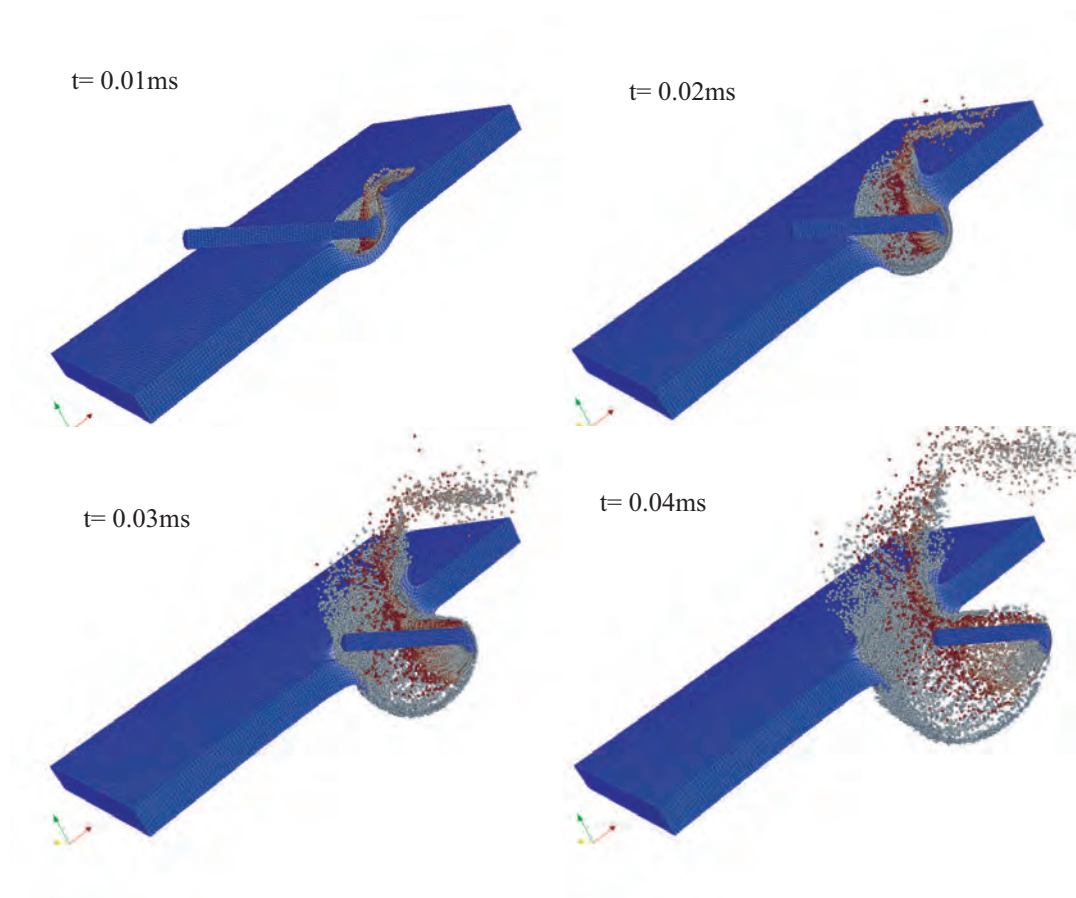


图 5.16 工况2弹体侵彻过程中不同时刻的变形计算结果

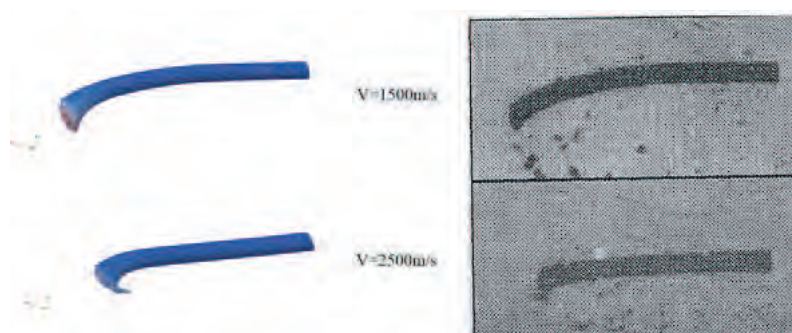


图 5.17 贯穿钢板后长杆弹剩余部分的AFEMP计算结果和实验结果

表 5.7 弹体剩余长度以及速度的计算结果和实验结果

工况	结果	剩余杆长比	剩余弹速比
1	实验	0.85	0.97
1	AFEMP	0.82	0.96
1	MPM	0.85	0.96
2	实验	0.76	0.99
2	AFEMP	0.72	0.97
2	MPM	0.74	0.97

距为1mm，背景网格结点间距为2mm，计算结果见表5.7。在计算精度一致的情况下，表5.8从时间步长、时间步数和CPU用时方面对AFEMP和MPM进行了对比。由表5.8可知，AFEMP的最小时间步长仅降低了58.6%，这是由于将发生畸变的单元转化成了物质点；AFEMP的最大时间步长小于物质点法，这是由于离散弹体的单元初始特征长度小于背景网格结点间距；而AFEMP与MPM的CPU用时比约是1:3。因此，AFEMP在模拟涉及材料大变形的冲击侵彻问题时，其计算效率远高于物质点法。

表 5.8 工况2中AFEMP与MPM时间步长和效率比较

	$\Delta t_{\max}(\mu s)$	$\Delta t_{\min}(\mu s)$	时间步数	CPU (s)
AFEMP	3.67×10^{-2}	1.52×10^{-2}	2208	838
MPM	6.45×10^{-2}	3.71×10^{-2}	1180	2241

5.4.2 边坡失效问题

此处考虑岩土工程中的边坡失效问题。Bui等人^[212]在实验室内采用直径为1~1.5mm，长为500mm的干燥铝棒堆积物等效模拟了边坡的二维失效过程。实验中，铝棒堆积物初始构型为200mm×100mm的长方体结构，为了方便观察堆积物的失效过程和定量描述失效面，在堆积物的外表面划分20mm×20mm的方形格子，同时在背景墙壁上建立坐标线，如图5.18所示。将右侧的挡板迅速拉向右侧，铝棒堆积物将在重力作用下开始自由流动。

Bui等人^[212]通过铝棒堆积物的剪切盒实验，获得了铝棒堆积物等效的沙土材料参数：摩擦角为19.8°，粘聚力为零。因此，此处采用Drucker-Prager本构模型^[5]模拟干燥铝棒堆积物的流动，材料参数列于表5.9^[212]。

按照平面应变问题处理该问题。在本算例中，采用规则的六面体单元离散坡

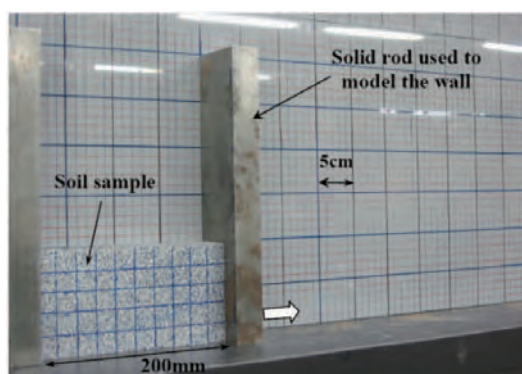
图 5.18 干燥铝棒堆积物的实验设置图^[212]

表 5.9 Drucker-Prager模型材料参数

$\rho(\text{g/mm}^3)$	$K(\text{MPa})$	c	ϕ	ψ
0.00265	0.7	0	19.8	0

体，单元尺寸为0.25mm，共计3200个。依据文献[212]中的设置，单元两侧的有限元结点和左端侧面的有限元结点采用对称边界条件，底部的边界条件为固定边界条件，其它为自由边界条件。采用等效塑性应变转化准则，阈值设为1.2，背景网格结点间距为0.25mm。模拟时间1.1s。

图5.19给出了堆积物最终失效构型的实验结果和AFEMP采用Drucker-Prager模型的计算结果。对比图5.19可知，两者形貌基本吻合。图5.20进一步给出了堆积物的坡面变化曲线和坡体失效面(等效塑性应变分界线)曲线的实验结果和AFEMP计算结果。对比图5.20可知，AFEMP计算结果同实验结果吻合。

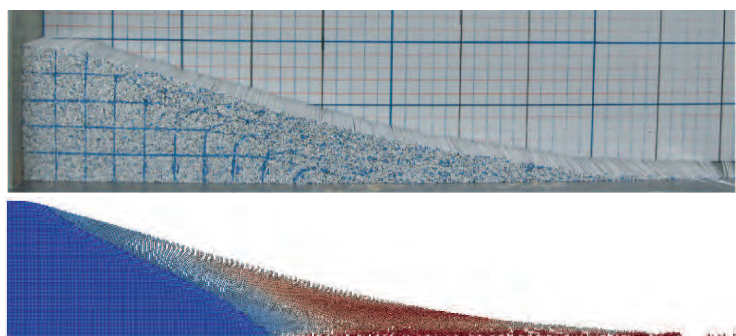


图 5.19 铝棒堆积物最终构型实验结果与计算结果的比较

为了体现AFEMP的计算效率，采用物质点法也模拟了同样问题，物质点间距取为0.125mm，背景网格结点间距取为0.25mm，计算结果见图5.19。在计算精度一致的情况下，表5.10从时间步长、时间步数和CPU用时方面对AFEMP和MPM进行了比较。由表5.10可知，AFEMP不仅在单步计算效率上高于MPM，CPU用时也

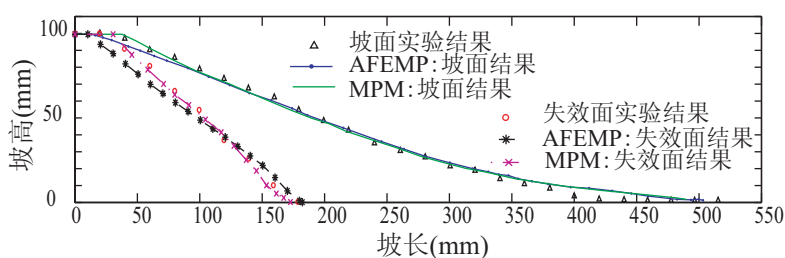


图 5.20 铝棒堆积物坡面和失效面实验结果与计算结果的比较

表 5.10 AFEMP与MPM的时间步长和效率比较

	$\Delta t_{\max}(\mu s)$	$\Delta t_{\min}(\mu s)$	时间步数	CPU (s)
AFEMP	48.41	22.85	47402	1123
MPM	48.41	29.94	34765	1791

比MPM少，充分表明AFEMP计算效率高于MPM。

5.5 小结

本文提出了自适应物质点有限元法，由单元转化算法和耦合算法两部分组成，建立了有限元和物质点法的统一求解框架。该算法采用有限元离散材料区域，并将计算过程中即将畸变或破坏的单元转化为物质点，通过耦合算法实现有限元离散区域和物质点离散区域的相互作用，充分发挥了物质点法和有限元算法的优势。采用弹性杆共轴撞击问题和Taylor杆问题验证了该算法的精度，然后采用该算法模拟了冲击侵彻和边坡失效问题，计算结果与实验结果吻合。算例表明，本文建立的自适应物质点有限元法适合模拟冲击侵彻等涉及材料大变形问题，并且计算效率明显高于物质点法和有限元法。

第6章 全文总结

6.1 研究成果

本文针对物质点无网格法在模拟冲击侵彻、流固耦合和边坡失效等涉及材料局部大变形问题时存在效率低的缺点,将其与有限元法进行杂交耦合,提出了一类高效稳定的数值计算方法。本文的主要研究成果如下:

(1) 基于物质点法研究了爆轰驱动飞片问题。采用物质点法分别模拟了开口非对称板型装药和对称板型装药下爆轰驱动飞片过程。针对对称板型装药的Gurney公式预测飞片速度偏高的问题,本文提出了一种修正方案,并采用数值计算验证了该修正方案。

(2) 在计算钢筋混凝土结构问题中,需要单独建立钢筋的离散模型以考虑钢筋的承载作用。但是钢筋直径尺寸相比于结构体尺寸有着数量级上的差异,导致整体离散模型规模过于庞大,计算耗时。为解决钢筋的离散求解问题,本文将有限元法中的杆单元引入物质点法中,构造了离散钢筋的杆单元,提出了杂交物质点有限元法。该方法仅需在钢筋长度方向离散求解,无需在直径方向上离散,降低了计算规模。通过杆拉伸问题和单摆问题验证了该算法的计算精度,然后模拟了卵形钢弹侵彻钢筋混凝土靶体问题,进一步分析了钢筋在混凝土中所起的抗侵彻作用。算例结果表明该算法适合模拟钢筋混凝土结构及钢纤维混凝土结构问题,解决了物质点法模拟钢筋混凝土存在的问题。

(3) 在模拟仅涉及小变形物体时,物质点法的计算效率和精度不如有限元,特别是在模拟冲击侵彻、流固耦合等问题中的小变形物体时更为突出。为此,本文将物质点法和有限元法进行耦合,提出了耦合物质点有限元法。该算法采用有限元离散小变形物体,用物质点法离散大变形物体,通过接触算法实现两个离散体之间的相互作用。该方法避免了物质点法模拟小变形物体的缺点,求解效率比物质点法高。采用杆共轴撞击问题和斜坡上的球滚动问题验证了该算法的精度和高效率,然后模拟了卵形弹斜侵彻铝靶体问题和水柱垮塌过程中与弹性障碍物相互作用的流固耦合问题。

(4) 为了充分吸收有限元法模拟涉及小变形材料时的精度和效率优势以及物质点法模拟材料特大变形的优势,本文进一步提出了自适应物质点有限元法,建立了物质点法和有限元法统一的求解框架,实现了有限元法到物质点法求解的自适应转化。该算法采用有限元离散材料区域,在计算过程中将发生畸变的单元自动

转化为物质点，采用耦合算法实现有限元未转化区域与转化的物质点离散区域的相互作用。因此，该算法不仅无需指定物质点的离散区域，而且避免了将物质点用于材料小变形阶段的模拟，充分发挥了有限元法和物质点法在各自使用范围内的优势。采用两弹性杆共轴撞击问题和Taylor杆问题验证了该算法的精度，然后模拟了WHA长杆弹斜侵彻薄钢板的问题以及无粘沙土边坡失效问题，展现了该算法的高效性。

本文工作的主要创新点有：

(1) 提出了杂交物质点有限元法，解决了物质点法模拟求解钢筋混凝土结构计算规模过于庞大的问题，为钢筋混凝土结构和钢纤维混凝土结构数值模拟提供了一种高效的数值计算方法。

(2) 提出了耦合物质点有限元法，通过接触算法将物质点法和有限元法进行耦合，避免了物质点法在计算冲击侵彻和流固耦合问题中的小变形物体时效率低和精度差的缺点。

(3) 提出了自适应物质点有限元法，充分吸收了有限元和物质点法的优势，避免了两者的缺点，建立了有限元法和物质点法统一求解理论，为冲击侵彻、边坡失效等涉及材料局部大变形问题建立了一种高效稳定的数值计算方法。

6.2 需进一步开展的工作

纵观上述研究成果，本文建立了将物质点法和有限元法相互结合的求解思想，基于该思路可以将有限元法成熟的理论和算法引入到物质点法中，为工程问题提供更高效和稳定的数值计算方法。基于本人对已完成工作的深入思考，结合工程中的问题，提出以下需要进一步开展的工作：

(1) 汽车中的气囊防护是一类典型的薄膜流固耦合问题，涉及到了气体的膨胀以及膨胀过程中与气囊的相互作用。由于气囊厚度方向上的尺寸明显小于其他两个方向的尺寸，采用物质点模拟此类问题依然涉及到了离散规模过于庞大的问题。为此，可借鉴有限元中薄膜单元算法，在物质点法中构造一类薄膜单元离散薄膜，进而降低计算规模，开展气囊防护问题的研究。

(2) 薄壁结构在航空工业中有着大量应用，在以鸟撞为主的冲击载荷下将涉及材料的大变形和破碎。为此，需开展针对板壳结构的无网格算法研究。在本文第五章的框架下，可进一步引入有限元的板壳单元，建立板壳单元与基于板壳理论无网格法的统一求解格式，实现两者间的转化以及相互作用的耦合算法。

(3) 在模拟流体问题方面，可进一步开展不可压缩流问题的物质点法直接求

解方案。借鉴计算流体力学中较为成熟的分步法，将速度和压力分别进行更新求解，通过求解压力泊松方程使不可压条件得到满足，进而实现物质点法求解不可压流动问题。

参考文献

- [1] Belytschko T, Liu W K, Moran B. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. John Wiley & Sons, 2000.
- [2] 张雄, 王天舒. 计算动力学. 清华大学出版社, 2007.
- [3] Benioff M R, Lazowska E D. Computational science: ensuring America's competitiveness. Technical report, President's Information Technology Advisory Committee, 2005.
- [4] 马上. 冲击爆炸问题的物质点无网格法研究[D]. 清华大学, 2009.
- [5] 黄鹏. 金属及岩土冲击动力学问题的物质点法研究[D]. 清华大学, 2010.
- [6] 刘欣. 无网格方法. 科学出版社, 2011.
- [7] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless methods: An overview and recent developments. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139(1-4):3-47.
- [8] Liu G R, Liu M B. Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method. Singapore: World Scientific, 2003.
- [9] 张雄, 刘岩, 马上. 无网格法的理论及应用. 力学进展, 2009, 39(1):1-36.
- [10] Sulsky D, Chen Z, Schreyer H L. A Particle Method for History-Dependent Materials. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, 118(1-2):179-196.
- [11] Lucy L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. The Astrophysical Journal, 1977, 8(12):1013-1024.
- [12] Gingold R A, Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to nonspherical stars. Monthly notices of the Royal Astronomical Society, 1977, 18:375-389.
- [13] 王勖成. 有限单元法. 清华大学出版社, 2003.
- [14] 张雄, 刘岩. 无网格法. 清华大学出版社/Springer, 2004.
- [15] Liszka T J, Duarte C A M, Tworzydło W W. hp- Meshless cloud method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139(1-4):263-288.
- [16] Onate E, Idelsohn S R, Zienkiewicz O C, et al. A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996, 39(2):3839-3866.
- [17] Zhang X, Liu X H, Song K Z, et al. Least-squares collocation meshless method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 51(9):1089-1100.
- [18] Swegle J W, Hicks D J, Atluri S W. Smoothed particle hydrodynamics stability analysis. Journal of Computational Physics, 1995, 116(1):123-134.
- [19] Balsara D S. Von-Neumann stability analysis of smoothed particle hydrodynamics - suggestions for optimal-algorithms. Journal of Computational Physics, 1995, 121(2):357-372.
- [20] Dyka C T, Randles P W, Ingel R P. Stress points for tension instability in SPH. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, 40:2325-2341.

- [21] Chen J K, Beraun J E, Jih C J. An improvement for tensile instability in smoothed particle hydrodynamics. *Computational Mechanics*, 1999, 23(4):279–287.
- [22] Monaghan J J. SPH without a tensile instability. *Journal of Computational Physics*, 2000, 159:290–311.
- [23] Johnson G R, Beissel S R. Normalized smoothing functions for SPH impact computations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, 39(6):2725–2741.
- [24] Campbell J, Vignjevic R, Libersky L. A contact algorithm for smoothed particle hydrodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 184(1):49–65.
- [25] Vignjevic R, De Vuyst T, Campbell J C. A frictionless contact algorithm for meshless methods. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2006, 13(1):35–47.
- [26] Vignjevic R, Campbell J C, Libersky L. A treatment of zero-energy modes in the smoothed particle hydrodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 184:67–85.
- [27] Attaway S W, Heinsteins M W, Swegle J W. Coupling of smooth particle hydrodynamics with the finite element method. *Nuclear Engineering and Design*, 1994, 150:199–205.
- [28] Johnson G R. Linking of Lagrangian particle methods to standard finite element methods for high velocity impact computations. *Nuclear Engineering and Design*, 1994, 150:265–274.
- [29] Johnson G R, Stryk R A, Beissel S R. SPH for high velocity impact computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1-4):347–373.
- [30] Johnson G R, Stryk R A. Conversion of 3D distorted element method for hypervelocity impact simulation. *International Journal of Impact Engineering*, 2003, 28:947–966.
- [31] Vuyst T D, Vignjevic R, Campbell J C. Coupling between meshless and finite element methods. *International Journal of Impact Engineering*, 2005, 31:1054–1064.
- [32] Xiao Y H, X H, Hu D. A coupling algorithm of finite element method and smoothed particle hydrodynamics for impact computations. *CMC: Computers, Materials & Continua*, 2011, 23(1):9–34.
- [33] Johnson G R, Stryk R A, Beissel S R, et al. An algorithm to automatically convert distorted finite elements into meshless particles during dynamic deformation. *International Journal of Impact and Engineering*, 2002, 27(10):997–1013.
- [34] Rabczuk T, Eibl J. Modeling dynamic failure of concrete with meshfree methods. *International Journal of Impact Engineering*, 2006, 32:1878–1897.
- [35] Liu M B, Liu G R, Lam K Y, et al. Meshfree particle simulation of the detonation process for high explosives in shaped charge unlined cavity configurations. *Shock Waves*, 2003, 12(6):509–520.
- [36] Liu M B, Liu G R, Zong Z, et al. Computer simulation of high explosive explosion using smoothed particle hydrodynamics methodology. *Computers & Fluids*, 2003, 32(3):305–322.
- [37] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37:229–256.
- [38] Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing kernel particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995, 20:1081–1106.

- [39] Melenk J M, Babuska I. The partition of unity finite element methods: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1-4):289–314.
- [40] Babuska I, Melenk J M. The partition of unity finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40(4):727–758.
- [41] Liu G R, Gu Y T. A point interpolation method for two-dimensional solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50(4):937–951.
- [42] Wang J G, Liu G R. A point interpolation meshless method based on radial basis functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 54(11):1623–1648.
- [43] Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 1992, 10:307–318.
- [44] Atluri S N, Cho J Y, Kim H G. Analysis of thin beams, using the meshless local Petrov-Galerkin method, with generalized moving least squares interpolations. *Computational Mechanics*, 1999, 24(5):334–347.
- [45] Beissel S, Belytschko T. Nodal integration of the element-free Galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1-4):49–74.
- [46] Chen J S, Wu C T, Yoon S. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin meshfree methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50:435–466.
- [47] Kucherov E B, Miller R E. Umbrella spherical integration: A stable meshless method for non-linear solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, 69(13):2807–2847.
- [48] 潘小飞. 高效稳定的无网格法若干问题的研究[D]. 清华大学, 2006.
- [49] Carpinteri A, Ferro G, Ventura G. The partition of unity quadrature in meshless methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 54(7):987–1006.
- [50] Belytschko T, Organ D, Krongauz Y. A coupled finite element - element - free Galerkin method. *Computational Mechanics*, 1995, 17:186–195.
- [51] Hegen D. Element-free Galerkin methods in combination with finite element approaches. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 135:143–166.
- [52] Rabczuk T, Belytschko T. Application of mesh free methods to static fracture of reinforced concrete structures. *International Journal of Fracture*, 2006, 137:19–49.
- [53] Belytschko T, Tabbara M. Dynamic fracture using element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, 39(6):923–938.
- [54] Krysl P, Belytschko T. The element free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 44(6):767–800.
- [55] Sukumar N, Moran B, T B, et al. An element free Galerkin method for three-dimensional fracture mechanics. *Computational Mechanics*, 1997, 20:170–175.
- [56] Tiago C M, Leitao V M A. Development of a EFG formulation for damage analysis of reinforced concrete beams. *Computers & Structures*, 2004, 82(17-19):1503–1511.
- [57] Rabczuk T, Belytschko T. Cracking particles: a simplified meshfree method for arbitrary evolving cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 61(13):2316–2343.

- [58] Rao B N, Rahman S. Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 2003, 70(1):1–27.
- [59] Ren J, Liew K M, Meguid S A. Modelling and simulation of the superelastic behaviour of shape memory alloys using the element-free Galerkin method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2002, 44(12):29–40.
- [60] Ren J, Liew K M. Meshfree modelling and simulation of the thermomechanical behaviour of shape memory alloys. *Smart Materials & Structures*, 2005, 14(5):S302–S311.
- [61] Guan Y J, Zhao G Q, Wu X, et al. Massive metal form process simulation based on rigid/viscoplastic element-free Galerkin method. *Journal of Materials Processing Technology*, 2007, 187:412–416.
- [62] 周维垣, 寇晓东. 无单元法及其工程应用. *力学学报*, 1998, 30(2):193–202.
- [63] 庞作会, 朱岳明. 无网格伽辽金法 (EFGM) 求解接触问题. *河海大学学报*, 2000, 28(4):54–58.
- [64] Zhang X, Lu M W, Wegner J L. A 2-D meshless model for jointed rock structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 47(10):1649–1661.
- [65] Yang H T, Liu L. Solving transient heat conduction problems with cyclic symmetry via a paralleled EFGM. *Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals*, 2004, 46(5):479–495.
- [66] 龙述尧, 陈莘莘. 弹塑性力学问题中的无单元伽辽金法. *工程力学*, 2003, 20(2):66–70.
- [67] 龙述尧, 胡德安, 熊渊博. 用无单元伽辽金法求解几何非线性问题. *工程力学*, 2005, 22(3):68–71.
- [68] Jin X Z, Li G, Aluru N R. On the equivalence between least-squares and kernel approximations in meshless methods. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2001, 2(4):447–462.
- [69] Liu W K, Chen Y J. Wavelet and multiple scale reproducing kernel methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1995, 21(10):901–931.
- [70] Liu W K, Uras R A, Chen Y. Enrichment of the finite element method with reproducing kernel particle method. *J. Appl. Mech.*, 1997, 135:143–166.
- [71] Liu W K, Han W, Lu H S, et al. Reproducing kernel element method. Part I: Theoretical formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193(12-14):933–951.
- [72] Li S F, Lu H S, Han W M, et al. Reproducing kernel element method Part II: Globally conforming I^m/C^n hierarchies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193(12-14):953–987.
- [73] Jr D C S, Li S F, Lu H S, et al. Reproducing kernel element method. Part IV: Globally compatible C^n ($n \geq 1$) triangular hierarchy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193:1013–1034.
- [74] Chen J S, Pan C, Wu C T. Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of nonlinear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139:195–227.

- [75] Chen J S, Pan C H, Wu C T. Large deformation analysis of rubber based on a reproducing kernel particle method. *Computational Mechanics*, 1997, 19:211–227.
- [76] Chen J S, Pan C H, Wu C T. Application of reproducing kernel particle method to large deformation contact analysis of elastomers. *Rubber Chemistry and Technology*, 1998, 71(2):191–213.
- [77] Chen J S, Pan C, Roque C M O L, et al. A lagrangian reproducing kernel particle method for metal form analysis. *Computational Mechanics*, 1998, 22(3):289–307.
- [78] Chen J S, Roque C M O L, Pan C H, et al. Analysis of metal form process based on meshless method. *Journal of Materials Processing Technology*, 1998, 801:642–646.
- [79] Lu H S, Cheng H S, Cao J, et al. Adaptive enrichment meshfree simulation and experiment on buckling and post-buckling analysis in sheet metal forming. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(21-24):2569–2590.
- [80] Grindeanu I, Chang K H, Choi K K, et al. Design sensitivity analysis of hyperelastic structures using a meshless method. *AIAA Journal*, 1998, 36(4):618–627.
- [81] Grindeanu I, Choi K K, Chen J S, et al. Shape design optimization of hyperelastic structures using a meshless method. *AIAA Journal*, 1999, 37(8):990–997.
- [82] 崔青玲, 李长生, 等. 三维稳态板轧制过程的再生核质点法模拟. *工程力学*, 2006, 23(10):188–192.
- [83] Wang D D, Chen J S, Sun L Z. Homogenization of magnetostrictive particle-filled elastomers using an interface-enriched reproducing kernel particle. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2003, 39(8):765–782.
- [84] Atluri S N, Zhu T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 1998, 22(2):117–127.
- [85] Atluri S N, Zhu T. The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics. *Computational Mechanics*, 2000, 25(23):169–179.
- [86] Atluri S N, Shen S P. *The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method*. Encino: Tech. Science Press, 2002.
- [87] Atluri S N. *The Meshless Method(MLPG) for Domain & BIE Discretizations*. Tech Science Press, 2004.
- [88] Atluri S N, Shen S P. The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method: A simple & less-costly alternative to the finite element and boundary element methods. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2002, 3(1):11–51.
- [89] 张雄, 胡炜, 等. 加权最小二乘无网格法. *力学学报*, 2003, 35(4):425–431.
- [90] Pan X F, Zhang X, Lu M W. Meshless Galerkin leastsquares method. *Computational Mechanics*, 2005, 35(3):182–189.
- [91] Zhu T, Zhang J D, Atluri S N. A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach. *Computational Mechanics*, 1998, 21(3):223–235.

- [92] Atluri S N, Sladek J, Sladek V, et al. The local boundary integral equation (LBIE) and it's meshless implementation for linear elasticity. *Computational Mechanics*, 2000, 25(2-3):180–198.
- [93] Gu Y T, Liu G R. A boundary point interpolation method for stress analysis of solids. *Computational Mechanics*, 2002, 28(1):47–54.
- [94] Zhang J M, Yao Z H, Li H. A hybrid boundary node method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 53(4):751–763.
- [95] 陈文. 奇异边界法. *固体力学学报*, 2009, 30(9):592–599.
- [96] Fahrenthold E P, Horban B A. A hybrid particle-finite element method for hypervelocity impact simulation. *International Journal of Impact Engineering*, 1999, 23:237–248.
- [97] Fahrenthold E P, Horban B A. An improved hybrid particle -element method for hypervelocity impact simulation. *International Journal of Impact Engineering*, 2001, 26(1-10):169–178.
- [98] Shivarama R, Fahrenthold E P. An ellipsoidal particle-finite element method for hypervelocity impact simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 59:737–753.
- [99] Idelsohn S R, Onate E, Calvo N, et al. The meshless finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 58(6):893–912.
- [100] Idelsohn S R, Onate E, Del Pin F. A Lagrangian meshless finite element method applied to fluid-structure interaction problems. *Computers & Structures*, 2003, 81(8-11):655–671.
- [101] Brackbill J U, Ruppel H M. FLIP: A method for adaptively zoned, particle-in-cell calculations of fluid flows in two dimensions. *Journal of Computational Physics*, 1986, 65:314–343.
- [102] Brackbill J U, Kothe D B, Ruppel H M. FLIP: A low-dissipation, particle-in-cell method for fluid flow. *Computer Physics Communications*, 1988, 48:25–38.
- [103] Cummins S J, Brackbill J U. An implicit particle-in-cell method for granular materials. *Journal of Computational Physics*, 2002, 180:506–548.
- [104] Sulsky D, Kaul A. Implicit dynamic in the material-point-method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193(12-14):1137–1170.
- [105] Guilkey J E, Weiss J A. Implicit time integration for the material point method: Quantitative and algorithm comparisons with the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 57:1323–1338.
- [106] Bardenhagen S G, Kober E M. The generalized interpolation material point method. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2004, 5(6):477–495.
- [107] Wallstedt P C, Guilkey J E. An evaluation of explicit time integration schemes for use with the generalized interpolation material point method. *Journal of Computational Physics*, 2008, 227:9628–9642.
- [108] Zhang D Z, Ma X, Giguere P T. Material point method enhanced by modified gradient of shape function. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230:6379–6398.
- [109] Htike H, Chen W, Gu Y, et al. Material point method with RBF interpolation. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2011, 72:247–272.

- [110] Tan H L, Nairn J A. Hierarchical, adaptive, material point method for dynamic energy release rate calculations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, 191(19-20):2095–2109.
- [111] Love E, Sulsky D L. An unconditionally stable, energy-momentum consistent implementation of the material-point method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195(33-36):3903–3925.
- [112] York II A R, Sulsky D, Schreyer H L. The material point method for simulation of thin membranes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 44:1429–1456.
- [113] Bardenhagen S G, Brackbill J U, Sulsky D. The material-point method for granular materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 187(3-4):529–541.
- [114] Bardenhagen S G, Guilkey J E, Roessig K M, et al. An improved contact algorithm for the material point method and application to stress propagation in granular material. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2001, 2(4):509–522.
- [115] Huang P, Zhang X, Ma S, et al. Contact algorithms for the material point method in impact and penetration simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, 85(4):498–517.
- [116] Hu W, Chen Z. A multi-mesh MPM for simulating the meshing process of spur gears. *Computers & structures*, 2003, 81:1991–2002.
- [117] Ma Z, Zhang X, Huang P. An Object-Oriented MPM Framework for Simulation of Large Deformation and Contact of Numerous Grains. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2010, 55(1):61–87.
- [118] Ma S, Zhang X, P L Y, et al. Simulation of high explosive explosion using adaptive material point method. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2009, 39(2):101–123.
- [119] Zhang X, Sze K Y, Ma S. An explicit material point finite element method for hyper-velocity impact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, 66(4):689–706.
- [120] Guilkey J E, Harman T B, Banerjee B. An Eulerian-Lagrangian approach for simulating explosions of energetic devices. *Computers & structures*, 2007, 85:660–674.
- [121] Anvar G, Sumanta A. A hybrid immersed boundary and material point method for simulating 3D fluid-structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2008, 56:2151–2177.
- [122] Ayton G, Bardenhagen S G, McMurtry P, et al. Interfacing continuum and molecular dynamics: An application to lipid bilayers. *Journal of Chemical Physics*, 2001, 114(15):6913–6924.
- [123] Guo Z, Yang W. MPM/MD handshaking method for multiscale simulation and its application to high energy cluster impacts. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2006, 48:145–159.
- [124] Lu H, Daphalapurkar N P, Wang B, et al. Multiscale simulation from atomistic to continuum - coupling molecular dynamics (MD) with the material point method (MPM). *Philosophical Magazine*, 2006, 86(20):2971–2994.
- [125] Chen H W, Hagiwara I, Tieu A K. A seamless coupling between molecular dynamics and material point method. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 2011, 28:55–67.

- [126] Parker S G. A component-based architecture for parallel multi-physics PDE simulation. *Future Generation Computer Systems*, 2006, 22:204–216.
- [127] Parker S G, Guilkey J, Harman T. A component-based parallel infrastructure for simulation of fluid-structure interaction. *Engineering with Computers*, 2006, 22:277–292.
- [128] Huang P, Zhang X, Ma S, et al. Shared memory OpenMP parallelization of explicit MPM and its application to hypervelocity impact. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2008, 38:119–147.
- [129] 黄鹏, 张雄, 等. 基于OpenMP的三维显式物质点法并行化研究. *计算力学学报*, 2010, 27:21–27.
- [130] Zhang Y T, Zhang X, Liu Y. An alternated grid updating parallel algorithm for material point method using OpenMP. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2010, 69(2):143–165.
- [131] Ma J, Lu H, Wang B, et al. Multiscale simulations using generalized interpolation material point (GIMP) method and SAMRAI parallel processing. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2005, 8(2):135–152. Times Cited: 3.
- [132] Hornung R D, Kohn S R. Managing application complexity in the SAMRAI object-oriented framework. *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, 2002, 14:347–368.
- [133] Bardenhagen S G. Energy conservation error in the material point method for solid mechanics. *Journal of Computational Physics*, 2002, 180:383–403.
- [134] Wallstedt P C, Guilkey J E. Improved velocity projection for the material point method. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2007, 19(3):223–232.
- [135] Steffen M, Kirby R M, Berzins M. Decoupling and balancing of space and time errors in the material point method (MPM). *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, 82:1207–1243.
- [136] 马上, 张雄, 邱信明. 超高速碰撞问题的三维物质点法. *爆炸与冲击*, 2006, 26(3):273–278.
- [137] 马上. 超高速碰撞问题的三维物质点法模拟[M]. 清华大学, 2005.
- [138] Sulsky D, Zhou S J, Schreyer H L. Application of a Particle-in-Cell Method to Solid Mechanics. *Computer Physics Communications*, 1995, 87(1-2):236–252.
- [139] Sulsky D, Schreyer H L. Axisymmetric form of the material point method with applications to upsetting and Taylor impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139(1-4):409–429.
- [140] Zhang D Z, Zou Q, VanderHeyden W B, et al. Material point method applied to multiphase flows. *Journal of Computational Physics*, 2008, 227:3159–3173.
- [141] Hu W Q, Chen Z. Model-based simulation of the synergistic effects of blast and fragmentation on a concrete wall using the MPM. *International Journal of Impact Engineering*, 2006, 32(12):2066–2096.
- [142] 马上, 张雄. 聚能射流形成的自适应物质点法模拟. *固体力学学报*, 2009, 30(5):504–508.
- [143] 王宇新, 陈震, 孙明. 滑移爆轰问题无网格MPM法数值模拟. *力学与实践*, 2006, 29(3):20–25.

- [144] 王宇新. 多项介质爆炸冲击响应物质点法分析[D]. 大连理工大学, 2006.
- [145] Wang Y X, Beom H G, Sun M, et al. Numerical simulation of explosive welding using the material point method. *International Journal of Impact Engineering*, 2011, 38:51–60.
- [146] 张忠, 陈卫东, 杨文淼. 非均匀固体炸药冲击起爆的物质点法. *爆炸与冲击*, 2011, 31(1):25–30.
- [147] Nairn J A. Material Point Method Calculations with Explicit Cracks. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2003, 4:649–663.
- [148] Guo Y, Nairn J A. Calculation of J integration and stress intensity factors using the material point method. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2004, 6:295–308.
- [149] Guo Y J, Nairn J A. Three-dimensional dynamic fracture analysis using the material point method. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2006, 16(3):141–155.
- [150] Nairn J A. On the calculation of energy release rates for cracked laminates with residual stresses. *International Journal of Fracture*, 2006, 139:267–293.
- [151] Gilabert F A, Cantavella V C, Sanchez E, et al. Modelling fracture process in ceramic materials using the Material Point Method. *A Letters Journal Exploring the Frontiers of Physics*, 2011, 96:24002p1–p6.
- [152] Daphalapurkar N P, Lu H, Coker D, et al. Simulation of dynamic crack growth using the generalized interpolation material point (GIMP) method. *International Journal of Fracture*, 2007, 143(1):79–102.
- [153] Wang B, Karuppiiah V, Lu H, et al. Two-dimensional mixed mode crack simulation using the material point. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2005, 12:471–484.
- [154] Chen Z, Hu W, Shen L M, et al. An evaluation of the MPM for simulating dynamic failure with damage diffusion. *Engineering Fracture Mechanics*, 2002, 69:1873–1890.
- [155] Chen Z, Feng R, Xin X, et al. A computational model for impact failure with shear-induced dilatancy. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 56:1979–1997.
- [156] Chen Z, Shen L M, Mai Y W, et al. A bifurcation-based decohesion model for simulating the transition from localization to decohesion with the MPM. *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physick ZAMP*, 2005, 56:908–930.
- [157] Chen Z, Gan Y, Chen J K. A coupled thermo-mechanical model for simulating the material failure evolution due to localized heating. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2008, 26(2):123–137.
- [158] Shen L M. A Rate-Dependent Damage/Decohesion Model for Simulating Glass Fragmentation under Impact using the Material Point Method. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2009, 49(1):23–45.
- [159] Schreyer H L, Sulsky S J. Modeling delamination as a strong discontinuity with the material point method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, 191:2483–2507.
- [160] Sulsky H L. MPM simulation of dynamic material failure with a decohesion constitutive model. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2004, 23:423–445.

- [161] Ionescu I, Guilkey J E, Berzins M, et al. Simulation of soft tissue failure using the material point method. *Journal of Biomechanical Engineering*, 2006, 128:917–924.
- [162] Li F, Pan J Z, Sinka C. Modelling brittle impact failure of disc particles using material point method. *International Journal of Impact Engineering*, 2011, 38:653–660.
- [163] Coetzee C J, Vermeer P A, Basson A H. The modelling of anchors using the material point method. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2005, 29:879–895.
- [164] Andersen S, Andersen L. Modelling of landslides with the material-point method. *Computational Geosciences*, 2010, 14:137–147.
- [165] Wieckowski Z. The material point method in large strain engineering problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193(39-41):4417–4438.
- [166] Coetzee C J, Basson A H, Vermeer P A. Discrete and continuum modelling of excavator bucket filling. *Journal of Terramechanics*, 2007, 44(2):177–186.
- [167] 王津龙, 刘天云, 张楚汉. 堆石体柱状试件成型过程的材料点法仿真. *清华大学学报 (自然科学版)*, 2005, 45(12):1604–1607.
- [168] Bardenhagen S G, Brydon A D, Guilkey J E. Insight into the physics of foam densification via numerical simulation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, 53(3):597–617.
- [169] Sulsky D, Schreyer H L, Peterson K. Using the material-point method to model sea ice dynamics. *Journal of Geophysical Research-Oceans*, 2007, 112:C02S90.
- [170] Ambati R, Yuan H, Pan X F, et al. Application of material point method for cutting process simulations. *Computational Materials Science*, 2011, 57:102–110.
- [171] Xue L P, Borodin O, Smith G D, et al. Micromechanics simulations of the viscoelastic properties of highly filled composites by the material point method (MPM). *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2006, 14(4):703–720.
- [172] Wang H K, Liu Y, Zhang X. Numerical simulation of carbon nanotube reinforced composite by material point method. *Computational Materials Science*, 2012, 57:23–29.
- [173] York II A R, Sulsky D, Schreyer H L. Fluid-membrane interaction based on the material point method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 48:901–924.
- [174] Zhang H W, Wang K P, Chen Z. Material point method for dynamic analysis of saturated porous media under external contact/impact of solid bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 198:1456–1472.
- [175] 张洪武, 王鲲鹏, 陈震. 基于物质点方法饱和多孔介质动力学模拟 (I) –耦合物质点方法. *岩土工程学报*, 2009, 31(10):1505–1011.
- [176] 张洪武, 王鲲鹏. 基于物质点方法饱和多孔介质动力学模拟 (III) –两相物质点方法. *岩土工程学报*, 2010, 32(4):507–513.
- [177] 张洪武, 王鲲鹏, 陈震. 基于物质点方法饱和多孔介质动力学模拟 (II) –饱和多孔介质与固体间动力接触分析. *岩土工程学报*, 2009, 31(11):1672–1679.
- [178] 许爱国, 张广财, 应阳君, et al. 多孔材料冲击特性的数值研究. *力学学报*, 2010, 42(6):1138–1148.

- [179] Ma S, Zhang X, Qiu X M. Comparison study of MPM and SPH in modeling hypervelocity impact problems. *International Journal of Impact Engineering*, 2009, 36:272–282.
- [180] Gurney R W. The Initial Velocities of Fragments from Bombs, Shells, and Grenades. Technical Report A407982, Ballistic Research Laboratory, Aberdeen, MD, September, 1943.
- [181] Roth J. Correlation of the Gurney Formula for the Velocity of Explosively Driven Fragment with Detonation Parameters of the Driver Plate. Technical Report No. 001.71, Poulter Laboratory, Stanford Research Institute, Menlo Park, CA, 1971.
- [182] Zukas J A, Walters W P. *Explosive Effects and Applications*. Springer, 1998.
- [183] Johnson G, Cook W. A Constitutive Model and Data for Metals Subjected to Large Strains, High Strain Rates and High Temperatures. *Proceedings of 7th International Symposium on Ballistics*, The Hague, The Netherlands, 1983.
- [184] Meyers M A 原著, 张庆明, 刘彦, 黄风雷, 等译. 材料的动力学行为. 国防工业出版社, 2006.
- [185] Aziz A K, Hurwitz H, Sternberg H M. Energy transfer to a rigid piston under detonation loading. *Physics of Fluids*, 1961, 4:380–384.
- [186] Chanteret P Y. Velocity of HE driven metal plates with finite lateral dimensions. *Proceedings of Proceedings of the 12th International Symposium on Ballistics*, 1990. 369–378.
- [187] Kennedy J. Explosive output for driven metal. *Proceedings of Pro. 12th Annual Sym. on Behavior and Utilization of Explosive in Engineering Design*, New Mexico, 1972.
- [188] Malvar L J, Crawford J E, Wesevich J W, et al. A plasticity concrete material model for DYNA3D. *International Journal of Impact Engineering*, 1997, 19(9-10):847–873.
- [189] L A, L L. 3D FE-simulation of high-velocity fragment perforation of reinforced concrete slabs. *International Journal of Impact Engineering*, 1999, 22:911–922.
- [190] Teng T L, Chu Y A, Chang F A, et al. Simulation model of impact on reinforced concrete. *Cement and Concrete Research*, 2004, 34:2067–2077.
- [191] Tham C Y. Reinforced concrete perforation and penetration simulation using AUTODYN-3D. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2005, 41:1401–1410.
- [192] Luccioni B M, Luege M. Concrete pavement slab under blast loads. *International Journal of Impact Engineering*, 2006, 32:1248–1266.
- [193] Tai Y S, Tang C C. Numerical simulation: the dynamic behavior of reinforced concrete plates under normal impact. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2006, 45:117–127.
- [194] Kishi N, Bhatti A Q. An equivalent fracture energy concept for nonlinear dynamic response analysis of prototype RC girders subjected to falling-weight impact loading. *International Journal of Impact Engineering*, 2010, 37:103–113.
- [195] Tahmasebinia F. Finite element simulation of reinforced concrete structures under impact accident. *Structural Survey*, 2008, 26(5):445–454.
- [196] Holmquist T J, Johnson G R, Cook W H. A computational constitutive model for concrete subjected to large strains, high strain rates, and high pressures. *Proceedings of 14th International Symposium on Ballistics Quebec, Candan*, 26-29 September 1993, 1993.

- [197] AUTODYN-3D Version 4.2 User's Manual. Century Dynamics, Inc, 2001.
- [198] Hallquist J O. LS-DYNA Keyword User's Manual. Livermore Software Technology Corporation, 2003.
- [199] Dawson A, Bless S, Levinson S, et al. Hypervelocity penetration of concrete. *International Journal of Impact Engineering*, 2008, 35(12):1484–1489.
- [200] Polanco-Loria M, Hopperstad O S, Bovik T, et al. Numerical predictions of ballistic limits for concrete slabs using a modified version of the HJC concrete model. *International Journal of Impact Engineering*, 2008, 35(5):290–303.
- [201] Hanchak S J, Forrestal M J, Young E R, et al. Perforation of concrete slabs with 48 MPa (7ksi) and 140 MPa (20ksi) unconfined compressive strengths. *International Journal of Impact Engineering*, 1992, 12(1):1–7.
- [202] Hallquist J. LS-DYNA Theoretical Manual. Livermore Software Technology Corporation, 1998.
- [203] Flanagan D P, Belytschko T. A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1981, 17:679–706.
- [204] Piekutowski A J, Forrestal M J, Poormon K L, et al. Perforation of Aluminum plates with Ogive-Nose Steel Rods at Normal and Oblique Impacts. *International Journal of Impact Engineering*, 1996, 18:877–887.
- [205] Meyers M A. *Dynamic Behavior of Materials*. John Wiley & Sons, 1994.
- [206] Idelsohn S R, Marti J, Limache A, et al. Unified Lagrangian formulation for elastic solids and incompressible fluids: Application to fluid-structure interaction problems via the PFEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, 197(19-20):1762–1776.
- [207] Walhorn E, Kölke A, Hübner B, et al. Fluid-structure coupling within a monolithic model involving free surface flows. *Computers & structures*, 2005, 83:2100–2111.
- [208] Johnson G R, Holmquist T J. Evaluation of cylinder-impact test data for constitutive model constants. *Journal of Applied Physics*, 1988, 64(8):3901–3910.
- [209] Holmberg L, Lundberg P, Westerling L. An experimental investigation of WHA long rods penetrating oblique steel plates. *Proceedings of 14th International Symposium on Ballistics*, 1993.
- [210] Liden E, Ottosson J, Holmberg L. WHA long rods penetrating stationary and moving oblique steel plates. *Proceedings of 16th International symposium on ballistics*, 1996.
- [211] Park Y K, Fahrenthold E P. A kernel free particle-finite element method for hypervelocity impact simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 63:737–759.
- [212] Bui H H, Fukagawa R, Sako K, et al. Lagrangian meshfree particles method (SPH) for large deformation and failure flows of geomaterials using elastic-plastic soil constitutive model. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2008, 32:1537–1570.

致 谢

衷心感谢导师张雄教授对本人的精心指导和悉心培养，他的言传身教将使我终生受益。感谢陆明万教授、邱信明教授、刘岩博士对我的指导和帮助。

感谢计算动力学实验室同窗们，与他们的讨论使我收获良多。

本课题承蒙973项目(2010CB832701)和国家自然科学基金(10872107)资助，特此致谢。

感谢家人一如既往的支持和默默的付出。

声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名：_____ 日 期：_____

个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果

个人简历

1985 年 10 月出生于河北省成安县。

2003 年 9 月考入哈尔滨工程大学工程力学系, 2007 年 7 月本科毕业并获得工学学士学位。

2007 年 9 月进入清华大学航天航空学院攻读工学博士学位至今。

发表的学术论文

- [1] Lian Y P, Zhang X, Zhou X, Ma s, Zhao Y L. Numerical simulation of explosive driven metal by material point method. International Journal of Impact Engineering, 2011, 38(4):237-274. (SCI 收录; EI 收录)
- [2] Lian Y P, Zhang X, Zhou X. A FEMP method and its application in modeling dynamic response of reinforced concrete subjected to impact loading. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 2011, 20(17-20):1659-1670. (SCI 收录; EI 收录)
- [3] Lian Y P, Zhang X, Liu Y. Coupling of finite element method with material point method by local multi-mesh contact method. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 2011, 200:3482-3494. (SCI 收录; EI 收录)
- [4] Lian Y P, Zhang X, Liu Y. Coupling between finite element method and material point method for problems with extreme deformation. Theoretical & Applied Mechanics Letters, 2012, 2(2):021003.
- [5] Lian Y P, Zhang X, Ma Z T. A hybrid MP-FE method for modeling dynamic response of reinforced concrete subject to impact loading. 9th World Congress on Computational Mechanics and 4th Asian Pacific Congress on Computational Mechanics (WCCM/APCOM 2010), July 19-23, Sidney, Australia, 2010.
- [6] Lian Y P, Zhang X, Liu Y. Coupled Finite Element Material Point Method with Converting Distorted Finite Elements to Particles. 3th International Symposium on Computational Mechanics & 2th Symposium on Computational Structural Engineering (ISCM III-CSE II), December 5-7, Taipei, 2011.

- [7] 张雄, 廉艳平, 杨鹏飞, 等. 冲击爆炸问题的三维物质点法数值仿真. 计算机辅助工程, 2011, 20(4):29-37.

研究成果

- [1] 张雄, 廉艳平. 三维显式有限元物质点法仿真软件FEMP3D (计算机软件著作权登记2012SR032143, 2012.4) .
- [2] 强冲击荷载下结构破坏过程的建模与关键算法, 国家973项目子课题 (2010CB832701, 参加人) .
- [3] 侵彻爆炸问题的自适应物质点无网格法研究, 国家自然科学基金 (10872107, 参加人) .