超高速碰撞问题的
三维物质点法模拟

Material Point Method for 3D Hypervelocity Impact Simulation

（申请清华大学工学硕士学位论文）

培 养 单 位 ： 航天航空学院

学　　　科 ： 力 学

研　究　生 ： 马 上

指 导 教 师 ： 张 雄教授

二〇〇五年五月

摘 要

随着航天技术的发展，越来越多的人造卫星或者航天器被发射到地球轨道。大量发射活动带来的副产品被留在地球轨道上，形成空间碎片。空间碎片与航天器的平均碰撞速度达到 10km/s 左右，对人类的航天活动的安全造成严重威胁，需要人们对超高速碰撞的现象进行研究。对比实验研究方法，数值模拟具有廉价和可以连续观察的优势。

物质点法将物体离散成一组有质量的质点，质点携带所有物质信息，其运动代表物质的变形，固定于空间的背景网格用来求解动量方程和计算空间导数。物质点法结合了拉格朗日方法和欧拉方法的优点，避免了拉格朗日方法因网格畸变引起的数值困难，也克服了欧拉方法材料界面跟踪以及非线性对流项引起的数值困难，非常适合分析超高速碰撞这类具有极大变形的问题。

本文在物质点法中引入 Johnson-Cook 材料模型和 Mie-Gruneisen 状态方程，编制了可以模拟各种碰撞乃至超高速碰撞问题的三维物质点法的程序 MPM3D。通过弹性杆碰撞问题和 Taylor 杆碰撞问题验证了程序的正确性，并说明了物质点法相对传统有限元的优势。

本文用物质点法模拟了弹丸超高速碰撞薄板的问题，观察弹丸穿孔以及碎片云形成的过程。研究在不同弹速下，弹丸穿孔孔径的规律，其结果与经验公式基本符合，板后碎片云的形貌也与实验结果一致。本文也应用物质点法模拟弹丸超高速碰撞厚板的问题，观察弹坑的形成规律。

关键词：超高速碰撞　　物质点法　　大变形　　数值模拟

Abstract

With the development of spaceflight technique, more and more artificial satellites are launched to the earth orbit. The byproduct of those launches that remains in space forms the main part of the orbital debris. The relative velocity of the impact of orbital debris and space craft can reach 10 km/s. The orbital debris is a great threat against security of human’s spaceflight. Therefore, the study of hypervelocity is vital. The numerical simulation is much cheaper compared with the experiment approach and capable of observing the whole impact process.

In material point method, the physical domain is descretized by a group of points, termed as particles. Particles carry all the material information, and their movement represents the deformation of the material. The momentum equations are solved on a predefined background grid that is fixed in space. The material point method combines the advantages of Eulerian and Lagrangian description of motion. It eliminates the drawbacks of numerical difficulties associated with mesh distortion and element entanglement in Lagrangian and with the advected quantities in Eulerian description. The material point method is well suitable to the hypervelocity impact problem, in which extreme large deformation will occur.

In this thesis, a 3D material point method code, MPM3D, is developed. The Johnson-Cook material model and Mie-Gruneisen equation of state are implemented for the hypervelocity impact simulation. The code is validated by the numerical example of elastic bar impact problem and Taylor bar impact problem. The advantage of material point method over traditional finite element method is illustrated.

The hypervelocity impact of a projectile to a thin plate is simulated by MPM3D. The formation of penetrating hole and debris cloud is examined. The numerical results agree well with the experiment result. The hypervelocity impact of a projectile onto a thick plate is also simulated to examine the formation of crater.

Keywords: hypervelocity impact   material point method   large deformation   numerical simulation

目　录

第1章　引言

1.1　课题背景

随着航天技术的发展，越来越多的人造卫星或者航天器被发射到地球轨道。作为发射活动带来的副产品，大量运载工具产生的喷射物和抛弃物、失效的有效载荷、空间物体碰撞产生的碎片等被留在地球轨道上。一般称为空间碎片（space debris）或轨道碎片（orbital debris）[1]。空间碎片按照其尺寸可以分为三级：

（1）直径大于 10cm 的物体，通常被称为大碎片。美国空间司令部（USSC）对这些碎片全部编号监控，根据 USSC 在 2005 年 4 月 11 日公布的数据，分布在空间不同轨道的被登记在案的大碎片总计 9494 个，这个数字比 2004 年同期增加了 200 多个。据估计，实际存在的大碎片达到 11,000 个[2]。这些碎片一旦与航天器发生碰撞，将毁坏整个航天器，并产生更多的空间碎片。

（2）直径小于 10cm 的碎片无法跟踪和记录，但达到厘米级的碎片可以穿透航天器的防护壳，对其结构造成破坏。直径在 1~10cm 之间的碎片估计超过 100,000 个。

（3）毫米级和更小的碎片，会破坏航天器的易损表面。由于近地轨道这样的小碎片极多，长期碰撞也会造成累计影响，比如损坏太阳能电池帆板，影响其使用效率。直径小于 1cm 的碎片估计多达数千万个。

绝大部分的空间碎片处于在高度低于 2000km 的近地轨道，它们绕地球旋转的速度通常在 7 到 8km/s，而空间碎片与航天器的平均碰撞速度达到 10km/s 左右。除了空间碎片，航天环境中还有大量的微流星体，它们都对航天器的安全造成了严重的威胁。为了研制和使用航天飞行器、人造卫星、洲际弹道导弹，除了对大碎片加强监控和尽可能减少空间碎片的生成，也需要研究空间碎片或陨石碰撞引起的破坏效应以及有效的防护结构形式。这些因素促使人们对各种材料在超高速碰撞下的行为进行研究。

1.2　超高速碰撞的研究现状

超高速碰撞可以定义为：碰撞所产生的冲击压力远大于弹或靶的强度的一类碰撞[1]。根据这种定义，不同的物质达到超高速碰撞的速度会各不相同。如石蜡弹丸碰撞石蜡靶，这个速度约为 1km/s；对金属铅，这个速度在 2km/s 左右；对于铝等较坚硬的材料，速度要到 5km/s 左右才达到超高速碰撞。在发生超高速碰撞的局部区域，物质的形态类似可压缩流体，可以用流体动力学的方程来描述。对超高速碰撞可按靶板的厚度分为三类：厚板、中厚板、薄板。厚板是指板厚大大超过弹坑深度，研究的现象主要是开坑。中厚板是指板厚和侵彻深度相差不大的情况，主要现象是冲塞，层裂。薄板是相对而言，一般在碰撞过程中板被击穿并在板的背面形成碎片云。

1.2.1　实验研究

早期对超高速碰撞的实验研究主要集中在厚板成坑方面，关心成坑的过程和坑的形态，以及影响它们的各种因素，总结出了“均匀膨胀律”和“坑深模型律”等结论[1]。

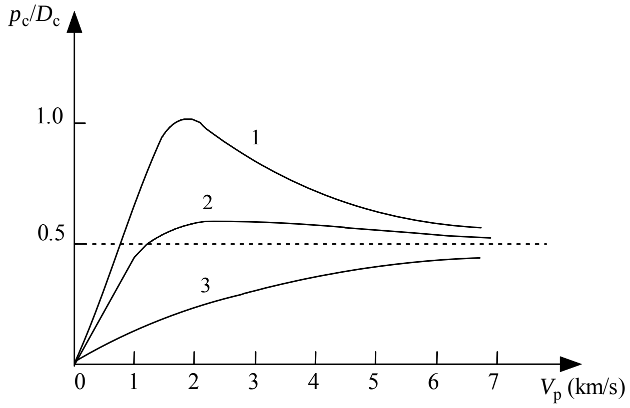


图 1.1 不同弹靶材料时弹坑形状系数与撞击速度的关系

研究者进行了大量不同材料的弹、靶撞击实验，考察弹坑形状系数（弹坑深度 p_c 与弹坑直径 D_c 之比 p_c/D_c ）与撞击速度 v_p 之间的关系，如图 1.1 所示。

曲线 1 显示较高密度和强度的弹丸撞击较低密度和强度的靶板，在撞击速度较低时弹体完整，随撞击速度的增加，弹坑深度比弹坑直径增加的快，弹坑呈深

孔型；当撞击速度增加到使弹体破碎时，随撞击速度的增加，弹坑直径比弹坑深度增加的快，最终趋于弹坑深度是弹坑直径的一半。曲线 3 显示较低密度和强度的弹丸撞击较高密度和强度的靶板，此时由于弹体极易变形和破碎，弹坑深度比弹坑直径小的多，弹坑呈浅碟形。但随撞击速度的增加，最终弹坑深度也趋向于弹坑直径的一半。曲线 2 显示密度强度相差不多的弹靶组合，弹坑形状系数和撞击速度曲线介于上述两种情况之间。因此，在超高速碰撞厚板成坑的问题中，弹坑形状系数随碰撞速度增加趋近于 0.5 是一个典型的特征。

根据试验结果，研究者还总结出弹坑的体积 V_c 正比于弹丸的动能 E_p [1]，即

$$V_c = KE_p \tag{1-1}$$

再根据弹坑呈半球形的假说，并设弹丸为直径 D_p 的球形，即将 $V_c = (2\pi/3)p_c^3$ 和 $E_p = \frac{1}{2}mv_p^2 = \frac{\pi}{12}\rho_p D_p^3 v_p^2$ 代入（1-1），可以得到：

$$\frac{p_c}{D_p} = c\rho_p^{1/3} v_p^{2/3} \tag{1-2}$$

这个坑深 p_c 与弹速 v_p 的 2/3 次方成正比的经验规律被称为“2/3 次律”，绝大多数实验结果符合这个规律。但是近期也有学者指出，坑深与弹速的关系用线性函数拟合更为合理[3]。

对薄板的实验研究的目的是了解双层结构中前板对主结构的防护性能，所以主要关心薄板穿孔的孔径，薄板击穿后碎片云的形态，相变效应，以及后板的破坏特征。薄板成孔直径有许多经验公式，对于弹靶材料相同的情况，1964 年 Maiden 等得到孔径 D_c 与弹速 v_p 成线性关系[1]

$$\frac{D_c}{d_p} = 0.45 v_p \left(\frac{t_s}{d_p}\right)^{2/3} + 0.9 \tag{1-3}$$

其中 t_s 是靶板厚度，d_p 是弹丸直径。1989 年，张德良、谈庆明等根据实验结果整理的结果为[1]

$$\frac{D_c}{d_p} = 1.66(v_p - 1)^{0.5}(\frac{t_s}{d_p})^{0.5} \tag{1-4}$$

以上两式都没有考虑弹靶材料的强度和密度对穿孔孔径的影响。在[1]中，作者根据实验结果总结了考虑材料强度和密度，但没有考虑靶板厚度等几何因素的经验公式

$$\frac{D_c}{d_p} = 1.68\ln(\frac{v_p}{\sqrt{Y/\rho}}) - 1.91 \tag{1-5}$$

在实验中，一般使用高速摄影或脉冲 X 光照相等方式记录碎片云的分布以及运动特征。一般多采用轻气炮、电磁炮和聚能射流三类方法对弹丸进行加速使其达到超高速。在超高速碰撞实验中使用最广泛的的是二级轻气炮。美国 Sandia 国家实验室已经通过三级轻气炮实现了碰撞速度高达 11km/s 的钛合金超高速碰撞[4]。

1.2.2　数值模拟

超高速碰撞问题的实验研究有很大的局限性。一方面，实验中的碰撞速度受到加速设备的限制，费用也很昂贵；另一方面，实验结果基本都是由实验的终点效应得到，而碰撞的过程，半球坑或碎片云如何形成，则很难连续观察和测量到。数值模拟比较便宜，也容易观察到碰撞的整个过程，成为研究超高速碰撞的一种重要方法。

在超高速碰撞中，尤其在碰撞点附近，材料结构强度退居次要地位，而惯性效应，可压缩性等起到重要作用，材料类似可压缩流体。早期的计算程序多采用基于无粘可压缩流体的模型，在此基础上发展起来的程序被称为“流体动力学程序”（Hydrocode）。

无论离散时采用有限差分法还是有限元法，数值模拟方法根据使用的网格不同通常都可以分为欧拉方法和拉格朗日方法两大类。

在拉格朗日方法中，计算网格固定在物质上，随物质一起变形。网格点和物质点重合在一起，因此网格点和物质点间不存在相对运动，控制方程中不存在对流项，这简化了控制方程，求解过程也相对比较简单。拉格朗日方法容易

跟踪物体的运动，有利于处理物质间的界面和物质边界。另外，许多固体物质的本构关系和变形历史相关，用拉格朗日方法也比较容易精确地跟踪和处理。这种方法的缺点是，在物体发生大变形的情况下，网格会畸变和扭曲，引起较大误差甚至计算失败。在显式方法中，积分步长由最小单元的尺寸控制，当变形增加，单元扭曲，时间步长会逐步减小，并趋于零，使得计算成本急剧增加甚至无法完成。虽然采用重新划分网格的技术可以一定程度上克服网格畸变带来的困难，但仍然会产生误差。而且对于三维问题，网格重划分既费时又复杂，最复杂和完善的网格重划分程序也难以得到令人满意的结果。

在欧拉方法中，网格固定在空间，在物体的变形过程中保持不变。因此欧拉方法中，不会出现网格扭曲的问题，但由于物质将相对网格运动，在控制方程中会出现对流项，容易出现数值扩散。同时，欧拉方法不跟踪物质变形，难以处理变化的物质边界，特别是多种物质间的界面。如果不采用特殊的物质分界面定位技术，物质分界面将很快在网格中弥散。

针对拉格朗日方法和欧拉方法各自的优势和缺点，人们提出了很多混合方法，以期结合它们的长处，避免它们的弱点。比较典型的是任意拉格朗日-欧拉方法（Arbitrary Lagrange-Euler，ALE）[5]，它的网格既不是拉格朗日的也不是欧拉的，而是每隔一个或几个时间步长，根据需要按照一定规则独立于物质运动。ALE 法在自由表面问题、流固耦合问题、碰撞接触问题中有比较成功的应用。ALE 的求解中仍存在对流项，且复杂的网格运动算法对 ALE 求解复杂的三维问题也带来很大困难。另外一个典型的混合方法是在各类可压缩流体问题中得到广泛使用的质点网格法（Particle-In-Cell，PIC）[6]。PIC 方法对物质采用双重描述：用离散的质量点来描述流体，称为质点（Particle），计算网格仍然使用欧拉网格，一般质点数多于网格数。每一个时间步中先忽略对流项，进行拉格朗日计算，然后再利用质点运动来计算通过网格边界的输运量。它的思想和做法对以后许多计算方法的发展都产生了较深的影响。

近年来发展起来的无网格法[7][8]摒弃了网格，直接利用离散点来构造近似函数，有效地克服了网格畸变带来的求解困难。目前已提出了十余种无网格法，成功地应用于求解动态裂纹扩展、金属加工成形、高速碰撞、流体流动等问题中。然而，当节点分布极不均匀（对应于有限元中的网格畸变）时，大部分无网格近似函数（如移动最小二乘近似、重构核近似等）的精度将大幅度降低，因此这类无网格法（如无单元伽辽金法、重构核质点法等）难以应用于求解超

高速碰撞等涉及极大变形的问题。以光滑质点流体动力学方法（SPH）为代表的质点类方法，相对比较适合用于求解高速碰撞问题，并且有许多成功的应用。但它仍然存在一些缺点，如存在拉力不稳定性，引入本质边界条件存在困难，需要比较复杂的接触算法等。

下面简要介绍一下当前用于模拟高速碰撞问题的主要的几种程序：

HEMP[1]是采用拉格朗日网格的显式有限差分程序，它由美国 Lawrence Livermore 国家实验室的 M.L. Wilkins 在 20 世纪 70 年代设计，早期被用于计算爆炸、冲击问题。

CALE[9]是二维的任意拉格朗日欧拉动力学计算程序，它主要由美国 Lawrence Livermore 国家实验室的 R. Tipton 开发。CALE 这个名字的由来是由于程序是用 C 语言编写的，并且采用的是任意拉格朗日欧拉方法。

EPIC[9]（Elastic Plastic Impact Computations）是显式的拉格朗日型的有限元程序，由 G.R. Johonson 等在 20 世纪 70 年代研制，在二维问题中采用三角形单元，在三维问题中采用四面体单元。后来程序经过改进，引入重分区和侵蚀算法（erosion algorithm）后，可以计算高速碰撞、爆炸等问题。

MESA[9]是多材料的显式欧拉程序，采用二阶精度的有限差分格式。主要应用于装甲和反装甲问题。

DYNA[10]是世界上最著名的通用显式有限元动力分析程序，由 J.O.Hallquist 主持开发完成的 DYNA 程序系列被公认为是显式有限元程序的鼻祖和理论先导。1988 年 J.O.Hallquist 创建 LSTC 公司，推出 LS-DYNA 系列。LS-DYNA 可以求解各种二维，三维非线性结构的高速碰撞、爆炸和金属成型等非线性动力冲击问题，也可以求解传热，流体以及流固耦合问题。

CSQ[11]是美国 Sandia 国家实验室开发的欧拉代码，被应用于爆炸冲击问题的模拟。

CTH[12]是美国 Sandia 国家实验室在 CSQ 的基础上开发的一个软件体系，主要用来处理多维、多材料、大变形、强冲击波动的物理问题。在 CTH 中采用欧拉格式下的有限体积法。求解分为两步，第一步是拉格朗日步，网格随物质运动变形。第二步是映射步，变形的网格被映射回欧拉网格。CTH 在超高速碰撞领域得到了比较广泛的应用。

SPH 是最早的质点类方法之一，早期用于天体物理问题。经过多年的发展和改进，近年来也大量用于高速碰撞问题的模拟，许多比较成熟的软件已经把

SPH 方法引入其中，如 LS-DYNA，AUTODYN，PAM-SHOCK 等。G.R. Johnson 等发展了类似 SPH 的广义质点法（Generalized Particle Algorithm, GPA）[13]，并成功地应用于超高速碰撞问题。

E.P. Fahrenthold 等结合质点方法与有限元法，以哈密顿系统为基础，提出了质点有限元法（Partice Finite Element Method）[14]，并编制并行代码，将其应用于空间碎片防护等超高速碰撞问题，取得较好效果。

1.3　物质点法

PIC 法采用拉格朗日质点和欧拉网格的双重描述，这种思想对计算方法的发展产生了深远的影响。许多学者作了大量的工作，典型的代表是 Brackbill 等发展的全质点 PIC（full-particle PIC）方法 FLIP（Fluid-Implicit-Particle）[19][20]。Sulsky 等人将 FLIP 扩展到固体力学问题中，提出了物质点法（Material Point Method，MPM）[21][22]。其改变主要体现在：在物质点上考虑塑性应变，强化效应等与变形历史相关的参数；用与推导有限元格式类似的积分弱形式推导求解格式；采用显式积分。

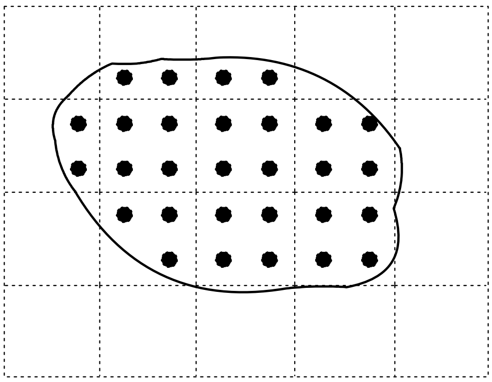


图 1.2 二维物质点法示意图，实线代表连续体，黑点代表物质点，虚线是背景网格

MPM 也是一种质点方法，它将连续体离散成一组带有质量的质点。质点携带了所有物质信息，其运动代表了物质的变形。背景网格可以固定或自由布置，用于动量方程的求解和空间导数的计算，如图 1.2 所示。在每一个时间步中，物质点和背景网格完全固连。将物质点所携带的物质信息映射到网格点处，建立动量方程，求得网格点的结果后再映射回物质点处，得到下一时刻物质点所

携带的物质信息。这一步完全是拉格朗日求解，物质点和网格点没有相对运动，避免了欧拉法因非线性对流项产生的数值困难，并且极易跟踪物质界面。在下一时间步中抛弃变形后的背景网格，仍采用未变形的背景网格，因此避免了拉格朗日法因网格畸变而产生的数值困难。物质点法发挥了拉格朗日方法和欧拉方法各自的长处，克服了其弱点，非常适合于分析超高速碰撞等问题。

MPM 的另一个重要优势是，由于物质点和网格点间映射的单值性，不同物体间不会发生重合和渗透的现象。因此在 MPM 中，两个不同的物体间非滑移的接触条件自动获得满足，用 MPM 可以很方便的处理一些接触问题。在此基础上，Bardenhagen 等进一步提出了允许分离，滑动，滚动，带有摩擦的接触算法[23]。

针对 MPM 的特点和优势，它被应用于许多涉及大变形的问题以及涉及接触的问题。Sulsky 等将 MPM 的轴对称格式用于 Taylor 杆碰撞问题和柱状坯段的锻压问题[24]。York 等将 MPM 用于薄膜模拟[25]以及气囊膨胀等流体和薄膜相互作用的问题[26]。Bardenhagen 等提出接触算法并将 MPM 用于模拟颗粒物质[23]以及颗粒物质中应力波的传播问题[27]。Tan 等在 MPM 中采用自适应的级进背景网格，并用于动态能量释放率的计算[28]。Nairn 用 MPM 模拟裂纹扩展问题并比较了算法中不同应力更新方法对结果的影响[29]。Guo 等用 MPM 计算 J 积分和应力强度因子[30]。Cummins[31]，Guilkey[32]，Sulsky[33]分别提出使用隐式时间积分的物质点法，并对算法进行了一些深入的探讨。Guilkey 提出物质点类似有限元中的积分点，所以物质点在背景网格中较好的位置有利于取得更高精度。Sulsky 认为时间积分的 CFL 条件取决于背景网格的尺度而不是物质点间的距离。针对 MPM 中物质点穿过背景网格边界时往往引入数值噪声，出现不稳定的现象，Bardenhagen 等利用 Petrov-Galerkin 离散的思想提出了广义插值的物质点法[34]。这里需要说明一下，这种广义插值的物质点法虽然避免了这种数值噪声，但由于引入光滑的插值函数，算法更为复杂，计算量大大增加。而物质点法中物质点穿过背景网格边界引入数值噪声的问题虽然在低速问题、准静态问题中比较突出，但在高速问题中体现的并不明显。所以我们认为物质点法是比较适合应用于高速运动的问题，尤其是超高速碰撞问题。

1.4　本文的主要工作

根据文献调研，物质点法应该具有模拟超高速碰撞问题的能力，但已发表

文献中没有报道将物质点法系统的用于超高速碰撞问题。本文的目标是建立三维物质点法程序，并将其应用于超高速碰撞问题的模拟，数值结果与实验结果互相验证，最终得到研究超高速碰撞问题的一个有力工具。

第 2 章中介绍了物质点法的基本理论和具体实现方法，包括应力更新算法、弹塑性本构模型的选择、状态方程的使用以及碰撞接触算法，并编制了用于超高速碰撞模拟的三维物质点程序 MPM3D。通过弹性杆碰撞刚性墙和 Taylor 杆碰撞的算例验证程序的正确性，并说明物质点法相对传统有限元法的优势。

第 3 章应用 MPM3D 程序模拟超高速碰撞问题。首先研究了弹丸超高速碰撞薄板的问题，考察不同弹速下弹丸穿孔形成的孔径的大小，并与经验公式进行了比较。对不同弹速下，板厚形成碎片云的形貌也进行了研究。最后对弹丸超高速碰撞厚板形成弹坑的现象进行了模拟。

第2章　三维物质点法的实现

2.1　物质点法的基本原理

不考虑热效应时（如等温或绝热过程），连续体的运动由质量守恒和动量守恒方程描述：

$$\dot{\rho} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{2-1}$$

$$\rho\mathbf{a} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \rho\mathbf{b} \tag{2-2}$$

其中 $\rho(\mathbf{x},t)$ 是密度，$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ 是速度，$\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$ 是加速度，$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$ 是 Cauchy 应力张量，$\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$ 是单位质量的体力。式（2-1）（2-2）是相对于现时构型定义的，是当前的位置坐标，式中的时间导数都是物质导数。

动量方程（2-2）的等效积分弱形式为：

$$\delta\Pi = \int_{\Omega}\rho\mathbf{a}\cdot\delta\mathbf{x}\mathrm{d}V + \int_{\Omega}\rho\boldsymbol{\sigma}^{s} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}V - \int_{\Omega}\rho\mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{x}\mathrm{d}V - \int_{\Gamma_1}\mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{x}\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{2-3}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}^{s} = \boldsymbol{\sigma}/\rho$，$\Gamma_1$ 为面力边界，$\mathbf{t}$ 为相应的给定面力。

物质点法将连续体离散为一系列物质点（如图 1.2 所示），它们携带了密度、速度、应力等各种物理量，并根据所受的内力（物质点间的相互作用）和外力（体力或外载荷）在背景网格中运动。由于每个物质点携带的质量固定，质量方程（2-1）自动得到满足。密度可近似为：

$$\rho = \sum_{p=1}^{N} m_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \tag{2-4}$$

式中 N 为物质点的总数，δ 是 Dirac δ。

在求解动量方程时，物质点和背景网格完全固连，和背景网格一起运动，因此可通过建立在背景网格结点上的有限元形函数 $N_i(\mathbf{x})$ 来实现物质点和背景网格结点之间信息的映射。背景网格采用规则 8 结点六面体网格，所以线性形函数可以写成如下形式：

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\varsigma\varsigma_i) \tag{2-5}$$

其中ξ，η和ς是自然坐标，ξ_i，η_i和ς_i取自然坐标中的结点值（±1）。

下面用带有角标i的量来表示网格结点上的变量，用带有角标p的量来表示物质点携带的变量，并令$S_{ip} = N_i(\mathbf{x}_p)$，$\mathbf{G}_{ip} = \nabla N_i|_{\mathbf{x}_p}$。网格结点坐标和物质点坐标之间的映射关系为：

$$\mathbf{x}_p = \sum_{i=1}^{n} S_{ip}\mathbf{x}_i \tag{2-6}$$

其中 n 是背景网格结点总数。这个映射关系就是有限元中利用形函数对场函数近似的表达式，对位移，速度等其他物理量也有同样的关系：

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i=1}^{n} S_{ip}\mathbf{v}_i \tag{2-7}$$

将式（2-4)、(2-6）和（2-7）代入到式（2-3）中，可得：

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{f}_i^{\text{int}} + \mathbf{f}_i^{\text{ext}}，\ i = 1,2,\cdots,n \tag{2-8}$$

其中

$$\mathbf{p}_i = \sum_j m_{ij}\mathbf{v}_j \tag{2-9}$$

$$\mathbf{f}_i^{\text{int}} = -\sum_p \boldsymbol{\sigma}_p \cdot \mathbf{G}_{ip}\frac{m_p}{\rho_p} \tag{2-10}$$

$$\mathbf{f}_i^{\text{ext}} = \sum_{p=1}^{N} m_p S_{ip}\mathbf{b}_p + \int_{\Gamma_1} S_{ip}\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma \tag{2-11}$$

（2-9）中m_{ij}为质量阵，表示为：

$$m_{ij} = \sum_p m_p S_{ip}S_{jp} \tag{2-12}$$

为计算方便，一般将质量阵元素凝聚到对角线上，即采用集中质量阵：

$$m_i = \sum_j m_{ij} = \sum_p m_p S_{ip} \tag{2-13}$$

则（2-9）化为：

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i = \sum_p m_p \mathbf{v}_p S_{ip} \tag{2-14}$$

（2-8）式即在背景网格结点上得动量方程，利用显式时间积分对（2-8）式进行积分，可以得到下一个时间步背景网格结点上的动量，然后再利用背景网格上形函数得到物质点上的物理量，根据本构关系在物质点上更新应力，具体做法见下节叙述。

2.2　数值算法的具体细节

根据上述原理，我们编写了三维物质点法程序 MPM3D，程序的介绍见附录 A。这里讨论一下在数值算法实现中需要特别注意的几个问题。

2.2.1　本构关系和应力更新方法

MPM 采用更新拉格朗日（Updated Lagrangian）描述，使用率形式的本构关系，分别用 Cauchy 应力和应变率描述应力和变形。

应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 被定义为速度梯度的对称部分：

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}[(\mathbf{v}\nabla) + (\mathbf{v}\nabla)^{\mathrm{T}}] \tag{2-15}$$

对于存在预应力的物体，Cauchy 应力的分量在转动过程中将发生变化，即在刚体运动中 Cauchy 应力率不为零，它不是客观张量，不能在本构关系中直接使用。可以证明，在刚体运动中应变率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 为零，即它是客观张量。所以在大转动的情况下，如果采用形如（2-16）式的公式直接来计算应力将出现较大的误差。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2-16}$$

为了考虑转动效应，在本构关系中应使用考虑转动效应的客观率，如 Jaumann 应力率[35]：

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{2-17}$$

式中 **W** 是速度梯度的反对称部分，旋率张量：

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}[(\mathbf{v}\nabla) - (\mathbf{v}\nabla)^{\mathrm{T}}] \tag{2-18}$$

弹性材料的率形式本构方程可以表示为：

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} = \mathbf{T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2-19}$$

本构方程（2-19）也可以由其他更为复杂的形式代替。冲击动力学问题中一般都涉及高应变率和大塑性变形，需要采用与变形历史相关的弹塑性本构模型。

在更新应力的时候采用 Von Mises 屈服准则和各向同性硬化。计算时首先按弹性关系计算应力偏量，然后计算 Von Mises 等效应力。如果等效应力小于屈服强度，那么前面计算的应力偏量不需改变，如果等效应力大于屈服强度，则将应力偏量按比例缩小，将应力状态拉回到屈服面上。应力球量由下节介绍的状态方程给出。在不使用状态方程时，仍由弹性规律给出。

在 MPM3D 中提供了 4 种材料模型可供选择，包括弹性模型，理想弹塑性模型，等向线性强化的弹塑性模型[10]以及 Johnson-Cook 材料模型[36]。其中 Johnson-Cook 材料模型包括了应力硬化、应变率的影响以及热效应,在冲击动力学中经常采用。在 Johnson-Cook 材料模型中，屈服应力表示为：

$$\sigma_y = (A + B\varepsilon^n)(1 + C\ln\dot{\varepsilon}^*)(1 - T^{*m}) \tag{2-20}$$

其中 ε 是等效塑性应变；$\dot{\varepsilon}^* = \dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0$ 是无量纲的塑性应变率，令 $\dot{\varepsilon}_0 = 1s^{-1}$；$T^* = (T - T_{\mathrm{room}})/(T_{\mathrm{melt}} - T_{\mathrm{room}}) \in [0,1]$ 是无量纲温度。A，B，n，C，m 是材料常数。材料常数可以通过不同应变率下的扭转实验，不同温度下的 Hopkinson 杆实验，以及准静态拉伸实验得到。也可以由更简单经济的 Taylor 杆碰撞实验来测定。在 MPM3D 中暂不考虑温度效应，故忽略掉 T^* 一项。

2.2.2　状态方程

超高速碰撞中的中材料行为及其复杂，涉及高温高压，相对低速下的材料响应而言，热力学效应更加明显。因此需要使用状态方程来描述压强、密度和

内能之间的关系，考虑物质的压缩效应和非可逆的热力学过程。

Mie-Gruneisen 状态方程是被经常使用的一种状态方程，它可以描述绝大多数金属固体的热力学行为。Mie-Gruneisen 状态方程具有如下形式[37]：

$$P = P_H + \frac{\gamma}{V}(E - E_H) \tag{2-21}$$

其中，P_H 和 E_H 是参考线上的压力和内能，这里参考线是指 Hugoniot 激波绝热曲线。γ 是 Gruneisen 系数，由下式给出：

$$\gamma = \gamma_0 \frac{\rho_0}{\rho} \tag{2-22}$$

如下形式的 Rankine-Hugoniot 方程

$$E_H - E_0 = \frac{1}{2}(P_H + P_0)(V_0 - V_H) \tag{2-23}$$

反映了激波绝热线上内能、压力和比容的关系，将此式代入（2-21）得到

$$P = P_H - \frac{\gamma}{2}(P_H + P_0)(\frac{V_0 - V_H}{V}) + \frac{\gamma}{V}(E - E_0) \tag{2-24}$$

通常 P_H 远大于 P_0，故忽略 P_0，并取 $\rho_H = \rho$（即 $V_H = V$），$E_0 = 0$，有

$$P = P_H(1 - \frac{\gamma\mu}{2}) + \gamma\rho E \tag{2-25}$$

其中，$\mu = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 = \frac{V_0}{V} - 1$，反映材料压缩程度。在程序中我们就根据（2-25）式计算压力。在材料膨胀时，μ 最小取到 0.5。P_H 和 V_H 的关系可以由实验得到，写成如下的形式

$$\begin{aligned} P_H &= C\mu + D\mu^2 + S\mu^3 \quad (\mu \ge 0) \\ P_H &= C\mu \qquad\qquad\qquad (\mu < 0) \end{aligned} \tag{2-26}$$

其中 C, D, S 是材料常数，$C = \rho_0 c_0^2, D = C(2\lambda - 1), S = C(\lambda - 1)(3\lambda - 1)$。许多材料的激波速度 U_s 和质点速度 U_p 存在线性关系：$U_s = c_0 + \lambda U_p$，c_0 和 λ 就根据此关系来测定。

2.2.3　碰撞接触算法

在 MPM 中，由于映射的单值性，不同物体间不会发生嵌透，自动满足无滑动接触条件。为了分析超高速碰撞问题，我们再 MPM3D 中采用了 Bardenhagen 等提出的接触算法[23]，使两接触物体间可以分离和相对滑动。两物体接触的判断和接触力的施加均在背景网格结点上进行，判据为

$$(\mathbf{v}_i^g - \mathbf{v}_i)\cdot\mathbf{n}_i^g > 0 \tag{2-27}$$

其中上标 g 表示参加接触的的第 g 个物体，$\mathbf{n}_i^g$ 是物体 g 在结点 i 处的单位外法线。$\mathbf{v}_i^g$ 表示映射时只考虑此物体而忽略其他物体得到的结点速度，$\mathbf{v}_i$ 表示映射时考虑所有物体得到的结点速度。当在结点 i 上满足上式时，便判断发生接触，需计算接触力，法向接触力为

$$f_{n,i}^g = -m_i^g[(\mathbf{v}_i^g - \mathbf{v}_i)\cdot\mathbf{n}_i^g]/\Delta t \tag{2-28}$$

切向允许滑动或者施加适当的摩擦力。

对于材料破坏，在 MPM3D 中没有采取特殊处理。在物质点法中，当两个物质点的距离大于一个背景网格的尺度后，两个物质点间将不再发生相互作用，因此，这可以看作是对破坏现象的粗略描述。

2.2.4　数值算法步骤

首先要进行前处理，即从输入文件中读入质点信息，材料性质，初始条件，边界条件，控制参数。初始化每个质点的携带的物理量。

在每一个循环步中，设已经有质点上第 k 个时间步的物理量，下面欲求第 $k+1$ 个时间步的物理量，具体可按如下步骤进行：

（1）　更新网格结点数据

$$m_i^k = \sum_p m_p S_{ip}^k \tag{2-29}$$

$$\mathbf{p}_i^k = \sum_p m_p \mathbf{v}_p^k S_{ip}^k \tag{2-30}$$

$$\mathbf{f}_i^k = (\mathbf{f}_i^{\text{int}})^k + (\mathbf{f}_i^{\text{ext}})^k \tag{2-31}$$

其中内力和外力向量根据（2-10）和（2-11）进行计算。

（2） 在背景网格结点上积分动量方程并施加固定边界条件

$$\mathbf{p}_i^{k+1} = \mathbf{p}_i^k + \mathbf{f}_i^k \Delta t \tag{2-32}$$

在固定边界：$\mathbf{p}_i^{k+1} = 0,\ \mathbf{f}_i^k = 0$

（3） 更新质点位置和速度

$$\overline{\mathbf{v}}_p^{k+1} = \sum_{i=1}^{8} \frac{\mathbf{p}_i^{k+1}}{m_i^k} S_{ip}^k \tag{2-33}$$

$$\mathbf{a}_p^k = \sum_{i=1}^{8} \frac{\mathbf{f}_i^k}{m_i^k} S_{ip}^k \tag{2-34}$$

$$\mathbf{x}_p^{k+1} = \mathbf{x}_p^k + \overline{\mathbf{v}}_p^{k+1} \Delta t \tag{2-35}$$

$$\mathbf{v}_p^{k+1} = \mathbf{v}_p^k + \mathbf{a}_p^k \Delta t \tag{2-36}$$

（4） 将速度映射回背景网格结点

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = \frac{\sum_p m_p \mathbf{v}_p^{k+1} S_{ip}^k}{m_i^k} \tag{2-37}$$

（5） 计算应变增量和旋率增量

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^k = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^{8} [\mathbf{G}_{ip}^{k+1} (\mathbf{v}_i^{k+1})^T + \mathbf{v}_i^{k+1} (\mathbf{G}_{ip}^{k+1})^T] \tag{2-38}$$

$$\Delta \mathbf{w}_p^k = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^{8} [\mathbf{G}_{ip}^{k+1} (\mathbf{v}_i^{k+1})^T - \mathbf{v}_i^{k+1} (\mathbf{G}_{ip}^{k+1})^T] \tag{2-39}$$

（6） 更新密度，应力

$$\rho_p^{k+1} = \rho_p^k \Big/ (1 + tr(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p^k)) \tag{2-40}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_p^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}_p^k + \Delta\mathbf{r}_p^k + \Delta\boldsymbol{\sigma}_p^k \tag{2-41}$$

其中$\Delta\mathbf{r}_p^k = \Delta\mathbf{w}_p^k \cdot \boldsymbol{\sigma}_p^k - \boldsymbol{\sigma}_p^k \cdot \Delta\mathbf{w}_p^k$， $\Delta\boldsymbol{\sigma}_p^k$根据弹塑性材料模型更新。如果使用状态方程，应力球量（平均应力）由状态方程（2-25）给出，否则按弹性规律给出。

2.3　程序的检验

2.3.1　弹性杆碰撞刚性墙

弹性杆碰撞刚性墙的例子用简单的问题来检验程序的正确性，说明其处理碰撞问题的有效性。如图 2.1 所示，圆柱杆长 10mm，半径 2mm，根据对称性，取 1/4 模型进行计算。背景网格为边长 1mm 的立方格子，每个网格中 8 个物质点，半径方向用 4 个物质点，杆长方向用 20 个物质点，总共用 260 个物质点离散。材料常数为$\rho = 8.9\times10^{-3}\,\mathrm{g/mm}$，$E = 10^5\,\mathrm{MPa}$，$\nu = 0.3$，杆的初速度为 300m/s。弹性杆碰撞刚性墙后弹回，速度仍为 300m/s 左右，动能变化如图 2.2 所示。

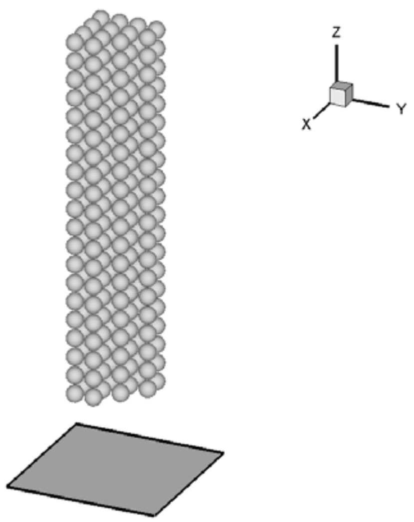


图 2.1 弹性杆碰撞示意图

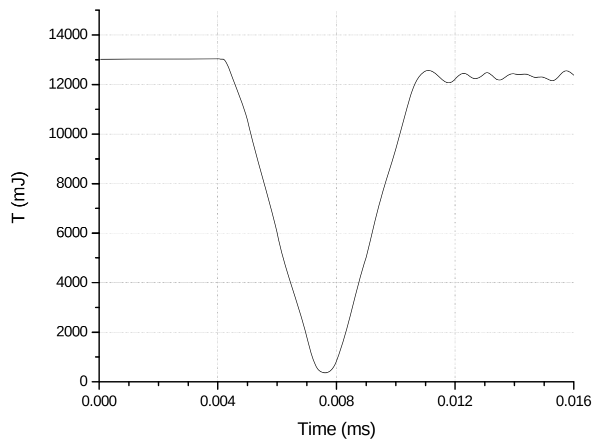


图 2.2 弹性杆的动能

2.3.2 Taylor 杆碰撞

Taylor 杆碰撞实验是一个柱状金属杆正面高速碰撞刚性墙的一个实验，于 1948 年由 Taylor 提出，故而得名。Taylor 杆碰撞实验较易实现，能够反映材料在不同应变和应变率下的行为，常用来获得材料本构关系的参数，研究不同材料的塑性流动规律。同时由于这个问题有较多实验结果，也常被用来检验动力学程序。

本例中，柱形杆的材料是铜，用 Johnson-Cook 材料模型来模拟其塑性性质，具体材料参数见表 2.1[36]。杆的长和直径分别为 $L_0 = 25.4\text{mm}$，$D_0 = 7.6\text{mm}$，初速度为 190m/s。根据对称性取 1/4 模型进行计算，半径方向用 10 个物质点，长度方向用 67 个物质点离散，共使用 5293 个物质点，每个背景网格中含有 8 个物质点。模拟直到整个杆的动能接近于零，基本不再变化为止，时间为 $72\,\mu\text{s}$。

表 2.1　Taylor 杆材料参数

ρ (g/mm^3)	E (MPa)	ν	A (MPa)	B (MPa)	n	C
8.93E-3	117E3	0.35	157	425	1.0	0.0

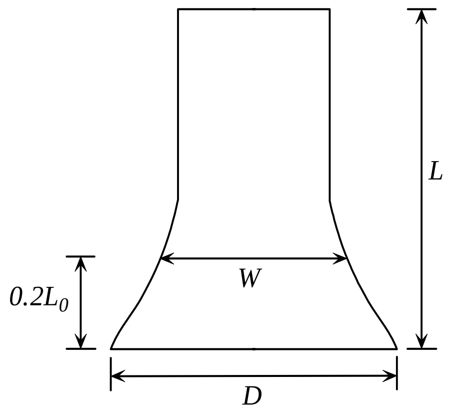


图 2.3 Taylor 杆碰撞示意图

为了考察数值模拟结果与实验结果的一致程度，G.R. Johnson[36]给出了平均误差定义如下：

$$\overline{\Delta}=\frac{1}{3}\left(\frac{|\Delta L|}{L}+\frac{|\Delta D|}{D}+\frac{|\Delta W|}{W}\right) \qquad (2\text{-}42)$$

如图 2.3 所示，其中 L 和 D 分别是碰撞结束后的长度和撞击端直径，W 是距离刚性墙 $0.2L_0$ 处的直径。

如果利用显式有限元法求解此类问题，由于网格畸变，时间步长会变的很小，导致计算量很大。而物质点法避免了网格畸变的问题，即使变形很大也不需要缩小时间步长，因此对此类问题，物质点法在效率上有明显优势。为了进行比较，对上述问题，我们采用同样的网格划分，即一个有限元结点对应一个物质点，分析对比有限元和物质点法的计算精度和效率。表 2.2 给出了物质点法和有限元法的计算结果与实验结果的比较，可见计算结果和实验结果很接近，说明了程序的正确性。表 2.3 给出了分别用有限元法和物质点法计算此问题时所用的时间步情况和耗费的机时，可见，物质点法由于可以使用更大的时间步长，具有更高的计算效率。

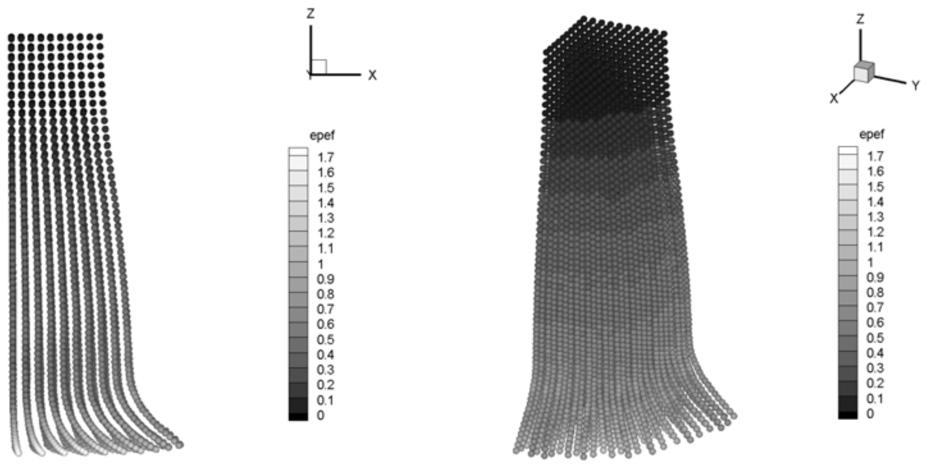
图 2.4 给出了碰撞结束后，等效塑性应变的分布。

表 2.2 计算结果与实验结果比较

	L (mm)	D (mm)	W (mm)	$\overline{\Delta}$
实验	16.2	13.5	10.1	-
FEM	16.3	13.4	10.0	0.008
MPM	16.4	13.6	9.9	0.011

表 2.3 FEM 与 MPM 的计算效率比较

方法	最大时间步长（ms）	最小时间步长（ms）	时间步	相对耗时
MPM	1.96E-4	1.96E-4	408	1
FEM	7.37E-5	1.45E-5	4657	13.4



(a)　　　　　　　　　　(b)

图 2.4 等效塑性应变云图。(a)截面视图。(b)等视图。

第3章　物质点法模拟超高速碰撞问题

3.1　弹丸超高速碰撞薄板

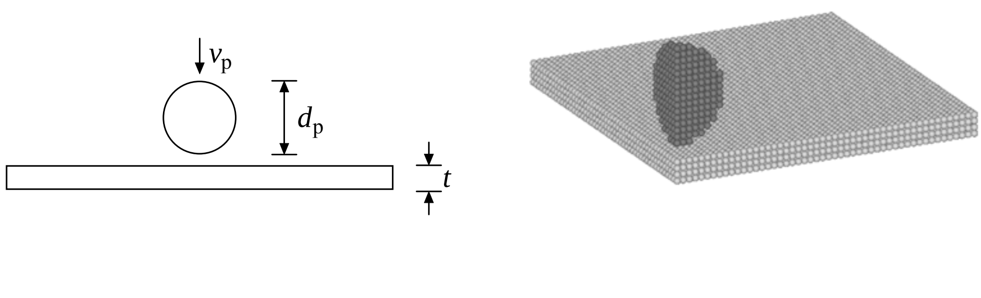
航天器碎片防护多采用在舱体表面一定距离设置薄板或采用双层板的设计，这一建议最早由天体物理学家 Whipple 提出，所以也被称为“Whipple shield”。超高速弹丸冲击薄板往往形成碎片云，甚至被液化气化，其动能被大大消耗，完整性也被破坏。因而这种薄板设计具有良好的防护性能。对前板冲孔特征和板后碎片云性质的研究也有很重要的意义。

3.1.1　冲孔特征

考察弹丸超高速碰撞薄板。靶板为长和宽均为 50mm 的正方形，板厚 t = 2mm，铜弹丸直径 d_p = 8mm，如图 3.1 所示。根据对称性，取 1/4 模型进行计算，背景网格为边长 1mm 的规则立方体网格，每个网格含有 8 个物质点，共使用物质点 10544 个。弹靶材料均为铜，采用 Johnson-Cook 模型模拟塑性规律，具体参数见表 3.1，状态方程参数参考[9]取为 $c_0 = 3.6\text{km/s}$，$\lambda = 1.49$，$\gamma_0 = 1.96$。

表 3.1 材料参数

ρ (g/mm^3)	E (MPa)	ν	A (MPa)	B (MPa)	n	C
8.9E-3	117E3	0.35	90	392	0.5	0.0



(a)　　(b)

图 3.1 弹丸超高速碰撞薄板。(a) 示意图。(b) 离散后的计算模型。

为了研究弹丸超高速碰撞薄板的冲孔特征，我们计算了不同弹丸初速度下的冲孔结果，测量孔径 D_c，与经验公式进行对比。分别称经验公式（1-3）（1-4）（1-5）为 A，B，C。MPM 模拟结果和经验公式计算结果的无量纲孔径 D_c/d_p 和弹丸速度 v_p 的关系如图 3.2 所示。可以看到，由于考虑因素的不同，经验公式的计算结果本身就有比较大的差别，在本例中，MPM 模拟的结果在公式 A、B 和 C 之间，趋势基本一致。可以看到在高速区域，MPM 模拟结果和公式 A、B 的结果比较接近，这是由于公式 A、B 没有考虑材料强度和密度的影响，在碰撞速度不太高时，材料强度的性质会起比较大的作用。而公式 C 考虑了材料强度和密度，但没有考虑弹丸和靶的几何尺寸。据[1]中的叙述，此公式是拟合靶板厚度与弹丸直径比为 0.6 的实验结果得到的，而本例中的靶厚与弹丸直径比为 0.25。一般厚度偏大的靶板，弹丸穿孔的孔径也会较大（公式 A、B 都显示了这样的规律），所以这应该是由公式 C 得到的曲线在其他曲线之上的原因。

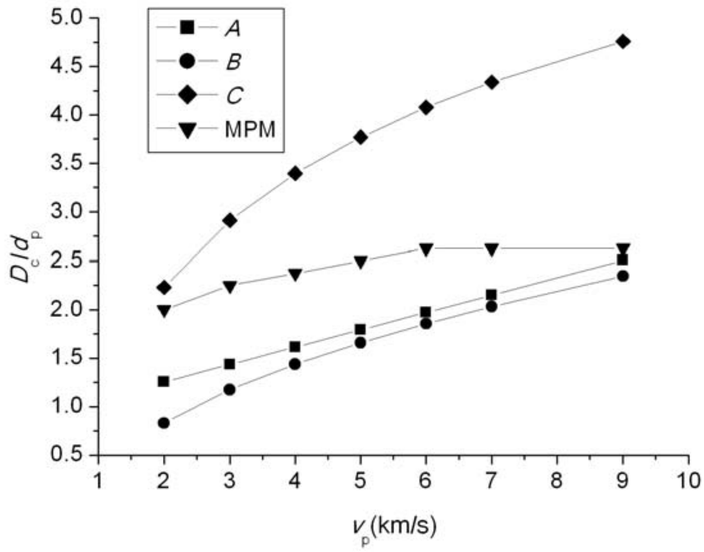
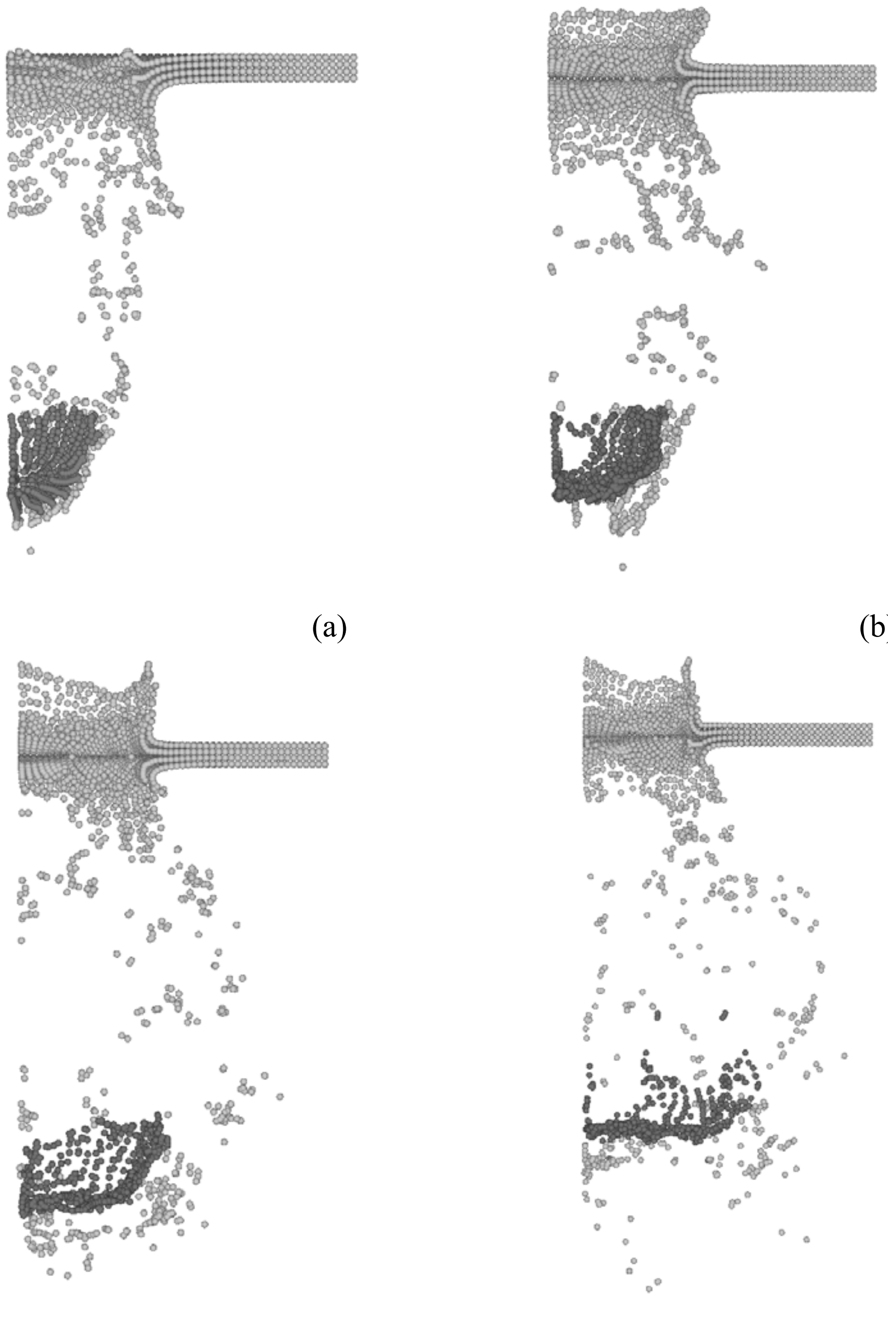


图 3.2 无量纲孔径和弹丸速度的关系

3.1.2　碎片云

在上节的计算中，随着碰撞速度的变化，在板后形成的碎片云也呈现不同的形状，如图 3.3 所示。



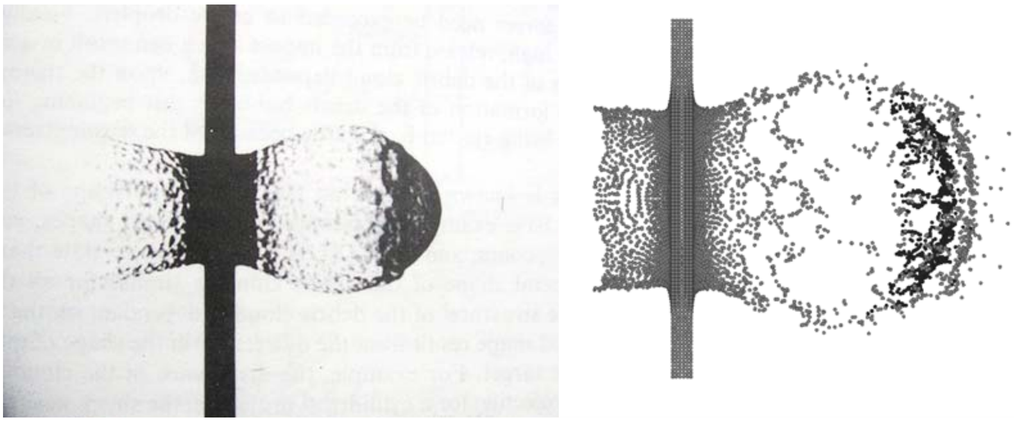
(a)　(b)　(c)　(d)

图 3.3 不同弹丸速度下，碎片云的形状。(a) v_p = 2km/s。(b) v_p = 4km/s。(c) v_p = 6km/s。(d) v_p = 2km/s。

C.E. Anderson 等[11]对超高速碰撞形成碎片云的过程中涉及的问题进行了详细的分析，并讨论了实验结果和数值模拟在研究此类问题中发挥的作用。为了

和这篇文献中提供的实验图片进行比较，我们在上个算例中模型的基础上，改为取 1/2 模型进行计算，并把板厚改为 3mm，材料参数不变。这样离散后共需 31088 个物质点。计算结果如图 3.4 所示，在实验图和物质点法模拟中，弹丸初速度均为 6.6km/s。从图中可以看出，用物质点法模拟得到碎片云形貌与实验结果比较一致。

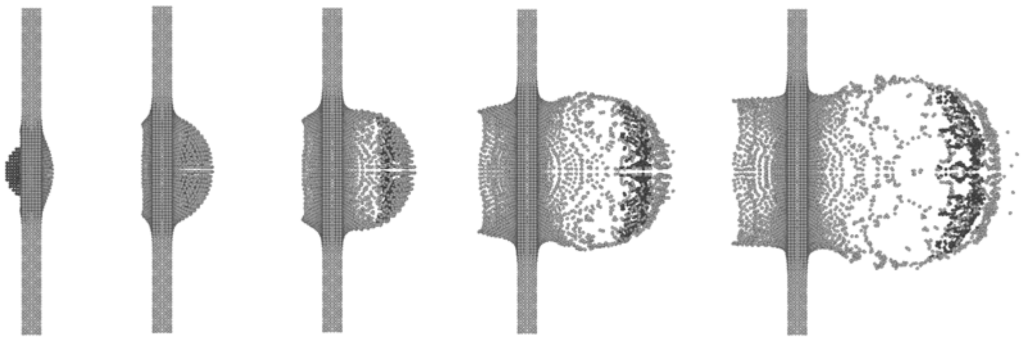
图 3.5 显示了在此算例中的碎片云形成的整个过程。



(a)　　　　　　　　　　(b)

图 3.4 碎片云对比。(a) 典型的超高速碰撞形成的碎片云[11]。

(b) 物质点法的模拟结果，时间 9 微秒



(a)　　(b)　　(c)　　(d)　　(e)

图 3.5 碎片云形成过程。(a) 1 微秒。(b) 2 微秒。(c) 3 微秒。(d) 5 微秒。(e) 7 微秒。

3.2　弹丸超高速碰撞厚板

3.2.1　程序检验及接触算法的影响

在文献[9]和[39]中，作者将 EPIC，MESA，SPH，CALE 以及 MPM 对弹丸超高速碰撞厚板的计算结果与实验结果进行了对比。这里为进一步对 MPM3D 模拟超高速碰撞问题的能力进行验证，我们计算同样的问题，并进行对比。

该问题考察铜弹丸对铜靶的超高速碰撞，碰撞速度为 6.0 km/s，球形弹丸质量为 0.5 g，厚靶为长方体，长宽均为 80mm，厚 40mm。在我们的算例中，背景网格采用 1mm 边长的立方体网格，每一网格包含 8 个物质点。根据对称性取一半模型进行计算，故靶板共用 1024000 个物质点离散。对于弹丸，先将大小相当的球形离散，然后去掉部分物质点以确保质量为 0.5g，最终弹丸共使用 224 个物质点离散。

材料模型采用理想弹塑性模型，材料参数和状态方程参数均取自或换算自文献[9]，具体取值见表 3.2。边界条件为靶板的上下表面自由，其余边均固定，对称面采用对称边界条件。

表 3.2 计算中使用的参数

	参数	取值
材料参数	密度 ρ	8.93e-3 g/mm^3
	杨氏模量 E	124e3 MPa
	泊松比 ν	0.35
	屈服强度	240 MPa
状态方程参数	声速 c_0	3.94e3 m/s
	λ	1.49
	γ_0	1.96

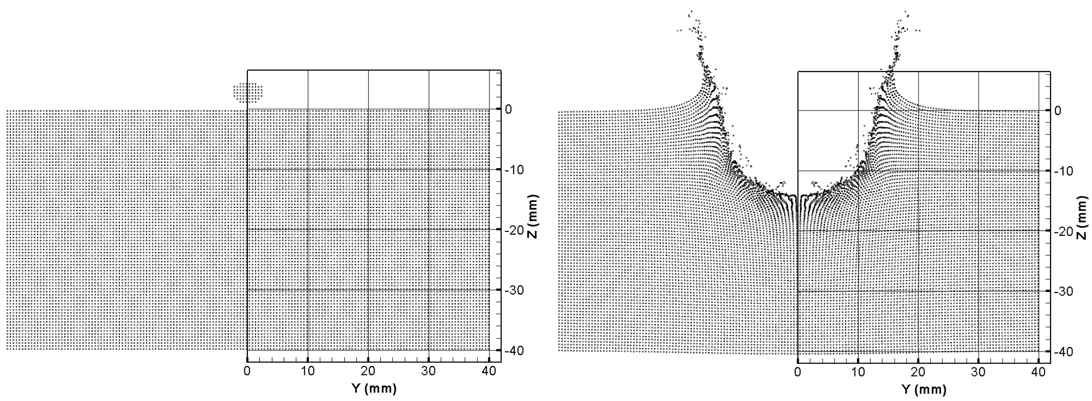
对于这个例子，我们分别对采用 2.2.3 节提到的允许滑动的接触算法和无接触算法的情况（MPM 自动满足的无滑接触条件）进行计算。对于计算结果，我们量出弹坑形状的参数，与实验结果以及其他数值方法的结果进新比较，实验和其他数值方法的数据均取自文献[9]和[39]。表 3.3 给出了比较结果，可以看出，

MPM3D 无接触算法的情况和实验结果符合的很好，图 3.6 显示了初始时刻和 32 微秒时刻的构型，为清晰起见，图中只显示了中间 2 层物质点。

采用接触算法时，得到的弹坑结果显著大于实验结果。其原因很可能是在高速情况下，接触力的计算不能正确反映实际情况，引入了额外的能量。考察整个碰撞过程动能的变化，如图 3.7 所示，在使用接触算法的计算中，弹丸刚刚碰撞靶板的时候动能出现了显著的增加，从而造成整个系统能量的增加，使得最后结果偏大。因此在超高速碰撞的计算中，2.2.3 节提到的接触算法并不适用，使用 MPM 自动满足的无滑接触条件或研究其他接触算法可能更为恰当。

表 3.3 计算得到的弹坑参数与实验结果的比较，时刻：32 微秒

	弹坑深度（mm）	弹坑直径（mm）	坑深/坑径
实验	14	25.4	0.55
EPIC	18	24	0.75
MESA	15.9	28	0.57
SPH	17.3	26	0.67
CALE	15.1	24.4	0.62
MPM[39]	15.1	25.5	0.59
MPM3D（无接触）	14	25	0.56



(a)　　(b)

图 3.6 铜弹丸超高速碰撞厚板。(a) 初始时刻。(b) 32 微秒时刻

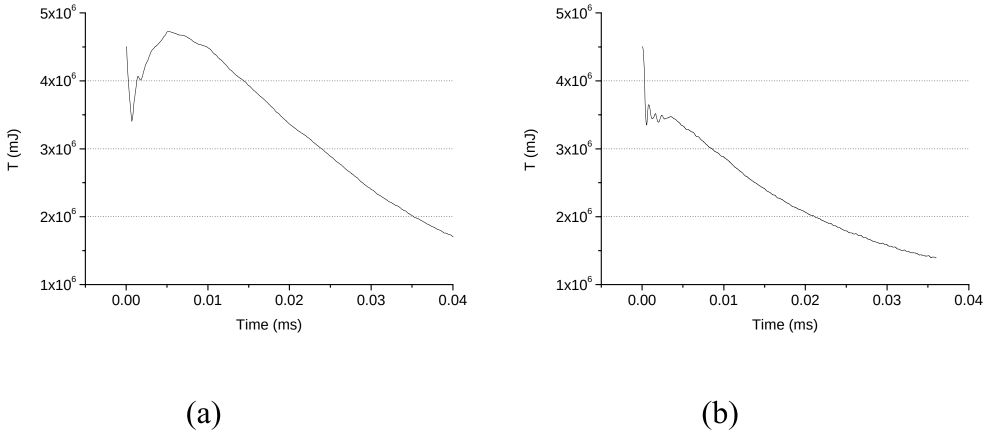


图 3.7 动能变化曲线。(a)接触算法。(b)无接触算法。

3.2.2　不同弹速下的弹坑形状

考察弹丸超高速碰撞厚板，如图 3.8 所示，弹丸为直径 5mm，高 4mm 的柱状体，厚板 H = 40mm，长宽均为 80mm。根据对称性，取 1/2 模型进行计算。背景网格采用边长为 1mm 的规则立方体网格，每一网格含 8 个物质点。弹丸用 320 个质点离散，厚板用 1024000 个质点离散，总共使用了 1024320 个物质点。弹丸和弹靶的材料均为铜，材料参数和状态方程参数同上例。

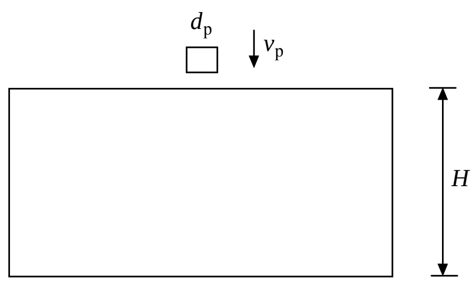


图 3.8 弹丸超高速碰撞厚板示意图

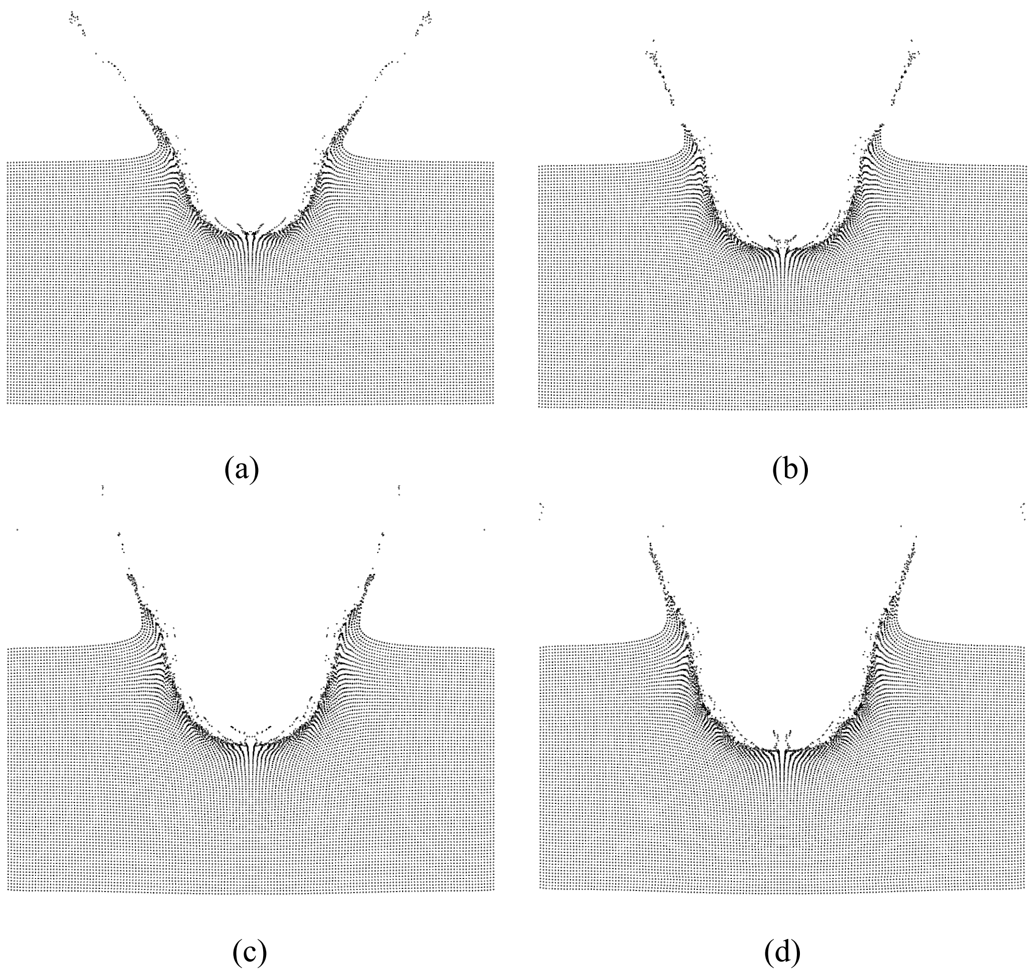
边界条件的设置与弹丸超高速碰撞薄板类似，即靶板的上下表面自由，其余边固定，对称面用对称边界条件。模拟时间控制根据动能的变化决定，当动能接近于零即认为碰撞结束，计算终止，此时弹坑的构型已基本不再变化。我们分别计算了弹丸初速度为 4km/s，5km/s，6km/s 和 7km/s 的情况，结果如表 3.4 所示。弹坑形状系数，即弹坑深度和弹坑直径的比 p_c/D_c 略大于 0.5，基本符合

图 1.1 显示的规律。并且弹坑深度和直径随碰撞速度的增长基本成线性关系。

图 3.9 给出了碰撞结束后弹坑的形貌，时刻均为 45 微秒左右。为清晰起见，只显示了中心 2 层质点。

表 3.4 弹丸超高速碰撞厚板结果

v_p (km/s)	D_c (mm)	p_c (mm)	p_c/D_c
4	24	12	0.5
5	25	14	0.56
6	28	16	0.57
7	30	17	0.57



(a) (b) (c) (d)

图 3.9 弹丸超高速碰撞厚板成坑形状。(a) v_p = 4km/s。(b) v_p = 5km/s。(c) v_p = 6km/s。(c) v_p = 7km/s。

第4章　结论

超高速碰撞的数值模拟是具有挑战性的课题，它需要处理碰撞过程的极大变形，考虑碰撞局部产生的高温高压。我们发现物质点法具有模拟超高速碰撞问题的能力，但已发表文献中没有报道将物质点法系统的用于超高速碰撞问题。本文建立了三维物质点法程序 MPM3D，并将其应用于超高速碰撞问题的模拟。

本文在物质点法中考虑 Jaumann 应力率，引入了 Johnson-Cook 材料模型和 Mie-Gruneisen 状态方程，并加入了碰撞接触算法。通过弹性杆碰撞刚性墙和 Taylor 杆碰撞的算例验证程序的正确性。并说明由于物质点法的时间积分时间步长不受网格畸变（质点间距离变化）的影响，对大变形问题在计算效率上，比传统有限元法具有明显优势。

本文将物质点法用于模拟超高速碰撞问题。研究了弹丸超高速碰撞薄板的问题，考察不同弹速下弹丸穿孔形成的孔径的大小，并与经验公式进行了比较，取得比较一致的结果。对不同弹速下，板后形成碎片云的形貌也进行了研究。本文也对不同弹速下弹丸超高速碰撞厚板形成弹坑的现象进行了模拟，考察弹坑形貌，分析了产生误差的可能原因，讨论了接触算法对计算结果的影响。

物质点法是模拟超高速碰撞问题的有效方法，但由于时间的限制，本文工作还有许多值得改进的地方。超高速碰撞问题局部高温高压，甚至会产生相变，因此在本构方程中进一步考虑温度效应是有必要的。同时，Mie-Gruneisen 状态方程适用于固体，如果产生相变，也需要采用其他更恰当的状态方程。本文的程序中对材料破坏现象没有特殊处理，实际是通过物质点处于不相邻的网格时没有相互作用的特点自动处理的。而对于一些破坏现象，如裂纹扩展，或超高速碰撞中出现的层裂现象，需要建立特别的破坏模型，才能够模拟出来。

参考文献

[1] 张庆明，黄风雷. 超高速碰撞动力学引论. 北京：科学出版社 2000

[2] http://www.orbitaldebris.jsc.nasa.gov/faqs.html

[3] J.R. Baker, Hypervelocity crater penetration depth and diameter – a linear function of impact velocity? International journal of impact engineering, 1995. 17: 25-35

[4] L.C. Chhabildas, W.D. Reinhart, T.F. Thornhill, et al., Debris generation and propagation phenomenology from hypervelocity impacts on Aluminum from 6 to 11km/s. International journal of impact engineering, 2003. 29: 185-202

[5] 张雄，陆明万，王建军. 任意拉格朗日-欧拉描述法研究进展. 计算力学学报，1997，14(1):91-102

[6] F.H. Harlow, The particle-in-cell computing method for fluid dynamics. Methods in Computational Physics, 1964. 3: 319-345

[7] 张雄，刘岩. 无网格法. 北京：清华大学出版社/Springer，2004

[8] 张雄，宋康祖，陆明万. 无网格法研究进展及其应用. 计算力学学报，2003，20(6):730-742

[9] C.A. Wingate, R.F. Stellingwerf, R.F. Davidson et al., Models of high velocity impact phenomena. International journal of impact engineering, 1993. 14: 819-830

[10] J.O. Hallquist, LS-DYNA Theoretical Manual, Livermore: Livermore Software Technology Corporation, 1998

[11] C.E. Anderson, J. Timothy, G. Trucano, et al., Debris cloud dynamics. International journal of impact engineering, 1990. 9(1): 89-113

[12] J.M. McGlaun, S.L. Thompson, and M.G. Elrick, CTH: a three-dimensional shock wave physics code. International journal of impact engineering, 1990. 10: 351-360

[13] G.R. Johnson, S.R. Beissel, and R.A. Stryk, A Generalized Particle Algorithm for high velocity impact computations. Computational Mechanics, 2000. 25(2-3): 245-256

[14] E.P. Fahrenthold and B.A. Horban, A hybrid particle-finite element method for hypervelocity impact simulation. International Journal of Impact Engineering, 1999. 23(1): 237-248

[15] R.J. Rabb and E.P. Fahrenthold, Numerical simulation of oblique impact on orbital debris shielding. International Journal of Impact Engineering, 1999. 23(1): 735-744

[16] E.P. Fahrenthold and B.A. Horban, An improved hybrid particle-element method for hypervelocity impact simulation. International Journal of Impact Engineering, 2001. 26(1-10): 169-178

[17] E. Fahrenthold and R. Shivarama, Orbital debris impact simulation using a parallel hybrid particle-element code. International Journal of Impact Engineering, 2001. 26(1-10): 179-188

[18] E.P. Fahrenthold and R. Shivarama, Extension and validation of a hybrid particle-finite element method for hypervelocity impact simulation. International Journal of Impact Engineering, 2003. 29(1-10): 237-246

[19] J.U. Brackbill and H.M. Ruppel, FLIP: a method for adaptively zoned, particle-in-cell calcultations in two dimensions. Journal of Computational Physics, 1986. 65: 314-343

[20] J.U. Brackbill, D.B. Kothe, and H.M. Ruppel, FLIP: a low-dissipation, particle-in-cell method for fluid flow. Computer Physics Communications, 1988. 48: 25-38

[21] D. Sulsky, Z. Chen, H.L. Schreyer. A Particle Method for History-Dependent Materials. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, 118:179-196

[22] D. Sulsky, S.J. Zhou, H.L. Schreyer. Application of a Particle-in-Cell Method to Solid Mechanics, Computer Physics Communications, 1995, 87:236-252

[23] S.G. Bardenhagen, J.U. Brackbill, and D. Sulsky, The material-point method for granular materials. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000. 187(3-4): 529-541

[24] D. Sulsky and H.L. Schreyer, Axisymmetric form of the material point method with applications to upsetting and Taylor impact problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996. 139(1-4): 409-429

[25] A.R. York, D. Sulsky, and H.L. Schreyer, The material point method for simulation of thin membranes. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999. 44(10): 1429-1456

[26] A.R. York, D. Sulsky, and H.L. Schreyer, Fluid-membrane interaction based on the material point method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000. 48(6): 901-924

[27] S.G. Bardenhagen, et al., An improved contact algorithm for the material point method and application to stress propagation in granular material. Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2001. 2(4): 509-522

[28] H.L. Tan and J.A. Nairn, Hierarchical, adaptive, material point method for dynamic energy release rate calculations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002. 191(19-20): 2095-2109

[29] J.A. Nairn, Material point method calculations with explicit cracks. Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2003. 4(6): 649-663

[30] Y. Guo and J.A. Nairn, Calculation of J-integral and stress intensity factors using The Material Point Method. Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2004. 6(3): 295-308

[31] S.J. Cummins and J.U. Brackbill, An implicit particle-in-cell method for granular materials. Journal of Computational Physics, 2002. 180(2): 506-548

[32] J.E. Guilkey and J.A. Weiss, Implicit time integration for the material point method: Quantitative and algorithmic comparisons with the finite element method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003. 57(9): 1323-1338

[33] D. Sulsky and A. Kaul, Implicit dynamics in the material-point method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004. 193(12-14): 1137-1170

[34] S.G. Bardenhagen and E.M. Kober, The generalized interpolation material point method. Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2004. 5(6): 477-495

[35] T. Belytschko, W.K. Liu, B. Moran, Nonlinear finite elements for continua and structures. 连续体和结构的非线性有限元，庄茁译，北京：清华大学出版社，2002

[36] G.R. Johnson, T.J. Holmquist. Evaluation of cylinder-impact test data for constitutive model constants. Journal of Applied Physics, 1988, 64:3901-3910

[37] 恽寿榕，涂侯杰，梁德寿等. 爆炸力学计算方法. 北京：北京理工大学出版社 1995

[38] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. The Finite Element Method, 5th edition. Boston: Butterworth-Heinemann, 2000

[39] 郭增才．超高速碰撞的跨尺度数值模拟：[硕士学位论文]．北京：清华大学工程力学系，2004

致　谢

衷心感谢导师张雄教授对本人的精心指导。他的言传身教将使我终生受益。

感谢计算动力学实验室陆明万教授，以及实验室老师和同窗们热情的帮助和支持！实验室和谐互助、勤勉积极的氛围，以及多次有益的讨论对我都有很大帮助。

感谢郭增才同学，和他的讨论对我论文的进展有很大启发。

本课题承蒙国家自然科学基金（10472052）资助，特此致谢。

声　明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签　名：　　　　　　　　日　期：

附录 A 三维物质点法程序 MPM3D 介绍

根据 MPM 的原理，我们编制了三维的物质点法程序 MPM3D。该程序采用了宏语言设计方法。它提供了一批宏命令，用户可以在输入数据文件中使用宏命令来改变参数，设计并计算不同的问题，甚至控制程序的具体算法。另外，如果需要对程序进行扩充，只要加入新的宏命令以及相应的程序段即可，也非常方便。

一个典型的 MPM3D 输入数据文件为：

```
mpm3d *** test my Code      ！定义标题
ppc     8                   ！每个网格中 8 个物质点
nbgn    1200                ！背景网格结点总数
nbmp    260                 ！物质点总数
nmat    2                   ！材料组数
ncomp   2                   ！部件（component）总数
spx     0.0     9.0         ！背景网格覆盖的范围，x
spy     0.0     9.0         ！背景网格覆盖的范围，y
spz     -1.0    10.0        ！背景网格覆盖的范围，z
dcell   1.0                 ！单个背景网格的边长
dt      1.0d-4          ！时间步长
tstep   400             ！时间步总数
ostep   4               ！输出结果的间隔时间步数
jaum on                 ！on 用 Jaumann 应力率，off 不用 Jaumann 应力率
cont on                 ！on 用接触算法，off 不用接触算法
！定义边界条件，0 自由，1 固定边界条件，2 对称边界条件
!       x0   xn   y0   yn   z0   zn
fixed   2    0    2    0    2    0
material     ！定义材料性质数据
! num  mtype  density    young's   Poission   Yield0   B     n     C
   1   john   8.9d-3     100.0d3   0.3d0      90       392   0.5   0.0
```

```
    2    john    2.7d-3        70.0d3     0.3d0        90      392   0.5   0.0
！定义状态方程参数
！  comp eos   c0    lambda   gamma0
seos   1    1   3.3d3   1.49       1.96
seos   2    1   3.3d3   1.49       1.96
！输出控制信息
outr epeff            ！画等效塑性应变云图
curv epeff 1          ！输出质点 1 的等效塑性应变
curv engs             ！输出应变能
curv engk             ！输出动能
！读入质点信息
Particle
！  ID   mat comp        x              y              z
    1      1    1   0.2500D+00   0.2500D+00   0.2500D+00
    ……
    121   2    2   0.7500D+00   0.2500D+00   5.2500D+00
    ……
！读入初速度信息，可以对部件（comp）或对质点（node）定义初速度
velo
     ！     compNum     vx        vy        vz
     comp    1           0.0       0.0      200.0
     node    1           0.0       0.0        0.0
endv    ！初速度信息结束
endi    ！输入文件结束
```

在上面的输入文件中，每行开头的命令均为程序定义的宏命令，其后的内容为该命令的参数。符号“！”后的内容均为注释，不影响程序的运行。程序采用部件（component）的概念，以便处理多物体的相互作用，在上面的例子中，定义了 2 个部件，分别赋予不同的材料性质，并给第一个部件赋予了初速度。

程序由 FORTRAN90 程序编写，主要由以下几个模块组成：

main：主控程序，调用前处理程序，控制时间步循环，记时。

FFI：自由格式输入（Free Format Input），负责读取输入文件，可以处理空格，制表符，注释，非法的宏命令。

MPMData：定义为模块（Module），存储和管理所有公共数据。调用 FFI 中的函数，读取输入文件中的宏命令并处理得到的数据。

Constitution：实现不同的本构关系，考虑 Jaumann 率，并实现状态方程。

GridUpdate：MPM 算法中更新网格数据的部分。

ParticleUpdate：MPM 算法中更新物质点数据的部分，包括调用本构关系更新应力。

OutRes：根据输入文件中的选项在计算过程中输出需要的数据。

在程序的编写过程中，参考了 OMLL[7]，FEAP[38]，LS-DYNA[10]的程序代码以及郭增才[39]的一些工作。

个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果

个人简历

1979 年 9 月 21 日出生于宁夏回族自治区银川市。

1998 年 9 月免试进入北京大学力学与工程科学系理论与应用力学专业，2002 年 7 月本科毕业并获得理学学士学位。

2002 年 9 月免试进入清华大学工程力学系计算固体力学专业攻读硕士学位至今，导师为张雄教授。

发表的学术论文

[1] 马上，张雄，邱信明. 超高速碰撞问题的三维物质点法. 爆炸与冲击. 已录用