紧支函数无网格方法研究

（申请清华大学工学博士学位论文）

培 养 单 位：清华大学工程力学系

专　　　业：固体力学

研　究　生：宋康祖

指 导 教 师：陆明万

副指导教师：张　雄

2000 年 11 月

中文摘要

无网格方法是在近几年迅速兴起的一种数值分析方法，该方法在形成近似时不需要网格，因此不仅避免了网格生成的复杂过程，还可以显著减少网格畸变的影响。由于无网格特性对高速碰撞、超大变形、断裂破坏等问题的分析具有明显的优势，无网格方法具有广阔的应用前景。

在加权残差体系的统一格式下，对目前主要的一些无网格方法进行了介绍和评论，使得对无网格方法的研究更有效。由于基于 Galerkin 原理的无网格方法具有很大的计算量，本文将主要研究配点格式的无网格方法。

移动最小二乘(MLS)是目前无网格方法中最主要的一种近似方法。基于 MLS 近似和直接配点格式，本文建立了函数插值、弹性静力问题求解的无网格方法；结合 Galerkin 方法和直接配点法的优点，提出了最小二乘配点型的无网格方法。

在无网格方法的研究中，目前还很少涉及到材料非线性的问题。本文将配点型无网格方法用于弹塑性问题的求解，建立了增量型的求解方案，并取得了理想的计算效果。

本文对基于距离基函数近似的配点型无网格方法进行了详细地讨论，内容涉及紧支的和全域的距离基函数；针对紧支距离基函数直接配点法在处理导数型边界条件时精度差的特点，提出了 Hermit 型的近似方案，该方案可以有效地提高导数型边界的处理精度。

为了提高紧支距离基函数的近似精度，本文提出了紧支距离基函数的修正方案，经过修正的紧支距离基函数近似能够满足相应的完备性要求；基于修正紧支距离基函数近似，建立了求解弹性静力问题、弹塑性静力问题、以及弹性动力问题的配点型无网格方法；通过对动力问题的详细分析，给出了结点间距和时间步长的选取法则。

本文还建立了子域型无网格计算方法的一般格式，提出了使用域外结点进行近似的理念。结合子域法和域外结点近似，建立域外结点近似配点法和域外结点近似子域法。子域型无网格方法具有比配点型无网格方法更高的计算精度，域外结点近似方案则可以大大提高边界附近的精度。

本文所建立的所有方法均为真正的无网格方法，具有简洁、高效的优点。

关键词: 无网格方法，加权残差，紧支函数，距离基函数，配点法，子域法

目录

第一章 引言

1.1 引言

随着计算机技术的高速发展，有限元方法成为本世纪数值分析的重要成果，并且在科学技术的各个领域得到了充分的应用[1]-[7]。然而，人们一直没有停止过寻找新的数值计算方法的研究。这主要是由于现已比较成熟的计算方法并非完美无缺，由于自身的缺陷，它们在解决某些问题时会遇到难于克服的困难。对于传统的计算方法（有限元，有限差分等），在处理某些问题时会显得有些笨拙，如：

1、工业材料冲压成型过程中，模拟大变形情况下的材料流动；

2、裂纹沿任意复杂路径动态扩展的模拟；

3、高速撞击过程中产生的结构的几何畸变(如穿透、侵彻等)；

4、相变问题的分析；

5、奇异性等特殊问题，等。

基于网格的方法，在计算过程中如果网格畸变，将导致计算失效。也就是说，网格的存在妨碍了处理与原始网格线不一致的不连续性和大变形。为了处理大变形或随时间变化的不连续性，通常需要进行网格重构。然而，这样不仅计算费用昂贵，而且会使计算精度严重受损。因此这类问题需要更加有效的数值分析方法，最近几年正迅速发展的无网格数值计算方法（Meshless Method）以其特有的优点适合这类问题[8]-[88]。无网格方法抛开网格，直接基于结点形成近似，具有重要的研究价值和应用前景。

1.2 无网格方法的历史及研究现状

无网格方法的产生于二十多年以前，但当时发展很慢；直到近几年，无网格方法才受到了众多力学工作者的重视，并得到了迅速的发展。

历史最长的无网格方法是“Smoothed Particle Hydrodynamics”(光滑质点流体动力学方法，简称 SPH)，它是由 Lucyt 在 1977 年提出的[9]，并且在天体物理领域得到了成功的应用。然而由于精度及稳定性问题，该方法未能得到广泛

应用。80 年代，Monaghan 等人在该方法的研究与应用中作出突出贡献[10,11, 12]，他们将 SPH 方法解释为核函数法，并用来模拟流场中的激波强间断现象。90 年代，Swegle[13]、Dyka[14]等人提出了 SPH 方法不稳定的起因及稳定化方案；Jonhson 和 Beissel 等人[15]也提出了一些用来改善应变计算的方法。随着 SPH 法研究的深入，该方法被应用于水下爆炸仿真模拟[16]、高速碰撞等材料动态响应的数值模拟[15,17,18]等领域。近几年来，我国的学者也开始关注 SPH 计算方法，如中科院张锁春对 SPH 方法进行了综述[19]，国防科大的贝新源、岳宗五等将 SPH 方法用于高速碰撞问题[20]。

在 1992 年，Nayrdes 等[21]人提出了一种全新的方法"Diffuse approximation and Diffuse Element Method" (散射元法，简称 DEM)，并用此方法分析了 Possion 方程和弹性问题。在该方法中，Nayrdes 首次将移动最小二乘近似(Moving Least Square Method，简称 MLS)引入 Galerkin 法中，得出具有 C^1 连续性的近似解。

1994 年，美国 Northwestern University 的学者 Belytschko 等人对 DEM 方法进行了修改和发展，基于 MLS 近似和 Galerkin 原理，利用背景网格进行积分计算，形成"The Element-free Glerkin Method(无单元的 Galerkin 法，简称 EFG)[22-37]。这类方法比 SPH 方法计算费用高，但具有较好的协调性及稳定性。在众多学者努力下，围绕此类方法已经进行了许多的研究，并对固体力学的许多问题进行了分析。Belytschkohe 和 Tabbara 等人将 EFG 方法用于动态裂纹扩展的数值模拟[25-29]，克服了有限元方法在模拟裂纹扩展时需不断进行网格重新划分的缺点，在计算中可以连续地进行模拟；Krysl 等[30]使用 EFG 方法对板壳进行了分析；Belytschko，Organ 和 Hegen 等[33-35]对 EFG 方法和有限元方法的耦合使用进行了研究，并将其用于边界条件的处理；此外，Belytschko 和 Krysl 又将 EFG 用于三维撞击和流体晃动分析[38]；Cordes 等人[39]进行了 EFG 方法用于相变问题的研究。

Northwestern University 的另一位学者 Liu W.K. 根据函数积分变换的思想，提出 Reproducing Kernel Particle Method(再生核粒子法，简记为 RKPM) [40-51]；并结合小波的概念，构造了 Multi Scale Reproducing Kernel Particle Method(多尺度再生核粒子法，简记为 MRKPM)[44, 45, 46, 47]。小波分析最初被广泛应用于数字信号处理领域,其具有尺度伸缩平移、多分辨率等特点[52, 53]。MRKPM 利用小波函数的多尺度分析思想，构造了一系列可同时伸缩和平移的窗函数，实现了 RKPM 的自适应分析，可用于对局部进行细致的数值分析。使用 RKPM 方法，Liu 等人对大量问题进行了数值分析，如结构动力学问题[43]，流体力学问题[40, 45,

47]，橡胶材料的几何大变形问题[49]等。

1995 年， Oden 和 Duarte 等[54-57]提出了 Hp-Clouds 无网格方法，该方法利用移动最小二乘原理建立单位分解函数，进行场量的模拟，然后通过 Galerkin 变分，建立离散模型。Oden 对这种方法进行了严格的数学论证[55]。最近，Oden，Duarte，Zienkiewicz[57]等又提出了“New Clouds-Based hp FEM”，这种方法借助于有限元网格，将其形函数作为单位分解函数，虽然该法破坏了“无网格”的部分特性，但给解决问题带来了方便。

波兰的学者 Liszka 等[58]提出了 Hp-Meshless clouds Method,该方法与 Oden 等人提出的 Hp_Clouds 方法的不同之处在于它采用配点格式，不需要 Galerkin 格式中用于进行积分计算的背景网格，是一种完全的无网格方法。

1996 年，Babuska 及 Melenk 提出了 The Partition of Unity Method(单位分解法，简称 PUM) [59,60]。Babuska 利用现代数学单位分解的概念，对单位分解法进行了严格的数学论证，并提出了使用特征解析解进行增强的基函数。

西班牙的学者 Onate 和 Idelsohn 等在 1996 年提出了 The Finite Point Method (有限点法，简称 FPM) [61,62]。该方法采用移动最小二乘原理来构造形函数，采用配点格式进行离散，是一种不需背景网格的完全无网格方法，主要应用于流体动力学领域。

最近，著名力学学者 Atluri 等也对无网格方法进行了大量研究，提出了 Loacl boundary integral equation method (局部边界积分法，简称 LBIE) [63, 64]和 Meshless Local Petrov-Galerkin Method (简称 MLPG)[65-68]。这两种方法都是基于移动最小二乘原理来建立对场函数的近似，并且在积分时不需要背景网格，是完全的无网格计算方法。MLPG 与 LBIE 的不同之处在于，LBIE 是建立于局部边界积分方程，具有奇异积分的计算；而在 MLPG 计算中不涉及奇异积分。

随着小波应用的范围的扩展，许多学者将小波用于场量的近似，并产生了 Wavelet-Galerkin Method (小波伽辽金法，简称 WGM)[69-76]，该方法是利用小波级数对场量进行近似，通过 Galerkin 变分对偏微分方程进行数值离散。这种方法在处理局部化现象时，如塑性变形局部化等问题，具有较大的优势。

距离基函数(Radial Basis Functions,简称为 RBF)具有形式简单、各向同性等优点，具有紧支特性的距离函数更加适合在数值计算中使用。数学界许多学者对其进行了大量的研究[77-81] ，并形成了 Multiquadric（简称 MQ）方法和 Compactly Supported Radial Basis Function(紧支距离函数，简称 CRBF)方法。然

而，距离函数在工程应用中却很少涉及。目前，该方法以被清华大学的陆明万，张雄等力学工作者引入到力学问题的求解，并取得了一些成果[82, 83]。

总之，无网格方法在近几年得到了迅猛的发展。随着越来越多的学者对其研究的投入，无网格方法势必得到更大的进步。

1.3 加权残差的基本概念

本节将对加权残差的概念进行简单介绍，给出加权残差计算的一般格式。在以后对目前已存在的几种主要的无网格方法进行介绍时，也将使用加权残差体系结构。

加权残差法[89-97]是广泛使用的一种近似求解方法，它可以有效地求解微分方程、偏微分方程，以及积分方程等。现有的许多近似方法，如有限单元法、边界单元法、有限差分法，以及无网格计算方法等，都可看成是加权残差法的特例，并可由加权残差体系导出相应的格式。在加权残差法中，先假设一个定义在全求解域内的含有待定系数或待定函数的试函数作为问题的近似解，代入求解方程和边界条件中，一般情况下求解方程和边界条件不能满足，即存在残差；通过在某种加权意义下消除残差或要求残差最小以求出待定未知量，从而获得问题的近似解。

考虑在域Ω中的基本控制方程和边界条件：

$$\mathrm{A}(u)=b \qquad \text{在求解域}\,\Omega\,\text{上} \tag{1-1a}$$

$$\mathrm{B}(u)=t \qquad \text{在力边界}\,\Gamma_\sigma\,\text{上} \tag{1-1b}$$

$$u-u_p=0 \qquad \text{在位移边界}\,\Gamma_u\,\text{上} \tag{1-1c}$$

其中，A、B 为微分算子。

上述问题的加权残差格式为：

$$\int_\Omega W[Au-b]\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_\sigma}\bar{W}[Bu-t]\,\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_u}\bar{\bar{W}}[u-u_p]\,\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{1-2}$$

上式中，W、$\bar{W}$、$\bar{\bar{W}}$为任意权函数。

加权残差法的关键是试函数的构造和残差消除方案。在有限元方法中，采用网格对区域进行划分，并且在各网格子区域内构造近似函数；如果在构造近似函数时不需要划分网格，则近似被称为无网格近似，这也正是无网格计算的基础。使用不同的近似构造方案和残差消除方案，就可以构造出不同的计算方法。

因此，以下将使用加权残差的体系对现存的各种无网格方法加以简述，叙述中以区域Ω中定义的场函数$u(x)$的近似为例。在区域Ω内，取一组离散的结点x_I（$I=1,\cdots,N$），并把与结点 I 相关联的变量记为u_I。无网格近似将直接基于这些离散的结点。

1.4 目前几种主要的无网格近似方案简介

1.4.1 核函数近似方法

核函数近似方法最初用于光滑质点流体动力学法(SPH)[9-20]。它使用核函数积分变换对函数$u(\mathbf{x})$进行近似：

$$u^h(\mathbf{x})=\int_\Omega w(\mathbf{x}-\mathbf{y},h)u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{y}} \tag{1-3}$$

其中$u^h(\mathbf{x})$是$u(\mathbf{x})$的近似表达，$w(\mathbf{x}-\mathbf{y},h)$被称为核函数或权函数，它具有紧支撑的特点，$h$是其紧支集尺寸的一个度量。根据 Monaghan 的工作，核函数必须满足以下条件：

1. 半正定性，即在紧支子域Ω_i内满足$w(\mathbf{x}-\mathbf{y},h)\ge 0$ (1-4a)
2. 紧支性，即在紧支子域Ω_i外满足$w(\mathbf{x}-\mathbf{y},h)=0$ (1-4b)
3. 规一性，即$\int_\Omega w(\mathbf{x}-\mathbf{y},h)\,\mathrm{d}\Omega=1$ (1-4c)
4. $w(\mathbf{x}-\mathbf{y},h)$具有对于距离$s=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$的单调减性 (1-4d)
5. 当$h\to 0$时，$w(\mathbf{x}-\mathbf{y},h)\to\delta(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)$，这里$\delta(s)$是 Dirac delta 函数 (1-4e)

其中条件(1-4b)是最关键的条件，它使得近似具有局部意义，即$u^h(\mathbf{x})$仅仅取决于紧支子域包含$\mathbf{x}$的那些结点。

最常使用的权函数主要有指数型函数、三次样条函数和四次样条函数等。它们的基本变量均为$s=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$，因此紧支集为圆形或球形。若记$\bar{s}=s/s_{\max}$，其中$s_{\max}$是紧支子集的半径，则：

指数型：
$$w(\bar{s})=\begin{cases} e^{-(\bar{s}/\alpha)}, & \bar{s}\le 1 \\ 0 & \bar{s}>1 \end{cases} \tag{1-5}$$

三次样条： $$w(\bar{s})=\begin{cases}\frac{2}{3}-4\bar{s}^2+4\bar{s}^3, & \bar{s}\le\frac{1}{2}\\ \frac{4}{3}-4\bar{s}+4\bar{s}^2-\frac{4}{3}\bar{s}^3, & \frac{1}{2}\le\bar{s}\le 1\\ 0, & \bar{s}>1\end{cases}\tag{1-6}$$

四次样条： $$w(\bar{s})=\begin{cases}1-6\bar{s}^2+8\bar{s}^3-3\bar{s}^4, & \bar{s}\le 1\\ 0, & \bar{s}>1\end{cases}\tag{1-7}$$

其中指数型权函数的连续性是c^{-1}，因为它在$\bar{s}$=1处不连续，但是对于数值计算而言，它近似于c^1或更高的连续性。对于三次样条、四次样条，都具有c^2的连续性。

对于近似计算，必须建立(1-3)式相应的离散形式。对于一维问题，定义结点参数$u_I\equiv u(x_I)$ ，($I=1,2,\cdots,N$)，采用数值积分法则：

$$u^h(x)=\sum_{I=1}^{N}w(x-x_I)\cdot u_I\cdot\Delta x_I\tag{1-8}$$

对于多维问题，积分运算就更复杂，但仍然可以得到一般表达式：

$$u^h(x)=\sum_{i=1}^{N}w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)\cdot u_i\cdot\Delta V_i\tag{1−9}$$

其中ΔV_I是关于结点 I 的某种区域度量。一旦选取了一种积分方案，则：

$$u^h(\mathbf{x})=\sum_{I=1}^{N}\phi_I(\mathbf{x})\cdot u_I\tag{1-10a}$$

$$\phi_I(\mathbf{x})=w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)\cdot\Delta V_I\tag{1-10b}$$

$\phi_I(\mathbf{x})$即为核函数近似的形函数。对一般情况, 由于$u_I\ne u^h(\mathbf{x}_I)$，因此结点对应的参数u_I并不代表结点处的函数值，即形函数不是插值函数。

1.4.2 移动最小二乘近似方法

移动最小二乘近似在许多无网格方法中被采用，如 Nayrdes 等人的 DEM 方法 [21]，Belytschko 等人的 EFG 方法[22-37] ,Onate 等人的 FPM 方法 [61,62]，Atluri 等人的 LBIE [63, 64]和 MLPG [65-68]方法。

在移动最小二乘（MLS）近似中，函数近似的形式为：

$$u^h(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{m}P_i(\mathbf{x})\cdot a_i(\mathbf{x})\tag{1-11}$$

其中m是基函数的个数， $P_i(\mathbf{x})$是基函数， $a_i(\mathbf{x})$是相应的系数，并且它是空间坐

标的函数。通常使用单项式作为基函数，当然，也可以使用任何其它函数。尤其是在分析具有奇异性的问题时，可以将奇异函数作为一个基函数。

系数 $a_i(\mathbf{x})$ 的确定是根据加权最小二乘原则，要求对函数的局部近似误差最小。即：

$$J=\sum_I w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)\cdot[u^h(\mathbf{x},\mathbf{x}_I)-u_I]^2 \quad \to \min \tag{1-12a}$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_j}=0 \tag{1-12b}$$

根据(1-12)式可求得系数 $a_i(\mathbf{x})$，从而可建立 MLS 的近似式：

$$u^h(\mathbf{x})=\sum_{I=1}^{N}\phi_I(\mathbf{x})\cdot u_I \tag{1-13}$$

1.4.3 单位分解近似方法

单位分解法是由 Duarte、Oden 等人发展起来的，并将其用于 Hp-Clouds 方法[54-57]。对于求解区域 Ω，单位分解法使用一些相互交叉的子域 Ω_I 来覆盖，并且要求所有的子域能够完全覆盖整个求解区域。在每个子域 Ω_I 定义一个仅在子域内非零的函数 $\phi_I(\mathbf{x})$，并且要求它们满足单位分解条件：

$$\sum_I \phi_I(\mathbf{x})=1 \tag{1-14}$$

Duarte 和 Oden 等人将 MLS 近似与单位分解相联系，并使用 MLS 形函数 $\phi_I(\mathbf{x})$ 来构造单位分解：

$$u^h(\mathbf{x})=\sum_I \phi_I(\mathbf{x})\cdot(u_I+\sum_{i=1}^{m} b_{iI}\cdot q_i(\mathbf{x})) \tag{1-15}$$

其中 $q_i(x)$ 是选定的基函数，一般使用单项式，当然也可以包含其它一些形式的函数；系数 u_I 和 b_{iI} 是待解未知量。由(1-15)式可看出，在单位分解法中一个结点所对应的未知量个数可以多于结点的自由度数，近似的构造形式也非常灵活。

1.4.4 再生核粒子近似方法（RKPM）

由 Liu WK 等发展起来的 RKPM 方法[40-51]，本质上与核函数近似方法相同，然而，它引入了边界校正函数和多尺度分析，因此具有更好的精度和灵活性。其对场量的近似由如下积分变换产生：

$$u^h(\mathbf{x})=\int_\Omega C(a_0,\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\phi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{a_0}\right)\cdot u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\Omega_y \tag{1-16a}$$

所对应的离散格式为：

$$u^h(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{N}\left[C(a_0,\mathbf{x},\mathbf{x}_i)\cdot\phi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_i}{a_0}\right)\cdot\Delta\Omega_i\right]u(\mathbf{x}_i) \tag{1-16b}$$

其中$u^h(\mathbf{x})$为近似函数，$C(a_0,\mathbf{x},\mathbf{x}_i)$为边界校正函数，$\phi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_i}{a_0}\right)$为包含有伸缩系数$a_0$的紧支核函数。

由于积分是在一有限域内进行，因此边界处的权函数$\phi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_i}{a_0}\right)$将有部分位于积分区域之外，将其忽略会导致截断误差。校正函数$C(a_0,\mathbf{x},\mathbf{x}_i)$的引入正是为了修正这种误差。

在多尺度 RKPM 法中，利用紧支核函数$\phi(\mathbf{x})$的可伸缩性，可定义一系列核函数$\phi_m(\mathbf{x})$如下：

$$\phi_0(\mathbf{x})=\phi\left(\frac{\mathbf{x}}{a_0}\right) \tag{1-17a}$$

$$\phi_m(x)=\phi\left(\frac{x}{2^m a_0}\right),\quad m=1,2,3,\cdots \tag{1-17b}$$

引入小波的概念，可以定义相应于这些核函数的小波函数$\psi_m(\mathbf{x})$：

$$\psi_{m+1}(\mathbf{x})=\phi_m(\mathbf{x})-\phi_{m+1}(\mathbf{x}) \tag{1-18}$$

将(1-18)式代入(1-16)式并反复迭代，则可以得到多尺度的分解格式，即：

$$\begin{aligned} u^h(\mathbf{x}) &= u_0(\mathbf{x}) && \text{第一阶离散}\\ &= w_1(\mathbf{x})+u_1(\mathbf{x}) && \text{第二阶分解}\\ &= w_1(\mathbf{x})+w_2(\mathbf{x})+u_2(\mathbf{x}) && \text{第三阶分解}\end{aligned}$$

$$=\cdots \qquad\qquad 第任意阶分解 \tag{1-19}$$

其中：

$$u_m(\mathbf{x})=\int_\Omega C(2^m a_0,\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\phi_m(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\Omega_y \tag{1-20a}$$

$$w_m(\mathbf{x})=\int_\Omega \psi_m(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{y}} \tag{1-20b}$$

$$\psi_m(\mathbf{x}-\mathbf{y})=C(2^{m-1}a_0,\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\phi_{m-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})-C(2^m a_0,\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\phi_m(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{1-20c}$$

利用多尺度分解，可实现求解的多分辨率分析和自适应分析。通过以上过程的逐级分解，可求得问题的多尺度解。然而，对于高维问题，关于各插值点的控制域$\Delta\Omega_i$的计算存在较大的困难。

1.5 目前用于无网格计算的残差消除方案

在无网格方法的计算中，主要有三种消除残差的方法被使用：配点法、Galerkin 法和 Local Petrov-Galerkin 法。其中配点法用于 SPH 方法[9-20]、FPM 方法[61-61]和 RBF 方法[77-83]等；Galerkin 法用于 Hp-Clouds 方法[54-57]、DEM 方法[21]、EFG 方法[22-39]、RKPM 方法[40-51]和 PUM 方法[59-60]等；Local Petrov-Galerkin 法用于 LBIE 方法[63-64]和 MLPG 方法[65-68]。

以下论述时，求解方程如式(1-1)所示，试函数采用无网格近似的一般表达式：

$$u^h(\mathbf{x})=\sum_{I=1}^{N}\phi_I(\mathbf{x})\cdot u_I \tag{1-21}$$

其中$\phi_I(\mathbf{x})$为结点I对应的插值函数，u_I为结点I对应的基本未知量。

1.5.1 配点法

配点法要求控制方程在内部结点处成立，边界条件在边界结点处成立，从而得到相应的离散形式，即：

$$\mathrm{A}(u(\mathbf{x}_I))=b(\mathbf{x}_I)\,,\quad \forall\mathbf{x}_I\in\Omega \tag{1-22a}$$

$$\mathrm{B}(u(\mathbf{x}_I))=t(\mathbf{x}_I)\,,\quad \forall\mathbf{x}_I\in\Gamma_\sigma \tag{1-22b}$$

$$u(\mathbf{x}_I)-u_p(\mathbf{x}_I)=0\,,\quad \forall\mathbf{x}_I\in\Gamma_u \tag{1-22c}$$

由以上过程可以看出，配点法的实现是很简单的，边界条件的处理也很直接。这种求解过程效率很高，但是在边界附近的精度较差，而且其稳定性和收敛速度目前也不理想。

1.5.2 Galerkin 方法

在(1-2)式中，取$W=\phi_j$，在力边界上$\overline{W}=-\phi_j$，即使用结点插值函数作为权函数；另外要求试函数满足在$\boldsymbol{\Gamma}_u$上的边界条件。则 (1-2)式的积分可以写成：

$$\int_\Omega \phi_j[A(\sum_{i=1}^{N}\phi_i u_i)]d\Omega-\int_{\Gamma_\sigma}\phi_j[B(\sum_{i=1}^{N}\phi_i u_i)]d\Gamma=\int_\Omega(\phi_j b)d\Omega-\int_{\Gamma_\sigma}(\phi_j t)d\Gamma \tag{1-23}$$

在很多情况下， Galerkin 法得到的求解方程的系数矩阵是对称的，因此 Galerkin 方法被广泛的使用。而且当存在相应的泛函时，Galerkin 法与变分法往往导致相同的结果。

对于无网格方法，由于近似时并没有将区域进行网格划分，因此在处理上式中所涉及到的积分时有一定的难度。通常有三种方式来解决：

（1）结点积分，即积分通过结点值实现。

$$\int_\Omega F(\mathbf{x})d\Omega=\sum_{I=1}^{N}F(\mathbf{x}_I)\cdot\Delta\Omega_I \tag{1-24}$$

（2）使用背景网格(Background cell)进行积分。背景网格通常使用规则分割产生的网格单元，它们完全覆盖求解区域；对于每个积分单元采用 Gauss 积分方案，当积分点位于求解区域之外时将该点对积分的贡献置为 0。

背景网格的示例如图 1-1 所示。

（3）使用有限元网格作为背景积分网格。即使用有限元网格对求解域进行划分，并在每个网格内进行数值积分，如图 1-2 所示。该方案与背景网格积分的区别之处在于，背景网格积分中的网格是空间固定、结构无关的，不随计算域的变化而变化；而背景有限元网格方案中的网格是与结构相关联的，将随着计算区域的变化而变化。

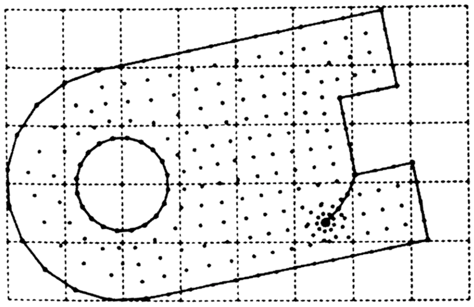


图 1-1 背景网格积分

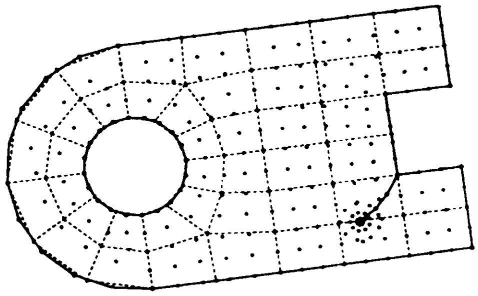


图 1-2 有限元网格积分

第 1 种积分方案是最快的，而且是彻底无网格的，但类似于配点法，它可能不稳定；第 2、3 种积分方案最大的缺点是，没有彻底地抛弃网格。但是，背景网格并不影响无网格方法的本质，它仅用于积分的计算，而且没必要与结点相关联。第 2 种积分方案似乎很粗糙,因为在某些积分单元内部存在不连续界面或区域的边界，甚至是区域外的部分。但是实际计算表明,积分单元内部包含的不连续性对结果的影响是很小的。

第 3 种积分方案对于那些与有限元耦合的无网格方法有很重要的意义。用户可以按照需要,划分有限元近似区域与无网格近似区域。而背景单元在有限元区域作为单元划分,在无网格区域可作为积分计算单元。

1.5.3 Local Petrov-Galerkin 方法

在 Local Petrove-Galerkin 格式中，弱积分形式不是在全域范围Ω建立，而是建立在各个结点的局部子域Ω_s，并且子域Ω_s全部位于域Ω的内部。一般地，子域Ω_s是以考察点$\mathbf{x}$为中心的球形区域(对于二维问题为圆形区域)；如果该球形区域的部分在域Ω之外，则局部子域Ω_s只包括在域Ω之内的部分。

在局部子域Ω_s上所建立的积分弱形式的一般表达式为：

$$\int_{\Omega_s} W[A(u)-b]d\Omega+\int_{\Gamma_{s\sigma}} \overline{W}[B(u)-t]d\Gamma+\int_{\Gamma_{su}} \overline{\overline{W}}[u-u_p]d\Gamma=0 \qquad (1\text{-}25)$$

其中，Γ_{su}是子域Ω_s的边界Γ_s位于整体位移边界Γ_u上的部分，$\Gamma_{s\sigma}$则是子域Ω_s的边界Γ_s位于整体力边界Γ_σ上的部分。

与传统的 Galerkin 方法相比，该方法需要使用特殊的积分方案，以处理在局部子域和子域边界上的积分；使用该方法，不需要背景网格来帮助积分，因此

是一种完全的无网格方法。关于更详细的说明，可以参看文献[63-68]。

1.6 无网格方法小结

无网格方法在最近几年发展迅速，各种名称不同的无网格方法已经有 10 余种，其应用范围也在不断扩大，并且计算精度也得到了验证和认可。本人从加权残差的概念出发，给出了无网格计算的一般格式，并且分析了现存几种主要的无网格计算方案，总结如表 1-1 所示。

编号	名称	代表学者	近似方案	离散方案	背景网格
1	光滑质点流体动力学方法(SPH)	Lucyt	核函数	配点法	NO
2	散射单元法(DEM)	Nayrdes	移动最小二乘	Galerkin 法	YES
3	无单元的伽辽金法(EFG)	Belytschko	移动最小二乘	Galerkin 法	YES
4	再生核粒子法（RKPM）	Liu	再生核粒子近似	Galerkin 法	YES
5	HP 云法(Hp-Clouds)	Oden	移动最小二乘	Galerkin 法	YES
6	HP 无网格云法(Hp-Meshless Clouds)	Liszka	移动最小二乘	配点法	NO
7	单位分解法(PUM)	Babuska	单位分解	Galerkin 法	YES
8	有限点法(FPM)	Onate	移动最小二乘	配点法	NO
9	边界积分法(LBIE)	Atluri	移动最小二乘	Petrov-Galerkin 法	NO
10	局部 Petrov-Galerkin 积分法(MLPG)	Atluri	移动最小二乘	Petrov-Galerkin 法	NO

表 1-1 无网格方法总结

通过本文的分析可以看出，各种无网格方法并非完全不同，而是有一定联系的。对于需要背景积分网格的方法，从某种意义上讲，它们不是“真正的无网格”方法。然而，背景网格仅用于积分的计算，与场函数的近似没有任何关系，

因此远比有限元的网格划分要简单。使用配点法的无网格计算方法，虽然计算简单，完全不需要网格支持，但是计算的稳定性和精度都不如使用 Galerkin 积分的方法。

由于无网格近似一般得不到解析表达式，因此那些基于伽辽金原理，通过背景网格进行积分计算的无网格方法计算效率都不高，需要使用高阶的数值积分方案，计算机工作量要超出传统的有限元方法；另外，无网格近似大都是拟合，因此对于位移边界条件的处理相对比较麻烦。

与有限元方法相比，无网格计算方法具有以下优点：

1. 大大简化计算的前处理工作，比如三维复杂区域的网格划分；
2. 由于近似不需要网格，故而对于大变形和断裂问题不存在网格畸变和网格重构等问题；使用背景网格的无网格方法，网格也仅用于积分计算。因此在处理大变形问题上具有巨大潜力；
3. 无网格近似在自适应的分析中，不必涉及网格细分。因此更容易实现，适于高梯度、奇异性等问题的分析；
4. 无网格计算的结果是光滑连续的；而有限元的结果通常是不光滑的，还需进行相应的后处理。

当然，无网格方法的发展还刚刚起步，目前还不可能与发展已趋于完善的有限元方法相媲美，但其具有光明的发展前景。

1.7 本文主要工作

本文的主要目的是在对紧支函数和加权残差法进行研究的基础上构造有效的无网格计算方法，并将其应用到力学计算中。本论文共分八章：

第一章，前言。对无网格方法的基本思想进行了描述，并且使用加权残差格式对目前主要的一些无网格方法进行了简单介绍和评论。

第二章，基于移动最小二乘近似的无网格方法。本章详细介绍了在无网格方法中被广泛使用的移动最小二乘(MLS)近似方案，并基于 MLS 近似建立了函数插值、弹性静力问题求解的配点型无网格方法；通过对所建立方法的讨论，给出了结点覆盖域半径的选取方案和边界条件的处理方案。此外，针对配点型无网格方法在边界附近精度较差的缺点，又提出了最小二乘配点型的无网格方法。

第三章，无网格方法求解弹塑性问题。本章建立了求解弹塑性问题的配点型无

网格方法，并对典型算例进行了数值分析。在无网格方法的研究中，目前还很少涉及到材料非线性的问题。本章对此进行了尝试，并取得了理想的计算效果。
第四章，紧支距离基函数配点法。本章将紧支距离基函数近似用于边值偏微分方程的求解，建立了基于紧支距离基函数近似的配点型无网格方法，并对几种距离基函数的求解精度进行了对比讨论；针对紧支距离基函数近似在处理导数型边界条件时精度差的特点，提出了 Hermit 型的近似方案，该方案可以有效地提高导数型边界的处理精度。
第五章，修正紧支距离基函数配点法。本章提出了紧支距离基函数的修正方案，经过修正的紧支距离基函数近似能够满足相应的完备性要求，可以大大地提高紧支距离基函数近似的精度；基于修正紧支距离基函数近似，本章建立了求解弹性静力问题、弹塑性静力问题、以及弹性动力问题的配点型无网格方法；通过对动力问题的详细分析，给出了配点型无网格方法在动力计算时结点间距和时间步长的选取法则。
第六章，基于子域法的无网格方法。本章建立了子域型无网格计算方法的一般格式，并对其相关特性进行了讨论。
第七章，域外结点近似的无网格方法。本章提出了使用域外结点进行近似的理念，并建立了相应的无网格求解方法：域外结点近似配点法和域外结点近似子域法。
第八章，结论。本章总结了本论文的意义、主要结论和贡献。

本课题是国家自然科学基金资助的研究项目，批准号为 19772024。

第二章 基于移动最小二乘近似的无网格方法

2.1 引言

移动最小二乘（简记为 MLS）近似是在 80 年代初由 Lancaster 等人[98]提出的，并将其用于曲线、曲面的拟和。移动最小二乘是局部近似与最小二乘相结合的产物，该方法直接基于空间离散的点进行近似，而不需要对区域进行划分。Nayroles 等人[21]最早将 MLS 近似引入力学领域，构造了散射单元法(DEM)。后来，Belytschko 等人使用 MLS 近似和 Galerkin 原理构造了无单元的 Galerkin 法（EFG）[22-23]，在众多学者的努力下，该方法取得了很大的进展[25-39]。此外，Oden 等人的 Hp-Clouds 方法[54-57]、Onate 等人的有限点法(FPM) [61,62]，以及 Atluri 等人的 LBIE [63, 64]和 MLPG [65-68]等方法也都是建立在 MLS 近似的基础上。

本章详细介绍了 MLS 近似方案，基于 MLS 近似建立了函数插值、弹性静力问题求解的配点型无网格计算方法，并给出了结点覆盖域半径的选取方案和边界条件的处理方案。针对直接配点型无网格方法在边界附近精度较差的缺点，又提出了最小二乘配点型无网格方法，并给出了详细的求解说明。

本文得到的无网格方法都是真正无网格的方法，具有计算简单、高效的优点。算例分析结果表明了这些方法的有效性。

2.2 移动最小二乘近似

2.2.1 移动最小二乘近似原理

设函数 $u(\mathbf{x})$ 在求解区域 Ω 内的近似为 $u^h(\mathbf{x})$，$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N\}$ 为域中插值结点的集合。移动最小二乘近似采用如下方式：

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} p_i(\mathbf{x}) \cdot a_i(\mathbf{x}) \tag{2-1}$$

其中，$p_i(\mathbf{x})$ 是基函数，m 是基函数的个数，$a_i(\mathbf{x})$ 是相应的系数。

与传统最小二乘方法不同，近似式中的系数 $a_i(\mathbf{x})$ 不是常数，而是空间坐标的函数，因此被称为移动最小二乘近似。基函数通常使用单项式，当然也可使

用其它任何函数，只要所有基函数之间满足线性无关条件即可。如果使用单项式基函数，则：

一维问题： $p_i(x)=1,\ x,\ x^2,\ x^3,\cdots x^m$

二维问题： $p_i(\mathbf{x})=1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2\cdots$

近似式(2-1)中的系数根据加权最小二乘来确定，即要求对场函数的近似在各结点的误差的加权平方和最小。

$$J=\sum_{I=1}^{N}w_I(\mathbf{x})\cdot[u^h(\mathbf{x}_I)-u(\mathbf{x}_I)]^2=\sum_{I=1}^{N}w_I(\mathbf{x})\cdot[\sum_i p_i(\mathbf{x}_I)\cdot a_i(\mathbf{x})-u_I]^2 \tag{2-2}$$

其中，u_I 是函数在结点 $\mathbf{x}_I$ 处的值；$w_I(\mathbf{x})$ 是结点 $\mathbf{x}_I$ 对应的权函数，并且它是以 $\mathbf{x}_I$ 为中心的紧支函数。

由于 J 取极小，所以：

$$\frac{\partial J}{\partial a_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots m) \tag{2-3}$$

根据上式即可求得系数 $a_i(\mathbf{x})$，从而得到函数 $u(\mathbf{x})$ 的近似式，具体计算如下所示。

使用矩阵形式表示(2-1)式，得：

$$u^h(\mathbf{x})=\mathbf{p}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{a}(\mathbf{x}) \tag{2-4a}$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x})=[p_1(\mathbf{x}),p_2(\mathbf{x}),\cdots p_m(\mathbf{x})] \tag{2-4b}$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x})=[a_1(\mathbf{x}),a_2(\mathbf{x}),\cdots a_m(\mathbf{x})]^T \tag{2-4c}$$

使用矩阵形式表示(2-2)式，得：

$$J=(\mathbf{Pa}-\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{W}(\mathbf{x})\cdot(\mathbf{Pa}-\mathbf{u}) \tag{2-5a}$$

其中：

$$\mathbf{u}=(u_1,u_2,\cdots u_N)^{\mathrm{T}} \tag{2-5b}$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_N) & p_2(\mathbf{x}_N) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix} \tag{2-5c}$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} w_1(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2(\mathbf{x}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & w_N(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{2-5d}$$

根据(2-3)式，进行求导计算，可得：

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}}=\mathbf{A}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{a}(\mathbf{x})-\mathbf{B}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}=\mathbf{0} \tag{2-6a}$$

其中：

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{W}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{P} \tag{2-6b}$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{W}(\mathbf{x}) \tag{2-6c}$$

求解方程(2-6)，即可得到近似表达式中的系数 $a_i(\mathbf{x})$，

$$\mathbf{a}(\mathbf{x})=\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{B}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u} \tag{2-7}$$

将(2-7)代入(2-1)，则可得函数的近似：

$$u^h(\mathbf{x})=\mathbf{p}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{B}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}=\sum_{i=1}^{N}\phi_i(\mathbf{x})\cdot u_i \tag{2-8a}$$

$$\phi_i(\mathbf{x})=[\mathbf{p}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{B}(\mathbf{x})]_i \tag{2-8b}$$

式(2-8a)即为 MLS 近似式，式(2-8b)则给出了结点形函数的计算式。

由于权函数具有紧支属性，因此对于任一点 $\mathbf{x}$，以上各式在计算中所涉及到的求和只需要在 $\mathbf{x}$ 邻域内的结点中进行，即权函数 $w_I(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}$ 处不为零的那些结点 $\mathbf{x}_I$。由于在计算系数时涉及系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的求逆，因此必须保证在所有的计算位置矩阵 $\mathbf{A}$ 都为非奇异的。如果将位于 $\mathbf{x}$ 邻域内的结点个数记为 n，则矩阵 $\mathbf{A}$ 非奇异的必要条件为 $n\ge m$，即 $\mathbf{x}$ 邻域内的结点数必须多于 m 个。

2.2.2 移动最小二乘近似的特点

考察移动最小二乘近似的构造，可以得出它有如下一些特点：

1. 包含于基函数组中的任何函数都可以被 MLS 近似精确地模拟。

假设函数 $u(\mathbf{x})$ 是由若干基函数线性组合生成的函数，即：

$$u(\mathbf{x})=\sum_i \alpha_i\cdot p_i(\mathbf{x}) \tag{2-9}$$

若令系数 $a_i(\mathbf{x})=\alpha_i$，则(2-2)式对应的 *J*=0，为最小值。因此：

$$u^h(\mathbf{x})=\sum_i \alpha_i \cdot p_i(\mathbf{x})=u(\mathbf{x}) \tag{2-10}$$

这表明，包含于基函数组中的任何函数都可以通过 MLS 近似精确地模拟。因此，如果基函数中包含常数和线性完全单项式，则近似必满足线性完备性条件；而如果引入奇异函数作为基函数，则它亦可以被精确模拟。因此在分析具有奇异性的问题时，可以将奇异函数作为一个基函数。在弹性断裂计算中就可充分利用这一特点。

2. 权函数为紧支函数，近似具有局部近似的特点。

由推导过程可以看出，权函数对形函数有很大的影响，不同的权函数将得到不同的结果。一般，权函数应为紧支函数，它只在附近的子域内非零。这使得 MLS 近似具有局部近似的特点，也就是说某点的近似值只与它附近的结点有关。同时，这一特性使得求解中所形成的系数矩阵具有稀疏、带状特性。各结点权函数的紧支区域，通常被称为该点的影响区域。为了增强近似效果，各结点影响区域的大小可以根据周围点的分布加以调整。

3. 系数 $a_i(\mathbf{x})$ 是空间坐标的函数。

近似式中的系数 $a_i(\mathbf{x})$ 是空间坐标的函数，而且通常得不到对应的解析表达式。因此，在计算中，对每一个计算点，都需要首先计算该点处的系数值，才能得到该计算点的近似值；对于在某一位置近似函数的导数，计算就更加复杂。为了保证每个计算点位置的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆，必须满足 $n \ge m$ 。

MLS 近似的形式类似于有限元中的近似，但二者是不同的。主要区别有三个，其一：有限元中插值函数定义于单个网格内，而 MLS 中插值函数定义于全域，并且仅取决于结点空间的分布和所选取的权函数。其二：由于有限元中插值函数定义于各个网格内，因此近似的连续性、光滑性在网格的分界处必然受到限制，计算后还需要进一步的后处理。而使用 MLS 近似，插值函数定义于全域，具有较好的连续性、光滑性，不需要后处理过程；其三：有限元近似中，结点未知量通常就是场函数的结点值，即为插值近似。而在 MLS 近似中，结点未知量一般不是场函数的结点值，即：$\phi_I(\mathbf{x})_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_I} \neq 1$，这一点为位移边界条件的处理

带来了困难。

2.2.3 移动最小二乘近似中各结点影响区域的选取原则

在 MLS 近似中，各结点影响区域的大小可以是相同的，也可以是根据周围结点的分布加以调整，但一般应满足以下条件：

(1). 应该保证所有的影响区域能覆盖全部求解域。

(2). 为了提高近似精度，应保证每一个计算点周围的各个象限中都包含有对该计算点有影响的结点。当然对于位于边界上及边界附近的计算点，处理时就必须特殊对待了。

(3). 必须保证系数求解时所用的矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆，其必要条件是：在每个计算点都满足 $m \le n$ 。

(4). 为了使近似保持局部近似的优点，应避免结点影响区域太大。

可见，结点影响半径的确定是以计算点为基础的，而计算点是由计算方案而定的。比如，如果采用配点法，则计算点为配点；如果采用迦辽金法，则计算点为数值积分点。

通常，选用的紧支权函数是各向同性的，因此各结点的影响区域可以用影响半径来描述。下面给出在使用 MLS 近似时结点影响半径的确定方案(结点 I 的影响半径记为 ρ_I)：

(1). 设定所有影响半径的初始值为 0，即：

$$\rho_I = 0, \quad (I = 1,2,\cdots N)$$

(2). 对于每一个计算点 $\mathbf{x}_J$ $(J = 1,2,\cdots M)$ 进行下列操作：

(2.1). 计算各结点 $\mathbf{x}_I$ $(I = 1,2,\cdots N)$ 与该计算点的距离，并将这组距离按从小到大的顺序排列。从中取出前 m 个结点，放入数组 List 中。

(2.2). 从该计算点 $\mathbf{x}_J$ 向数组 List 中的各结点画射线，并将这组射线按角度顺序排列。如果某两条相邻射线之间的夹角大于 90°，则向数组 List 中增加一个结点。 重复这项工作，直至任两条相邻射线之间的夹角都不大于 90°。(当然，如果该计算点位于边界上，则需要特殊处理。)

(2.3).计算该计算点$\mathbf{x}_J$与数组 List 中的各结点$\mathbf{x}_I$之间的距离ρ_{IJ}，如果$\rho_I < \rho_{IJ}$，则令$\rho_I = \rho_{IJ}$。

(3).将所有结点的影响半径ρ_I都乘以一个放大因子α_{Scale}，即：

$$\rho_I = \rho_I * \alpha_{Scale}, \quad (I = 1,2,\cdots N)$$

其中： $\alpha_{Scale} \ge 1.0$

2.2.4 关于矩阵$\mathbf{A}^{-1}$的导数

在计算函数的近似值时，需要用到矩阵$\mathbf{A}^{-1}$；而在计算函数的近似导数时，则需用到$\mathbf{A}^{-1}$的导数。计算可如下所示进行：

由于$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = I$，因此

$$\frac{\partial(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1})}{\partial x} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\cdot\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}^{-1}}{\partial x} = 0 \tag{2-11a}$$

$$\frac{\partial\mathbf{A}^{-1}}{\partial x} = -\mathbf{A}^{-1}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\cdot\mathbf{A}^{-1} \tag{2-11b}$$

同理：

$$\frac{\partial\mathbf{A}^{-1}}{\partial y} = -\mathbf{A}^{-1}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\cdot\mathbf{A}^{-1} \tag{2-11c}$$

同样的方法可以计算出$\mathbf{A}^{-1}$的高阶导数导数。

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}^{-1}}{\partial x^2} = -\mathbf{A}^{-1}\cdot(\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2}\cdot\mathbf{A}^{-1} + 2\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}^{-1}}{\partial x}) \tag{2-12a}$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}^{-1}}{\partial y^2} = -\mathbf{A}^{-1}\cdot(\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2}\cdot\mathbf{A}^{-1} + 2\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}^{-1}}{\partial y}) \tag{2-12b}$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}^{-1}}{\partial x\partial y} = -\mathbf{A}^{-1}\cdot(\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x\partial y}\cdot\mathbf{A}^{-1} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}^{-1}}{\partial y} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}^{-1}}{\partial x}) \tag{2-12c}$$

2.2.5 移动最小二乘近似中的权函数

在移动最小二乘近似中，常用到的紧支权函数有三种：指数型、样条和截断多项式。下面将以中心为$\mathbf{x}_0$的情况加以说明，紧支域半径记为$r_{\max}$，任意点$\mathbf{x}$

到$\mathbf{x}_0$的距离记为r，即$r=\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right\|$。

指数型：

$$w(r)=\begin{cases} e^{-(\frac{r}{r_{\max}}\cdot\frac{1}{\alpha})^2}, & r\le r_{\max} \\ 0, & r>r_{\max} \end{cases} \tag{2-13}$$

其中α为可调参数。指数型权函数在$r=r_{\max}$处不连续，因此是c^{-1}型的函数。但是对于数值计算而言，它类似于c^1的连续性。比如取$\alpha=0.4$时，$f(r_{\max})\approx 0.0019$，非常接近于0。

样条型：

样条型函数通常由分段多项式构成，具有较好的光滑性。以下各式中$s={r}/{r_{\max}}$。

三次样条：
$$w(s)=\begin{cases} \frac{2}{3}-4s^2+4s^3, & s\le\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3}-4s+4s^2-\frac{4}{3}s^3, & \frac{1}{2}\le s\le 1 \\ 0, & s>1 \end{cases} \tag{2-14a}$$

四次样条：
$$w(s)=\begin{cases} 1-6s^2+8s^3-3s^4, & s\le 1 \\ 0, & s>1 \end{cases} \tag{2-14b}$$

截断二次式：

$$w(s)=\begin{cases} (1-s^2)^k, s\le 1 \\ 0,\ s>1 \end{cases} \tag{2-15}$$

式中k为整数，选择不同的参数k，函数将具有不同的光滑程度。

2.2.6 移动最小二乘近似中的形函数

形函数取决于所用的权函数的形式、权函数的紧支域大小、基函数的阶次和结点的分布情况等。由于权函数的紧支性，形函数也为紧支函数。下面以一维情况为例加以说明。考虑位于$[-10,10]$范围内的21个结点，考察$x=0$处结点对应的形函数。

图 2-1 和图 2-2 给出了结点均布，并使用同样的紧支域大小时，使用不同基函数所对应的形函数及其导数。其中图 2-1 为线性基情况，图 2-2 为二次基情况。

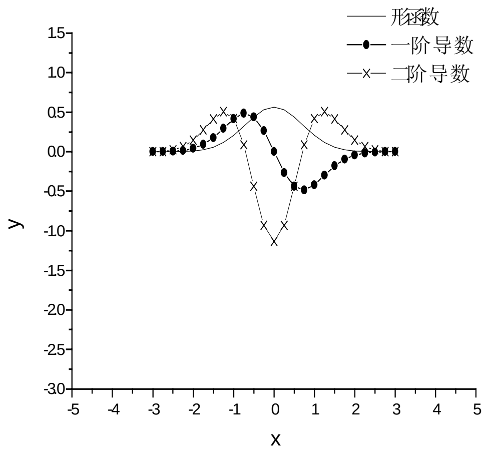


图 2-1 线性基情况

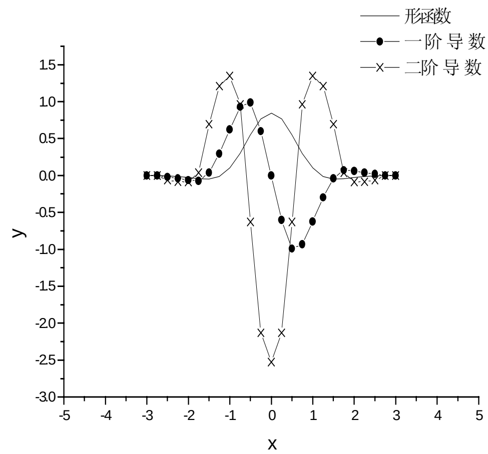


图 2-2 二次基情况

图 2-3 和图 2-4 给出了结点均布，并都使用二次基时，不同紧支域大小所对应的形函数及其导数。其中图 2-3 为 $r_{\max}=2.5$ 时的情况，图 2-4 为 $r_{\max}=4.0$ 时的情况。

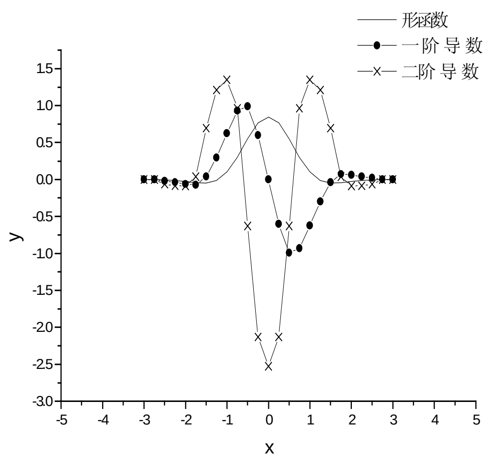


图 2-3 $r_{\max}=2.5$ 的情况

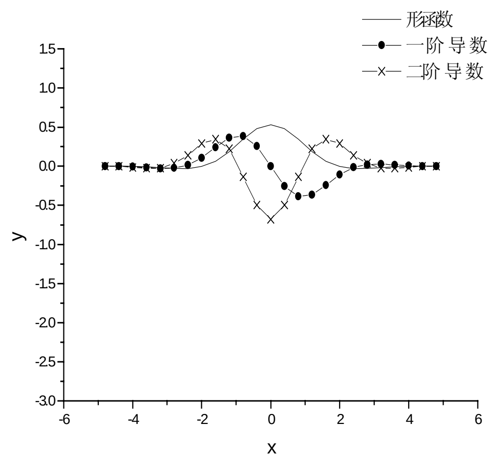


图 2-4 $r_{\max}=4.0$ 的情况

图 2-6 给出了结点随机分布时，使用二次基函数，$r_{\max}=2.5$ 时所得到的 $x=0$

位置结点的形函数及其导数。其中图 2-5 给出了结点的分布情况。

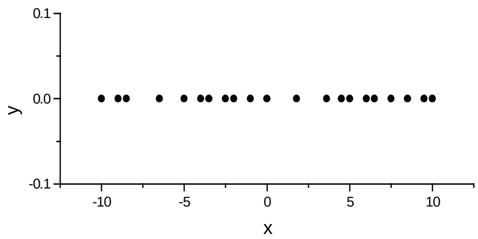


图 2-5 结点分布情况

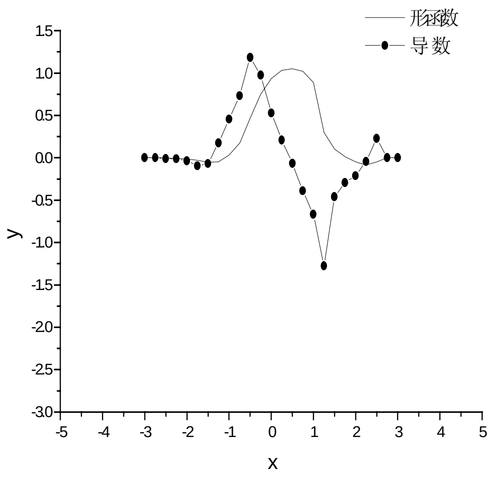


图 2-6 形函数

2.3 使用移动最小二乘近似模拟曲线

使用最小二乘近似方法，可以有效地进行函数的逼近，因此对曲线和曲面的拟和具有很好的效果。下面给出模拟曲线的一个算例。

需要拟和的曲线对应的函数形式为：

$$y(x) = \sin(x^2 + e^{x^2/3}) \qquad x \in [0.0, 2.0]$$

使用 21 个均布结点进行近似，图 2-7、图 2-8 和图 2-9 分别给出了函数及一阶、二阶导数的近似结果。

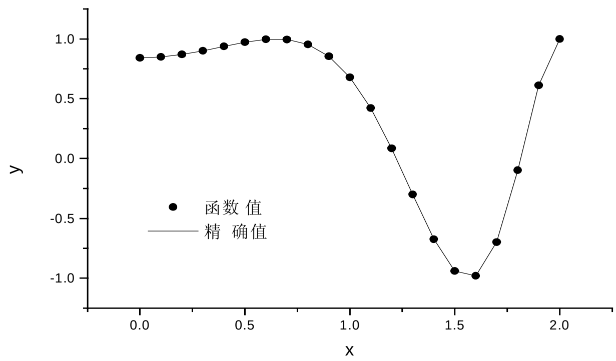


图 2-7 函数的近似结果

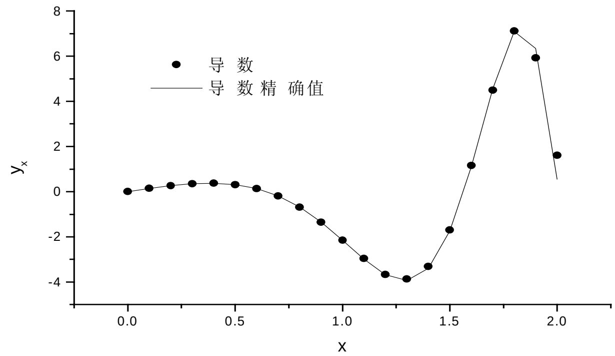


图 2-8 一阶导数的近似结果

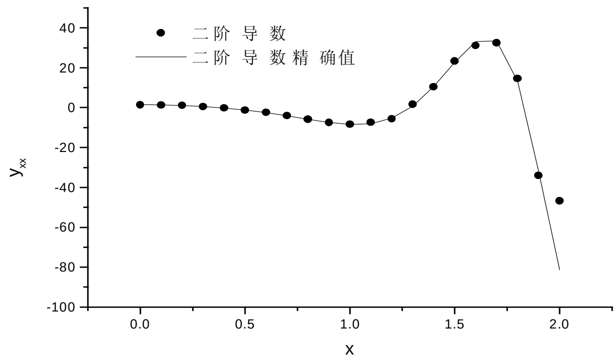


图 2-9 二阶导数的近似结果

2.4 弹性静力问题的直接配点法

本节使用移动最小二乘原理构造位移场函数的近似，结合配点方案构造力学方程的求解方法，建立了几种无网格计算格式，并成功用于弹性问题的求解。所构造的方法是真正的无网格方法，具有计算简单、高效的优点。

2.4.1 弹性静力问题的直接配点法

弹性静力问题所对应的偏微分定解方程为(以位移为基本未知量)：

$$\begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in S_u \\ \mathbf{T}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in S_t \end{cases} \tag{2-16}$$

其中Ω为求解区域，S_u为位移边界，S_t为力边界；$\mathbf{u}(\mathbf{x})$为待求位移场函数，$\mathbf{B}$和$\mathbf{T}$为微分算子，$\mathbf{f}(\mathbf{x})$、$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$和$\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$分别为定义在域内、位移边界上和力边界上的已知函数。在上面的方程中，第 1 式为平衡方程，第 2、3 式分别为位移边界条件和力边界条件。

在求解域内及边界上布置N个离散结点$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \cdots \mathbf{x}_N$，将结点$\mathbf{x}_I$处的位移记为$\mathbf{u}_I$，则根据 MLS 近似方案可以建立位移场函数的近似：

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N} \phi_I(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_I \tag{2-17}$$

其中$\phi_I(\mathbf{x})$为 MLS 近似中结点I对应的插值函数，$\mathbf{u}_I$为待解未知量。

在直接配点法中，所取的配点与插值结点相同，因此下面的论述中不加以区分。将(2-17)式所表示的近似带入方程(2-16)中，对于位于求解域内部的结点，要求在该位置满足平衡方程；对于位于边界上的结点，要求在该位置满足相应的边界条件，从而形成求解方程。用$\mathbf{x}^*$表示求解域内部的结点，$\bar{\mathbf{x}}^*$表示位移边界上的结点，$\tilde{\mathbf{x}}^*$表示力边界上的结点，则方程(2-16)相应的直接配点格式为：

$$\begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x}^*)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) & \forall \mathbf{x}^* \in \Omega \\ \mathbf{u}^h(\bar{\mathbf{x}}^*) = \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}^*) & \forall \bar{\mathbf{x}}^* \in S_u \\ \mathbf{T}(\mathbf{u}^h(\tilde{\mathbf{x}})) = \tilde{\mathbf{t}}(\tilde{\mathbf{x}}) & \forall \tilde{\mathbf{x}}^* \in S_t \end{cases} \tag{2-18}$$

2.4.2 算例分析

使用本节所构造的无网格计算方法，进行了一些算例分析，表明了上述方法的有效性。

为了进行误差比较和分析，对于具有精确解的问题，定义两种误差描述：结点位移相对误差L_u和结点应力L_σ相对误差。在本文以后的论述中，也将采用这两种误差。

$$L_u = \frac{\sqrt{\sum_{I=1}^{N}(\mathbf{u}_I^{Calc}-\mathbf{u}_I^{Exact})^T(\mathbf{u}_I^{Calc}-\mathbf{u}_I^{Exact})}}{\sqrt{\sum_{I=1}^{N}(\mathbf{u}_I^{Exact})^T(\mathbf{u}_I^{Exact})}}\times 100\% \tag{2-19a}$$

$$L_\sigma = \frac{\sqrt{\sum_{I=1}^{N}(\boldsymbol{\sigma}_I^{Calc}-\boldsymbol{\sigma}_I^{Exact})^T\cdot(\boldsymbol{\sigma}_I^{Calc}-\boldsymbol{\sigma}_I^{Exact})}}{\sqrt{\sum_{I=1}^{N}(\boldsymbol{\sigma}_I^{Exact})^T\cdot(\boldsymbol{\sigma}_I^{Exact})}}\times 100\% \tag{2-19b}$$

其中，$\mathbf{u}_I^{Calc}$和$\mathbf{u}_I^{Exact}$分别表示结点I处位移的近似值和精确值；$\boldsymbol{\sigma}_I^{Calc}$和$\boldsymbol{\sigma}_I^{Exact}$分别表示结点$I$处应力的近似值和精确值。

算例 1　开圆孔方板：

对于中心圆孔半径为a的无限大方板，在无穷远处承受水平均布拉力σ_0，其所对应的解析解为：

$$\begin{cases} u_r = \frac{\sigma_0}{4G}\left\{r\left[\frac{\kappa-1}{2}+\cos 2\theta\right]+\frac{a^2}{r}\left[1+\left(1+\kappa\right)\cos 2\theta\right]-\frac{a^4}{r^3}\cos 2\theta\right\} \\ u_\theta = \frac{\sigma_0}{4G}\left\{(1-\kappa)\frac{a^2}{r}-r-\frac{a^4}{r^3}\right\}\sin 2\theta \end{cases} \tag{2-20a}$$

$$\begin{cases} \sigma_x(x,y) = \sigma_0\left\{1-\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{3}{2}\cos 2\theta+\cos 4\theta\right)+\frac{3a^4}{2r^4}\cos 4\theta\right\} \\ \sigma_y(x,y) = -\sigma_0\left\{\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta-\cos 4\theta\right)-\frac{3a^4}{2r^4}\cos 4\theta\right\} \\ \tau_{xy}(x,y) = -\sigma_0\left\{\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta+\sin 4\theta\right)+\frac{3a^4}{2r^4}\sin 4\theta\right\} \end{cases} \tag{2-20b}$$

其中，

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)},\quad \kappa=\begin{cases}3-4\nu & (平面应变)\\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & (平面应力)\end{cases} \tag{2-20c}$$

E 为材料的弹性模量，ν 为泊松比，(r,θ) 是相对于原点在圆孔中心的坐标系的极坐标。

将坐标系原点定于圆孔中心，由于结构的对称性，仅取位于右上的四分之一部分进行分析。取计算模型的孔半径为 1，并考虑中心右上方边长为 5 的方形部分区域。如图 2-10 所示。材料参数：$E=1000$，$\nu=\frac{1}{3}$。

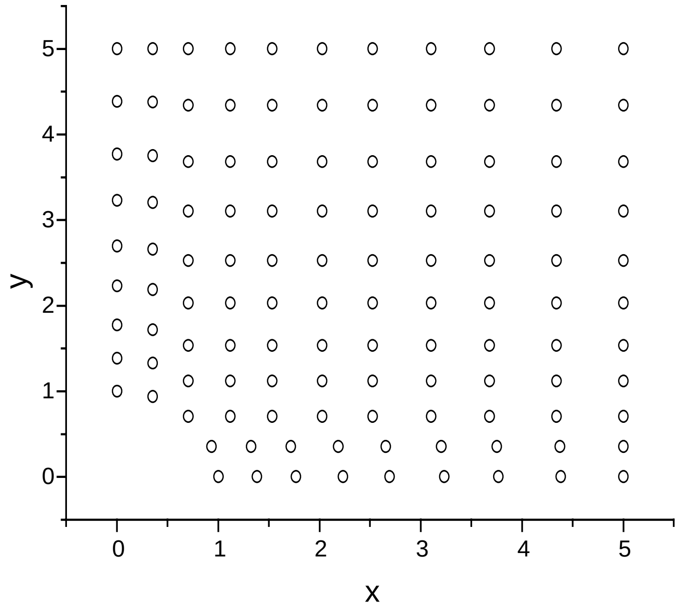


图 2-10 无限大开孔板的无网格计算模型

在对该算例进行数值分析时，边界条件由式(2-20a)和(2-20b)计算所得。为了检验无网格配点法对边界条件的处理精度，采用两种方式施加边界条件：方式一，所有的边界点都施加位移约束；方式二，具有对称性的左边界和下边界使用位移边界条件，其它边界使用力边界条件。计算中使用指数型权函数，并且取 $\alpha=0.4$。

表 2-1 给出了方式一情况下，使用线性多项式基函数进行 MLS 近似时，不同结点数所对应的数值计算误差；图 2-11 则给出了几种情况下计算所得到的 $x=0$ 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 的分布。

表 2-2 给出了方式一情况下，使用二次多项式基函数进行 MLS 近似时，不

同结点数所对应的数值计算误差；图 2-12 则给出了几种情况下计算所得到的 $x=0$ 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 的分布。

结点数	48	117	352	513	925
L_u	1.3818	0.4831	0.31074	0.0686	0.0161
L_σ	21.553	9.6621	5.3394	3.3073	1.8905

表 2-1 方式一，线性多项式基时对应误差（%）

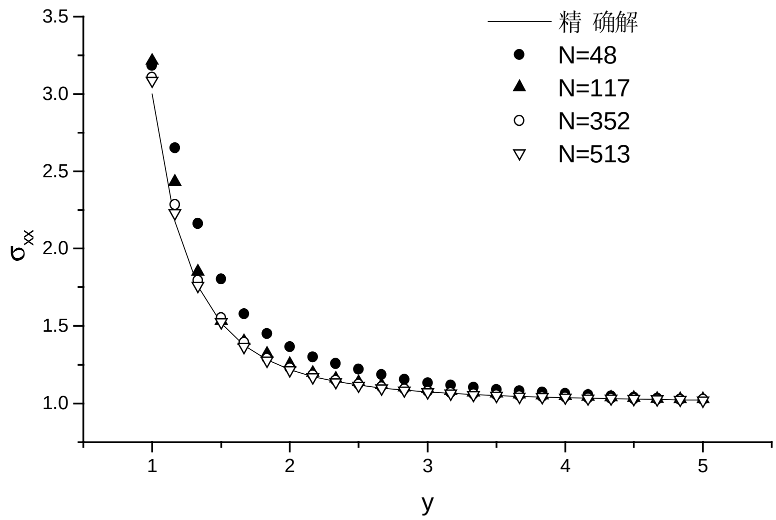


图 2-11 方式一，线性多项式基（$x=0$ 处的应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$）

结点数	48	117	352	513	925
L_u	0.79326	0.2838	0.0379	0.1053	0.03621
L_σ	22.824	11.717	3.5054	3.0697	1.4233

表 2-2 方式一，二次多项式基时对应误差（%）

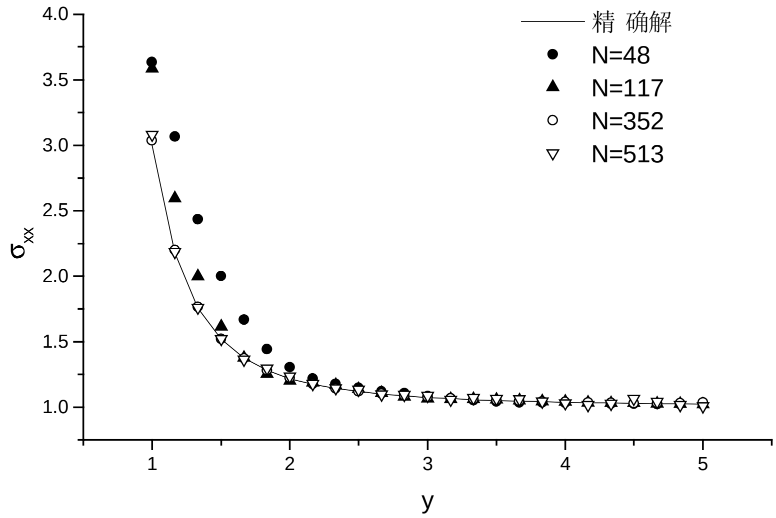


图 2-12 方式一，二次多项式基（$x=0$ 处的应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$）

表 2-3 给出了方式二情况下，使用线性多项式基函数进行 MLS 近似时，不同结点数所对应的数值计算误差；图 2-13 则给出了几种情况下计算所得到的 $x=0$ 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 的分布。

表 2-4 给出了方式二情况下，使用二次多项式基函数进行 MLS 近似时，不同结点数所对应的数值计算误差；图 2-14 则给出了几种情况下计算所得到的 $x=0$ 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 的分布。

结点数	48	117	352	513	925
L_u	45.374	6.1523	1.4962	0.93037	0.57504
L_σ	173.26	25.227	11.271	3.9032	2.2344

表 2-3 方式二，线性多项式基时对应误差（％）

结点数	48	117	352	513	925
L_u	33.298	5.4715	0.92884	0.67746	0.52045
L_σ	125.53	23.862	3.9378	3.4174	2.1620

表 2-4 方式二，二次多项式基时对应误差（％）

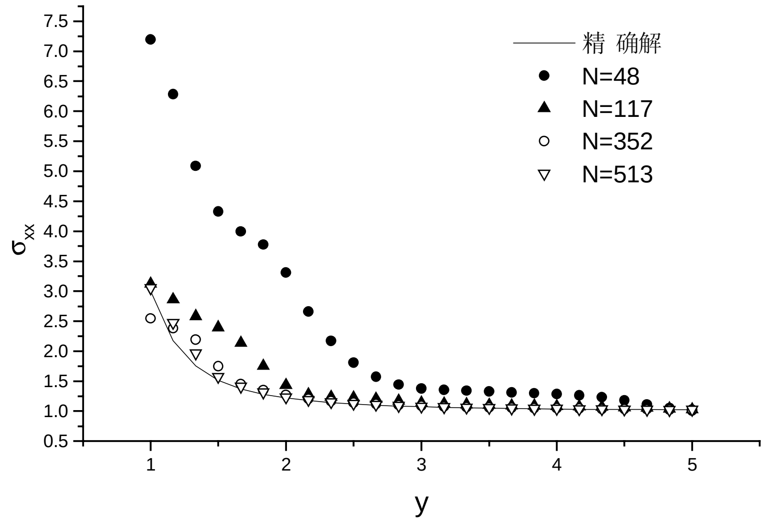


图 2-13 方式二，线性多项式基（$x=0$ 处的应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$）

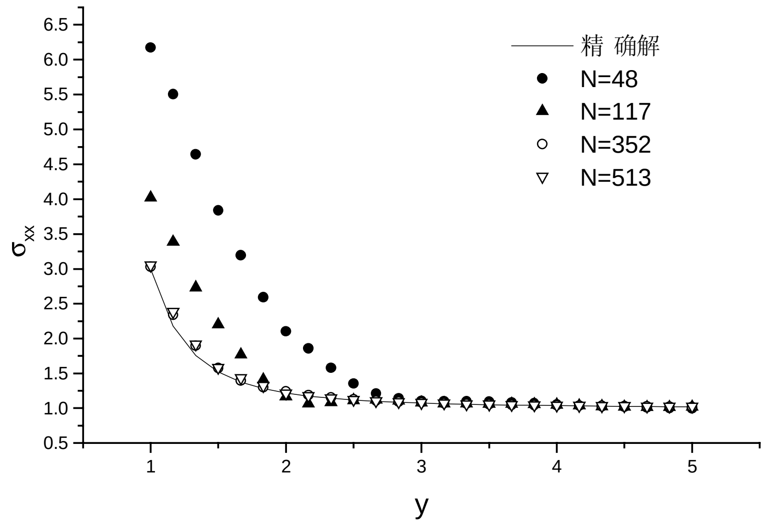


图 2-14 方式二，二次多项式基（$x=0$ 处的应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$）

算例 2　悬臂梁：

端部受分布载荷的悬臂梁如图 2-15 所示，长度为 L，宽度为 D。该问题对应的解析解由 Timoshenko 和 Goodier[99]给出:

$$\begin{cases} u_x = -\dfrac{P}{6EI}\left(y-\dfrac{D}{2}\right)\left[\left(6L-3x\right)x+\left(2+\nu\right)\left(y^2-Dy\right)\right] \\ u_y = \dfrac{P}{6EI}\left[3\nu\left(y-\dfrac{1}{2}D\right)^2\left(L-x\right)+\dfrac{1}{4}\left(4+5\nu\right)D^2x+\left(3L-x\right)x^2\right] \end{cases} \tag{2-21a}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx}\left(x,y\right) = -\dfrac{P}{I}\left(L-x\right)\left(y-\dfrac{1}{2}D\right) \\ \sigma_{yy}\left(x,y\right) = 0 \\ \tau_{xy}\left(x,y\right) = -\dfrac{Py}{2I}\left(y-D\right) \end{cases} \tag{2-21b}$$

其中，$I=\dfrac{D^3}{12}$为转动惯量，E为材料的弹性模量，ν为泊松比。

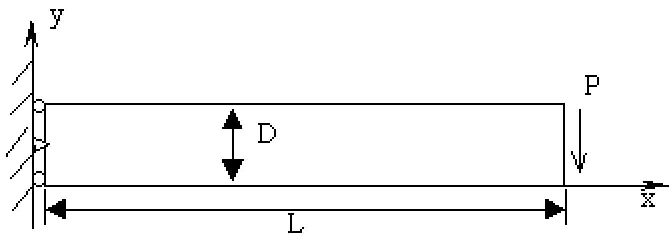


图 2-15 悬臂梁模型

计算模型所采用的悬臂梁为$L=12m$，$D=2m$，$E=10000$，$\nu=\frac{1}{3}$。插值结点均匀分布。图 2-16 所示是计算所得的上表面应力$\boldsymbol{\sigma_{xx}}$分布结果。其中包括如下信息：解析解对应的应力分布曲线；结点数 125，使用二次基函数求解的应力分布曲线；结点数 259，使用二次基函数求解的应力分布曲线。

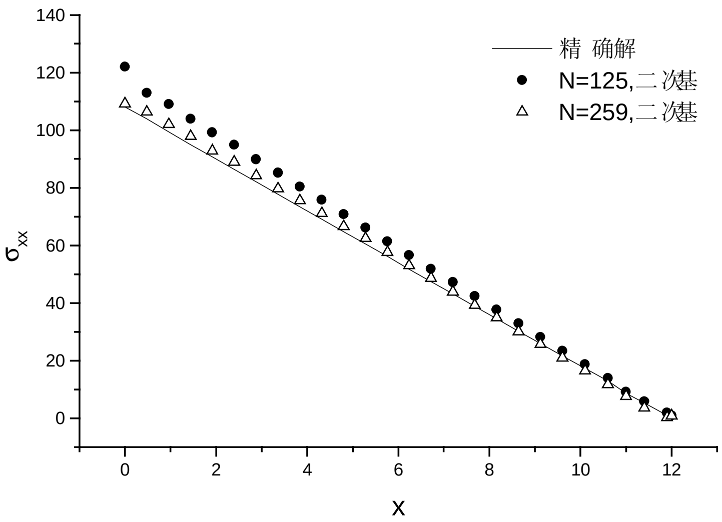


图 2-16 悬臂梁计算结果(上表面应力σ_{xx}分布结果)

2.4.3 小结

本节所构造的直接配点法是一种求解弹性静力问题的真正无网格方法，它只需要在空间布置离散的结点，基于 MLS 近似建立位移场函数的近似表达；使用直接配点法形成求解方程，具有求解简单的特点。然而，由于只要求平衡方程在域内结点处满足，因此在其他位置、甚至是边界上的结点处平衡方程都可能不满足。这样就造成了解的精度较差，尤其是在边界附近。针对这种缺点，本文又发展了最小二乘配点法。

2.5 弹性静力问题的最小二乘配点法

2.5.1 最小二乘配点法

针对直接配点法的缺点，本文提出了最小二乘配点法，它在插值结点(包括位于域内的结点和边界上的结点)和附加的配点位置施加平衡方程的约束。同样考虑(2-16)式所描述的定解方程，具体方法如下：

1. 在求解区域Ω上取N个插值结点$\mathbf{x}_I (I=1,2\cdots N)$，各插值点处对应的变量值记

为$\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_N$；其中位于位移边界$S_u$上的结点记为$\bar{\mathbf{x}}_I$，共有$N_u$个；位于力边界$S_t$上的结点记为$\tilde{\mathbf{x}}_I$，共有$N_t$个。

2. 按照 MLS 近似方案，基于所取的插值结点形成对位移场函数$\mathbf{u}(\mathbf{x})$的近似$\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$，如式(2−17)所示。
3. 在求解区域Ω上另取M个配点$\mathbf{x}_I^*(I=1,2\cdots M,\ M\geq 0)$，它们必须与插值结点不同。若$M=0$，则为不附加配点的情况。
4. 计算在插值结点处(包括位于域内的结点和边界上的结点)以及附加配点处平衡方程的残差：

$$\mathbf{R}_I=\mathbf{F}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x}_I))-\mathbf{f}(\mathbf{x}_I)\quad I=1,2\cdots N \tag{2-22a}$$

$$\mathbf{R}_I^*=\mathbf{F}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x}_I^*))-\mathbf{f}(\mathbf{x}_I^*)\quad I=1,2\cdots M \tag{2-22b}$$

5. 计算位于边界上的插值结点处(包括位移边界和力边界)，边界条件的残差：

$$\bar{\mathbf{R}}_I=\mathbf{u}^h(\bar{\mathbf{x}}_I)-\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}_I)\quad I=1,2\cdots N_u \tag{2-23a}$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_I=\mathbf{T}(\mathbf{u}^h(\tilde{\mathbf{x}}_I))-\tilde{\mathbf{t}}(\tilde{\mathbf{x}}_I)\quad I=1,2\cdots N_t \tag{2-23b}$$

6. 通过对(2-22)和(2-23)式所表示的残差提出要求，就可以建立相应的离散求解方程。由于(2-22)和(2-23)式所表示的方程总数比未知量的数量多，因此采用最小二乘方式建立方程。

最小二乘配点法综合了直接配点法和伽辽金法的优点。与直接配点法相比，具有较高的精度和稳定性；与迦辽金法相比，避免了复杂的积分运算，并且求解过程完全不需要网格的支持，是真正的无网格方法。

根据采用最小二乘建立方程的方式，建立了三种不同的求解方案：直接最小二乘配点法、拉格朗日乘子最小二乘配点法、修正的最小二乘配点法。

2.5.2 直接最小二乘配点法

直接最小二乘配点法要求(2-22)所表示的配点处平衡方程的残差和(2-23)所表示的边界结点处边界条件的残差一起满足最小二乘条件，即：

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{I=1}^{N}\mathbf{R}_I\cdot\mathbf{R}_I+\frac{1}{2}\sum_{I=1}^{M}\mathbf{R}_I^*\cdot\mathbf{R}_I^*+\frac{1}{2}\sum_{I=1}^{N_u}\bar{\mathbf{R}}_I\cdot\bar{\mathbf{R}}_I+\frac{1}{2}\sum_{I=1}^{N_t}\tilde{\mathbf{R}}_I\cdot\tilde{\mathbf{R}}_I\ \rightarrow\min \tag{2-24}$$

对应的求解方程为：

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}_I} = 0 \quad \left(I = 1, 2, \cdots N \right) \tag{2-25}$$

从计算格式的构造可以看出，直接最小二乘配点法所求得的近似解一般在各结点和附加配点处不严格满足平衡方程，而且在边界结点处也不严格满足边界条件。由于边界条件对边值偏微分方程的解具有重要作用，因此这种处理方法将会造成较大的误差，尤其是在边界附近。

图 2−17 给出了使用该方法对悬臂梁(算例与 2.4 节中的相同)进行分析的对比结果，图中所示是计算所得的上表面应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 分布。其中包括如下信息：解析解对应的应力分布曲线；结点数 126，使用直接配点法求解的应力结果；结点数 126，且无附加配点，使用直接最小二乘配点法求解的应力结果；结点数 126，附加配点数为 60，使用直接最小二乘配点法求解的应力结果。计算中都使用二次基函数进行 MLS 近似。通过数值计算的结果可以看出该方法的精度较差。

图 2−18 给出了结点数为 126、附加配点数为 60 所对应的布点方案。

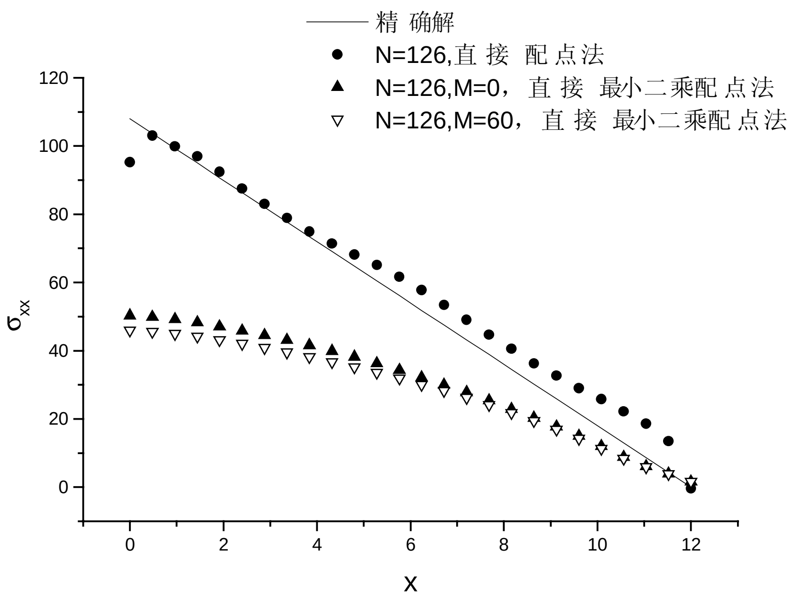


图 2-17 悬臂梁计算结果(上表面应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 分布)

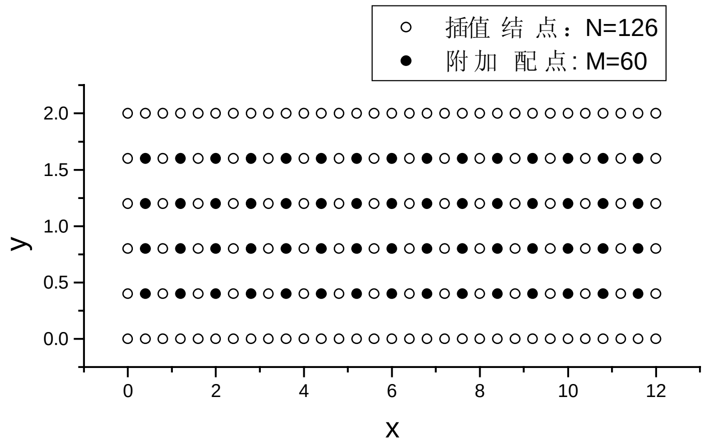


图 2-18 结点数为 126、附加配点数为 60 时的布点方案

2.5.3 拉格朗日乘子最小二乘配点法

针对直接最小二乘配点法的缺点，提出了拉格朗日乘子最小二乘配点法。该方法要求 (2-23)所表示的边界条件的残差严格为零，而 (2-22)所表示的平衡方程的残差满足最小二乘条件，即：

$$\begin{cases} \Pi = \dfrac{1}{2}\sum_{I=1}^{N}\mathbf{R}_I \cdot \mathbf{R}_I + \dfrac{1}{2}\sum_{I=1}^{M}\mathbf{R}_I^* \cdot \mathbf{R}_I^* & \to \min \\ \bar{\mathbf{R}}_I = 0 & I = 1, 2 \cdots N_u \\ \tilde{\mathbf{R}}_I = 0 & I = 1, 2 \cdots N_t \end{cases} \tag{2-26}$$

使用拉格朗日乘子法将上式的条件极值问题转化为一般极值问题，即：

$$\Pi^* = \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{N}\mathbf{R}_I \cdot \mathbf{R}_I + \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{M}\mathbf{R}_I^* \cdot \mathbf{R}_I^* + \sum_{I=1}^{N_u}\mathbf{a}_I \cdot \bar{\mathbf{R}}_I + \sum_{I=1}^{N_t}\mathbf{b}_I \cdot \tilde{\mathbf{R}}_I \quad \to \min \tag{2-27}$$

其中，$\mathbf{a}_I$ 和 $\mathbf{b}_I$ 为拉格朗日乘子。对应的求解方程为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{u}_I} = 0 \quad I = 1, 2 \cdots N \\ \dfrac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{a}_I} = 0 \quad I = 1, 2 \cdots N_u \\ \dfrac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{b}_I} = 0 \quad I = 1, 2 \cdots N_t \end{cases} \tag{2-28}$$

使用拉格朗日乘子最小二乘配点法，分析了与 2.5.2 节中同样的算例，并且使用了同样的布点方案和基函数。图 2−19 给出了使用该方法的计算结果，图中所示是计算所得的上表面应力$\boldsymbol{\sigma}_{xx}$分布。其中包括如下信息：解析解对应的应力分布曲线；结点数 126，使用直接配点法求解的应力结果；结点数 126，且无附加配点，使用拉氏乘子最小二乘配点法求解的应力结果；结点数 126，附加配点数为 60，使用拉氏乘子最小二乘配点法求解的应力结果。

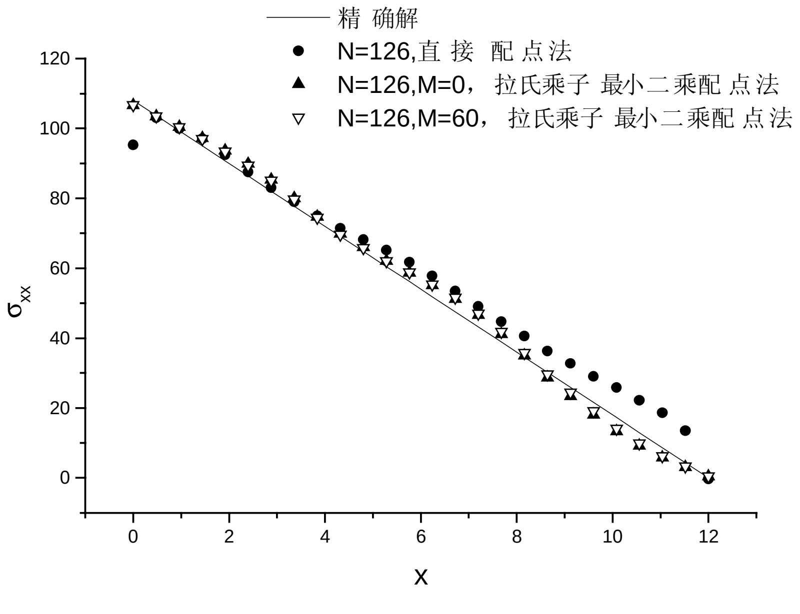


图 2−19 悬臂梁计算结果(上表面应力$\boldsymbol{\sigma}_{xx}$分布)

通过理论说明和算例分析可以看出，拉格朗日乘子的引入使得边界条件在边界结点处严格满足；使用附加配点，要求平衡方程在结点和配点处在最小二乘意义下得到满足，可以提高计算的精度，增强解的稳定性。然而，拉格朗日乘

子使求解方程的阶次增加，加大了求解工作量。

2.5.4 修正的最小二乘配点法

与拉格朗日乘子最小二乘配点法相同，修正的最小二乘配点法的求解方程也如式(2-26)所示；然而使用不同的方法进行求解。

1. 将结点总自由度数记为n，边界结点的总自由度数记为m。并且将自由度重新编号，编号顺序为：

   $a_1, a_2, \cdots a_{n-m}$　　为求解域内部的自由度，记为；$\mathbf{a}_\Omega$。

   $a_{n-m+1}, a_{n-m+2}, \cdots a_n$　　为域边界上的自由度，记为；$\mathbf{a}_\Gamma$。

2. 使用重新编号的自由度，式(2-26)中的后两式可以写成：

$$\mathbf{K}_{(m,n-m)}\mathbf{a}_\Omega + \mathbf{K}_{(m,m)}\mathbf{a}_\Gamma = 0 \tag{2-29}$$

3. 根据(2-29)，可以得到：

$$\mathbf{a}_\Gamma = -\mathbf{K}_{(m,m)}^{\ \ -1} \cdot \mathbf{K}_{(m,n-m)}\mathbf{a}_\Omega \tag{2-30}$$

4. 将(2-30)代入 (2-26)的第一式，则可得到仅包含$n-m$个自由度$\mathbf{a}_\Omega$的最小二乘式。
5. 求解所得的最小二乘方程，得到$\mathbf{a}_\Omega$；代入(2-30)再解得$\mathbf{a}_\Gamma$。
6. 恢复自由度编排顺序。

显然，修正的最小二乘配点法所对应的解与拉格朗日乘子方式是一致的，边界结点处严格满足边界条件；域内结点和附加配点处，平衡方程在最小二乘意义下满足。由于该方法的解与拉格朗日乘子方式一致，因此不再说明算例。

2.5.5 小结

结合迦辽金法和配点法的优点，本节创建了基于最小二乘配点方案的无网格计算方法；针对边界条件的处理要求，提出了拉格朗日乘子最小二乘法和修正的最小二乘法。通过在边界结点和附加配点处施加平衡方程的约束，可以有效地提高数值解的精度。具体的算例分析也表明了方法的有效性。

2.6 无网格配点法在处理边界条件时应注意的一些问题

对于边值偏微分方程，边界条件的提法严重影响解的正确性；配点格式的无网格方法，对边界条件的处理特性与伽辽金格式的方法也有所不同。通过计算中的对比和研究，总结以下几点：

1. 其它条件相同的情况下，仅有位移边界的问题的计算精度高于有力边界的问题。

计算的基本未知量为位移，所建立的无网格近似是直接针对位移场的；而在处理力边界时，需要边界处的应力信息，对应为位移场函数的导数。因此含有力边界时，计算精度会稍差一些。以 2.4 节中所描述的无穷大开孔方板为例，在结点分布相同($N=352$)、权函数相同(指数型)、基函数相同(线性基)的情况下进行对比计算：情况一，所有边界都为位移边界；情况二，左边界和下边界为力边界，其它边界为位移边界。图 2-20 给出了两种情况下计算所得到的 $x=0$ 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 的分布。对于情况一，误差 $L_u=0.31074\%$， $L_\sigma=5.3394\%$；对于情况二，误差 $L_u=1.4962\%$， $L_\sigma=11.271\%$。

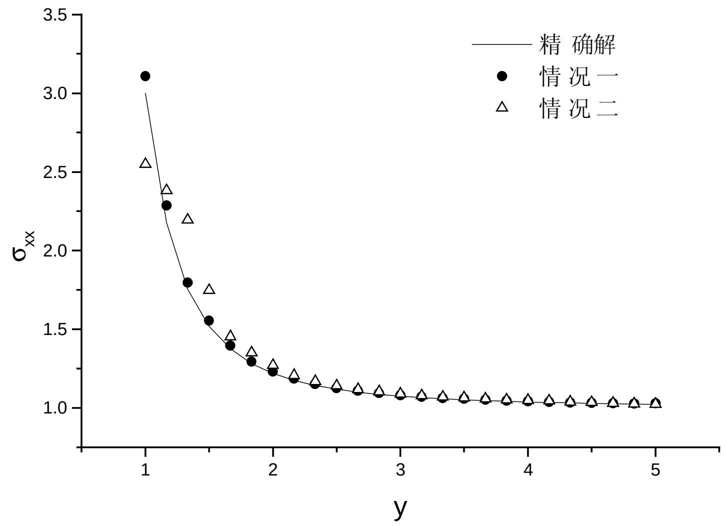


图 2-20 开孔板计算结果($x=0$ 处的应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 分布)

2. 力边界条件不对应集中结点力的情况。

对于无网格近似配点法，各结点之间无关联，因此难于处理集中结点载荷。力边界信息一般为载荷分布强度。

3. 对于自由边界，必须提相应的力边界条件。

对于采用伽辽金格式形成离散方程的计算方法，力边界条件通过变分可以自然引入，因此在自由边界处不需要提任何约束条件；但是，对于采用配点方案的计算方法，自由边界上的结点处也必须施加相应的约束条件，即切向力和法向力为零。

4. 对于力边界上的结点处，力边界条件必须完全。

对于采用配点方案的计算方法，对于力边界上的结点位置，力边界条件必须完全。例如，对于均布法向载荷的边界，在提边界条件时必须同时施加切向载荷为零的约束。

5. 对称面边界条件的提法：

对于对称面边界，不仅要施加法向位移为零的约束，还应施加切向力为零的约束。

第三章　无网格方法求解弹塑性问题

3.1 引言

在无网格方法的研究中，目前还很少涉及到材料非线性等领域，本章将讨论无网格方法在弹塑性静力问题中的应用。使用移动最小二乘原理对位移场函数及位移增量场函数进行近似，使用直接配点法进行空间离散，构造了求解弹塑性静力问题的增量型无网格计算格式。该方法基于求解域中的离散点建立近似，是一种无网格近似；使用配点法建立求解方程，可以彻底抛开网格，因此是一种完全的无网格方法。具有形式简单，计算费用低等优点，适合非线性问题的求解。最后，将对具体的算例加以分析，以说明该方案的有效性。

3.2 弹塑性静力问题的基本理论

由于弹塑性问题的非线性特性，通常采用增量形式的方程进行分析[2,3,4]。以下以二维问题为例加以说明，材料仅考虑服从 Mises 屈服条件的各向同性强化材料[100]。

1．问题的基本方程：

$$\begin{cases} \text{方\ 程：} & \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}))-\mathbf{f}(\mathbf{x})=0, & \mathbf{x}\in\Omega \\ \text{位移边界条件：} & \mathbf{u}(\mathbf{x})=\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\Gamma_u \\ \text{力边界条件：} & \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})=\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\Gamma_t \end{cases} \tag{3-1}$$

其中Ω为求解区域，Γ_u为位移边界，Γ_t为力边界；$\mathbf{u}(\mathbf{x})$为待求位移场函数，$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$为对应的应力场；$\mathbf{f}(\mathbf{x})$、$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$和$\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$分别为定义在域内、位移边界和力边界上的已知函数，$\mathbf{B}$为微分算子， $\mathbf{n}$为力边界Γ_t的单位外法向向量。在上面的方程中，第 1 式为平衡方程，第 2、3 式分别为位移边界条件和力边界条件。

2．MLS 近似

在求解域内及边界上布置N个离散结点$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\cdots\mathbf{x}_N$，将结点$\mathbf{x}_I$处的位移记为$\mathbf{u}_I$，位移增量记为$d\mathbf{u}_I$。对于二维问题：$\mathbf{u}_I=[u_I,v_I]^T$，$d\mathbf{u}_I=[du_I,dv_I]^T$。

根据 MLS 近似方案可以建立位移及其增量场函数的近似：

$$\begin{cases} u(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N} \phi_I(\mathbf{x}) \cdot u_I \\ v(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N} \phi_I(\mathbf{x}) \cdot v_I \end{cases} \tag{3-2a}$$

$$\begin{cases} du(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N} \phi_I(\mathbf{x}) \cdot du_I \\ dv(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N} \phi_I(\mathbf{x}) \cdot dv_I \end{cases} \tag{3-2b}$$

其中$\phi_I(\mathbf{x})$为 MLS 近似中结点I对应的插值函数，u_I、v_I、du_I及dv_I为待解未知量。

将结点增量所对应的未知量写成矢量形式，为：

$$d\mathbf{A} = [du_1\ dv_1\ du_2\ dv_2 \cdots\cdots du_N\ dv_N\ ]^T \tag{3-3}$$

引入矩阵$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$，如下所示：

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) & 0 & \phi_2(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & \phi_N(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \phi_1(\mathbf{x}) & 0 & \phi_2(\mathbf{x}) & \cdots & 0 & \phi_N(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{3-4}$$

则可得到位移增量场函数的矩阵表达形式：

$$d\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [du(\mathbf{x})\ \ dv(\mathbf{x})]^T = \boldsymbol{\phi} \cdot d\mathbf{A} \tag{3-5}$$

3．应变增量和应力增量

应变增量：对于小位移、小应变的情况，应变增量和位移增量之间为线性关系，即：

$$d\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum \frac{\partial \phi_I(\mathbf{x})}{\partial x} \cdot du_I \\ \sum \frac{\partial \phi_I(\mathbf{x})}{\partial y} \cdot dv_I \\ \sum \frac{\partial \phi_I(\mathbf{x})}{\partial x} \cdot dv_I + \sum \frac{\partial \phi_I(\mathbf{x})}{\partial y} \cdot du_I \end{Bmatrix} \tag{3-6a}$$

写成矩阵形式，为：

$$d\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \tag{3-6b}$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\phi}\quad,\qquad \mathbf{L}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix} \tag{3-6c}$$

应力增量：对于服从 Mises 屈服条件的各向同性强化材料，应力增量的计算方法为：

$$d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})=\begin{Bmatrix}d\sigma_x\\ d\sigma_y\\ d\tau_{xy}\end{Bmatrix}=\mathbf{D}\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \tag{3-7a}$$

$$\mathbf{D}=\begin{cases}\mathbf{D}^e & \text{对于弹性状态}\\ \mathbf{D}^{ep} & \text{对于弹塑性状态}\end{cases} \tag{3-7b}$$

其中 $\mathbf{D}^e$ 材料的弹性本构关系， $\mathbf{D}^{ep}$ 为弹塑性增量本构关系，其具体的定义将在后面给出。

4. 增量本构关系

对于服从 Mises 屈服条件的各向同性强化材料，在平面应力情况下的增量本构关系是：

$$\mathbf{D}^e=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix} \tag{3-8a}$$

$$\mathbf{D}^p=\frac{E}{B(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}(s_x+\nu s_y)^2 & (s_x+\nu s_y)\cdot(s_y+\nu s_x) & (1-\nu)\cdot(s_x+\nu s_y)\cdot\tau_{xy}\\ & (s_y+\nu s_x)^2 & (1-\nu)\cdot(s_y+\nu s_x)\cdot\tau_{xy}\\ \text{对称} & & (1-\nu)^2\cdot\tau_{xy}^2\end{bmatrix} \tag{3-8b}$$

$$\mathbf{D}^{ep}=\mathbf{D}^e-\mathbf{D}^p \tag{3-8c}$$

其中：

s_x， s_y 为应力偏量， E 为材料的弹性模量， ν 为泊松比；

$$B = {s_x}^2 + {s_y}^2 + 2\nu \cdot s_x \cdot s_y + 2(1-\nu)\cdot {\tau_{xy}}^2 + \frac{2(1-\nu)\cdot E^p \cdot {\sigma_s}^2}{9G} \tag{3-8d}$$

E^p 为材料的塑性模量，σ_s 为屈服应力。

5．初始屈服条件

初始屈服条件规定材料开始塑性变形的应力状态。对于初始各向同性材料，Mises 初始屈服条件为：

$$F^0(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} s_{ij} \cdot s_{ij} - \frac{{\sigma_{s0}}^2}{3} = 0 \tag{3-9}$$

其中 σ_{s0} 为初始屈服应力，s_{ij} 为应力偏量。

6．各向同性强化法则

强化法则定义材料进入塑性变形以后的后继屈服函数(也称为加载函数)，即屈服条件随塑性变形的变化规律。对于服从 Mises 屈服条件的各向同性强化材料，强化法则为：

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p) = \frac{1}{2} s_{ij} \cdot s_{ij} - \frac{{\sigma_s}^2(\bar{\varepsilon}^p)}{3} = 0 \tag{3-10a}$$

其中，σ_s 为当前状态的屈服应力（也称为后继屈服应力），$\bar{\varepsilon}^p$ 为等效塑性应变。σ_s 取决于 $\bar{\varepsilon}^p$，$\bar{\varepsilon}^p$ 相应的计算方法为：

$$\bar{\varepsilon}^p = \int d\bar{\varepsilon}^p = \int (\tfrac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p \cdot d\varepsilon_{ij}^p)^{1/2} \tag{3-10b}$$

7．流动法则

流动法则规定在塑性变形状态下，塑性应变增量和当前的应力状态及应力增量之间的关系。对于服从 Mises 屈服条件的各向同性强化材料，定义如下：

$$f = \frac{1}{2} s_{ij} \cdot s_{ij} \tag{3-11a}$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \tag{3-11b}$$

$$d\bar{\varepsilon}^p = (\tfrac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p \cdot d\varepsilon_{ij}^p)^{1/2} = \tfrac{2}{3} d\lambda \cdot \sigma_s \tag{3-11c}$$

$$d\lambda=\frac{\left(\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}\right)^{T}\cdot\mathbf{D}^{e}\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}}{\left(\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}\right)^{T}\cdot\mathbf{D}^{e}\cdot\left(\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}\right)+\frac{4}{9}\sigma_{s}{}^{2}\cdot E^{P}} \tag{3-11d}$$

其中$\bar{\varepsilon}^{p}$为等效塑性应变；σ_s为后继屈服应力；s_{ij}为应力偏量；E^{p}为材料的塑性模量，$\mathbf{D}^{e}$的定义如(3-8a)所示。

8．加载、卸载准则

该准则判别从某一塑性状态出发是继续塑性加载还是弹性卸载，从而确定在计算过程中应采用的增量本构关系。具体内容如下：

若$F=0$且$\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}>0$，则继续塑性加载；

若$F=0$且$\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}<0$，则由塑性状态按弹性卸载；

若$F=0$且$\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}=0$，则对于理想弹塑性材料为塑性加载，继续发生塑性流动；而对于强化材料为中性加载，保持塑性状态但不发生新的塑性流动。

3.3 弹塑性增量分析的直接配点格式

使用直接配点法进行空间离散，要求在求解域内的结点处满足平衡方程，在求解域边界上的结点处满足相应的边界条件，从而形成求解方程。与迦辽金法相比，配点法具有两个优点：一是避免了复杂的积分运算，计算简单；二是求解过程完全不需要网格的支持，是真正的无网格方法。

由于弹塑性问题中材料和结构的弹塑性行为与加载以及变形的历史有关，因此通常采用增量形式的方程进行分析；即将载荷分成若干个增量，对于每一载荷增量，将弹塑性方程线性化，从而使弹塑性分析这一非线性问题分解为一系列的线性问题。

假定在时刻 t 的载荷和边界条件为：${}^{t}\mathbf{f}(\mathbf{x})$在$\Omega$内、${}^{t}\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$在$\Gamma_u$上、${}^{t}\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$在$\Gamma_t$上；并且相应的状态已经求得：位移为${}^{t}\mathbf{u}$，应变为${}^{t}\boldsymbol{\varepsilon}$，应力为${}^{t}\boldsymbol{\sigma}$；当从时刻 t 过渡到时刻 t+1 时(对于静力分析且不考虑时间效应的情况，时刻 t 和 t+1 都仅

表示载荷水平），载荷和边界约束分别有一增量，$\Delta\mathbf{f}(\mathbf{x})$、$\Delta\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$和$\Delta\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$，则：

$$\begin{aligned} {}^{t+1}\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= {}^{t}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{f}(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}\in\Omega \\ {}^{t+1}\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) &= {}^{t}\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \Delta\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}\in\Gamma_u \\ {}^{t+1}\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) &= {}^{t}\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) + \Delta\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}\in\Gamma_\sigma \end{aligned} \tag{3-12}$$

设该载荷增量所引起的结点未知量的增量为：

$$\Delta\mathbf{A} = [\Delta u_1 \ \Delta v_1 \ \Delta u_2 \ \Delta v_2 \cdots\cdots \Delta u_N \ \Delta v_N \ ]^T \tag{3-13}$$

则根据(3-2)式可得位移增量，根据(3-6)式可得到应变的增量，根据(3-7)式可得到应力的增量，分别为：

$$\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [\Delta u(\mathbf{x}) \ \ \Delta v(\mathbf{x})]^T = \boldsymbol{\phi}\cdot\Delta\mathbf{A} \tag{3-14}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \ \cdot\Delta\mathbf{A} \tag{3-15}$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \int_t^{t+1} d\boldsymbol{\sigma} = \int_t^{t+1} \mathbf{D}\cdot d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3-16}$$

从而可以得到时刻 t+1 时，位移、应变和应力的表达式：

$${}^{t+1}\mathbf{u} = {}^{t}\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u} \tag{3-17a}$$

$${}^{t+1}\boldsymbol{\varepsilon} = {}^{t}\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3-17b}$$

$${}^{t+1}\boldsymbol{\sigma} = {}^{t}\boldsymbol{\sigma} + \Delta\boldsymbol{\sigma} \tag{3-17c}$$

对于域内部的结点$\mathbf{x}_I$，要求满足平衡方程：

$$\mathbf{B}({}^{t+1}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_I)) - {}^{t+1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_I) = 0 \tag{3-18}$$

对于位移边界上的结点$\mathbf{x}_I$，要求满足位移边界条件：

$${}^{t+1}\mathbf{u}(\mathbf{x}_I) - {}^{t+1}\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_I) = 0 \tag{3-19}$$

对于力边界上的结点$\mathbf{x}_I$，满足力边界条件：

$$\mathbf{n}\cdot({}^{t+1}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_I)) - {}^{t+1}\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_I) = 0 \tag{3-20}$$

式(3-18)、(3-19)和(3-20)即为从 t 时刻到 t+1 时刻状态增量的求解方程。

在计算各结点处的应力增量时，需要计算(3-16)所示的积分；由于各点的本构关系取决于该点的当前状态及加载过程，即该积分为非线性关系，因此在计算中需要进行迭代，以保证求解的正确性。具体过程将在以下加以说明。

3.4 弹塑性增量求解格式

根据以上讨论，弹塑性增量分析的过程如下：

1.首先计算结构内任何点都不出现塑性变形的最大载荷，此时结构内应力最大的点处于由弹性状态向塑性状态过渡的临界状态。

将最终所要施加的载荷$\mathbf{P}$（包括最终的域内载荷和边界条件）作用于结构，按照弹性本构关系，计算这时结构中各点位移$\mathbf{u}$、应变$\boldsymbol{\varepsilon}$和应力$\boldsymbol{\sigma}$的分布；从应力分布中找出等效应力最大的结点，得到其对应的等效应力值$\sigma_{\max}$，根据初始屈服应力σ_{s0}和$\sigma_{\max}$即可求出最大弹性载荷系数α：

$$\alpha = \sigma_{s0} / \sigma_{\max} \tag{3-21}$$

于是可以得到处于弹塑性临界状态时结构中位移、应变和应力的分布：

$$\mathbf{u}_0 = \alpha \cdot \mathbf{u} \tag{3-22a}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3-22b}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \alpha \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{3-22c}$$

2.将弹塑性加载的过程划分成M个增量步，每一步所对应的载荷增量为：

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (1.0-\alpha)\cdot\mathbf{f}/M & \mathbf{x}\in\Omega \\ \Delta\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = (1.0-\alpha)\cdot\bar{\mathbf{u}}/M & \mathbf{x}\in\Gamma_u \\ \Delta\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) = (1.0-\alpha)\cdot\tilde{\mathbf{t}}/M & \mathbf{x}\in\Gamma_t \end{cases} \tag{3-23}$$

3.对于每一个载荷增量步，采用变刚度迭代法求解。以下将以第$(t+1)$载荷增量步的计算为例加以说明。

3. 1. 将第t载荷增量步结束时的状态记为(t+1)增量步的初始迭代状态，结点未知量、位移、应变、应力和等效塑性增量分别为：

$${}^{t+1}\mathbf{A}^{(0)} = {}^{t}\mathbf{A} \tag{3-24a}$$

$${}^{t+1}\mathbf{u}^{(0)} = {}^{t}\mathbf{u} \tag{3-24b}$$

$${}^{t+1}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = {}^{t}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3-24c}$$

$${}^{t+1}\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = {}^{t}\boldsymbol{\sigma} \tag{3-24d}$$

$${}^{t+1}\bar{\varepsilon}^{p(0)} = {}^{t}\bar{\varepsilon}^{P} \tag{3-24e}$$

式中，左上标表示载荷的时间步，右上标表示该载荷步计算中迭代步编号。

3. 2. 对于该载荷增量步的第i迭代步（$i = 1,2,3\cdots$），设结点未知量的增量为${}^{t+1}\Delta\mathbf{A}^{(i)}$；

3.3. 按式(3-6)可以计算本迭代步的位移增量，进一步可得出此时的位移；

$$ {}^{t+1}\Delta\mathbf{u}^{(i)} = \boldsymbol{\phi} \cdot {}^{t+1}\Delta\mathbf{A}^{(i)} \tag{3-25a} $$

$$ {}^{t+1}\mathbf{u}^{(i)} = {}^{t+1}\mathbf{u}^{(i-1)} + {}^{t+1}\Delta\mathbf{u}^{(i)} \tag{3-25b} $$

3.4. 按式(3-7)可以计算本迭代步的应变增量，进一步可得出此时的应变；

$$ {}^{t+1}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \mathbf{B} \cdot {}^{t+1}\Delta\mathbf{A}^{(i)} \tag{3-26a} $$

$$ {}^{t+1}\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = {}^{t+1}\boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)} + {}^{t+1}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} \tag{3-26b} $$

3.5. 根据迭代步 $(i-1)$ 时的状态和式(3-8)，计算迭代步 $(i-1)$ 所对应的材料本构关系。

$$ {}^{t+1}\mathbf{D}^{(i-1)} = \begin{cases} \mathbf{D}^{e} & \text{对于弹性状态} \\ (\mathbf{D}^{e} - \mathbf{D}^{p}) & \text{对于弹塑性状态} \end{cases} \tag{3-27} $$

3.6. 根据显式 Euler 法，使用 $(i-1)$ 迭代步的增量型应力-应变弹塑性关系，将式(3-16)所表示的积分进行线性化处理，从而得到近似的应力增量和应力；

$$ {}^{t+1}\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i)} \approx {}^{t+1}\mathbf{D}^{(i-1)} \cdot {}^{t+1}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} \tag{3-28a} $$

$$ {}^{t+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = {}^{t+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} + {}^{t+1}\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i)} \tag{3-28b} $$

3.7. 根据式(3-18)-(3-20)形成本迭代步的增量求解方程；

$$ \begin{cases} \mathbf{B}({}^{t+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i)}(\mathbf{x}_I)) - {}^{t+1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_I) = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ {}^{t+1}\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}_I) - {}^{t+1}\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_I) = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma_u \\ \mathbf{n} \cdot ({}^{t+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i)}(\mathbf{x}_I)) - {}^{t+1}\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_I) = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma_t \end{cases} \tag{3-29} $$

3.8. 求解上述方程，得到本迭代步结点未知量的增量 ${}^{t+1}\Delta\mathbf{A}^{(i)}$，然后可由式(3-25)和(3-26)计算出本迭代步位移增量 ${}^{t+1}\Delta\mathbf{u}^{(i)}$ 和应变增量 ${}^{t+1}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$。

3.9. 由于式(3-28)计算所得的 ${}^{t+1}\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$ 基于线性近似，需要重新积分本构关系式(3-16)，计算本迭代步的应力增量。在此过程中等效塑性应变增量 ${}^{t+1}\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}(i)}$ 也将被计算：

$$ {}^{t+1}\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \int_{{}^{t+1}\varepsilon^{(i-1)}}^{{}^{t+1}\varepsilon^{(i)}} \mathbf{D} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3-30} $$

对于某一结点，具体的计算步骤为：

a. 将本迭代步中弹性变形的比例记为 m；

b. 假定变形完全为弹性，按弹性关系计算相应的应力增量预测值 $\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 以及应力预测值 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$：

$$ \Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^{e} \cdot {}^{t+1}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} \tag{3-31a} $$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = {}^{t+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} \quad + \quad \Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \tag{3-31b}$$

c. 计算屈服函数值 $F({}^{t+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)},\ {}^{t+1}\overline{\varepsilon}^{p(i-1)})$ 和 $F(\tilde{\boldsymbol{\sigma}},\ {}^{t+1}\overline{\varepsilon}^{p(i-1)})$，以确定弹性变形系数 m。区分以下三种情况：

若 $F(\tilde{\boldsymbol{\sigma}},\ {}^{t+1}\overline{\varepsilon}^{p(i-1)})<0$，则该结点为弹性加载或由塑性状态按弹性卸载，这时：

$$m = 1.0$$

若 $F(\tilde{\boldsymbol{\sigma}},\ {}^{t+1}\overline{\varepsilon}^{p(i-1)})>0$ 且 $F({}^{t+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)},\ {}^{t+1}\overline{\varepsilon}^{p(i-1)})=0$，则该结点为塑性继续加载。这时：

$$m = 0.0$$

若 $F(\tilde{\boldsymbol{\sigma}},\ {}^{t+1}\overline{\varepsilon}^{p(i-1)})>0$ 且 $F({}^{t+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)},\ {}^{t+1}\overline{\varepsilon}^{p(i-1)})<0$，则该结点为弹性向塑性过渡。假定在增量过程中应变成比例的变化，则系数 m 由如下方程确定：

$$F({}^{t+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} + m\cdot\tilde{\boldsymbol{\sigma}},\ {}^{t+1}\overline{\varepsilon}^{p(i-1)}) = 0 \tag{3-32}$$

对于采用 Mises 屈服准则的情况，m 是下列二次方程的解：

$$a_2\cdot m^2 + a_1\cdot m + a_0 = 0 \tag{3-33a}$$

其中：

$$a_2 = \tfrac{1}{2}\Delta\tilde{\mathbf{S}}^T\cdot\Delta\tilde{\mathbf{S}} \tag{3-33b}$$

$$a_1 = \left({}^{t+1}\mathbf{S}^{(i-1)}\right)^T\cdot\Delta\tilde{\mathbf{S}} \tag{3-33c}$$

$$a_0 = F({}^{t+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)},\ {}^{t+1}\overline{\varepsilon}^{p(i-1)}) \tag{3-33d}$$

$\Delta\tilde{\mathbf{S}}$ 为 $\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 对应的偏量，${}^{t+1}\mathbf{S}^{(i-1)}$ 为 ${}^{t+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}$ 对应的偏量；

由于 ${}^{t+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}$ 总在屈服曲面上或屈服曲面之内，所以 $a_0\le 0$；而 $a_2>0$，m 为非负值，因此：

$$m = (-a_1 + \sqrt{{a_1}^2 - 4a_0\cdot a_2})\big/2a_2 \tag{3-34}$$

d. 根据计算所得的系数 m，可以得到本迭代步中弹性应变增量部分 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e$ 为：

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e = m \cdot {}^{t+1}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} \tag{3-35}$$

e. 计算本迭代步中塑性应变增量部分 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 为：

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = (1.0 - m) \cdot {}^{t+1}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} \tag{3-36}$$

f. 计算本迭代步中弹性应力增量部分 $\Delta\boldsymbol{\sigma}^e$：

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^e = m\cdot\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \tag{3-37}$$

g. 计算本迭代步中塑性应力增量部分 $\Delta\boldsymbol{\sigma}^{p}$ ：

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^{p}=\int_{{}^{t+1}\varepsilon^{(i-1)}+\Delta\varepsilon^{e}}^{{}^{t+1}\varepsilon^{(i)}}\mathbf{D}\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}\approx\mathbf{D}({}^{t+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}+\Delta\boldsymbol{\sigma}^{e},\ {}^{t+1}\overline{\varepsilon}^{P(i-1)})\cdot\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p} \tag{3-38}$$

h. 计算本迭代步中等效塑性应变的增量 $\Delta\overline{\varepsilon}^{P}$ ：

$$\Delta\overline{\varepsilon}^{P}=\tfrac{2}{3}\cdot\Delta\lambda\cdot\sigma_{s} \tag{3-39a}$$

$$\Delta\lambda=\frac{\left(\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}\right)^{T}\cdot\mathbf{D}^{e}\cdot\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p}}{\left(\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}\right)^{T}\cdot\mathbf{D}^{e}\cdot\left(\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}\right)+\tfrac{4}{9}{\sigma_{s}}^{2}\cdot E^{P}} \tag{3-39b}$$

i. 计算本迭代步结束时的应力 ${}^{t+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$ 及等效塑性应变 ${}^{t+1}\overline{\varepsilon}^{P(i)}$ ：

$${}^{t+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i)}={}^{t+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}+\Delta\boldsymbol{\sigma}^{e}+\Delta\boldsymbol{\sigma}^{p} \tag{3-40a}$$

$${}^{t+1}\overline{\varepsilon}^{P(i)}={}^{t+1}\overline{\varepsilon}^{P(i-1)}+\Delta\overline{\varepsilon}^{P} \tag{3-40b}$$

3. 10. 根据预定义的收敛准则检验本步所得的解是否满足收敛要求。如已满足，则进行下一个载荷增量步的计算；否则，进行本载荷步的下一次迭代计算。收敛准则为：

$$\left\|{}^{t+1}\Delta\mathbf{A}^{i}\right\|\le er\cdot\left\|{}^{t+1}\Delta\mathbf{A}^{i-1}\right\| \tag{3-41}$$

其中 $er>0$ ，为规定的容许误差系数。

4. 完成所有的载荷增量步计算，得到问题的最终解。

3.5 算例分析

使用本文所构造的弹塑性静力问题的无网格计算方法，笔者进行了一些算例分析，表明了上述方法的有效性。

算例 1 ：

均匀长方板两端固定，在中间三分之二处受均布载荷 P, 如图 3-1 所示。板长度 $L=0.15m$ ，宽度 $a=0.01m$ 。板的材料是各向同性线性强化材料，拉压时的应力应变关系如图 3-2 所示，其中弹性模量 $E=10^{10}\ N/m^{2}$ ，泊松比 $\nu=0.2$ ，初始屈服应力 $\sigma_{s0}=2.0\times10^{8}\ N/m^{2}$ ，强化阶段的切线模量 $E^{t}=10^{9}\ N/m^{2}$ 。假定位移

和应变很小，并且加载过程缓慢。

将加载截面处的位移记为u_p，加载面左侧的应力记为σ_A，加载面右侧的应力记为σ_B。该问题对应的解析解很明显：

当$u_p < 0.001m$时，整个板为弹性加载状态，且：

$$\sigma_A = \frac{u_P}{0.1}E, \qquad \sigma_B = \frac{u_P}{0.05}E$$

当$0.001m < u_p < 0.002m$时，加载截面左边为弹性加载状态，右边为塑性加载状态：

$$\sigma_A = \frac{u_P}{0.1}E, \qquad \sigma_B = \left(\frac{u_P}{0.05} - 0.02\right)E_T + \sigma_{s0}$$

当$u_p > 0.002m$时，整个板为塑性加载状态：

$$\sigma_A = \left(\frac{u_P}{0.1} - 0.02\right)E_T + \sigma_{s0}, \qquad \sigma_B = \left(\frac{u_P}{0.05} - 0.02\right)E_T + \sigma_{s0}$$

使用本文所述方法，数值计算结果如图 3-3 所示，图中给出了加载截面左右两边的应力σ_A和σ_B，以及所加载荷 P 与加载截面处位移u_p的关系曲线。容易看出，计算结果与解析解吻合的很好。

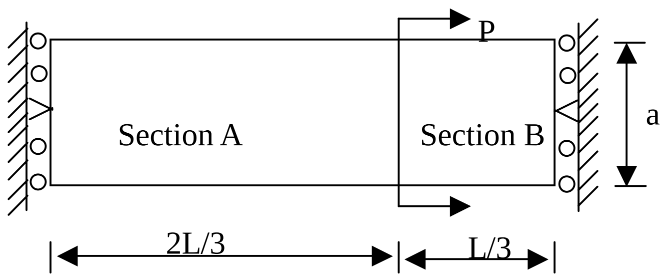


图 3-1 均匀长方板计算模型

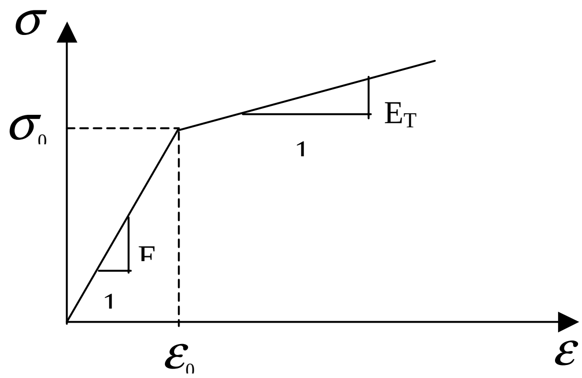


图 3-2 材料应力-应变关系

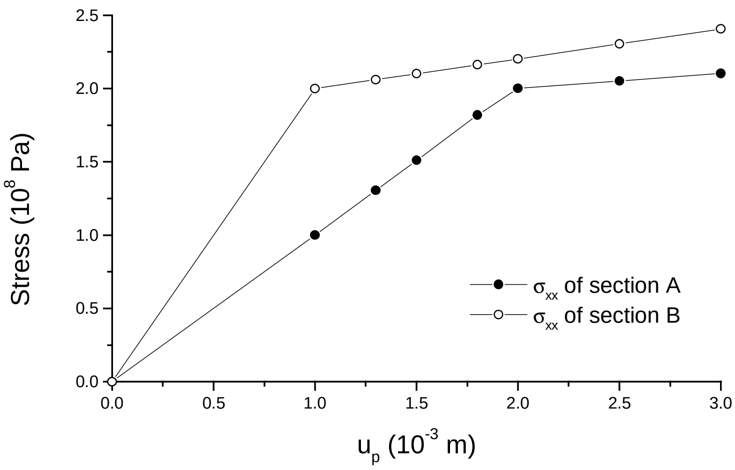


图 3-3 计算结果

算例 2 ：

如图 3-4 所示，中部具有对称缺口的单位厚度板两端受均匀拉力 P。板的长度 $L=0.04m$ ，宽度 $d=0.02m$ ，缺口宽度 $a=0.01m$ ，缺口深度 $h=0.0025m$ ；板的材料是各向同性理想塑性材料，弹性模量 $E=10^8\ N/m^2$ ，泊松比 $\nu=0.2$ ，初始屈服应力 $\sigma_{s0}=3.0\times10^7\ N/m^2$ 。假定位移和应变都很小，并且加载过程缓慢。对于该问题，在缺口处具有应力集中，该部分将首先出现塑性区；对应的极限分布载荷的解析解为 $(3.0\times10^7)\times1.5/2.0=2.25\times10^7\ N/m^2$ 。

使用本文所述方法进行计算，由于对称性，仅取右上四分之一部分。结点布

置可参看图 3-4。结果表明：缺口尖端处最先进入塑性，塑性区域随载荷的增大向周围扩展，计算得到极限载荷为 $2.316\times10^{7}\ N/m^{2}$ 。

为了检验计算的准确性，同时使用有限元软件(ADINA)对该问题进行了分析，计算所采用的网格如图 3-5 所示。当分布载荷 $P=1.876\times10^{7}\ N/m^{2}$ 时，有限元方法和本文方法计算所得的 $\mathbf{x}=0.0$ 位置的应力 σ_{xx} 和 Mises 应力分布分别如图 3-6 和 3-7 所示。

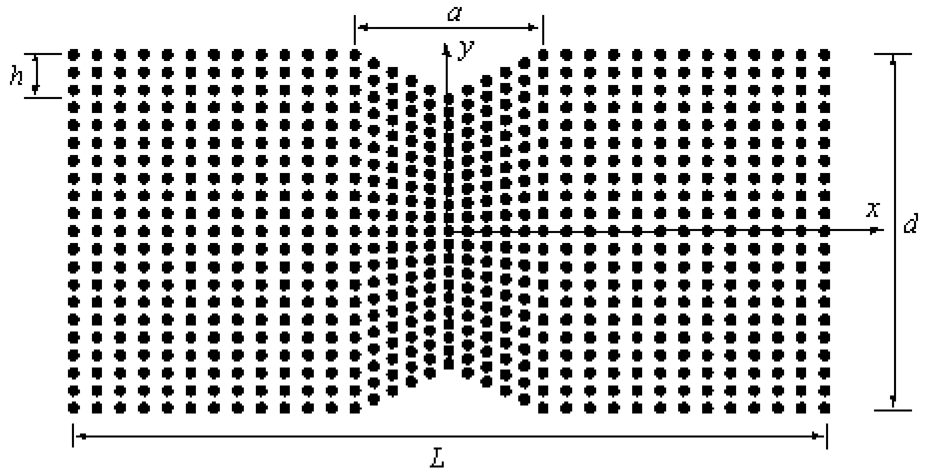


图 3-4 中部具有缺口的对称板模型

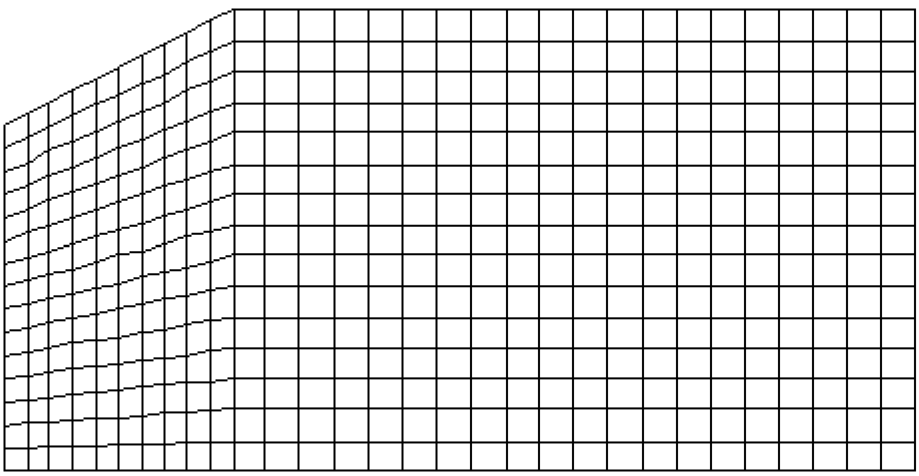


图 3-5 有限元(ADINA)计算网格

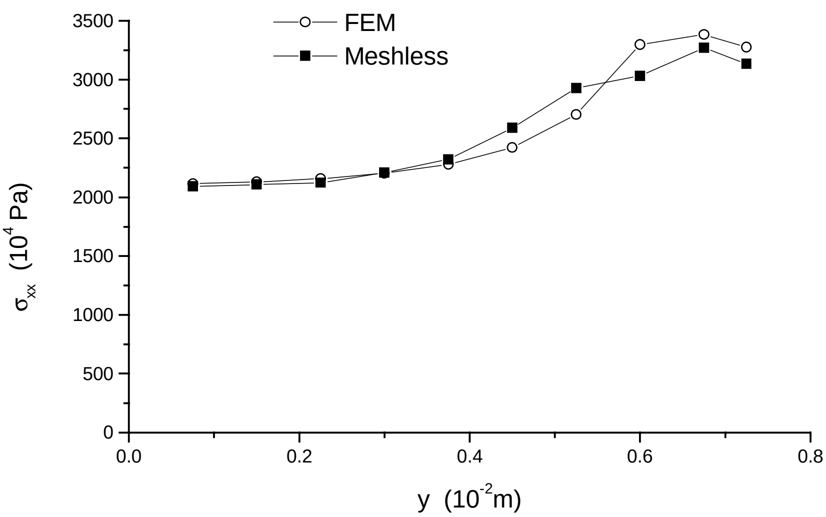


图 3-6 $\mathbf{x}=0.0$ 处的应力 σ_{xx}

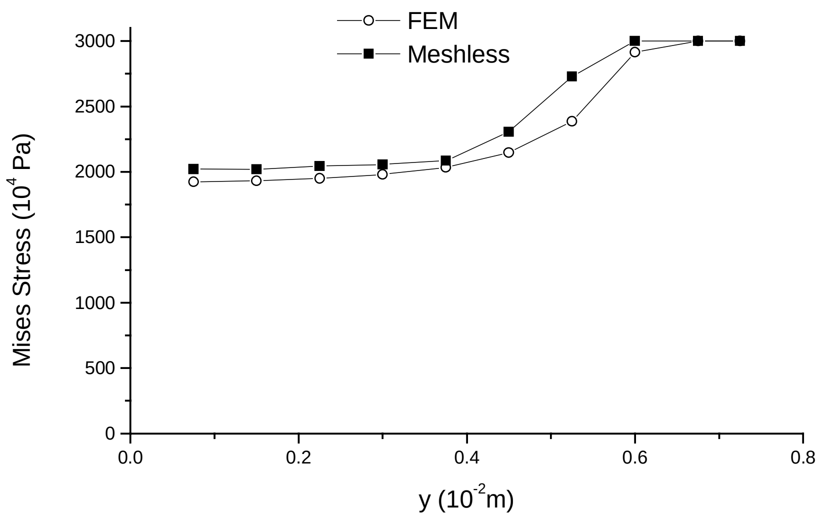


图 3-7 $\mathbf{x}=0.0$ 处的 Mises 应力

算例 3 ：

如图 3-8 所示，中心开圆孔的方板两边承受水平均布拉力。板的长度为 $0.036m$，宽度为 $0.02m$，中心孔的直径为 $0.01m$；板的材料是各向同性线性强化材料，弹性模量 $E=7.0\times10^{10}\ N/m^2$，泊松比 $\nu=0.2$，初始屈服应力

$\sigma_{s0} = 2.43\times10^{8}\ N/m^{2}$，强化阶段的切线模量 $E^{t} = 2.25\times10^{9}\ N/m^{2}$。计算结果表明，中心孔的上下顶点处最先进入塑性；随载荷的增加，塑性区域向周围扩展，图 3-8 中给出了分布载荷 $P = 1.21\times10^{8}\ N/m^{2}$ 时的塑性区域分布；图 3-9 给出了此时 $\mathbf{x} = 0.0$ 处应力 σ_{xx} 以及等效应力的分布曲线。

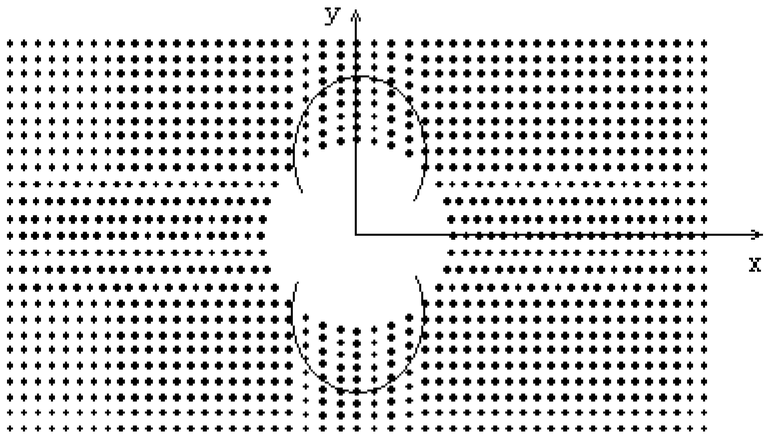


图 3-8 开孔板模型及塑性区域分布

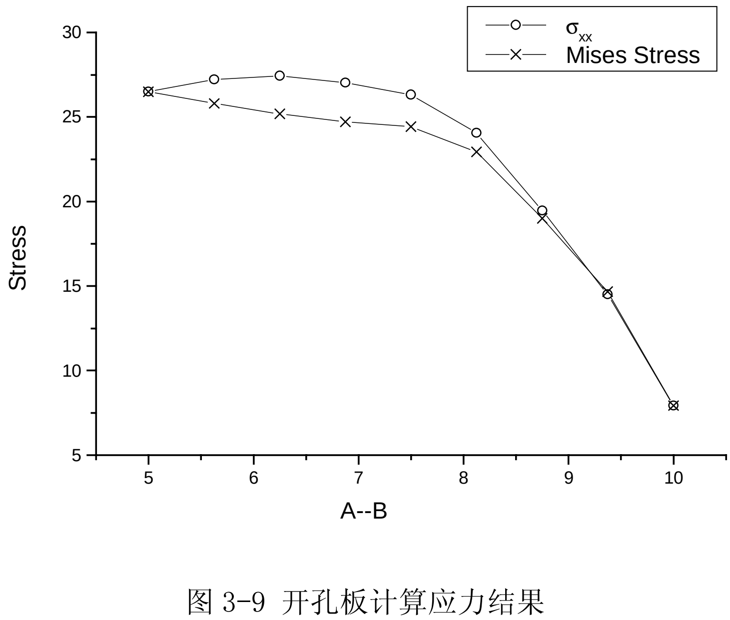


图 3-9 开孔板计算应力结果

3.6 小结

本文在 MLS 方法所形成的场函数的近似表达式的基础上，使用配点法构造求解弹塑性静力问题的增量模式，形成了非线性材料计算的无网格方法，具有高效、简单的特点；通过算例分析，可以看出该方法的有效性。与基于网格的方法相比，无网格方法在求解大变形问题时具有相当的优势，因此对于解决弹塑性大变形问题具有很好的前景。

第四章 紧支距离基函数配点法

4.1 引言

距离基函数(Radial Basis Function，简记为 RBF)是一种特殊的函数，它以空间距离为基本变量，具有形式简单、各向同性等优点，因此非常适合在数值计算中使用；而具有紧支特性的距离基函数，在计算中求解矩阵呈稀疏、带状分布，因此更有利于大型问题的求解。以距离基函数为基础的近似方法，数学界的学者们已经做了大量的工作[101-111]，然而在工程应用中却很少涉及。因此，将距离基函数应用于工程实际计算中具有重要意义。事实上，距离基函数配点法也是一种完全的无网格计算方法。

关于距离基函数配点法在插值近似方面的应用，目前已经取得了很大进展。Frank[101]通过对 29 种插值基函数的比较，选出了精度最高的两种距离基函数，它们是 Hardy 提出的 MQ[102](Multiquadric)函数和 Duchon 提出的 TPS(Thin-plate spline)函数；最近，Kansa[104,105]将距离基函数引入偏微分方程的求解，构造了求解偏微分方程的距离基函数配点法；Wu[81]及 Franke[107]等人还证明了距离基函数用于插值和求解偏微分方程时的收敛性，并给出了相应的误差分析。

然而，目前常用的距离基函数一般不具备紧支域特点(如 MQ 函数，TPS 函数等)，计算中所形成的系数矩阵为满阵，不利于数值计算。因此许多学者对紧支距离基函数进行了研究[108-110]，Wu[108]等人提出了紧支正定距离基函数的概念，并构造了相应的函数表达式； Wendland[109]及 Buhmann[110]也构造了各自的紧支距离基函数。

本文首先详细介绍距离基函数配点法，构造了散点插值的计算方案，并对各种紧支距离基函数的求解精度进行了对比；其次，将紧支距离基函数用于力学问题的求解，基于配点法构造了求解力学基本方程的方案。在求解力学方程时发现，使用紧支距离基函数求解的精度要比全域距离基函数差，尤其是在求解域的边界附近；针对这一弱点，本文提出了 Hermit 型的近似配点方案，该方案可以有效地提高使用紧支距离基函数求解边值偏微分方程的精度。

4.2 紧支距离基函数直接插值

对于一组离散数据$(\mathbf{x}_i, f_i)\in R^{d+1}$，其中$i=1,2,\cdots,N$， d表示$\mathbf{x}$所在空间的维数。插值近似的目的是构造函数$g(\mathbf{x}):R^d \to R$，要求满足条件$g(\mathbf{x}_i)=f_i$。

使用距离基函数$\phi(r)$构造插值，相应的形式为：

$$g(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{N} c_i \cdot \phi(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\|) \tag{4-1}$$

其中$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\|$表示数据点$\mathbf{x}$与$\mathbf{x}_i$之间的距离范数， $\phi(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\|)$表示中心位于$\mathbf{x}_i$的距离基函数， $\mathbf{x}_i$被称为插值结点。

使用距离基函数进行插值计算很简单，只需根据如下方程求解系数c_i：

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \cdot \phi(\|\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_k\|)=f_j \quad (j=1,2,\cdots,N) \tag{4-2}$$

将方程(4-2)对应的系数矩阵记为$\mathbf{A}_{N\times N}$，其分量形式为：

$$\mathbf{A}_{jk}=\phi(\|\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_k\|) \quad (j,k=1,2,\cdots,N) \tag{4-3}$$

显然，方程(4-2)存在唯一解的条件是矩阵$\mathbf{A}$非奇异。如果所使用的距离基函数$\phi(r)$为全域支撑的，则矩阵$\mathbf{A}$是满阵，并且通常条件数很差，不利于数值计算；如果使用紧支距离基函数，则矩阵$\mathbf{A}$将具有稀疏、带状分布的优点。在文献[108-110]中，作者构造了一些紧支距离基函数，它们能够保证矩阵$\mathbf{A}$具有正定、带状分布的特点，被称为紧支正定距离基函数。在本文中，将讨论的如下一些紧支距离基函数：

CSRBF1: $$(1-r)_+^4(4+16r+12r^2+3r^3) \tag{4-4a}$$

CSRBF2: $$(1-r)_+^6(6+36r+82r^2+72r^3+30r^4+5r^5) \tag{4-4b}$$

CSRBF3: $$\begin{cases} \frac{1}{3}+r^2-\frac{4}{3}r^3+2r^2\ln r & (0\le r\le 1) \\ 0 & (r>1) \end{cases} \tag{4-4c}$$

CSRBF4: $$\begin{cases} \frac{1}{15}+\frac{19}{6}r^2-\frac{16}{3}r^3+3r^4-\frac{16}{15}r^5+\frac{1}{6}r^6+2r^2\ln r & (0\le r\le 1) \\ 0 & (r>1) \end{cases} \tag{4-4d}$$

CSRBF5: $$(1-r)_+^6(3+18r+35r^2) \tag{4-4e}$$

CSRBF6: $$(1-r)_+^8(1+8r+25r^2+32r^3) \tag{4-4f}$$

其中，CSRBF1 和 CSRBF2 是 Wu 所构造的[108]，CSRBF3 和 CSRBF4 是 Buhmann

所构造的[110]，CSRBF5 和 CSRBF6 是 Wendland 所构造的[109]。
式中 $r=\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|/R$， R 为紧支域半径；$(1-r)_+$ 的定义为：

$$(1-r)_+=\begin{cases}(1-r) & 0\le r\le 1\\ 0 & r>1\end{cases} \tag{4-5}$$

在以上的说明中，对 r 的定义是假定紧支域的形状为圆形的情况（针对二维问题而言，以下同）。关于 r 更一般的定义为：

$$r=\sqrt{\left(\frac{x}{R_x}\right)^2+\left(\frac{y}{R_y}\right)^2} \tag{4-6}$$

如果 $R_x\ne R_y$，则对应的紧支域为椭圆；在本文中，一般情况下取 $R_x=R_y=R$。另外，在使用紧支距离基函数时，各结点所对应基函数的紧支域半径可以是不同的。对于结点 $\mathbf{x}_k$ 而言，基函数为 $\phi(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_k\|)$，其紧支域中心为 $\mathbf{x}_k$，半径为 R_k。

为了对计算的精度进行比较，本文还引入了几个常用的全支撑域距离基函数，一般认为在插值近似中它们具有最好的效果。具体定义为：

Multiquadrics(MQ): $(c^2+r^2)^{1/2}, c>0$ (4-7a)

Reciprocal multiquadrics(RMQ): $(c^2+r^2)^{-1/2}, c>0$ (4-7b)

Gaussian: $\exp(-cr^2), c>0$ (4-7c)

Thin-plate splines (TPS): $r^{2\beta}\log r, \beta\in N$ (4-7d)

为了研究不同距离基函数插值近似的效果，以下对给定函数 $f(x,y)$ 进行插值分析：

$$f(x,y)=\sin(x)\cdot\cos(y),\quad x\in[0.5,3.0],\ y\in[0.5,3.0]$$

插值所得的近似函数 $g(x,y)$ 形式如式(4-1)所示。为了比较计算的误差，根据离散的插值结点，定义一阶导数的误差 E_2 和二阶导数的误差 D_2，

$$E_2=\frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{N}(\mathbf{dg}(\mathbf{x}_k)-\mathbf{df}(\mathbf{x}_k))^T\cdot(\mathbf{dg}(\mathbf{x}_k)-\mathbf{df}(\mathbf{x}_k))}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N}\mathbf{df}(\mathbf{x}_k)^T\cdot\mathbf{df}(\mathbf{x}_k)}}\times 100\% \tag{4-8a}$$

$$D_2 = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{N} (\mathbf{d}^2\mathbf{g}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{d}^2\mathbf{f}(\mathbf{x}_k))^T \cdot (\mathbf{d}^2\mathbf{g}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{d}^2\mathbf{f}(\mathbf{x}_k))}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N} \mathbf{d}^2\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)^T \cdot \mathbf{d}^2\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)}} \times 100\% \tag{4-8b}$$

其中；

$\mathbf{df} = [f_{,x}, f_{,y}]^T$， $\mathbf{dg} = [g_{,x}, g_{,y}]^T$， $\mathbf{d}^2\mathbf{f} = [f_{,xx}, f_{,yy}, f_{,xy}]^T$， $\mathbf{d}^2\mathbf{g} = [g_{,xx}, g_{,yy}, g_{,xy}]^T$

计算中采用10×10的均布结点。

表 4-1 给出了各种紧支距离基函数在不同的紧支域半径 R 时所对应的误差。由于 CSRBF3 和 CSRBF4 仅为 C^1 连续，因此在表中未包含它们对应的二阶导数误差。通过该表可以看出，对于紧支距离基函数插值，当紧支域较小时，计算精度较差；随着紧支域的增大，精度不断提高。对比各紧支函数，CSRBF2 和 CSRBF6 计算精度相对较高。

表 4-2 给出了各种全域距离基函数在不同的参数时所对应的误差。容易看出，使用全域距离基函数进行插值的精度很高，要远远超过紧支距离基函数；即使紧支距离基函数的紧支域增大到能够覆盖所有的结点，其插值精度也还是低于全域距离基函数。但是，全域距离基函数中可变参数的取值对计算精度有很大的影响，某种参数取值可能使计算精度极高，也可能导致效果较差。

	R	CSRBF1	CSRBF2	CSRBF3	CSRBF4	CSRBF5	CSRBF6
E_2	1.0	27.56	33.369	38.458	66.835	44.765	56.323
	2.0	6.227	4.9013	13.733	33.515	7.912	7.916
	3.0	3.362	1.4558	8.343	19.548	2.651	2.009
	4.0	2.206	0.794	7.087	13.628	1.343	0.762
	10.0	2.509	0.416	7.121	7.855	0.4738	0.1244
D_2	1.0	301.68	328.821	-	-	427.68	513.416
	2.0	71.133	54.069	-	-	86.293	90.204
	3.0	38.298	17.261	-	-	30.548	24.867
	4.0	25.234	9.532	-	-	15.812	9.8157
	10.0	28.987	5.087	-	-	5.7288	1.6767

表 4-1 紧支距离基函数插值的误差（%）

	MQ			RMQ		
	C=1.0	C=3.0	C=6.0	C=1.0	C=3.0	C=6.0
E_2	0.7228	0.0061	0.0003	1.9251	0.011	0.0007
D_2	9.782	0.1059	0.0045	24.308	0.187	0.0101

	Gaussian			TPS
	C=0.2	C=0.5	C=1.0	β =4
E_2	0.0103	0.0038	0.0911	0.1974
D_2	0.169	0.070	1.531	3.1588

表 4-2 全域距离基函数插值的误差（%）

从上述紧支距离基函数对应的计算中挑选精度较好的 CSRBF2，对其计算结果进一步分析。图 4-1 和 4-2 给出了 $R=4.0$ 时计算结果的误差分布情况。其中图 4-1 所示为 $g_{,x}$ 的相对误差分布，图 4-2 所示为 $g_{,xx}$ 的相对误差分布。

为加以比较，图 4-3 和 4-4 给出了使用 MQ 距离基函数，在参数 $c=6.0$ 时计算结果的误差分布情况。其中图 4-3 所示为 $g_{,x}$ 的相对误差分布，图 4-4 所示为 $g_{,xx}$ 的相对误差分布。

可以看出，使用距离基函数进行插值计算时，在求解域内部具有很高的精度，而在边界处导数的结果较差；对于紧支距离基函数，效果更差。可以预见，当用于求解边值偏微分方程时，紧支距离基函数不会具有较高精度。

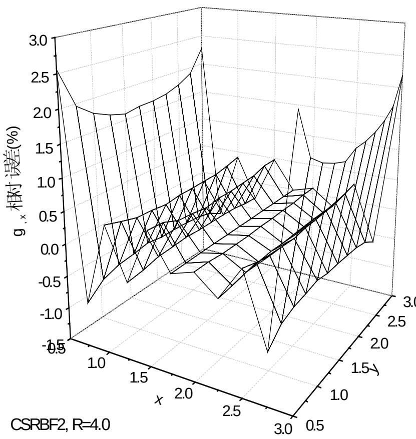


图 4-1 CSRBF2,R=4.0 时 $g_{,x}$ 的误差(%)

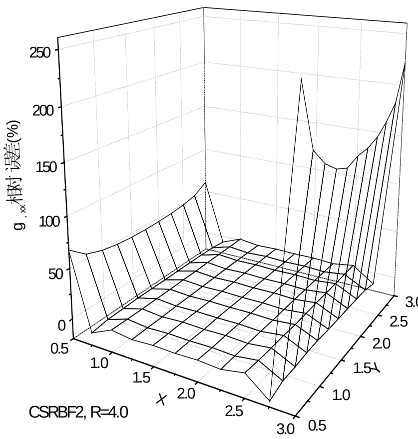


图 4-2 CSRBF2,R=4.0 时 $g_{,xx}$ 的误差(%)

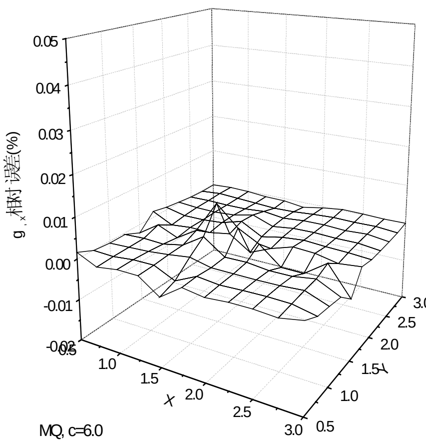


图 4-3 MQ,c=6.0 时 $g_{,x}$ 的误差 (%)

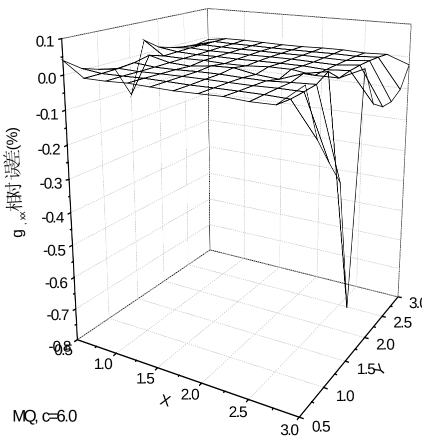


图 4-4 MQ,c=6.0 时 $g_{,xx}$ 的误差 (%)

4.3 距离基函数直接配点法求解弹性静力问题

4.3.1 距离基函数直接配点方案

弹性静力问题所对应的偏微分定解方程为(以位移为基本未知量)：

$$\begin{cases}\mathbf{B}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))=\mathbf{f}(\mathbf{x}) & \mathbf{x}\in\Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x})=\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) & \mathbf{x}\in S_u \\ \mathbf{T}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))=\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) & \mathbf{x}\in S_t\end{cases} \tag{4-9}$$

其中第 1 式为平衡方程，第 2、3 式分别为位移边界条件和力边界条件。Ω 为求解区域，S_u 为位移边界，S_t 为力边界；$\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 为待求位移场函数，$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{T}$ 为微分算子，$\mathbf{f}(\mathbf{x})$、$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ 和 $\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$ 分别为定义在域内、位移边界上和力边界上的已知函数。

具体到平面问题：

$$\mathbf{x}=[x,y]^T,\quad \mathbf{u}=[u,v]^T \tag{4-10a}$$

$$\mathbf{B}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \\ \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\end{bmatrix} \tag{4-10b}$$

$$\mathbf{T}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} l\frac{\partial}{\partial x}+m\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial y} & l\cdot\nu\frac{\partial}{\partial y}+m\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial x} \\ m\cdot\nu\frac{\partial}{\partial x}+l\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial y} & m\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix} \tag{4-10c}$$

其中，E 为材料的弹性模量，ν 为泊松比，l 和 m 为力边界单位外法向量的分量。

在求解域内及边界上布置 N 个离散结点 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\cdots\mathbf{x}_N$，使用距离基函数 $\phi(r)$ 对位移场函数进行直接近似：

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x})=\sum_{I=1}^{N}\phi(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_I\|)\cdot\mathbf{u}_I \tag{4-11}$$

其中 $\phi(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_I\|)$ 为结点 $\mathbf{x}_I$ 对应的距离基函数，$\mathbf{u}_I$ 是结点 $\mathbf{x}_I$ 处对应的未知量。显然，一般情况下 $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}_I)\neq\mathbf{u}_I$ 。

在直接配点法中，对于求解域内部的结点，要求在该位置满足平衡方程；对于边界上的结点，要求在该位置满足相应的边界条件，从而形成求解方程。用 $\mathbf{x}^*$ 表示求解域内部的结点，$\tilde{\mathbf{x}}^*$ 表示力边界上的结点，$\bar{\mathbf{x}}^*$ 表示位移边界上的结点，则方程(4-9)相应的直接配点格式为：

$$
\begin{cases}
\mathbf{B}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x}^*)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) & \forall \mathbf{x}^* \in \Omega \\
\mathbf{u}^h(\overline{\mathbf{x}}^*) = \overline{\mathbf{u}}(\overline{\mathbf{x}}^*) & \forall \overline{\mathbf{x}}^* \in S_u \\
\mathbf{T}(\mathbf{u}^h(\tilde{\mathbf{x}}^*)) = \tilde{\mathbf{t}}(\tilde{\mathbf{x}}^*) & \forall \tilde{\mathbf{x}}^* \in S_t
\end{cases}
\tag{4-12}
$$

4.3.2 算例分析

使用本节所构造的距离基函数直接配点法，进行了算例分析。为了进行误差比较和分析，对于具有精确解的问题，仍采用两种误差描述：结点位移相对误差 L_u 和结点应力 L_σ 相对误差。具体定义可参看本文以前章节。

开圆孔方板：

中心开半径为 a 的圆孔的无限大板，在无穷远处承受水平均匀拉力 σ_0，具体的描述可参看本文第二章中的相关说明。计算模型的选取与第二章中相同，并且边界条件的提法也采用两种方式：方式一，所有的边界点施加位移约束；方式二，具有对称性的左边界和下边界使用位移边界条件，其它边界使用力边界条件。

表 4-3 给出了方式一情况下，采用 496 个结点时，不同距离基函数对应的数值计算误差；表 4-4 则给出了方式二情况下，采用 496 个结点时，不同距离基函数对应的数值计算误差。

	$R=1.5$		$R=3.0$		$R=4.5$		$R=6.0$		$R=50$	
	L_u	L_σ	L_u	L_σ	L_u	L_σ	L_u	L_σ	L_u	L_σ
CSRBF2	1.58	51.0	0.41	10.5	0.29	7.40	0.26	6.91	0.25	6.80
CSRBF6	2.80	89.4	0.57	13.8	0.25	6.46	0.21	5.68	0.24	5.64

	MQ					TPS
	C=1.0	C=1.45	C=1.55	C=2.5	C=5.0	β=4
L_u	6.21	3.38	0.68	2.67	87.2	0.171
L_σ	251.	99.3	19.8	54.7	199.	5.20

表 4-3 直接配点法，边界条件采用方式一时，相对误差（%）

	$R=1.5$		$R=3.0$		$R=4.5$		$R=6.0$		$R=50$	
	L_u	L_σ	L_u	L_σ	L_u	L_σ	L_u	L_σ	L_u	L_σ
CSRBF2	444.	943.	94.9	110.	24.0	24.1	6.53	10.8	1.91	8.98
CSRBF6	316.	946.	80.3	110.	41.1	40.9	8.82	10.7	1.73	6.99

	MQ					TPS
	C=1.0	C=1.45	C=1.55	C=2.5	C=5.0	β=4
L_u	129.	4.54	33.5	112.	91.5	9.80
L_σ	512.	5.47	44.3	134.	156.	12.3

4-4 直接配点法，边界条件采用方式二时，相对误差（%）

通过以上两表可以看出，当边界条件全为位移边界时，计算精度较好；当边界条件包含具有导数属性的力边界时，距离基函数计算精度很差。另外，对于全域距离基函数 MQ，参数的取值对数值解的影响很大，很难预先选取效果较好的参数值。

图 4-5 和 4-6 所示分别是边界条件为方式一和方式二情况下，在 $x=0$ 处应力 σ_{xx} 的计算结果。其中包括如下几条曲线：使用紧支距离基函数 CSRBF6，在影响域半径分别为 $R=3.0$ 、 $R=4.5$ 时的应力分布曲线；使用全域距离基函数 TPS(β =4)时的应力分布曲线；解析解所对应的应力分布曲线；相同节点数的有限元解(使用 ALGOR 计算软件)所对应的应力分布曲线。可以看出，对于全位移边界，解的精度很高。但对于紧支距离基函数，需要使用较大的影响域半径，即各结点影响域中所覆盖的结点很多；而对于存在力边界条件的情况，解的精度很差。

图 4-7 所示是边界条件为方式一的情况下，采用距离基函数直接配点法计算时的收敛曲线。其中，h 表示结点之间的最小距离。可以看出，收敛速度是很快的。

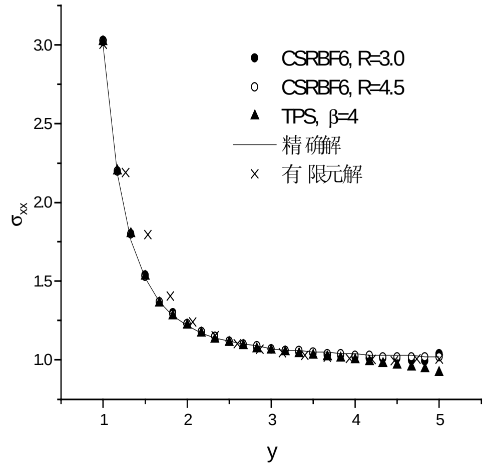


图 4-5 边界条件为方式一时的$\boldsymbol{\sigma}_{xx}$

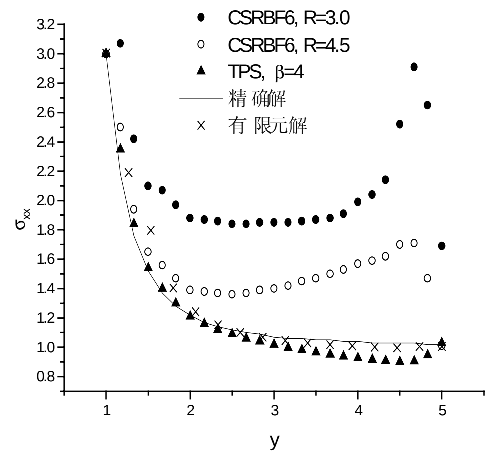


图 4-6 边界条件为方式二时的$\boldsymbol{\sigma}_{xx}$

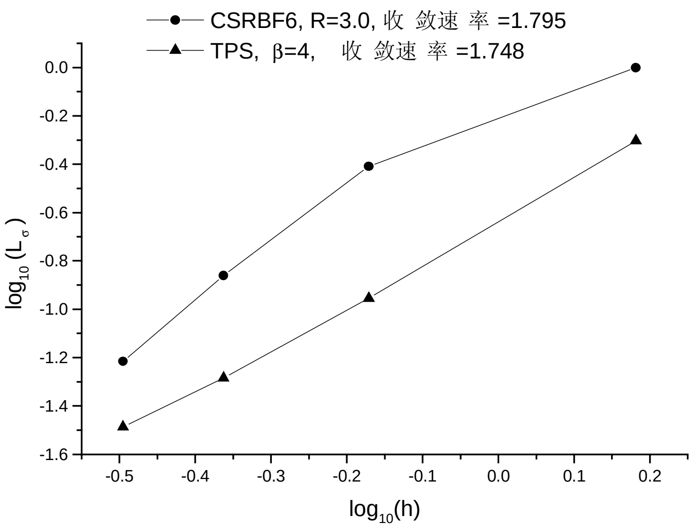


图 4-7 边界条件为方式一时的收敛曲线

4.3.3 小结

通过以上的分析可以看出：

1.对于全位移边界的情况，使用距离基函数直接配点法的计算精度很高；而当边界条件包含力边界条件时，精度就很差，这与距离基函数近似的导数

精度较差是一致的。

2.对于包含可变参数的全域距离基函数(如 MQ 函数)，在计算中几乎是不可用的，因为很难确定参数的优化值。

3.对于紧支距离基函数，仅当其紧支域半径较大时才能获得满意的计算结果，而这将影响数值计算的效率。

4.4 距离基函数 Hermit 配点法求解弹性静力问题

针对距离基函数直接配点法在处理具有导数属性的边界条件时精度差的缺点，提出了 Hermit 配点方案。它将边界处的导数属性也引入到近似表达式中，并且在边界结点处也要求满足微分方程。计算结果表明，它能有效地提高求解精度。

4.4.1 距离基函数 Hermit 配点法

考虑式(4-9)所表达的弹性静力问题一般方程(以位移为基本未知量)。在求解域内及边界上布置 N 个离散结点 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\cdots\mathbf{x}_N$，其中位于位移边界 S_u 上的结点数为 N_u，位于力边界 S_t 上的结点数为 N_t，则位于域 Ω 内部的结点数为 $N_\Omega = N - N_u - N_t$。

假定在 N 个结点中，编号从 1 到 N_t 为力边界上的结点，从 N_t+1 到 N_u+N_t 为位移边界上的结点，其余为域内部的结点。使用距离基函数 $\phi(r)$ 对位移场函数进行 Hermit 近似，格式如下：

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N} \boldsymbol{\phi}(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_I\|)\cdot\mathbf{u}_I + \sum_{I=1}^{N_t} \mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\phi}(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_I\|)\cdot\mathbf{u}_I^* \tag{4-13}$$

其中

$$\boldsymbol{\phi}(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_I\|) = \begin{bmatrix} \phi(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_I\|) & 0 \\ 0 & \phi(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_I\|) \end{bmatrix} \tag{4-14}$$

$\phi(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_I\|)$ 为结点 $\mathbf{x}_I$ 对应的距离基函数，$\mathbf{u}_I$ 是结点 $\mathbf{x}_I$ 处对应的未知量，$\mathbf{u}_I^*$ 是位于力边界上的结点 $\mathbf{x}_I$ 处对应的附加未知量；$\mathbf{T}$ 是式(4-9)中力边界条件所对应的微分算子。

对于上述近似表达(考虑平面问题)，共有 $2*(N+N_t)$ 个未知数。使用 Hermit

配点法形成离散方程的方法为：对于求解域内部的结点，要求在该位置满足平衡方程；对于位移边界上的结点，要求在该位置满足相应的位移边界条件；对于力边界上的结点，要求在该位置不仅满足相应的力边界条件，还满足平衡方程。用 $\mathbf{x}^*$ 表示求解域内部的结点，$\tilde{\mathbf{x}}^*$ 表示力边界上的结点，$\overline{\mathbf{x}}^*$ 表示位移边界上的结点，则方程(4-9)相应的 Hermit 配点格式为：

$$\begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x}^*)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) & \forall \mathbf{x}^* \in \Omega \\ \mathbf{u}^h(\overline{\mathbf{x}}^*) = \overline{\mathbf{u}}(\overline{\mathbf{x}}^*) & \forall \overline{\mathbf{x}}^* \in S_u \\ \mathbf{T}(\mathbf{u}^h(\tilde{\mathbf{x}}^*)) = \tilde{\mathbf{t}}(\tilde{\mathbf{x}}^*) & \forall \tilde{\mathbf{x}}^* \in S_t \\ \mathbf{B}(\mathbf{u}^h(\tilde{\mathbf{x}}^*)) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}^*) & \forall \tilde{\mathbf{x}}^* \in S_t \end{cases} \tag{4-15}$$

可以看出，通过对力边界上的结点引入附加的近似项，可以在相应的结点处提更严格的要求。

对于位移边界上的结点，也可以类似地进行修正，得到位移边界和力边界结点都使用 Hermit 近似的表达式：

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N} \boldsymbol{\phi}(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_I\|) \cdot \mathbf{u}_I + \sum_{I=1}^{N_t+N_u} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\phi}(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_I\|) \cdot \mathbf{u}_I^* \tag{4-16}$$

相应的求解方程为：

$$\begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x}^*)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) & \forall \mathbf{x}^* \in \Omega \\ \mathbf{u}^h(\overline{\mathbf{x}}^*) = \overline{\mathbf{u}}(\overline{\mathbf{x}}^*) & \forall \overline{\mathbf{x}}^* \in S_u \\ \mathbf{B}(\mathbf{u}^h(\overline{\mathbf{x}}^*)) = \mathbf{f}(\overline{\mathbf{x}}^*) & \forall \overline{\mathbf{x}}^* \in S_u \\ \mathbf{T}(\mathbf{u}^h(\tilde{\mathbf{x}}^*)) = \tilde{\mathbf{t}}(\tilde{\mathbf{x}}^*) & \forall \tilde{\mathbf{x}}^* \in S_t \\ \mathbf{B}(\mathbf{u}^h(\tilde{\mathbf{x}}^*)) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}^*) & \forall \tilde{\mathbf{x}}^* \in S_t \end{cases} \tag{4-17}$$

然而，计算结果表明，对位移边界上的结点使用 Hermit 插值，并不能提高精度。

为方便描述，将式(4-13)和(4-15)所对应的仅在力边界结点处使用 Hermit 近似方式的方法记为 Hermit-T 法；将式(4-16)和(4-17)所对应的在全边界结点处使用 Hermit 近似方式的方法记为 Hermit-UT 法。

4.4.2 算例分析

使用本节所构造的距离基函数 Hermit 配点法，进行了算例分析。算例与前一节中所用的相同。

算例 开圆孔方板：

具体说明参见前一节。边界条件的提法采用方式二，即具有对称性的左边界和下边界使用位移边界条件，其它边界使用力边界条件。

表 4-5 给出了使用 496 个结点， Hermit-T 法进行求解时，不同距离基函数对应的数值计算误差。

表 4-6 给出了使用 496 个结点， Hermit-UT 法进行求解时，不同距离基函数对应的数值计算误差。

	$R=1.5$		$R=3.0$		$R=4.5$		$R=6.0$		$R=50$	
	L_u	L_σ	L_u	L_σ	L_u	L_σ	L_u	L_σ	L_u	L_σ
CSRBF2	44.4	47.1	9.98	12.3	3.67	8.28	1.81	7.65	1.63	8.11
CSRBF6	54.8	67.0	11.3	11.8	2.80	4.96	1.20	4.26	0.74	4.14

	MQ					TPS
	C=1.0	C=1.3	C=1.35	C=1.4	C=1.5	β=4
L_u	2.81	2.22	1.47	1.87	10.3	0.641
L_σ	33.8	30.0	18.4	21.7	159	3.76

表 4-5 Hermit-T 配点法，边界条件采用方式二时，相对误差 (%)

	$R=1.5$		$R=3.0$		$R=4.5$		$R=6.0$		$R=50$	
	L_u	L_σ	L_u	L_σ	L_u	L_σ	L_u	L_σ	L_u	L_σ
CSRBF2	41.8	53.2	9.48	12.4	2.67	7.76	1.23	7.05	0.73	6.67
CSRBF6	103.	193.	11.2	28.5	3.20	17.3	1.84	15.1	1.42	10.9

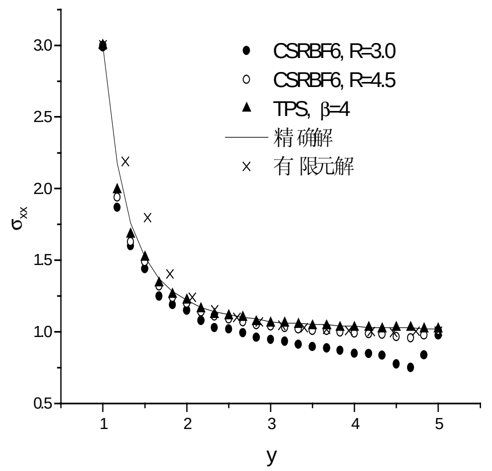
	MQ		TPS
	C=1.35	C=1.4	β=4
L_u	7.96	6.66	3.09
L_σ	51.1	27.8	26.2

表 4-6 Hermit-UT 配点法，边界条件采用方式二时，相对误差 (%)

对比表 4-3 和表 4-6 可以看出：对力边界使用 Hermit 配点法可以显著地提高计算精度；而对位移边界使用 Hermit 配点法，对提高精度几乎没有意义。

图 4-8 所示是 Hermit-T 方法在 $x=0$ 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 的计算结果。其中包括如下几条曲线：使用紧支距离基函数 CSRBF6，在影响域半径分别为 $R=3.0$、$R=4.5$ 时的应力分布曲线；使用函数 TPS($\boldsymbol{\beta}$ =4)时的应力分布曲线；解析解对应的应力分布曲线；以及相同节点数的有限元解(使用 ALGOR 计算软件)所对应的应力分布曲线。

图 4-9 所示是采用距离基函数 Hermit-T 配点法计算时的收敛曲线。其中，h 表示结点之间的最小距离。可以看出，收敛速度是很快的。



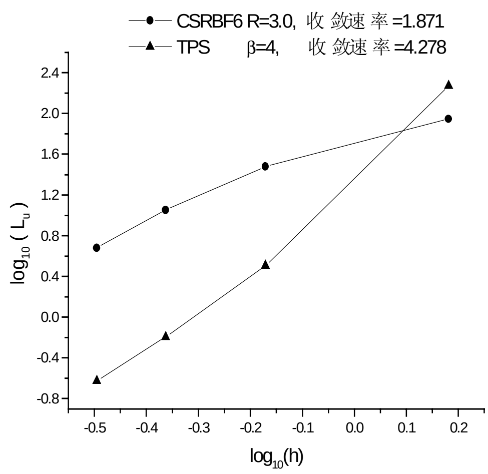


图 4-8 Hetmit-T 配点法(边界条件为方式二)　　图 4-9 Hetmit-T 配点法收敛曲线

4.4.3 小结

通过以上的分析可以看出：对于具有力边界的情况，使用距离基函数 Hermit-T 配点法可以得到较好的计算效果，与直接配点法相比精度被大大提高；而对位移边界使用 Hermit 配点，对提高精度没有意义。对于紧支距离基函数，CSRBF2 和 CSRBF6 在偏微分方程的求解中表现良好。而对于全域距离基函数，MQ 函数在实际计算中是不可取的，因为参数的取值对数值解的影响很大，且很

难预先选取效果较好的参数值；TPS 函数性能较好。

4.5 小结

本章讨论了距离基函数，对比和分析了全域及紧支距离基函数的插值属性；并将距离基函数用于力学基本偏微分方程的求解，构造了直接配点法和 Hermit 配点法。

全域距离基函数具有较好的近似能力，在插值计算和偏微分方程求解方面都能得到较高的精度，然而也有一些缺点。一是计算中形成的系数矩阵为满阵，且通常条件数较差，不利于大规模的数值求解；另外，含有可变参数的全域距离基函数的计算效果严重依赖参数的取值，某种参数值可能使求解效果极佳，另一种参数值却可能使计算结果没有意义，这在偏微分方程的求解中更明显。而目前尚没有有效的方案来预先优化参数值。计算结果表明，常用的几种全域距离基函数中，TPS 函数效果较好。

针对全域距离基函数的缺点，本章也使用了紧支距离基函数，它们具有更高的数值计算效率。一般随着紧支域半径的扩大，计算精度能有所提高，然而却会丧失紧支的优点，因此在使用中应合理选取。

采用距离基函数进行直接近似时，对于函数值和域内部的导数值都可以达到很高的精度，然而在域边界附近导数近似的效果差。这一点在使用距离基函数直接配点法求解边值偏微分方程时表现明显：如果边界条件不涉及导数，则全域、紧支距离基函数计算精度都较高；然而如果边界条件中涉及到导数，则两者计算效果都差。针对这一特点，本章又提出了 Hermit 配点法。

距离基函数 Hermit 配点法通过在具有导数特性的边界结点处引入 Hermit 近似项，可以有效地提高这类问题的求解精度，这对距离基函数的广泛应用具有很好的指导意义。然而必须注意的是，由于加入了附加的未知量，计算量有所增加；由于导数边界处引入的附加近似项本身具有导数属性，因此对距离基函数的光滑性也有更高的要求。

另外，值得注意的是，在直接配点法和 Hermit 配点法中，紧支距离基函数的表现并不令人十分满意。通常，它们只有在紧支域较大的情况下才能取得较好的计算结果。对此，本文将做进一步的研究。

第五章 修正的紧支距离基函数配点法

5.1 引言

使用紧支距离基函数，在计算中可使系数矩阵具有稀疏、带状的特点，有利于大型问题的求解，这是全域距离基函数所不及的。然而通过前一章的分析可以看出，使用紧支距离基函数进行近似时，一般要在紧支域半径较大的情况下才能有较好的效果，因此并不能充分发挥紧支的优点。

本章将对紧支距离基函数提出修正方案，以构造既有紧支特性，又具有良好的计算效果的紧支距离基函数；然后使用修正紧支距离基函数构造场函数的近似，结合配点方案构造了求解偏微分方程的无网格方法；并将其用于泊松方程、弹性静力问题、弹性动力基本问题和弹塑性基本问题等的求解。通过计算实例，可以看出修正紧支距离基函数配点法的易用性和有效性。本章所得到的方法是真正无网格的方法，具有计算简单、高效的优点。

5.2 归一化的紧支距离基函数

5.2.1 紧支距离基函数归一化处理方案

当使用紧支距离基函数$\phi(r)$对函数$f(\mathbf{x}), \mathbf{x}\in\Omega$进行近似时，在域$\Omega$中布置一组离散结点$\mathbf{x}_i$，其中$i=1,2,\cdots,N$，并假定结点$\mathbf{x}_i$处对应的待定参数值$c_i$，从而得到$f(\mathbf{x})$的近似表达$f^h(\mathbf{x})$：

$$f^h(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{N}c_i\cdot\phi(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\|) \tag{5-1}$$

其中$\phi(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\|)$表示以$\mathbf{x}_i$为中心的紧支距离基函数，通常也被称为结点$\mathbf{x}_i$对应的基函数，并简记为$\phi_i(\mathbf{x})$。

事实上，(5-1)式所表示的近似一般是比较粗糙的。一方面，不论所取结点数稠密情况如何、结点的分布状况如何，也不论某个结点的具体位置在哪，是否位于求解域边界上，它们所对应的距离基函数形状却是相同的；另一方面，一般情况下基函数不满足归一化条件，即：

$$\sum_{i=1}^{N}\phi_i(\mathbf{x})\neq 1 \tag{5-2}$$

这意味着即使对于常数场函数，(5-1)式也不能精确近似。

当然，可以设法将结点基函数的紧支半径与结点的分布情况相关联。这一点在移动最小二乘近似算法中对权函数的紧支半径进行自动选取时已有详细说明，可以参看本文以前相关章节，此处不再叙述。

针对(5-2)所示的情况，可以提出如下归一化方案：

$$\tilde{\phi}_i(\mathbf{x})=\frac{\phi_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^{N}\phi_i(\mathbf{x})} \tag{5-3}$$

其中，$\tilde{\phi}_i(\mathbf{x})$被称为结点$\mathbf{x}_i$对应的归一化紧支距离基函数。容易看出，$\tilde{\phi}_i(\mathbf{x})$仍保持紧支特性，并且满足归一化条件。当然，$\tilde{\phi}_i(\mathbf{x})$的计算要比$\phi_i(\mathbf{x})$复杂，尤其是对导数的计算。

使用归一化紧支距离基函数，(5-1)式可以改写为：

$$f^h(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{N}c_i\cdot\tilde{\phi}_i(\mathbf{x}) \tag{5-4}$$

这里以前面一章中所介绍的紧支距离基函数 CSRBF2 为例，说明归一化处理对紧支距离基函数的影响。在$x\in[0,20]$区域中均匀布置 21 个结点，各结点基函数对应的紧支域半径均取$R=2.5$。未经处理的基函数在各结点完全相同，而归一化处理以后的基函数则是不同的。图 5-1 给出了中心结点$x=10.0$处所对应的普通距离基函数和归一化的距离基函数；图 5-2 给出了不同结点所对应的归一化距离基函数，其中包括：左端点$x=0.0$处，右端点$x=20.0$处和中心结点处；图 5-3 和图 5-4 给出了基函数的一阶导数；图 5-5 和图 5-6 给出了基函数的二阶导数。由于结点均布，对于紧支域位于求解域内部的那些结点，所对应的归一化距离基函数相同，而边界处结点所对应的归一化紧支基函数则有较大的变化。

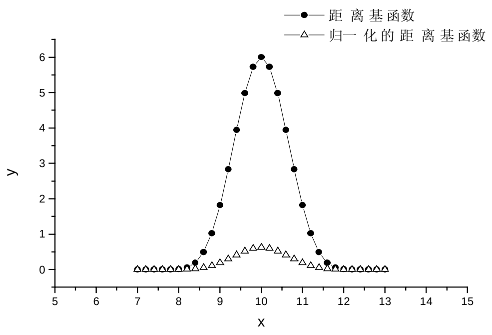


图 5-1 中心结点对应的基函数

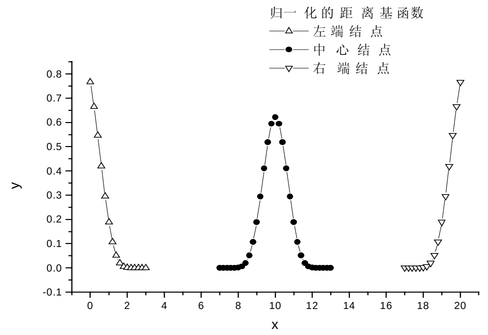


图 5-2 不同结点对应的归一化基函数

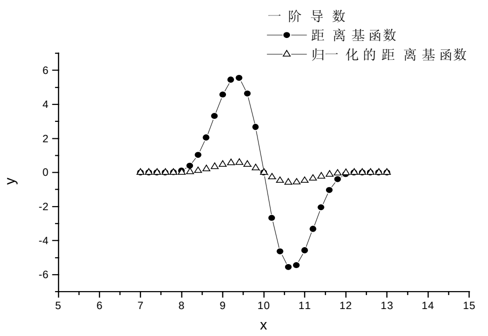


图 5-3 基函数的一阶导数

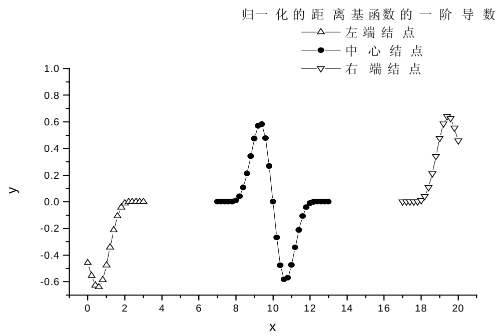


图 5-4 归一化基函数的一阶导数

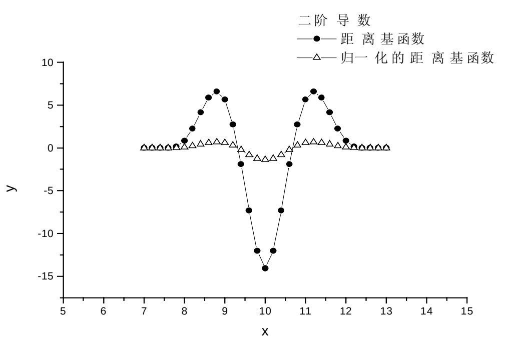


图 5-5 基函数的二阶导数

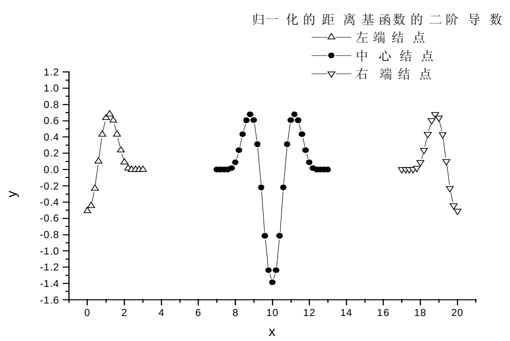


图 5-6 归一化基函数的二阶导数

5.2.2 归一化的紧支距离基函数插值

使用(5-4)式进行插值计算很简单，设函数 $f(\mathbf{x})$ 在结点 $\mathbf{x}_i$ 处的函数值为 f_i，则求解系数 c_i 所对应的方程如下所示：

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \tilde{\phi}_k(\mathbf{x}_j) = f_j \quad (j = 1, 2 \cdots N) \tag{5-5}$$

将上述方程对应的系数矩阵记为 $\mathbf{A}_{N\times N}$，其分量形式为：

$$\mathbf{A}_{jk} = \tilde{\phi}_k(\mathbf{x}_j) \quad (j, k = 1, 2, \cdots, N) \tag{5-6}$$

为了说明归一化处理对插值近似效果的影响，以下对给定函数 $f(x, y)$ 进行插值分析：

$$f(x, y) = \sin(x)\cdot\cos(y), \quad x \in [0.5, 3.0],\ y \in [0.5, 3.0]$$

为了比较计算的误差，根据离散的插值结点，定义一阶导数的误差 E_2 和二阶导数的误差 D_2，具体定义可参看以前章节。

计算中采用 10×10 的均布结点。所使用的紧支距离基函数如前一章中所述。

表 5-1 给出了分别使用普通紧支距离基函数和归一化紧支距离基函数，在不同的紧支域半径 R 时对应的计算误差，其中前缀”U_”表示归一化处理。通过该表可以看出，归一化处理大大提高了近似的精度，尤其是对边界附近的近似效果有明显的改善。与未加处理的紧支距离基函数相比，归一化处理的基函数在覆盖域较小的情况下就可以得到较好的近似效果。

	R	CSRBF2	U_CSRBF2	CSRBF6	U_CSRBF6
E_2	1.0	33.369	2.40136	56.323	7.5952
	2.0	4.9013	0.40674	7.916	0.6389
	3.0	1.4558	0.2916	2.009	0.1969
	4.0	0.794	0.3153	0.762	0.1271
D_2	1.0	328.821	26.3734	513.416	71.180
	2.0	54.069	4.83789	90.204	7.774
	3.0	54.069	3.802	24.867	2.6169
	4.0	9.532	4.089	9.8157	1.7573

表 5-1 函数插值的误差（%）

5.3 紧支距离基函数完备性修正

从上节的分析可以看出，归一化处理方案能够有效地提高紧支距离基函数的近似属性。由于可以把归一化处理看成是零阶完备性要求，因此可进一步扩展：如果将紧支距离基函数加以修正，使其满足更高阶的完备性要求，那么一定可以进一步提高其近似能力。

5.3.1 完备性条件

设距离函数$\phi(r)$具有紧支特性，在区域Ω中取N个离散的结点$\mathbf{x}_i$。各结点$\mathbf{x}_i$对应的紧支距离基函数为$\phi_i(\mathbf{x})$，则相应的紧支距离基函数近似为：

$$f^h(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{N}c_i\cdot\phi_i(\mathbf{x}) \tag{5-7}$$

一般地，上式的近似不能精确地模拟线性函数、二次函数、等等，甚至不能精确地模拟常数函数。将距离基函数进行归一化处理，则可使它们能够精确模拟常数函数。

所谓k阶完备性要求，就是要求相应的紧支距离基函数近似可以精确模拟k次完全多项式。将经过修正的，满足k阶完备性要求的紧支距离基函数记为$\tilde{\phi}_i^k(\mathbf{x})$，则具体定义如下：

$k=0$，零阶完备性要求，即为归一化要求：

$$\sum_{i=1}^{N}\tilde{\phi}_i^0(\mathbf{x})=1 \tag{5-8}$$

$k=1$，一阶（线性）完备性要求：

一维情况下：

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}\tilde{\phi}_i^1(x)=1\\&\sum_{i=1}^{N}x_i\cdot\tilde{\phi}_i^1(x)=x\end{aligned} \tag{5-9a}$$

二维情况下:

$$\sum_{i=1}^{N}\tilde{\phi}_i^1(\mathbf{x})=1$$
$$\sum_{i=1}^{N}x_i\cdot\tilde{\phi}_i^1(\mathbf{x})=x,\quad \sum_{i=1}^{N}y_i\cdot\tilde{\phi}_i^1(\mathbf{x})=y \tag{5-9b}$$

$k=2$，二阶完备性要求：

一维情况下：

$$\sum_{i=1}^{N}\tilde{\phi}_i^2(x)=1,$$
$$\sum_{i=1}^{N}x_i\cdot\tilde{\phi}_i^2(x)=x, \tag{5-10a}$$
$$\sum_{i=1}^{N}x_i^2\cdot\tilde{\phi}_i^2(x)=x^2,$$

二维情况下:

$$\sum_{i=1}^{N}\tilde{\phi}_i^2(\mathbf{x})=1,$$
$$\sum_{i=1}^{N}x_i\cdot\tilde{\phi}_i^2(\mathbf{x})=x,\qquad \sum_{i=1}^{N}y_i\cdot\tilde{\phi}_i^2(\mathbf{x})=y, \tag{5-10b}$$
$$\sum_{i=1}^{N}x_i^2\cdot\tilde{\phi}_i^2(\mathbf{x})=x^2,\quad \sum_{i=1}^{N}x_iy_i\cdot\tilde{\phi}_i^2(\mathbf{x})=xy,\quad \sum_{i=1}^{N}y_i^2\cdot\tilde{\phi}_i^2(\mathbf{x})=y^2,$$

同样可以定义任意维空间中任意阶的完备性要求，此处不再描述。

通过对紧支距离基函数$\phi_i(\mathbf{x})$进行修正，使其满足一定的完备性条件，则可得到修正的距离基函数$\tilde{\phi}_i^k(\mathbf{x})$。

5.3.2 完备性修正方案

此处以一维空间中的二阶完备性为例详细说明对紧支距离基函数$\phi_i(x)$进行完备性修正的方案。

设修正后的距离基函数$\tilde{\phi}_i(x)$的形式为：

$$\tilde{\phi}_i(x)=\phi_i(x)\cdot\left[b_0(x)+b_1(x)\cdot(x-x_i)+b_2(x)\cdot(x-x_i)^2\right] \tag{5-11}$$

其中，$b_0(x)$、$b_1(x)$和$b_2(x)$为待定的修正系数，并且它们是空间坐标的函数。将(5-11)所示的修正式代入二阶完备性条件(5-10a)中，得到：

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N}\phi_i(x) & \sum_{i=1}^{N}\phi_i(x)\cdot(x-x_i) & \sum_{i=1}^{N}\phi_i(x)\cdot(x-x_i)^2 \\ \sum_{i=1}^{N}x_i\cdot\phi_i(x) & \sum_{i=1}^{N}x_i\cdot\phi_i(x)\cdot(x-x_i) & \sum_{i=1}^{N}x_i\cdot\phi_i(x)\cdot(x-x_i)^2 \\ \sum_{i=1}^{N}x_i^{\ 2}\cdot\phi_i(x) & \sum_{i=1}^{N}x_i^{\ 2}\cdot\phi_i(x)\cdot(x-x_i) & \sum_{i=1}^{N}x_i^{\ 2}\cdot\phi_i(x)\cdot(x-x_i)^2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_0(x) \\ b_1(x) \\ b_2(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}12)$$

定义矩阵$\mathbf{A}$：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N}\phi_i(x) & \sum_{i=1}^{N}\phi_i(x)\cdot(x-x_i) & \sum_{i=1}^{N}\phi_i(x)\cdot(x-x_i)^2 \\ \sum_{i=1}^{N}x_i\cdot\phi_i(x) & \sum_{i=1}^{N}x_i\cdot\phi_i(x)\cdot(x-x_i) & \sum_{i=1}^{N}x_i\cdot\phi_i(x)\cdot(x-x_i)^2 \\ \sum_{i=1}^{N}x_i^{\ 2}\cdot\phi_i(x) & \sum_{i=1}^{N}x_i^{\ 2}\cdot\phi_i(x)\cdot(x-x_i) & \sum_{i=1}^{N}x_i^{\ 2}\cdot\phi_i(x)\cdot(x-x_i)^2 \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}13a)$$

向量$\mathbf{P}$：

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix}^T \qquad (5\text{-}13b)$$

向量$\mathbf{B}$：

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \phi_i(x) & \phi_i(x)\cdot(x-x_i) & \phi_i(x)\cdot(x-x_i)^2 \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}13c)$$

由(5-12)可解得系数：

$$\begin{bmatrix} b_0(x) \\ b_1(x) \\ b_2(x) \end{bmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{P} \qquad (5\text{-}14)$$

值得注意的是，此处所得系数为空间坐标的函数，对于不同计算点需重新计算。将所求得的系数代回(5-11)式，则可以得到修正后的距离基函数$\tilde{\phi}_i(x)$：

$$\tilde{\phi}_i(x)=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{P} \qquad (5\text{-}15)$$

一般情况下，无法得到函数$\tilde{\phi}_i(x)$的解析表达式。

对于其它完备性要求的修正方案，与上述类似，此处不赘述。仅给出几种情况所对应的修正表达式。

$k=0$，零阶完备性要求：

$$\tilde{\phi}_i(\mathbf{x})=\phi_i(\mathbf{x})\cdot b_0(\mathbf{x}) \tag{5-16a}$$

$k=1$，一阶（线性）完备性要求：

一维情况下：

$$\tilde{\phi}_i(x)=\phi_i(x)\cdot\left[b_0(x)+b_1(x)\cdot(x-x_i)\right] \tag{5-16b}$$

二维情况下:

$$\tilde{\phi}_i(\mathbf{x})=\phi_i(\mathbf{x})\cdot\left[b_0(x,y)+b_{1x}(x,y)\cdot(x-x_i)+b_{1y}(x,y)\cdot(y-y_i)\right] \tag{5-16c}$$

$k=2$，二阶完备性要求：

一维情况下：

$$\tilde{\phi}_i(x)=\phi_i(x)\cdot\left[b_0(x)+b_1(x)\cdot(x-x_i)+b_2(x)\cdot(x-x_i)^2\right] \tag{5-16d}$$

二维情况下:

$$\tilde{\phi}_i(\mathbf{x})=\phi_i(\mathbf{x})\cdot\begin{bmatrix} b_0(x,y)+ \\ b_{1x}(x,y)\cdot(x-x_i)+b_{1y}(x,y)\cdot(y-y_i)+ \\ b_{2x}(x,y)\cdot(x-x_i)^2+b_{2y}(x,y)\cdot(y-y_i)^2+b_{2xy}(x,y)\cdot(x-x_i)(y-y_i) \end{bmatrix} \tag{5-16e}$$

在得出了修正的紧支距离基函数之后，就可以使用其进行场函数的近似：

$$f^h(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{N}c_i\cdot\tilde{\phi}_i(\mathbf{x}) \tag{5-17}$$

5.3.3 完备性修正方案所涉及的计算

式(5-15)给出了修正距离基函数的计算公式，其中需要对矩阵**A**求逆，因此必须保证在任意计算点矩阵**A**是可逆的。设k阶完全多项式包含的单项式基个数

为 m，则矩阵 $\mathbf{A}$ 的阶数为 m。将矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩记为 $r_{\mathbf{A}}$，根据式(5-13a)可以看出，如果对计算点 $\mathbf{x}$ 有影响的结点个数为 n，则式(5-13a)中的求和次数为 n，那么：$r_{\mathbf{A}} \le n$。因此矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆的必要条件是：

$$m \le n \tag{5-18}$$

为了保证上述条件成立，各结点所对应的紧支基函数的紧支半径必须根据结点的分布进行设定，具体方案可以参看本文在第二章中的相关说明。

在修正距离基函数的导数计算时，需要用到 $\mathbf{A}^{-1}$ 的导数。计算可如下所示进行：

由于 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = I$，因此

$$\frac{\partial(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1})}{\partial x} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}\frac{\partial\mathbf{A}^{-1}}{\partial x} = 0 \tag{5-19}$$

$$\frac{\partial\mathbf{A}^{-1}}{\partial x} = -\mathbf{A}^{-1}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\mathbf{A}^{-1} \tag{5-20a}$$

同理：
$$\frac{\partial\mathbf{A}^{-1}}{\partial y} = -\mathbf{A}^{-1}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\mathbf{A}^{-1} \tag{5-20b}$$

同样方法可以计算出 $\mathbf{A}^{-1}$ 的高阶导数。

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}^{-1}}{\partial x^2} = -\mathbf{A}^{-1}\left(\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2}\mathbf{A}^{-1} + 2\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\frac{\partial\mathbf{A}^{-1}}{\partial x}\right) \tag{5-21a}$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}^{-1}}{\partial y^2} = -\mathbf{A}^{-1}\left(\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2}\mathbf{A}^{-1} + 2\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\frac{\partial\mathbf{A}^{-1}}{\partial y}\right) \tag{5-21b}$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}^{-1}}{\partial x\partial y} = -\mathbf{A}^{-1}\left(\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x\partial y}\mathbf{A}^{-1} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\frac{\partial\mathbf{A}^{-1}}{\partial y} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\frac{\partial\mathbf{A}^{-1}}{\partial x}\right) \tag{5-21c}$$

通过以上分析可以看出：完备性修正后的紧支距离基函数，不仅取决于所使用的原始距离基的形式，而且取决于完备性阶次、紧支域大小和结点的分布情况等。因此必定具有更好的近似属性。

另外，前面所述的归一化处理方案，实际上是完备性修正的一种特例。

5.3.4 完备性修正后的紧支距离基函数实例

以紧支距离基函数 CSRBF2 为例，说明完备性修正对距离基函数的影响。在 $x \in [0, 20]$ 区域中均匀布置 21 个结点，各结点对应的紧支域半径均取 $R = 2.5$。未

经处理的基函数在各结点完全相同，而完备性修正以后则是不同的，尤其是在边界结点处。以下说明中，前缀”M1_”表示一阶（线性）完备性修正，前缀”M2_”表示二阶完备性修正，

图 5-7 给出了中心结点 $x = 10.0$ 所对应的普通距离基函数、线性完备性距离基函数，以及二次完备性距离基函数；

图 5-8 给出了中心结点 $x = 10.0$ 所对应的普通距离基函数、线性完备性距离基函数，以及二次完备性距离基函数的一阶导数；

图 5-9 给出了中心结点 $x = 10.0$ 处所对应的普通距离基函数、线性完备性距离基函数，以及二次完备性距离基函数的二阶导数；

图 5-10 给出了不同位置的一次完备性距离基函数，其中包括：左端点 $x = 0.0$，右端点 $x = 20.0$ 和中心结点；

图 5-11 给出了不同位置的二次完备性距离基函数，其中包括：左端点 $x = 0.0$，右端点 $x = 20.0$ 和中心结点；

图 5-12 给出了一次完备性基函数的一阶导数；图 5-13 则给出了二次完备性基函数的一阶导数。

通过这些图象，可以看出完备性修正对紧支基函数的影响。

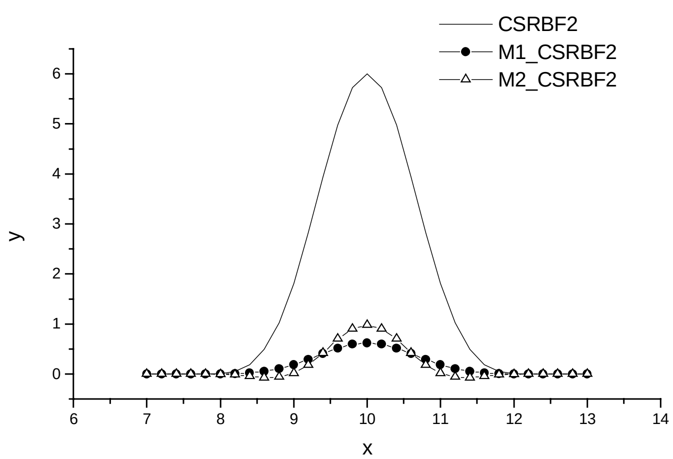


图 5-7 中心结点所对应的紧支基函数

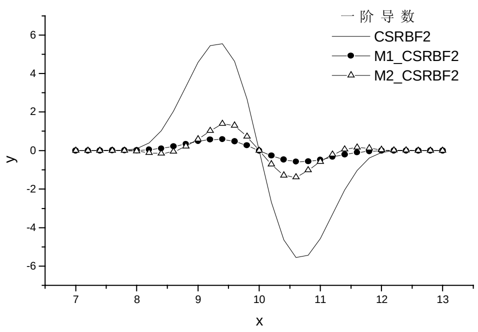


图 5-8 基函数的一阶导数

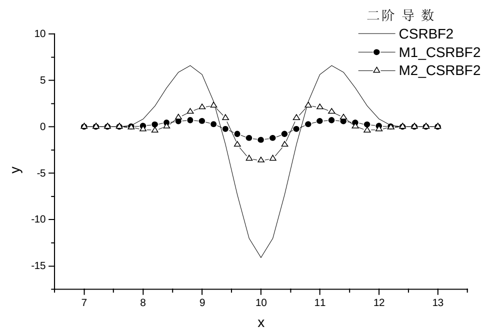


图 5-9 基函数的二阶导数

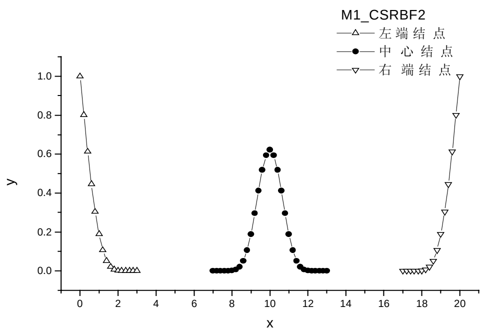


图 5-10 一次完备性紧支基函数

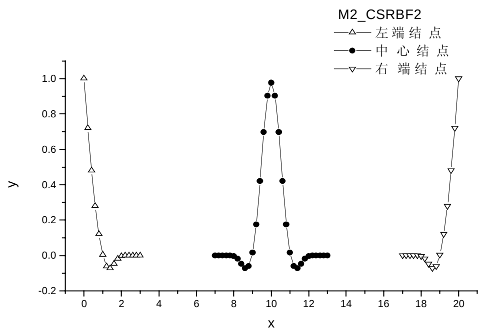


图 5-11 二次完备性紧支基函数

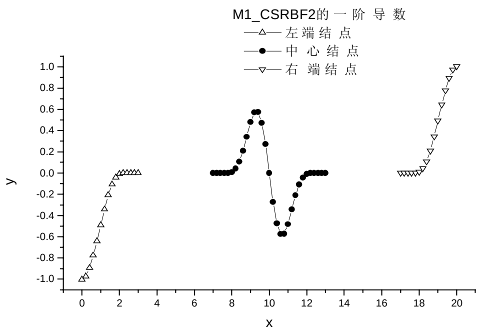


图 5-12 一阶导数(一次完备性)

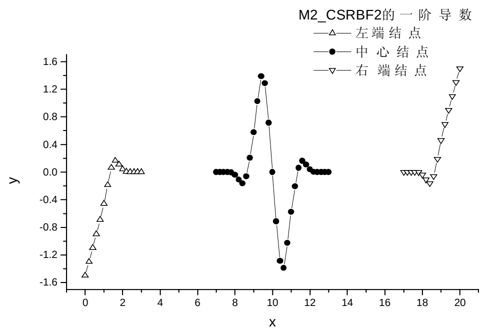


图 5-13 一阶导数(二次完备性)

5.3.5 使用完备性修正的紧支距离基函数进行插值

为了说明完备性修正对近似效果的影响，仍以给定函数 $f(x,y)$ 的插值分析为例进行说明：

插值分析一：

曲面: $f(x,y)=\sin(x)\cdot\cos(y),\quad x\in[0.5,3.0],\ y\in[0.5,3.0]$

插值所得的近似函数 $f^h(x,y)$ 形式如式(5-17)所示。

计算中采用 10×10 的均布结点。

表 5-2 和 5-3 给出了使用不同阶次完备性修正前后的紧支距离基函数，在不同的紧支域半径 R 时所对应的计算误差。其中前缀"M1_"表示一阶（线性）完备性修正，"M2_"表示二阶完备性修正。对于 M2_CSRBF2 在 $R=0.4$ 的情况下，由于结点覆盖域太小，导致计算不能进行。

		CSRBF2		M1_CSRBF2		M2_CSRBF2	
		E_2	D_2	E_2	D_2	E_2	D_2
R	R=0.4	70.538	3531.8	4.862	288.7	-	-
	R=0.6	86.648	886.86	3.135	33.56	0.928	7.392
	R=0.8	60.245	540.25	0.979	12.518	0.451	6.255
	R=1.0	33.369	328.821	0.2085	3.633	0.096	1.421

表 5-2 使用修正的 CSBRF2 插值的误差（%）

		CSRBF6		M1_CSRBF6		M2_CSRBF6	
		E_2	D_2	E_2	D_2	E_2	D_2
R	R=0.7	84.44	952.75	3.316	35.66	0.944	6.153
	R=0.75	81.76	840.81	2.886	31.75	0.787	6.463
	R=0.8	77.66	753.23	2.451	27.75	0.658	6.679
	R=1.0	56.32	513.41	1.131	13.85	0.379	4.915

表 5-3 使用修正的 CSBRF6 插值的误差（%）

插值分析二：

曲线： $y(x)=\sin(x^2+e^{x^2/3})\qquad x\in[0.0,2.0]$

使用 21 个均布结点进行近似，图 5-14、图 5-15 和图 5-16 分别给出了函数及一阶、二阶导数的近似结果。

其中均包括以下几种情况：

使用紧支距离基函数 CSRBF2，紧支域半径 R =0.3；

使用紧支距离基函数 CSRBF2，紧支域半径 R =2.0；

使用一次完备性紧支距离基函数 M1_CSRBF2，紧支域半径 R =0.3；

使用二次完备性紧支距离基函数 M2_CSRBF2，紧支域半径 R =0.3；

使用二次多项式基的移动最小二乘法(MLS)，紧支域半径 R =0.3；

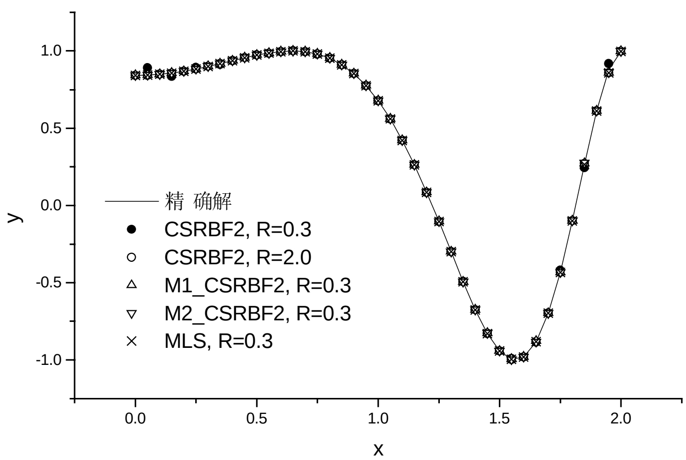


图 5-14 函数的近似结果

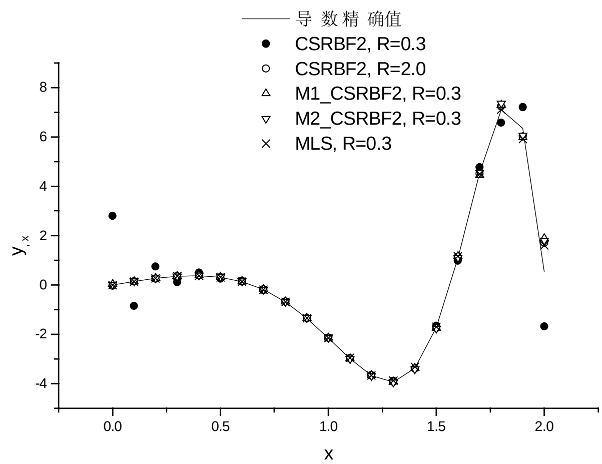


图 5-15 一阶导数的近似结果

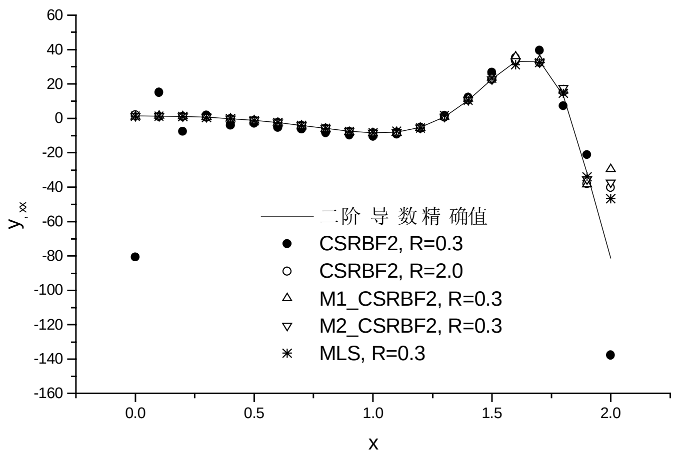


图 5-16 二阶导数的近似结果

通过上述数据表和图象，并与距离基函数近似计算的结果加以比较，可以明显看出：完备性修正可以大大提高近似的精度，尤其是导数的近似效果；通过完备性修正，在近似时可以使用较小的紧支域半径，从而保持紧支的优点，克服紧支距离基函数近似在紧支域较小时误差大的弱点。另外，经过完备性修正的紧支距离基函数具有与移动最小二乘近似相当的效果。

5.4 修正的紧支距离基函数配点法

从本节开始，将使用修正紧支距离基函数构造场函数的近似，结合配点方案构造求解偏微分方程的无网格方法，并将其用于泊松方程、弹性静力问题、弹性动力基本问题和弹塑性基本问题等的求解。通过计算实例，可以看出修正紧支距离基函数配点法的易用性和有效性。所得到的方法是真正无网格的方法，具有计算简单、高效的优点。

与本文以前各章所述的方法相比，不同之处在于，本章的计算方法中使用修正距离基函数构造近似。假定待解的场函数为$\mathbf{u}(\mathbf{x})$，其中$\mathbf{x}\in\Omega$。在求解域内布置N个离散结点$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\cdots\mathbf{x}_N$，选取某种紧支距离基函数$\phi(r)$，可以建立对场函数的修正紧支距离基函数近似：

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{N}\tilde{\phi}_i(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}_i \tag{5-22}$$

其中，$\tilde{\phi}_i(\mathbf{x})$为结点$\mathbf{x}_i$对应的修正紧支距离基函数，它们满足某种阶次的完备性要求。

在以后的描述中，“CSRBF”指普通的紧支距离基函数，前缀“U_”表示归一化处理（也可看作是零阶完备性处理），前缀“M1_”表示一阶完备性处理，前缀“M2_”表示二阶完备性处理。

5.5 修正紧支距离基函数直接配点法求解边值偏微分方程

5.5.1 一般格式

边值偏微分定解方程的一般形式为：

$$\begin{cases}\mathbf{B}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))=\mathbf{f}(\mathbf{x}) & \mathbf{x}\in\Omega\\ \mathbf{u}(\mathbf{x})=\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) & \mathbf{x}\in S_u\\ \mathbf{T}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))=\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) & \mathbf{x}\in S_t\end{cases} \tag{5-23}$$

其中第1式为偏微分方程，第2、3式分别为基本边界条件和自然边界条件，对于力学问题则分别被称为平衡方程，位移边界和力边界条件；Ω为求解区域，S_u为基本边界，S_t为自然边界。$\mathbf{u}(\mathbf{x})$为待求场函数，$\mathbf{B}$和$\mathbf{T}$为微分算子，$\mathbf{f}(\mathbf{x})$、$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$和$\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$分别为定义在域内、基本边界上和自然边界上的已知函数。

在直接配点法中，对于求解域内部的结点，要求在该位置满足偏微分方程；对于边界上的结点，要求在该位置满足相应的边界条件，从而形成求解方程。则方程(5-23)相应的直接配点格式为：

$$\begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x}^*)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) & \forall \mathbf{x}^* \in \Omega \\ \mathbf{u}^h(\overline{\mathbf{x}}^*) = \overline{\mathbf{u}}(\overline{\mathbf{x}}^*) & \forall \overline{\mathbf{x}}^* \in S_u \\ \mathbf{T}(\mathbf{u}^h(\tilde{\mathbf{x}}^*)) = \tilde{\mathbf{t}}(\tilde{\mathbf{x}}^*) & \forall \tilde{\mathbf{x}}^* \in S_t \end{cases} \tag{5-24}$$

5.5.2 泊松方程求解分析

本节将通过泊松方程的求解分析，研究修正紧支距离基函数的收敛属性。

考虑如下的泊松方程：

$$\begin{aligned} &\Delta u(x,y) = -2.0\times(x+y-x^2-y^2) \quad in\,\Omega: x\in[0,1], y\in[0,1] \\ &u(x,y)=0.0 \quad on\,\partial\Omega \end{aligned} \tag{5-25a}$$

该问题的精确解为：

$$u(x,y) = (x-x^2)\cdot(y-y^2) \tag{5-25b}$$

为了比较计算的误差，根据离散的插值结点，定义函数近似的误差U_2和一阶导数近似的误差E_2：

$$U_2 = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{N}(u^h(\mathbf{x}_k)-u(\mathbf{x}_k))\cdot(u^h(\mathbf{x}_k)-u(\mathbf{x}_k))}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N}u(\mathbf{x}_k)\cdot u(\mathbf{x}_k)}}\times 100\% \tag{5-26a}$$

$$E_2 = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{N}(\mathbf{d}u^h(\mathbf{x}_k)-\mathbf{d}u(\mathbf{x}_k))^T\cdot(\mathbf{d}u^h(\mathbf{x}_k)-\mathbf{d}u(\mathbf{x}_k))}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N}\mathbf{d}u(\mathbf{x}_k)^T\cdot\mathbf{d}u(\mathbf{x}_k)}}\times 100\% \tag{5-26b}$$

其中；

$$\mathbf{d}u = [u_{,x}, u_{,y}]^T,\quad \mathbf{d}u^h = [u^h{}_{,x}, u^h{}_{,y}]^T$$

首先，采用15×15的均匀布点方案，使用直接配点法进行求解。表 5-4 给出了使用紧支距离基函数 CSRBF2、归一化的紧支距离基函数 U_CSRBF2、以及修正的紧支距离基函数 M1_CSRBF2 和 M2_CSRBF2 求解时，误差随覆盖域半径R不同而变化的情况。根据该表可以看出，随着完备性阶次的增加，近似精度有很大提高；并且，完备性修正克服了紧支距离基函数近似要求覆盖域较大的缺

点。分析 M1_CSRBF2 和 M2_CSRBF2 的计算结果可以看出，增大紧支域半径并不一定能取得更好的结果。（表中“*”号标出了精度最高的一种情况）。

	R	CSRBF2	U_CSRBF2	M1_CSRBF2	M2_CSRBF2
U_2	0.2	28.1	4.82	5.02	0.0565
	0.25	12.1	1.24	0.040 *	0.0198 *
	0.3	4.49	0.827	0.191	0.0318
	0.35	2.66 *	0.489 *	0.247	0.0553
E_2	0.2	41.4	19.9	5.61	0.435
	0.25	27.5	9.48	0.394 *	0.0874 *
	0.3	19.5	4.85	0.781	0.308
	0.35	15.3 *	2.59 *	0.578	0.398

表 5-4 均匀布点泊松方程求解误差(%)

其次，采用15×15的随机布点方案进行求解。表 5-5 给出了相应的计算结果。布点方案如图 5-17 所示。结果表明，虽然布点方案对计算有一定的影响，但修正紧支距离基函数近似仍具有较高的求解精度。通过该表还可以看出，覆盖域半径的选取对解有较大的影响，比如在同样的 R 下，U_CSRBF2 的函数近似精度就优于 M1_CSRBF2 和 M2_CSRBF2；在 R=0.2 时，M1_CSRBF2 的计算精度优于 M2_CSRBF2。对于紧支覆盖域半径的选取，方法与移动最小二乘法中紧支权函数覆盖域半径的选取相同，在本文的第二章中有详细介绍。

	R	CSRBF2	U_CSRBF2	M1_CSRBF2	M2_CSRBF2
U_2	0.2	54.5	3.18	8.81	9.12
	0.25	21.5	0.930	2.90	0.967
	0.3	7.44	0.430	1.54	0.722
	0.35	3.75	0.328	0.653	0.429
E_2	0.2	61.4	22.0	10.7	22.9
	0.25	32.1	10.0	4.45	3.20
	0.3	19.4	5.02	2.69	3.43
	0.35	14.6	2.89	1.48	4.48

表 5-5 随机布点泊松方程求解误差(%)

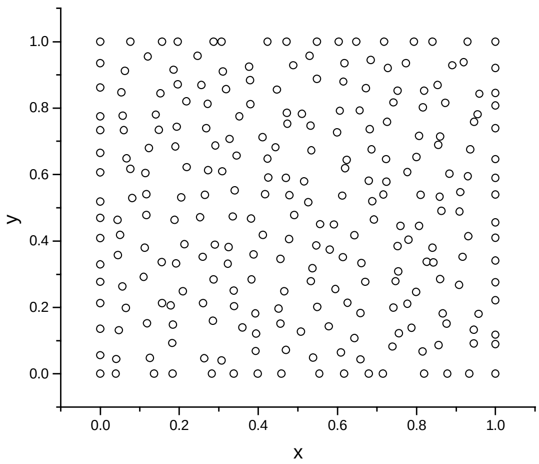


图 5-17 随机布点方案

另外，采用不同结点数的均匀布点方案，考察了修正紧支距离基函数近似的收敛属性。在以下的叙述中，将结点疏密变化称为 H 方式的变化，将完备性阶次的变化称为 P 方式的变化。如下给出了两种情况。

方式一：对于表 5-6，各种计算所采用的紧支覆盖域半径与结点的疏密情况密切相关。如果结点的间隔为Δh，则相应的紧支覆盖域半径$R = 3.0 * \Delta h$，因此不管结点分布疏密，某个结点的紧支覆盖域所包含的结点数是不变的。表中给出了5×5等分、10×10等分、15×15等分以及20×20等分的布点情况。通过该表可以看出，对于普通紧支距离基函数，其近似特性严重依赖于紧支域内所覆盖的结点的数量，即使结点很密，只要紧支域所覆盖的结点较少，计算精度也会较差；完备性修正可以有效地克服这一弱点，并且随着完备性阶次的提高，这种弱点不再存在。比较相同结点数而不同完备性阶次的情况，可以看出 P 方式的收敛性很好。

方式二：对于表 5-7，各种计算所采用的紧支覆盖域半径相同，不论结点疏密，$R = 0.3$。随着结点分布加密，各结点的紧支覆盖域所包含的结点数将增加。表中给出了10×10等分、12×12等分、16×16等分以及20×20等分的布点情况。通过该表可以看出，普通紧支距离基函数，在紧支域半径不大的情况下，H 方式的收敛速率并不快；完备性修正可以有效增快 H 方式的收敛速率。对比表 5-6 和 5-7，可以看出，对于紧支距离基函数，P 方式的收敛性优于 H 方式。然而，也应注意到，随着完备性阶次要求的提高，必须要求更大的紧支域半径，以保

证求解的可行性。这样不仅会使计算量急剧增加，也会使丧失紧支域基函数的优点。因此，在计算中不应一味追求完备性阶次的提高，一般应不高于三阶。

	等分	R	CSRBF2	U_CSRBF2	M1_CSRBF2	M2_CSRBF2
U_2	5X5	0.6	17.4	8.64	5.02	1.33
	10X10	0.3	19.3	5.54	5.10	0.200
	15X15	0.2	28.1	4.82	5.02	0.0565
	20X20	0.15	38.4	4.53	4.99	0.0218
E_2	5X5	0.6	50.4	34.7	5.61	4.46
	10X10	0.3	41.1	24.2	6.31	1.08
	15X15	0.2	41.4	19.9	5.61	0.435
	20X20	0.15	46.3	17.4	5.33	0.223

表 5-6 不同结点数对应求解（方式一）误差(%)

	等分	CSRBF2	U_CSRBF2	M1_CSRBF2	M2_CSRBF2
U_2	10X10	19.3	5.54	5.10	0.200
	12X12	11.2	1.96	0.186	0.119
	16X16	4.15	0.490	0.0471	0.0173
	20X20	1.81	0.195	0.062	0.0129
E_2	10X10	41.1	24.2	6.31	1.08
	12X12	30.6	12.7	0.637	0.195
	16X16	17.5	3.68	0.624	0.291
	20X20	11.0	1.36	0.198	0.306

表 5-7 不同结点数对应求解（方式二）误差(%)

5.5.3 弹性静力问题求解分析

关于弹性静力问题的基本方程，在本文的前面章节中有详细说明，此处不再叙述。使用修正紧支距离基函数直接配点法，这里将进行一些弹性静力的算例分析，以表明了该方法的有效性。

在计算中，位移场函数 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 为基本未知量，为了进行误差比较和分析，对于具有精确解的问题，仍采用这两种误差描述：结点位移相对误差 L_u 和结点应力 L_σ 相对误差，具体定义可参看本文以前章节。

算例　开圆孔方板：

该算例的情况与本文以前章节中相同，具体描述可参看以前章节。在对该算例进行数值分析时，边界条件的提法仍然采用两种方式：方式一，所有的边界点施加位移约束；方式二，具有对称性的左边界和下边界使用位移边界条件，其它边界使用力边界条件。

为方便比较，此处还给出了使用移动最小二乘直接配点法的计算结果，在计算中使用的是指数型权函数。将使用线性多项式基函数的 MLS 计算记为“MLS_1”， 使用二次多项式基的记为“MLS_2”。

表 5-8 给出了边界条件采用方式一时，使用各种方法进行求解，不同结点数对应的数值计算误差 L_u；表 5-9 则给出了数值计算误差 L_σ。计算中紧支距离基函数或紧支权函数的覆盖域半径由表 5-10 给出。

图 5-18 给出了边界条件采用方式一的情况下，结点数同为 $N=352$ 时，几种计算所得到的 $x=0$ 应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 的分布；图 5-19 则给出了使用 M2_CSRBF2 时，不同结点数计算时所对应的 $x=0$ 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 的分布结果。

结点数	48	117	352	513
MLS_1	1.3818	0.4831	0.31074	0.0686
MLS_2	0.79326	0.2838	0.0379	0.0463
CSRBF2	35.896	42.96	44.70	50.33
U_CSRBF2	1.933	4.792	3.04	0.904
M1_CSRBF2	1.59	0.7575	0.489	0.086
M2_CSRBF2	1.167	0.5557	0.0595	0.021

表 5-8 边界为方式一时，位移计算误差 L_u （ % ）

结点数	48	117	352	513
MLS_1	21.553	9.6621	5.3394	3.3073
MLS_2	22.824	11.717	3.5054	2.232
CSRBF2	136.56	192.93	312.21	344.6
U_CSRBF2	42.74	37.08	24.23	14.097
M1_CSRBF2	22.460	9.9646	5.973	3.338
M2_CSRBF2	27.88	12.773	3.914	1.703

表 5-9 边界为方式一时，应力计算误差 L_σ （ % ）

结点数	48	117	352	513
MLS_1	1. 5	1. 0	0. 6	0. 6
CSRBF2				
U_CSRBF2				
M1_CSRBF2				
MLS_2	2. 0	1. 2	1. 0	0. 9
M2_CSRBF2				

表 5-10 计算中紧支域半径的选取

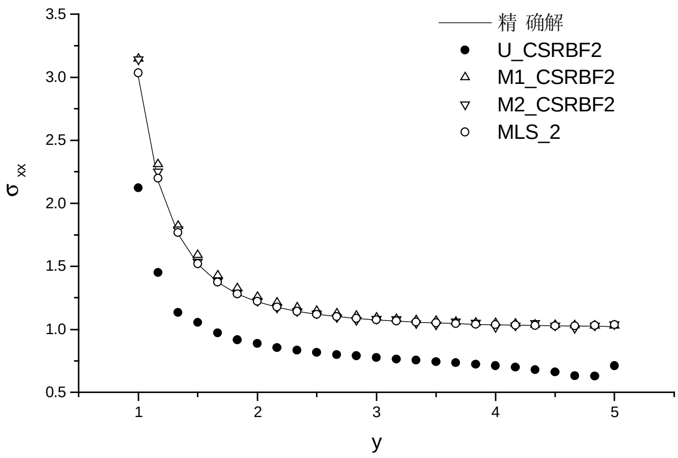


图 5-18 边界为方式一，结点数 N=352 时，$x=0$ 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$

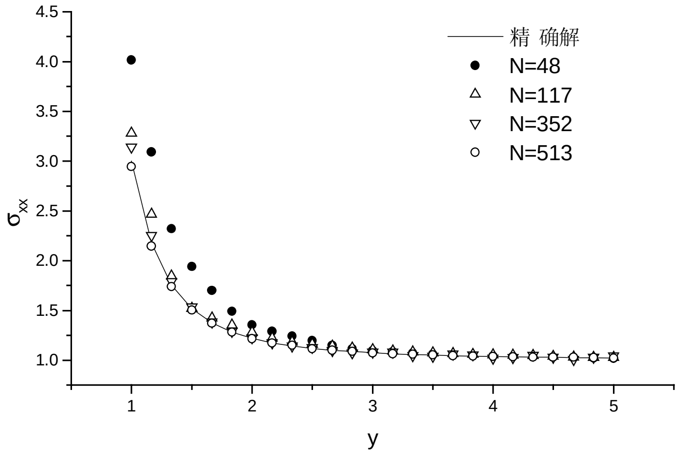


图 5-19 边界为方式一，使用 M2_CSRBF2 时，$x=0$ 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$

表 5-11 和表 5-12 分别给出了边界条件采用方式二时，数值计算误差 L_u 和 L_σ。图 5-20 和图 5-21 则给出计算所得到的 $x=0$ 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 的分布情况。计算中紧支距离基函数或紧支权函数的覆盖域半径与表 5-10 所示相同。

结点数	48	117	352	513
MLS_1	45.374	6.1523	1.4962	0.93037
MLS_2	33.298	5.4715	0.92884	0.5244
CSRBF2	280.47	501.67	332.61	115.26
U_CSRBF2	96.995	72.973	144.41	119.99
M1_CSRBF2	88.24	14.855	5.7928	0.977
M2_CSRBF2	31.384	5.4818	0.8354	0.342

表 5-11 边界为方式二时，位移计算误差 L_u（%）

结点数	48	117	352	513
MLS_1	173.26	25.227	11.271	3.9032
MLS_2	125.53	23.862	3.9378	2.3448
CSRBF2	668.58	1275.2	2188.1	675.48
U_CSRBF2	250.00	147.32	260.68	121.13
M1_CSRBF2	316.43	96.737	59.435	3.894
M2_CSRBF2	103.69	15.498	4.138	1.670

表 5-12 边界为方式二时，应力计算误差 L_σ（%）

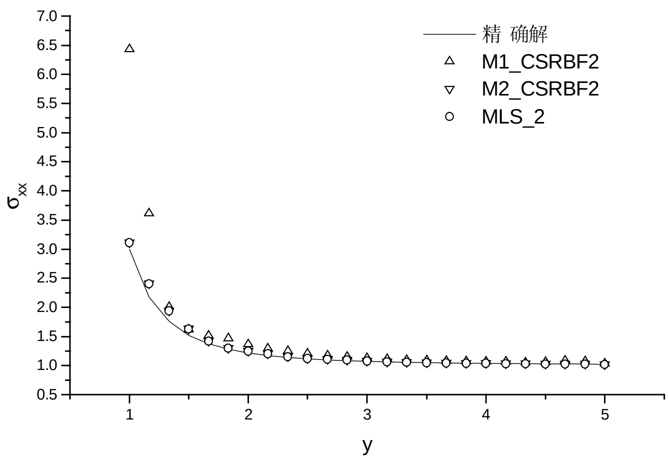


图 5-20 边界为方式二，结点数 N=352 时，$x=0$ 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$

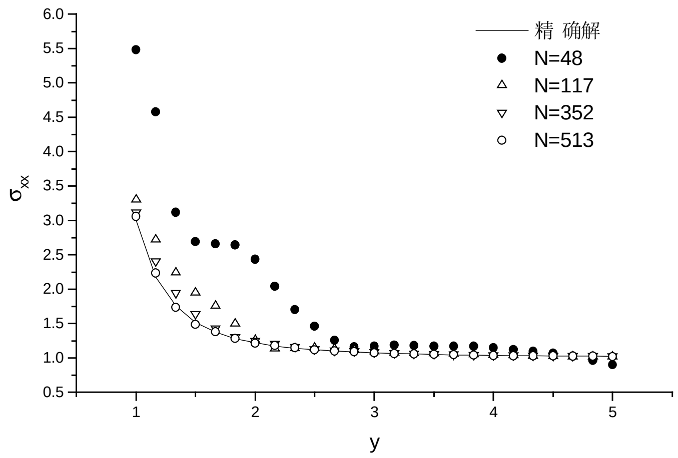


图 5-21 边界为方式二，使用 M2_CSRBF2 时，$x=0$ 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$

图 5-22 和图 5-23 分别给出了边界条件为方式一和方式二时，用结点应力误差表示的收敛曲线。图中 h 表示结点之间的最小间距。

通过以上的计算结果可以看出，本文所提出的紧支距离基函数修正方法是非常有效的。对于普通紧支距离基函数，如果紧支域半径较小，增加插值结点并不能提高计算精度；对于修正的紧支距离基函数，随着完备性阶次的提高，其求解的精度和收敛性都迅速得到改善。二阶完备性的紧支距离基函数的近似精度与使用二次多项式基的 MLS 近似相当，并略有一些超出；同时也可看出，对于修正紧支距离基函数近似，P 方式的收敛性优于 H 方式；另外，对存在力边界的问题，计算精度要比仅包含位移边界的问题稍差。

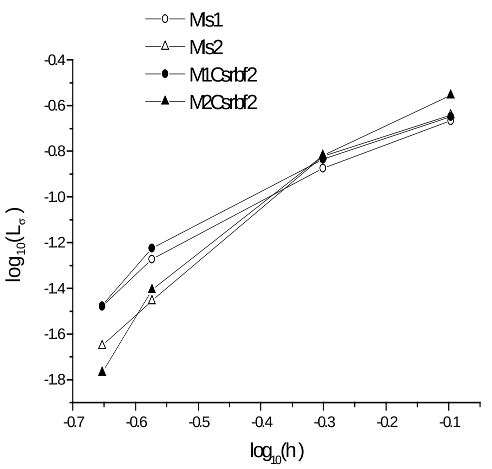


图 5-22 边界条件方式一时的收敛曲线

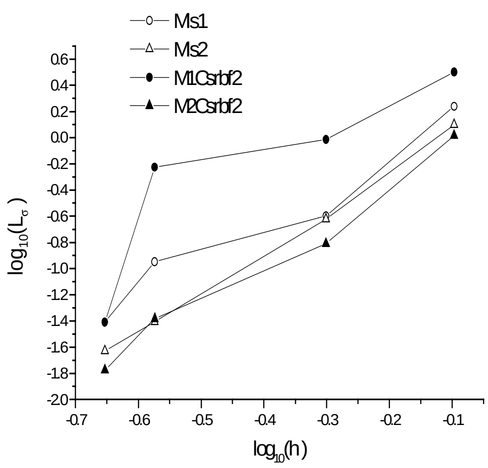


图 5-23 边界条件方式二时的收敛曲线

5.5.4 弹塑性静力问题求解分析

有关求解弹塑性静力问题的无网格直接配点格式，在本文的以前章节中有详细描述，此处不再讨论。本节将以修正的紧支距离基函数近似为基础，按照前文所建立的增量求解的配点模式，对弹塑性问题进行求解，以验证修正紧支距离基函数近似的有效性。

以下是相应的算例分析结果。

算例 1 ：

均匀长方板（长 0.15m，宽 0.01m）两端固定，在中间三分之二处受均布载荷 P, 具体描述可参照本文以前章节的相同算例。

将加载截面处的位移记为u_p，加载面左侧的应力记为σ_A，加载面右侧的应力记为σ_B。使用修正的紧支距离基函数，计算结果如图 5-24 所示，图中给出了加载截面左右两边的应力σ_A和σ_B，以及所加载荷 P 与加载截面处位移u_p的关系曲线。

计算中采用线性完备性修正的紧支距离基函数 M1_CSRBF2，所用结点总数为 48 个，布点方案为16×3的均匀分布，紧支域半径为 0.015m。容易看出，计算结果与解析解吻合的很好。

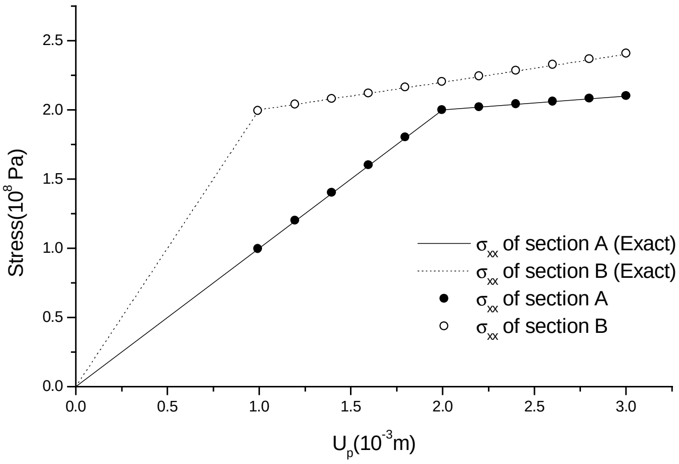


图 5-24 弹塑性分析结果

算例 2 ：

该算例为两端受均匀拉力 P，且中部具有对称缺口的单位厚度板。板的长度 $L = 0.04m$，宽度 $d = 0.02m$，缺口宽度 $a = 0.01m$，缺口深度 $h = 0.0025m$；板的材料是各向同性理想塑性材料。结构和材料的详细信息与本文以前章节中的相应算例相同，可参照前文。

此处使用修正距离基函数进行计算，在计算中所使用的布点方案也与以前章节中的计算相同。由于结构的对称性，计算中仅取右上的四分之一部分，对称面施加相应的对称边界约束，结点总数为 198 个。结点分布图可参看本文以前章节的相关内容。计算使用二次完备性修正的紧支距离基函数 M2_CSRBF2，紧支域半径为 0.003m。结果表明：缺口尖端处最先进入塑性，塑性区域随载荷的增加向周围扩展，计算得到分布载荷的极限值为 $2.360\times10^7\ N/m^2$ 。

当分布载荷 $P = 1.876\times10^7\ N/m^2$ 时，使用本文所述方法、有限元方法（使用 ADINA 软件）计算所得的 $x = 0.0$ 位置的应力 σ_{xx} 和 Mises 应力分布分别如图 5-25 和图 5-26 所示，其中也包含前文中 MLS 近似方法计算的结果。有限元计算所用的网格图也可参看本文以前章节中的相关内容。

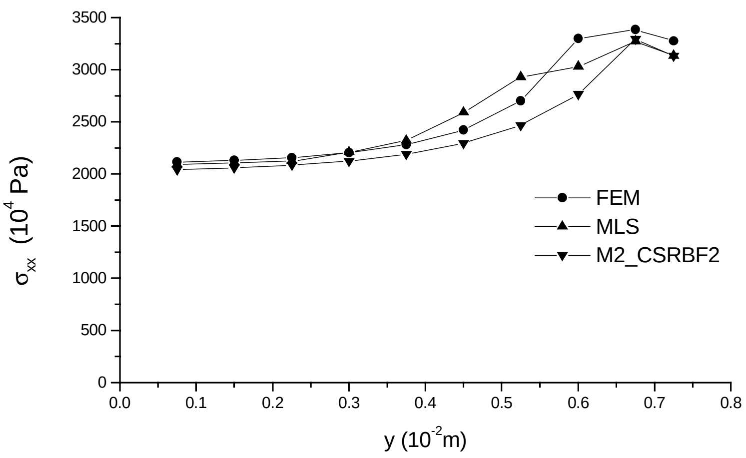


图 5-25 $x = 0.0$ 处的应力 σ_{xx}

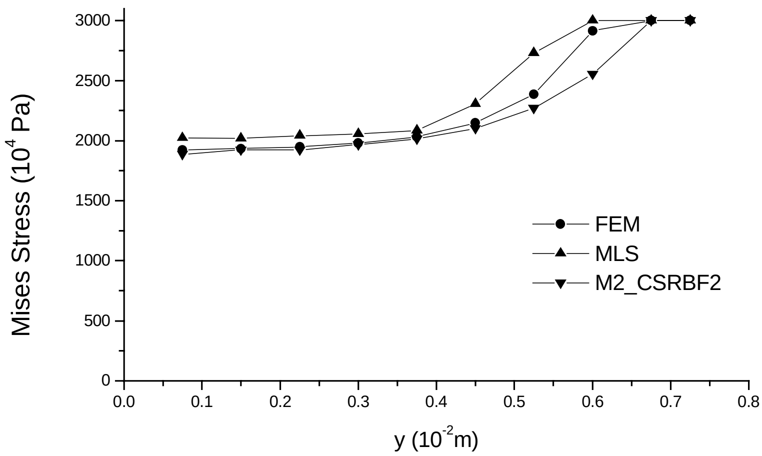


图 5-26 $x = 0.0$ 处的 Mises 应力

通过以上算例可以看出该方法的有效性。使用直接配点法所构造的弹塑性静力问题的无网格增量求解模式，具有高效、简单的特点，并且对于解决弹塑性大变形问题具有很好的前景。

5.6 修正紧支距离基函数最小二乘配点法

直接配点法只要求平衡方程在域内结点处满足，因此在其他位置、甚至是边界上的结点处平衡方程都可能不满足。对于边值偏微分方程，这可能造成了解的精度较差，尤其是在边界附近。针对这种缺点，本文提出了最小二乘配点法，它不仅要求边界结点处满足边界条件，而且在插值结点(其中包括位于边界上的结点)和附加的配点处都要求满足平衡方程。

针对最小二乘配点法实施方案的不同，分为：直接最小二乘配点法、拉格朗日乘子最小二乘配点法、修正的最小二乘配点法，其中对于边值问题，直接最小二乘配点法效果较差。关于各种最小二乘方案的具体描述，可参看本文以前相关章节。本节将以修正的紧支距离基函数近似为基础，按照最小二乘配点模式，对基本算例进行求解，以验证修正紧支距离基函数近似的有效性。

以下是相应的算例分析结果。

算例：

悬臂梁算例，本算例的详细说明可参看本文以前章节。

图 5-27 所示为计算所得到的上表面应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 分布。其中包括如下信息：解析解对应的应力分布曲线；结点数 126，使用直接配点求解的应力结果；结点数 126，且无附加配点，使用最小二乘配点法求解的应力结果；结点数 126，附加配点数为 60，使用最小二乘配点法求解的应力结果。结点和配点的分布方案也可参看本文以前章节。

计算中都使用二次完备性修正的紧支距离基函数 M2_CSRBF2。

表 5-13 给出了这几种计算方案对应的误差。

	直接配点 (N=126)	最小二乘配点 (N=126, M=0)	最小二乘配点 (N=126, M=60)
L_u	3.3293	1.0029	0.7734
L_σ	37.706	2.0520	1.2042

表 5-13 悬臂梁计算误差（%）

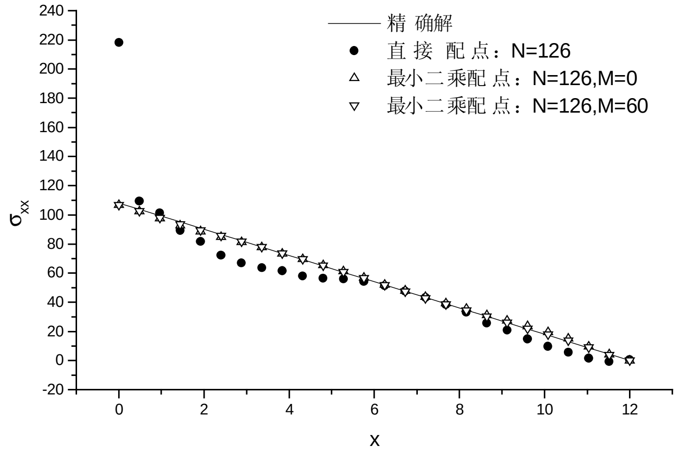


图 5-27 悬臂梁计算结果

通过对比可以看出，最小二乘配点法可以有效地提高数值解的精度。

5.7 修正紧支距离基函数配点法求解弹性动力问题

5.7.1 弹性动力学基本方程[1, 2, 3]

考虑域Ω上定义的弹性动力问题，位移边界为Γ_u，力边界为Γ_t，其所对应的偏微分定解方程为(以位移$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$为基本未知量)：

几何方程：

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2}(u_{i,j}(\mathbf{x},t)+u_{j,i}(\mathbf{x},t))\qquad(\forall\mathbf{x}\in\Omega)\tag{5-27}$$

本构方程：

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x},t)=D_{ijkl}\cdot\varepsilon_{kl}(\mathbf{x},t)\qquad(\forall\mathbf{x}\in\Omega)\tag{5-28}$$

平衡方程：

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x},t)+f_i(\mathbf{x},t)+\mu\dot{u}_i(\mathbf{x},t)=\rho\ddot{u}_i(\mathbf{x},t)\qquad(\forall\mathbf{x}\in\Omega)\tag{5-29}$$

边界条件：

$$u_i(\mathbf{x},t)=\bar{u}_i(\mathbf{x},t)\qquad(\forall\mathbf{x}\in\Gamma_u)\tag{5-30a}$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x},t)\cdot n_j(\mathbf{x},t)=\tilde{T}_i(\mathbf{x},t)\qquad(\forall\mathbf{x}\in\Gamma_t)\tag{5-30b}$$

初始条件：

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x},0) &= u_{i0}(\mathbf{x}) \\ \dot{u}_i(\mathbf{x},0) &= \dot{u}_{i0}(\mathbf{x}) \end{aligned} \qquad (\forall \mathbf{x} \in \Omega) \tag{5-31}$$

其中参数$\mathbf{x}$表示空间坐标，参数t表示时间；$\dot{u}_i(\mathbf{x},t)$表示速度场，$\ddot{u}_i(\mathbf{x},t)$表示加速度场；$f_i(\mathbf{x},t)$、$\overline{u}_i(\mathbf{x},t)$和$\tilde{T}_i(\mathbf{x},t)$分别为定义在域内、位移边界上和力边界上的已知函数；$u_{i0}(\mathbf{x})$和$\dot{u}_{i0}(\mathbf{x})$分别是初始位移和初始速度。在(5-29)式中ρ表示质量密度，μ是阻尼系数。由于仅考虑弹性状态，因此(5-28)式中的材料本构参数为常数。

为便于说明，本文以后的讨论将以二维问题为例。对二维问题，具体定义：

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x},t) &= [u(\mathbf{x},t),\ v(\mathbf{x},t)]^T \\ \mathbf{f}(\mathbf{x},t) &= [f_x(\mathbf{x},t),\ f_y(\mathbf{x},t)]^T \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) &= [\sigma_x(\mathbf{x},t),\ \sigma_y(\mathbf{x},t),\ \tau_{xy}(\mathbf{x},t)]^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t) &= [\varepsilon_x(\mathbf{x},t),\ \varepsilon_y(\mathbf{x},t),\ \gamma_{xy}(\mathbf{x},t)]^T \end{aligned} \tag{5-32}$$

应变：
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x(\mathbf{x},t) \\ \varepsilon_y(\mathbf{x},t) \\ \gamma_{xy}(\mathbf{x},t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u(\mathbf{x},t)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v(\mathbf{x},t)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u(\mathbf{x},t)}{\partial y} + \dfrac{\partial v(\mathbf{x},t)}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{5-33}$$

应力：
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{5-34a}$$

$$\mathbf{D} = D_0 \begin{bmatrix} 1 & \nu_0 & 0 \\ \nu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu_0}{2} \end{bmatrix}, \quad D_0 = \frac{E_0}{1-\nu_0^{\ 2}} \tag{5-34b}$$

平面应变问题：
$$E_0 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu_0 = \frac{\nu}{1-\nu} \tag{5-34c}$$

平面应力问题：
$$E_0 = E, \quad \nu_0 = \nu \tag{5-34d}$$

其中E为杨氏模量，ν为泊松比。

平衡方程：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_x(\mathbf{x},t)}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}(\mathbf{x},t)}{\partial y}+f_x(\mathbf{x},t)+\mu\dot{u}(\mathbf{x},t)=\rho\ddot{u}(\mathbf{x},t)\\&\frac{\partial\tau_{xy}(\mathbf{x},t)}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y(\mathbf{x},t)}{\partial y}+f_y(\mathbf{x},t)+\mu\dot{v}(\mathbf{x},t)=\rho\ddot{v}(\mathbf{x},t)\end{aligned}\tag{5-35}$$

5.7.2 空间离散方案

在动力分析中，空间离散与时间离散不相耦合。在求解域内及边界上布置N个离散结点$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\cdots\mathbf{x}_N$，将结点$\mathbf{x}_I$在时刻$t$的位移记为$\mathbf{u}_I(t)$，选取紧支距离基函数$\phi(r)$，根据修正紧支距离基函数近似方案则可建立位移场函数的近似，得到t时刻的位移：

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\sum_{I=1}^{N}\tilde{\phi}_I(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}_I(t)\tag{5-36}$$

其中$\tilde{\phi}_I(\mathbf{x})$为结点$I$所对应的修正紧支距离基函数，$\mathbf{u}_I(t)$为待解未知量。

将结点未知量写成矢量形式$\mathbf{U}$，即：

$$\mathbf{U}(t)=[u_1(t)\ \ v_1(t)\ \ u_2(t)\ \ v_2(t)\cdots\cdots\ u_N(t)\ \ v_N(t)\ ]^T\tag{5-37}$$

引入矩阵$\boldsymbol{\phi}$，定义如下：

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}\tilde{\phi}_1(\mathbf{x}) & 0 & \tilde{\phi}_2(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & \tilde{\phi}_N(\mathbf{x}) & 0\\ 0 & \tilde{\phi}_1(\mathbf{x}) & 0 & \tilde{\phi}_2(\mathbf{x}) & \cdots & 0 & \tilde{\phi}_N(\mathbf{x})\end{bmatrix}\tag{5-38}$$

则可得到位移场函数的矩阵表达形式：

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=[u(\mathbf{x},t)\ \ v(\mathbf{x},t)]^T=\boldsymbol{\phi}\cdot\mathbf{U}(t)\tag{5-39}$$

记：

$$\dot{\mathbf{U}}(t)=[\dot{u}_1(t)\ \ \dot{v}_1(t)\ \ \dot{u}_2(t)\ \ \dot{v}_2(t)\cdots\cdots\ \dot{u}_N(t)\ \ \dot{v}_N(t)\ ]^T\tag{5-40a}$$

$$\ddot{\mathbf{U}}(t)=[\ddot{u}_1(t)\ \ \ddot{v}_1(t)\ \ \ddot{u}_2(t)\ \ \ddot{v}_2(t)\cdots\cdots\ \ddot{u}_N(t)\ \ \ddot{v}_N(t)\ ]^T\tag{5-40b}$$

需要注意的是，$\mathbf{u}_I(t)$、$\dot{\mathbf{u}}_I(t)$和$\ddot{\mathbf{u}}_I(t)$并不代表结点I的位移、速度及加速度，而只是结点上定义的待定参数及其对时间的一次与二次导数。

根据(5-39)式，可以得到相应的速度场和加速度场的近似：

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)=[\dot{u}(\mathbf{x},t)\ \ \dot{v}(\mathbf{x},t)]^T=\boldsymbol{\phi}\cdot\dot{\mathbf{U}}(t)\tag{5-41a}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)=[\ddot{u}(\mathbf{x},t)\ \ \ddot{v}(\mathbf{x},t)]^T=\boldsymbol{\phi}\cdot\ddot{\mathbf{U}}(t)\tag{5-41b}$$

定义矩阵算子$\mathbf{K}_1$，$\mathbf{K}_2$：

$$\mathbf{K}_1 = D_0 \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \nu_0 \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \nu_0 \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{1-\nu_0}{2}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{1-\nu_0}{2}\dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{5-42a}$$

$$\mathbf{K}_2 = D_0 \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{1-\nu_0}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & \dfrac{1+\nu_0}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{1+\nu_0}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{1-\nu_0}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \tag{5-42b}$$

则应力可以表示为：

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T = \mathbf{K}_1 \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(t) \tag{5-43}$$

平衡方程可以表示为：

$$\mathbf{K}_2 \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mu \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{U}}(t) = \rho \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \cdot \ddot{\mathbf{U}}(t) \tag{5-44}$$

引入矩阵$\mathbf{M}_D(\mathbf{x})$、$\mathbf{K}_D(\mathbf{x})$和$\mathbf{C}_D(\mathbf{x})$，定义如下：

$$\mathbf{M}_D(\mathbf{x}) = \rho \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{K}_D(\mathbf{x}) = \mathbf{K}_2 \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{C}_D(\mathbf{x}) = \mu \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \tag{5-45}$$

则平衡方程可进一步表示为：

$$\mathbf{K}_D(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{C}_D(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{M}_D(\mathbf{x}) \cdot \ddot{\mathbf{U}}(t) \tag{5-46}$$

另外，初始条件可表示为：

初始位移： $$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(t)_{t=0} = \begin{bmatrix} u_0(\mathbf{x}) & v_0(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T \tag{5-47a}$$

初始速度： $$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{U}}(t)_{t=0} = \begin{bmatrix} \dot{u}_0(\mathbf{x}) & \dot{v}_0(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T \tag{5-47b}$$

边界条件可表示为：

位移边界： $$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(t) = \begin{Bmatrix} \bar{u}(\mathbf{x}, t) \\ \bar{v}(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix} \qquad (\forall \mathbf{x} \in \Gamma_u) \tag{5-48a}$$

力边界： $$\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}_1 \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(t) = \begin{Bmatrix} \tilde{T}_x(\mathbf{x}, t) \\ \tilde{T}_y(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix} \qquad (\forall \mathbf{x} \in \Gamma_t) \tag{5-48b}$$

5.7.3 时间域的离散方案

对于式(5-46)所表示的时间微分问题，通常采用分步数值积分的方法进行求

解。在本文中，将采用隐式 Newmark 积分方法。时刻$t=0$的位移$\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$，速度$\dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})$，加速度$\ddot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})$由初始条件给出；时间$t$时刻的位移、速度和加速度分别记为$\mathbf{u}_t(\mathbf{x})$、$\dot{\mathbf{u}}_t(\mathbf{x})$和$\ddot{\mathbf{u}}_t(\mathbf{x})$；将求解时间域$0\sim t_{\max}$等分为$n$个时间间隔$\Delta t = t_{\max}/n$。假定时刻0，$\Delta t$，$2\Delta t$，…，$t$的解已求得，计算的目的在于求解$t+\Delta t$时刻的解，由此建立求解所有离散时间步所对应解的一般过程。

Newmark 积分方法采用如下假设：

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + [(1-\delta)\ddot{\mathbf{u}}_t + \delta\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}]\Delta t \tag{5-49}$$

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + \dot{\mathbf{u}}_t\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\ddot{\mathbf{u}}_t + \alpha\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\right]\Delta t^2 \tag{5-50}$$

其中α、δ是按积分精度和稳定性要求而决定的参数。

利用(5-39)和(5-41)式的定义，可以得到：

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}_t + [(1-\delta)\ddot{\mathbf{U}}_t + \delta\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}]\Delta t \tag{5-51}$$

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{U}_t + \dot{\mathbf{U}}_t\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\ddot{\mathbf{U}}_t + \alpha\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}\right]\Delta t^2 \tag{5-52}$$

为了求出$t+\Delta t$时刻的解，要求在时间$t+\Delta t$基本方程(5-46)能够满足，即：

$$\mathbf{K}_D(\mathbf{x})\cdot\mathbf{U}_{t+\Delta t} + \mathbf{f}_{t+\Delta t}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}_D(\mathbf{x})\cdot\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \mathbf{M}_D(\mathbf{x})\cdot\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \tag{5-53}$$

由(5-52)可解得,

$$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}(\mathbf{U}_{t+\Delta t}-\mathbf{U}_t) - \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_t - \left(\frac{1}{2\alpha}-1\right)\ddot{\mathbf{U}}_t \tag{5-54}$$

将上式代入(5-51)，再一起代入(5-53)，可得到如下表达式：

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{K}_D(\mathbf{x}) + \frac{\delta}{\alpha\Delta t}\mathbf{C}_D(\mathbf{x}) - \frac{1}{\alpha\Delta t^2}\mathbf{M}_D(\mathbf{x})\right)\mathbf{U}_{t+\Delta t} &= -\mathbf{f}_{t+\Delta t}(\mathbf{x}) \\ &-\mathbf{M}_D(\mathbf{x})\left[\frac{1}{\alpha\Delta t^2}\mathbf{U}_t + \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_t + \left(\frac{1}{2\alpha}-1\right)\ddot{\mathbf{U}}_t\right] \\ &+\mathbf{C}_D(\mathbf{x})\left[\frac{\delta}{\alpha\Delta t}\mathbf{U}_t + (\frac{\delta}{\alpha}-1)\dot{\mathbf{U}}_t + \left(\frac{\delta}{2\alpha}-1\right)\Delta t\ddot{\mathbf{U}}_t\right] \quad , \quad (\forall\mathbf{x}\in\Omega)\end{aligned} \tag{5-55}$$

式(5-55)即为离散的动力学基本方程，它和式(5-54)、式(5-51)一起构成计算的核心部分。

5.7.4 求解弹性动力问题的直接配点法

直接配点法要求对于每一个求解时间步（如$t+\Delta t$），在求解域内的各结点$\mathbf{x}_i$处满足基本方程，在边界结点处满足此时刻该点对应的边界条件，形成求解方程组，从而求得$t+\Delta t$时刻的基本未知量$\mathbf{U}_{t+\Delta t}$；再依次利用(5-54)式和(5-51)式，求得$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$和$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$。这样即可得到$t+\Delta t$时刻的位移场、速度场和加速度场。

综合以上所述，直接配点法求解动力问题的方案可归纳如下：

1、 初始计算

(1) 形成转换矩阵$\mathbf{H}$，质量矩阵$\mathbf{M}$，刚度矩阵$\mathbf{K}$，阻尼矩阵$\mathbf{C}$：

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_1)\\ \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_2)\\ \vdots\\ \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_N)\end{bmatrix},\qquad \mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{M}_D(\mathbf{x}_1)\\ \mathbf{M}_D(\mathbf{x}_2)\\ \vdots\\ \mathbf{M}_D(\mathbf{x}_N)\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_D(\mathbf{x}_1)\\ \mathbf{K}_D(\mathbf{x}_2)\\ \vdots\\ \mathbf{K}_D(\mathbf{x}_N)\end{bmatrix},\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_D(\mathbf{x}_1)\\ \mathbf{C}_D(\mathbf{x}_2)\\ \vdots\\ \mathbf{C}_D(\mathbf{x}_N)\end{bmatrix}\tag{5-56}$$

定义载荷矩阵$\mathbf{Q}(t)$：

$$\mathbf{Q}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{f}(\mathbf{x}_1,t) & \mathbf{f}(\mathbf{x}_2,t) & \cdots & \mathbf{f}(\mathbf{x}_N,t)\end{bmatrix}^T\tag{5-57}$$

(2) 给定结点初始位移$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_i)$、初始速度$\dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}_i)$。

利用(5-47a)和(5-47b)，可以得到结点未知量的初始值及对时间的一阶导数：

$$\mathbf{U}_0=\mathbf{H}^{-1}\cdot\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_1)\\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x}_2)\\ \vdots\\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x}_N)\end{Bmatrix},\qquad \dot{\mathbf{U}}_0=\mathbf{H}^{-1}\cdot\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}_1)\\ \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}_2)\\ \vdots\\ \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}_N)\end{Bmatrix}\tag{5-58}$$

由于在$t=0$时刻各结点处应满足方程(5-46)，因此：

$$\mathbf{K}\cdot\mathbf{U}_0+\mathbf{Q}_0+\mathbf{C}\cdot\dot{\mathbf{U}}_0=\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{U}}_0\tag{5-59}$$

从而可以求得结点未知量的初始值对时间的二阶导数：

$$\ddot{\mathbf{U}}_0=\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K}\mathbf{U}_0+\mathbf{Q}_0+\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_0)\tag{5-60}$$

(3) 选择时间步长Δt，参数δ和α，并计算如下常数：

$c_0=\dfrac{1}{\alpha\Delta t^2}$， $c_1=\dfrac{\delta}{\alpha\Delta t}$， $c_2=\dfrac{1}{\alpha\Delta t}$， $c_3=\dfrac{1}{2\alpha}-1$， $c_4=\dfrac{\delta}{\alpha}-1$

$c_5=\dfrac{\Delta t}{2}\cdot(\dfrac{\delta}{\alpha}-2)$， $c_6=\Delta t\cdot(1-\delta)$， $c_7=\delta\cdot\Delta t$

(4) 根据(5-55)式，可形成有效刚度矩阵$\hat{\mathbf{K}}$： $\hat{\mathbf{K}}=\mathbf{K}-c_0\mathbf{M}+c_1\mathbf{C}$
由于$\mathbf{K}$、$\mathbf{M}$和$\mathbf{C}$都是带状稀疏矩阵，因而$\hat{\mathbf{K}}$也将是带状稀疏矩阵。

2、 对于每一时间步长

(1) 计算时刻$t+\Delta t$的有效载荷$\hat{\mathbf{Q}}_{t+\Delta t}$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{Q}}_{t+\Delta t}=&-\mathbf{Q}_{t+\Delta t}-\mathbf{M}\cdot(c_0\mathbf{U}_t+c_2\dot{\mathbf{U}}_t+c_3\ddot{\mathbf{U}}_t)\\&+\mathbf{C}\cdot(c_1\mathbf{U}_t+c_4\dot{\mathbf{U}}_t+c_5\ddot{\mathbf{U}}_t)\end{aligned}\tag{5-61}$$

(2) 形成时刻$t+\Delta t$的基本方程组

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{U}_{t+\Delta t}=\tilde{\mathbf{Q}}_{t+\Delta t}\tag{5-62}$$

(3) 形成时间$t+\Delta t$时边界结点处的边界条件：

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_i)\cdot\mathbf{U}_{t+\Delta t}=\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i)_{t+\Delta t}\qquad(\forall\mathbf{x}_i\in\Gamma_u)\tag{5-63a}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{K}_1\cdot\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_i)\cdot\mathbf{U}_{t+\Delta t}=\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_i)_{t+\Delta t}\qquad(\forall\mathbf{x}\in\Gamma_t)\tag{5-63b}$$

并用它们代替方程组(5-62)中相应自由度所对应的方程，从而形成最终的待解方程组。

(4) 求解所形成的方程，得到基本未知量$\mathbf{U}_{t+\Delta t}$；

(5) 根据(5-54)式和(5-51)式依次计算$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$和$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$，即：

$$\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}=c_0(\mathbf{U}_{t+\Delta t}-\mathbf{U}_t)-c_2\dot{\mathbf{U}}_t-c_3\ddot{\mathbf{U}}_t\tag{5-64a}$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}=\dot{\mathbf{U}}_t+c_6\ddot{\mathbf{U}}_t+c_7\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}\tag{5-64b}$$

(6) 根据(5-39)和(5-41)式，可以得到时间$t+\Delta t$时的位移场、速度场和加速度场的近似，即：

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})_{t+\Delta t}=\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{U}_{t+\Delta t}\tag{5-65a}$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x})_{t+\Delta t}=\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})\cdot\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}\tag{5-65b}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x})_{t+\Delta t}=\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})\cdot\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}\tag{5-65c}$$

(7) 计算时间$t+\Delta t$时的各结点的位移、速度和加速度：

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_i)_{t+\Delta t}=\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_i)\cdot\mathbf{U}_{t+\Delta t}\tag{5-66a}$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i)_{t+\Delta t}=\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_i)\cdot\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}\tag{5-66b}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i)_{t+\Delta t} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_i)\cdot\ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \tag{5-66c}$$

3、 时间步长的选取

本文中所使用的 Newmark 时间积分方案为隐式格式，该算法在$\delta \ge 0.5$，$\alpha \ge 0.25(0.5+\delta)^2$时为无条件稳定的[1，2，6]，即时间步长$\Delta t$的大小不影响解的稳定性。此时$\Delta t$的选择主要是根据解的精度要求而定。

本文的计算中，一般取$\delta = 0.5$和$\alpha = 0.25$。并且不考虑阻尼项，即$\mu = 0.0$。

5.7.5 动力问题的算例分析[112-115]

算例一：一维杆的振动

长为l的杆，$x=0$端固定，$x=l$端自由，如图 5-28 所示。材料的弹性模量为E，密度为ρ；

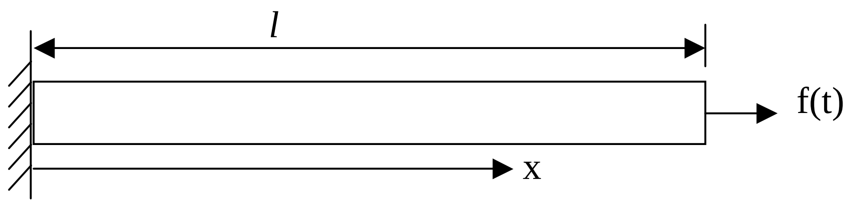


图 5-28 一维杆模型

在$x=l$的自由端，该杆受到一纵向冲击载荷$f(t)=\delta(t)$的作用。问题的基本方程和定解条件为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < l \\ u(x,0) = \dot{u}(x,0) = 0.0 \\ u(0,t) = 0, \quad \sigma(l,t) = \delta(t) \end{cases} \tag{5-67}$$

其中$c=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$，为波速；

在 $x=0$ 端，为固定边界，位移的反射系数为-1，应力的反射系数为+1；在 $x=l$ 端，为自由边界，位移的反射系数为+1，应力的反射系数为-1。弹性波将在杆的两个端点来回反射。对于冲击载荷 $f(t)=\delta(t)$，杆中位移场的解析解为：

$$\begin{aligned}u(x,t)=\frac{c}{E}\{&[H(t+\frac{x-l}{c})-H(t-\frac{x+l}{c})]-[H(t+\frac{x-3l}{c})-H(t-\frac{x+3l}{c})]\\&+[H(t+\frac{x-5l}{c})-H(t-\frac{x+5l}{c})]-\cdots\}\end{aligned} \tag{5-68}$$

其中，$H(\bullet)$ 为 Heaviside 阶跃函数，即：

$$H(x)=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x<0\end{cases} \tag{5-69}$$

采用本文所建立的求解动力问题的修正紧支距离基函数直接配点法，对该问题进行了数值计算。计算中取：E=$10^4 Pa$，ρ=1.0kg/m^3，l=10.0m。此时波速 c=100m/s，波从一端传至另一端耗时为0.1s，因此使用图 5-29 所示的载荷来模拟冲击载荷。载荷的作用时间为0.02s，在0.01s时达到应力峰值$100Pa$。

图 5-30 至图 5-33 给出了数值计算结果。在计算中，采用均布的 201 个结点，结点间距为 $\Delta h=0.05m$；使用满足线性完备性的紧支距离基函数 M1_CSRBF2，紧支域半径 $R=0.2m$；计算的时间步长取 $\Delta t=0.0005s$，计算终止时间为 $t_{\max}=0.5s$。

图 5-30 给出了 $x=0$ 端的应力变化曲线。作为固支端，应力波的反射系数为+1，如果不存在阻尼耗散，该点的应力峰值应为200。计算结果表明，该点在 $t=0.11s$ 时达到第一次应力峰值184.26，与理想峰值的比为92.1%；在 $t=0.31s$ 时达到第二次应力峰值177.97，与理想峰值的比为88.99%。

图 5-31 给出了位置 $x=5$ 处的位移变化曲线，图 5-32 则给出了该位置的应力变化曲线；该点在 $t=0.06s$ 时达到第一次应力峰值93.22，与载荷峰值的比为93.2%；在 $t=0.16s$ 时达到第二次应力峰值90.02，与载荷峰值的比为90%。

图 5-33 给出了 $x=l$ 端的位移变化曲线。作为自由端，位移波的反射系数系数为+1；

通过结果可以看出，数值计算与解析解吻合的很好。

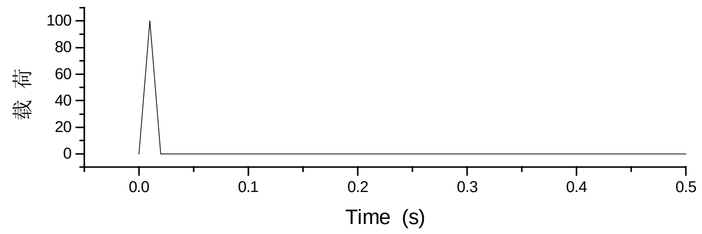


图 5-29 冲击载荷（作用时间为0.02s，峰值为100）

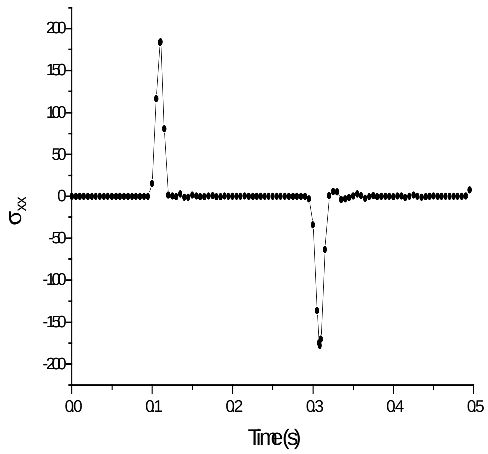


图 5-30 x=0 端的应力

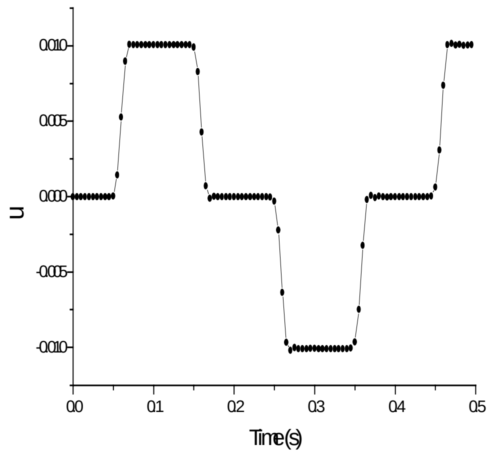


图 5-31 x=5.0 处的位移

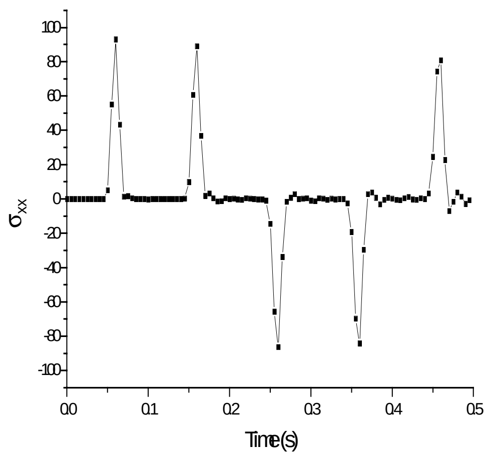


图 5-32 x=5.0 处的应力

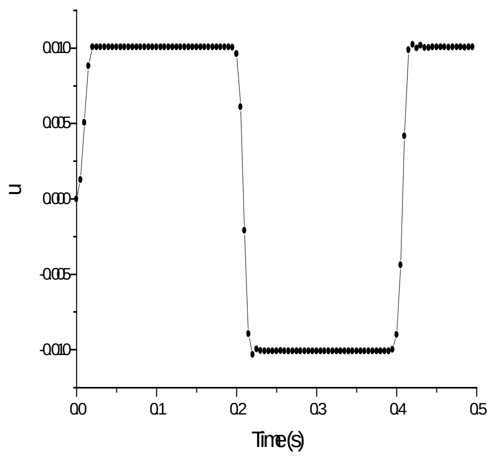


图 5-33 x=10.0 处的位移

算例二：二维波传播问题的分析

本例分析了由一个发射装置产生的线源作用到一无限大弹性半空间所产生的扰动问题。该类波传播问题是由Lamb在1904年首先提出的，因此这类问题被称为Lamb问题[112]。Achenbach[113,115] 等人给出了这类问题的解析解。

设在半无限弹性介质的自由表面上作用着线源:

$$\sigma_{yy} = -Q \cdot \delta(x) \cdot f(t) \tag{5-70}$$

并且当$t \le 0$时，$f(t) = 0$。问题的几何描述如图5-34所示。

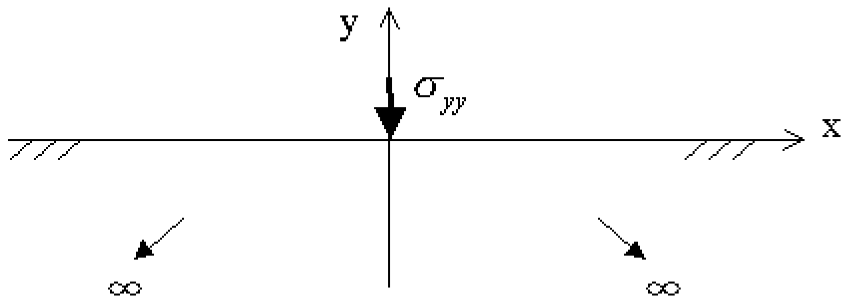


图 5-34 线源作用的半无限弹性介质

由于结构及载荷的对称性，计算中仅考虑右边二分之一部分。

在数值计算中，取材料的弹性模量$E = 10^4 Pa$，密度为$\rho = 10^4 Kg/m^3$，泊松比$\nu = 1/3$。相应的波传播速度为$c = \sqrt{E/\rho} = 1m/s$。设计算终止时间为$9s$，因此仅取$12m \times 12m$的有限区域进行分析。所施加的载荷情况如图5-35所示，相应的计算模型如图5-36所示。

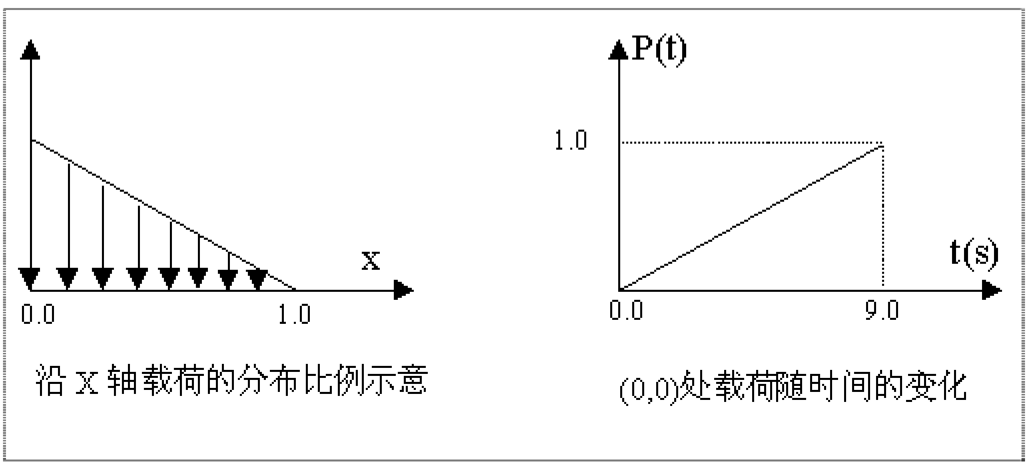


图 5-35 载荷情况

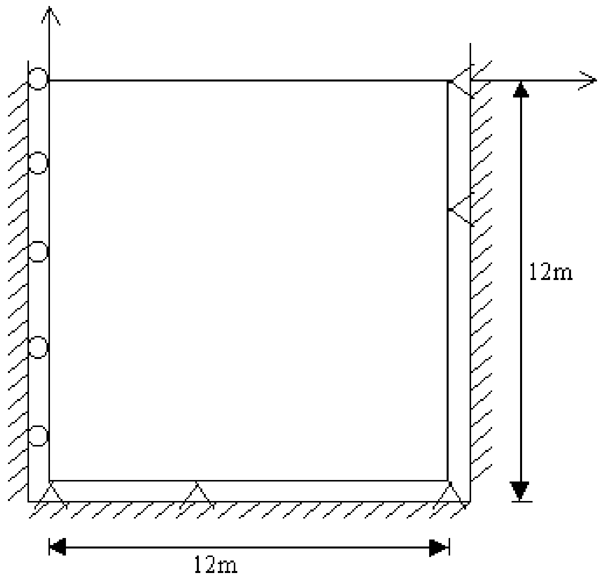


图 5-36 计算模型

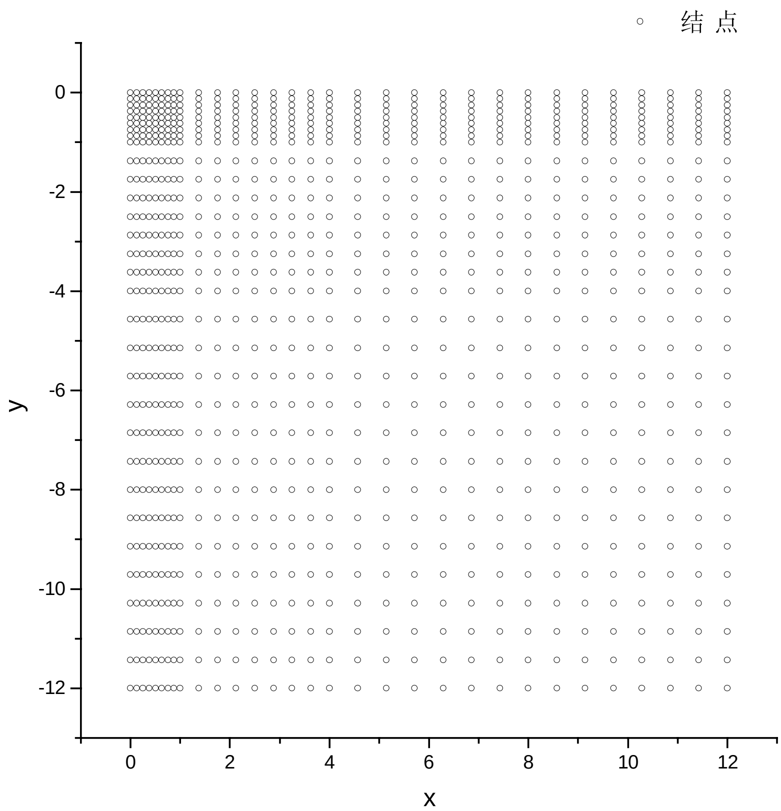


图 5-37 结点的非均布方案（31×31）

采用修正紧支距离基函数直接配点法进行数值计算时，使用满足线性完备性的紧支距离基函数M1_CSRBF2。计算中使用$31\times31=961$个结点，布点方案有两种：均布和非均布。对于均布的布点方案，x方向和y方向都被分成30等份，坐标轴方向的结点间距为$\Delta h_x=\Delta h_y=0.4m$；对于非均布的布点方案，在载荷源$(0,0)$附近结点较密，随着与原点距离的增加，结点在$x$方向和$y$方向的分布都变稀，坐标轴方向的最小结点间距为$\Delta h_x^{\min}=\Delta h_y^{\min}=0.125m$，最大间距为$\Delta h_x^{\max}=\Delta h_y^{\max}=0.571m$。图5-37给出了结点非均布时的布点情况。

计算中紧支域半径取$R=1.0m$，时间步长$\Delta t=0.125s$。

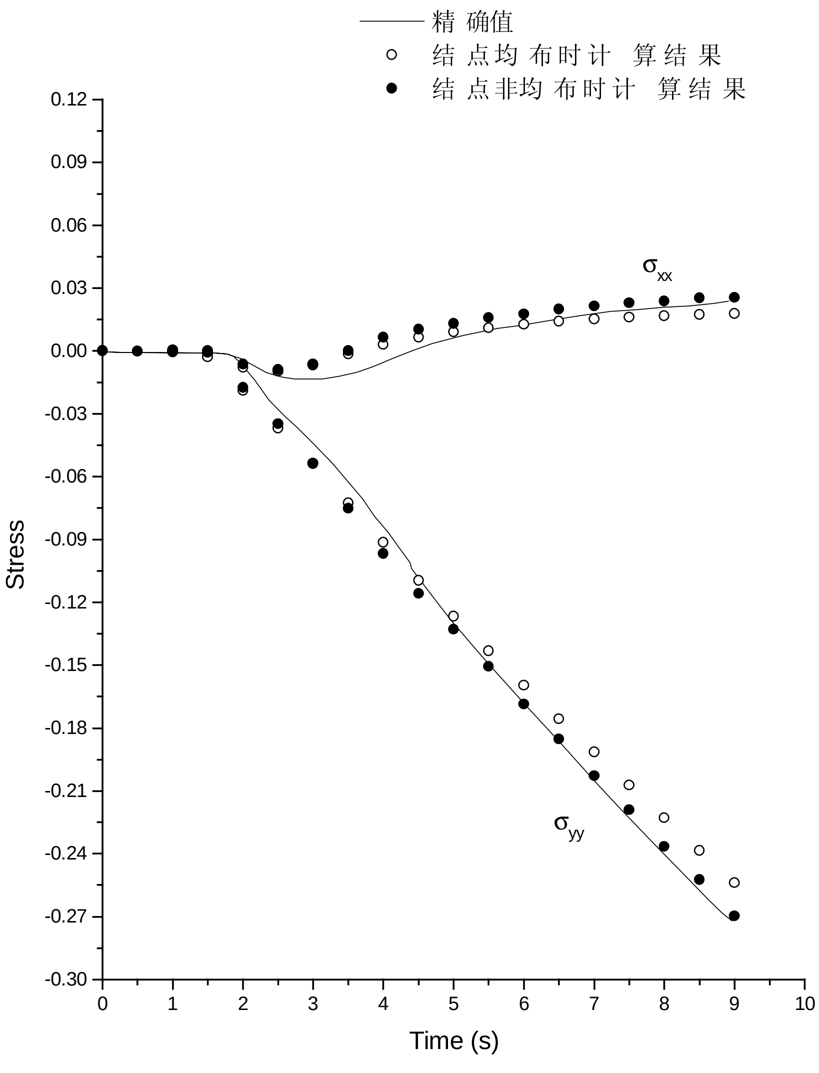


图 5-38　中心线上$(0.0,-2.0)$处的应力响应

图5-38给出了数值计算得到的位于中心线上的点 $(x=0.0, y=-2.0)$ 处的应力响应结果，图中包含应力 σ_{xx} 和 σ_{yy} 的计算结果以及它们的解析解。

可以看出，使用此处所选取布点方案（均布或非均布）和计算步长，修正紧支距离基函数直接配点法可获得精确的结果。并且，采用与载荷分布相关的结点非均布方案，能够获得更好的计算效果。

算例三：结点间距选取的原则

此处将通过算例的分析，来讨论使用本文所建立的直接配点格式的无网格方法进行动力问题求解时，选取结点间距的原则。为简明起见，使用一维杆振动算例，结构和材料的具体描述与前面的算例完全相同：杆长 $l=10m$， $x=0$ 端固定， $x=l$ 端自由，并且在自由端受到冲击载荷的作用。

首先，使用均匀分布的 51 个结点进行数值计算。此时结点间距为 $\Delta h=0.2m$；使用满足线性完备性的紧支距离基函数 M1_CSRBF2，紧支域半径取 $R=0.8m$；计算的时间步长 $\Delta t=0.0005s$。作用于自由端的应力冲击载荷的峰值为 100，但作用时间发生变化，也即波长不同。由于波速 $c=100m/s$，因此如果冲击载荷作用时间为 T_p，则波长为 $\lambda=c\cdot T_p$。

变化不同的波长，而保持其他条件不变，以进行各种计算。表 5-14 给出了计算结果：在 $x=5$ 处的第一次及第二次应力峰值与理想峰值的百分比。

加载时间(s)	波长(m)	Δh/波长	应力第一峰值百分比	应力第二峰值百分比
0.04	4.0	1/20	95.51%	93.94%
0.03	3.0	1/15	94.03%	92.03%
0.02	2.0	1/10	91.03%	87.76%
0.016	1.6	1/8	89.23%	86.99%
0.012	1.2	1/6	85.57%	82.43%
0.01	1.0	1/5	81.90%	76.72%
0.008	0.8	1/4	75.73%	68.24%
0.006	0.6	1/3	64.97%	56.30%

表 5-14 $x=5.0$ 处应力峰值与理想峰值的百分比（结点总数为 51）

另外，图5-39和图5-40给出了载荷作用时间为 $0.02s$ 时计算所得到的 $x=5$ 处位移和应力的响应，此计算时对应的终止时间为 $t_{\max}=0.5s$ 。

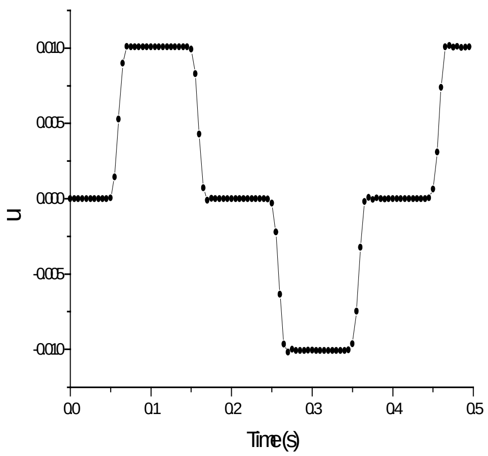


图 5-39　$x=5.0$ 处的位移响应

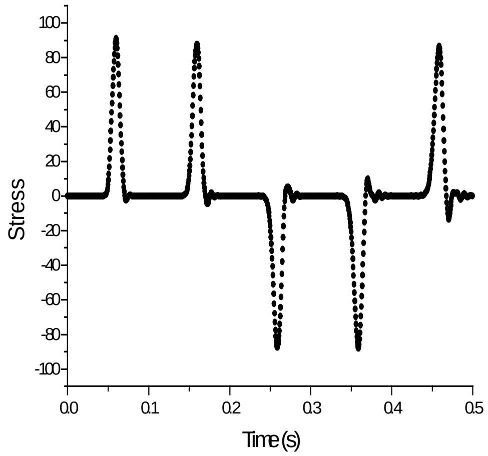


图 5-40　$x=5.0$ 处的应力响应

然后，保持冲击载荷作用时间 $T_p=0.02s$ 不变，即波长 $\lambda=2.0m$ ，而使用不同数量的均布结点进行数值计算。使用满足线性完备性的紧支距离基函数M1_CSRBF2，并且紧支域半径取 $R=4.0*\Delta h$ ；计算的时间步长 $\Delta t=0.0005s$ ，作用于自由端的应力冲击载荷的峰值为 100。表 5-15 给出了相应的计算结果：在 $x=5$ 处的第一次及第二次应力峰值与理想峰值的百分比。

结点数	结点间隔 Δh (m)	紧支覆盖域半径R(m)	Δh/波长	应力第一峰值百分比	应力第二峰值百分比
101	0.1	0.4	1/20	92.78%	88.37%
81	0.125	0.5	1/16	92.44%	88.11%
51	0.2	0.8	1/10	91.03%	87.76%
41	0.25	1.0	1/8	89.25%	87.95%
31	0.3333	1.34	1/6	85.98%	85.16%
26	0.4	1.6	1/5	82.67%	81.39%
21	0.5	2.0	1/4	76.09%	74.25%
17	0.625	2.5	1/3.2	68.59%	66.38%

表 5-15　$x=5.0$ 处应力峰值与理想峰值的百分比（载荷情况不变）

根据该算例的分析可以得出这样一个经验公式：对于修正紧支距离基函数直接配点格式的无网格方法，为了保证动力计算的精度，结点分布最大间隔Δh应该满足如下条件：

$$\Delta h \le (\frac{1}{10} \sim \frac{1}{8}) \cdot \lambda \tag{5-71}$$

其中λ为计算中所涉及的波长。

算例四：时间步长的选取原则

本文中所使用的隐式格式的 Newmark 时间积分方案在$\delta \ge 0.5$，$\alpha \ge 0.25(0.5+\delta)^2$时为无条件稳定的，即时间步长$\Delta t$的大小不影响解的稳定性。然而$\Delta t$的选择却会影响解的精度。一般而言，$\Delta t$的选取首先必须大于对系统产生主要影响的固有频率所对应的最小周期。但是，为了保证一定的计算精度，Δt还应该根据结点的分布情况来选取。

此处将通过算例的分析，来讨论在使用直接配点格式的无网格方法进行动力问题求解时，时间步长的选取原则。为简明起见，仍然使用一维杆算例。

首先，使用均匀分布的 101 个结点进行数值计算。此时结点间距为$\Delta h = 0.1m$；使用线性完备性的紧支距离基函数 M1_CSRBF2，紧支域半径取$R = 0.4m$；作用于自由端的应力冲击载荷的峰值为 100，冲击时间$T_p = 0.02s$，即波长为$\lambda = 2m$。使用不同的时间步长Δt进行计算。表 5-16 给出了各自的计算结果： 在$x = 5$处的第一次及第二次应力峰值与理想峰值的百分比。

时间步长Δt (s)	$\Delta t : \frac{\lambda}{c}$	应力第一峰值百分比	应力第二峰值百分比
0.00025	1/80	95.15%	92.61%
0.0005	1/40	92.78%	89.37%
0.001	1/20	88.41%	88.57%
0.002	1/10	87.58%	77.01%
0.0025	1/8	84.39%	69.77%
0.005	1/4	65.51%	53.72%
0.006	1/3	64.97%	56.30%

表 5-16 $x = 5.0$处应力峰值与理想峰值的百分比（结点数为 101 个）

然后，使用均匀分布的 51 个结点进行数值计算，此时结点间距为$\Delta h = 0.2m$；仍使用满足线性完备性的紧支距离基函数 M1_CSRBF2，但紧支域半径取$R = 0.8m$。

使用不同的时间步长Δt进行计算。表 5-17 给出了各自的计算结果：在$x = 5$处的第一次及第二次应力峰值与理想峰值的百分比。

时间步长Δt (s)	$\Delta t : \frac{\lambda}{c}$	应力第一峰值百分比	应力第二峰值百分比
0.00025	$1/80$	91.23%	90.15%
0.0005	$1/40$	91.03%	87.76%
0.001	$1/20$	88.09%	87.17%
0.002	$1/10$	86.57%	74.87%
0.0025	$1/8$	83.47%	69.14%
0.005	$1/4$	65.20%	53.66%

表 5-17 $x = 5.0$处应力峰值与理想峰值的百分比（结点数为 51 个）

另外，图5-41和图5-42给出了结点数为51，时间步长$\Delta t = 0.001s$时计算所得到的$x = 5$处位移响应和应力响应。此计算的终止时间为$t_{\max} = 0.5s$。

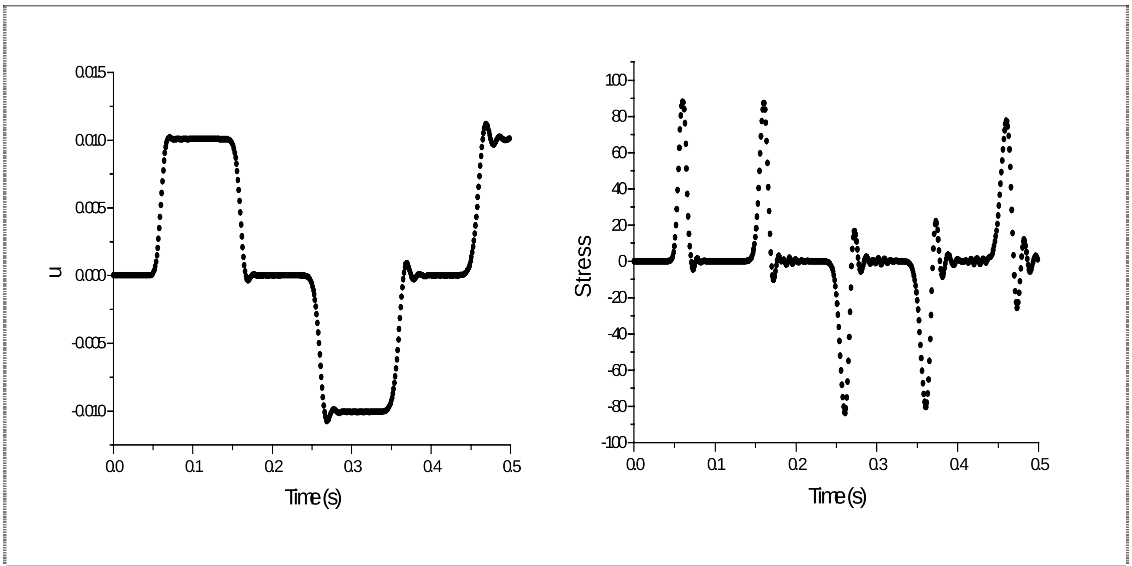


图 5-41 $x = 5.0$处的位移响应　　图 5-42 $x = 5.0$处的应力响应

根据该算例的分析可以得出这样一个经验公式：对于修正紧支距离基函数直接配点格式的无网格方法，为了保证动力计算的精度，计算的时间步长Δt应该满足如下条件：

$$\Delta t \le (\frac{1}{20}) \cdot \lambda / c \tag{5-72}$$

其中λ为计算中所涉及的波长，c为材料中的波速。

通过本节的算例可以看出，本文所建立的用于求解动力问题的修正紧支距离基函数直接配点法是成功的，具有简洁、高效的优点。借助于算例分析，本节还给出了使用该方法求解时，选择结点间距和时间步长的经验法则。

5.8 小结

本章讨论了紧支距离基函数的完备性修正方案，以及修正紧支距离基函数在求解偏微分方程中的应用，内容涉及泊松方程的求解、弹性静力问题的求解、弹塑性静力问题的求解，以及动力问题的求解。数值计算中使用修正紧支距离基函数构造近似，使用直接配点方案或最小二乘配点方案形成方程，是简洁高效的无网格计算方法。通过算例分析可以看出，修正紧支距离基函数配点法是非常有效的。

由于直接配点、最小二乘配点等方法在本文的以前章节有详细介绍，因此本章没有过多讲述；同时，各算例的详细描述也可参照以前的相关章节。而对于动力问题的计算，本章进行了较为详细的说明，并通过一系列的对比计算，得到了具有指导意义的结论。

另外，对于配点法中边界条件提法应注意的事项，在本文以前的章节有详细的讨论，本章中的内容也都遵循那些原则。

第六章 基于子域法的无网格方法

6.1 引言

在本文的以前章节中，介绍了几种无网格近似方案（移动最小二乘近似、距离基函数近似、修正紧支距离基函数近似等），并基于配点法（直接配点法、最小二乘配点法等）构造了相应的无网格方法，它们都具有“真正无网格”的特点。本章将使用子域法构造无网格计算方法。

子域法和配点法都是加权残差方法的特殊格式，所不同的是配点法对结点处进行约束以形成方程，而子域法是对结点附近的一个区域施加约束以形成方程。结合无网格近似和子域法所建立的求解方法，仍然具有“真正无网格”的特点。本章将介绍子域法的基本实现方案，并将其与修正紧支距离基函数近似相结合，进行了求解力学问题的求解。

6.2 子域法

本节将以弹性静力问题的求解为例对子域法进行说明，并限于二维空间的描述。考虑弹性静力问题所对应的偏微分定解方程(以位移为基本未知量)：

$$\begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in S_u \\ \mathbf{T}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in S_t \end{cases} \tag{6-1}$$

其中Ω为求解区域，S_u为位移边界，S_t为力边界；$\mathbf{u}(\mathbf{x})$为待求位移场函数，$\mathbf{B}$和$\mathbf{T}$为微分算子，$\mathbf{f}(\mathbf{x})$、$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$和$\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$分别为定义在域内、位移边界上和力边界上的已知函数。

在求解域内及边界上布置N个离散结点$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \cdots \mathbf{x}_N$，在结点$\mathbf{x}_I$处定义未知量$\mathbf{u}_I$，则根据某种无网格近似方案可以建立位移场函数的近似：

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N} \phi_I(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_I \tag{6-2}$$

其中$\phi_I(\mathbf{x})$为无网格近似中结点I对应的插值函数，$\mathbf{u}_I$为待解未知量。

将近似解$\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$代入方程(6-1)，将产生如下残差：

$$\begin{cases}\mathbf{R}_{\Omega}(\mathbf{x})=\mathbf{B}(\mathbf{u}^{h}(\mathbf{x}))-\mathbf{f}(\mathbf{x}) & \mathbf{x}\in\Omega\\ \mathbf{R}_{S_u}(\mathbf{x})=\mathbf{u}^{h}(\mathbf{x})-\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) & \mathbf{x}\in S_u\\ \mathbf{R}_{S_t}(\mathbf{x})=\mathbf{T}(\mathbf{u}^{h}(\mathbf{x}))-\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) & \mathbf{x}\in S_t\end{cases} \tag{6-3}$$

如果$\mathbf{R}_{\Omega}(\mathbf{x})=\mathbf{R}_{S_u}(\mathbf{x})=\mathbf{R}_{S_t}(\mathbf{x})=0$，则$\mathbf{u}^{h}(\mathbf{x})$为精确解。而对于近似解，残差将不等于 0。

在子域法中，对于求解域内部的结点$\mathbf{x}_I$，要求在该结点的影响域$\mathbf{\Omega}_I$内平衡方程的残差加权积分为零，即：

$$\iint_{\Omega_I}\mathbf{R}_{\Omega}(\mathbf{x})\cdot\phi_I(\mathbf{x})\,d\Omega_I=0,\quad(\mathbf{x}_I\in\Omega)\cap(\mathbf{x}_I\notin S_u)\cap(\mathbf{x}_I\notin S_t) \tag{6-4}$$

而对于边界上的结点，要求在该位置相应的边界条件的残差为零，即：

$$\begin{cases}\mathbf{u}^{h}(\mathbf{x}_I)=\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_I) & \forall\mathbf{x}_I\in S_u\\ \mathbf{T}(\mathbf{u}^{h}(\mathbf{x}_I))=\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_I) & \forall\mathbf{x}_I\in S_t\end{cases} \tag{6-5}$$

如上所示的(6-4)式和(6-5)式构成了子域法求解的基本方程。对于(6-4)式所涉及的积分计算，以下将做详细说明。

设结点$\mathbf{x}_I$的影响域半径为R，使用原点位于$\mathbf{x}_I$的极坐标(r,θ)，可以将(6-4)式写成：

$$\iint_{\Omega_I}\mathbf{R}_{\Omega}(\mathbf{x})\cdot\phi_I(\mathbf{x})\,d\Omega_I=\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}\mathbf{R}_{\Omega}(r,\theta)\cdot\phi_I(r,\theta)\cdot r\,drd\theta \tag{6-6}$$

其中：　$x=x_I+r\cdot\cos(\theta)$，　$y=y_I+r\cdot\sin(\theta)$

改写后的积分式(6-6)为矩形区域的积分，因此可以采用 Gauss 数值积分方法进行计算。设 Gauss 点坐标(r_i,θ_i)，对应的积分系数为g_i，则等式(6-4)可被进一步写成：

$$\sum_i g_i\cdot\mathbf{R}_{\Omega}(r_i,\theta_i)\cdot\phi_I(r_i,\theta_i)\cdot r_i=0,\quad(r_i,\theta_i)\in\Omega \tag{6-7a}$$

其中：
$$\begin{cases}\mathbf{R}_{\Omega}(r_i,\theta_i)=\mathbf{R}_{\Omega}(x_i,y_i)\\ \phi_I(r_i,\theta_i)=\phi_I(x_i,y_i)\end{cases}\qquad\begin{cases}x_i=x_I+r_i\cdot\cos(\theta_i)\\ y_i=y_I+r_i\cdot\sin(\theta_i)\end{cases} \tag{6-7b}$$

此处应注意：在形成式(6-7)时，已经消去某些常数因子。并且，求和只包括位于求解域Ω内及边界上的积分点，对于那些位于求解域Ω之外的积分点将被忽略。

具体地讲，对于某个结点$\mathbf{x}_I$，其所对应的子域积分过程为：

1.确定 Gauss 积分的阶数和积分点的总数 G;

2.对各个 Gauss 积分点循环：

2.1 确定该积分点的局部极坐标 (r_i, θ_i) 及相应的积分系数 g_i；

2.2 将极坐标转换成直角坐标 (x_i, y_i)：

$$\begin{cases} x_i = x_I + r_i \cdot \cos(\theta_i) \\ y_i = y_I + r_i \cdot \sin(\theta_i) \end{cases}$$

2.3 判断点 (x_i, y_i) 是否在求解域 Ω 内部或边界上。若不是，跳转至 2.5;

2.4 计算 $g_i \cdot \mathbf{R}_\Omega(r_i, \theta_i) \cdot \phi_I(r_i, \theta_i) \cdot r_i$，并累加到方程相应的系数项；

2.5 进行下一个积分点的计算，直至所有积分点都被计算；

由于无网格近似的表达式一般都很复杂，而且通常无法得到解析式，因此在数值积分计算时要求采用较高阶次的 Gauss 积分。这也正是积分型无网格方法计算量大的一个原因。

6.3 子域法算例分析

结合修正的紧支距离基函数近似，进行了基本的算例分析。

为了进行误差比较和分析，对于具有精确解的问题，此处仍采用前文定义的两种误差：结点位移相对误差 L_u 和结点应力 L_σ 相对误差。

在子域法的计算中，使用六阶的 Gauss 积分。另外，在以下的描述中，MLS_1 表示线性多项式基的移动最小二乘近似；MLS_2 表示二次多项式基的移动最小二乘近似；M1_CSRBF2 表示线性完备性修正的第二类紧支距离基函数；M2_CSRBF2 表示二次完备性修正的第二类紧支距离基函数。

算例　开圆孔方板：

中心圆孔半径为 $a = 1$ 的无限大方板，在无穷远处承受水平均布拉力 σ_0，计算模型考虑圆孔中心右上方边长为 5.0 的方形部分区域。对于该算例，本文以前章节有详细描述，此处略过。

在对该算例进行数值分析时，边界条件的提法仍采用两种方式：方式一，所有的边界点施加位移约束；方式二，具有对称性的左边界和下边界使用位移边界条件，其它边界使用力边界条件。

表 6-1 给出了边界条件为方式一的情况下，使用 MLS_1 直接配点法、M1_CSRBF2 直接配点法，以及 M1_CSRBF2 子域法求解时，不同结点数 N 所对应的计算误差。计算中紧支权函数或紧支基函数的影响域半径 R 也在表中说明；表 6-2 则给出了使用 MLS_2 直接配点法、M2_CSRBF2 直接配点法，以及 M2_CSRBF2 子域法求解时，相应的数值计算误差；

图 6-1 给出了边界条件为方式一的情况下，结点数 N=117 时，各种计算所得到的 x=0 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 的分布。图 6-2 则给出结点数 N=352 时的结果。

	N=117， $R=1.0$		N=352， $R=0.6$	
	L_u	L_σ	L_u	L_σ
MLS_1 直接配点法	0.4831	9.6621	0.31074	5.3394
M1_CSRBF2 直接配点法	0.7575	9.9646	0.4899	5.9731
M1_CSRBF2 子域法	0.5186	8.5091	0.12641	4.2642

表 6-1 边界条件方式一时的计算误差（%）

	N=117， $R=1.5$		N=352， $R=1.0$	
	L_u	L_σ	L_u	L_σ
MLS_2 直接配点法	0.2838	11.717	0.03786	3.505
M2_CSRBF2 直接配点法	0.5557	12.773	0.05954	3.9143
M2_CSRBF2 子域法	0.3907	12.200	0.04956	2.5152

表 6-2 边界条件方式一时的计算误差（%）

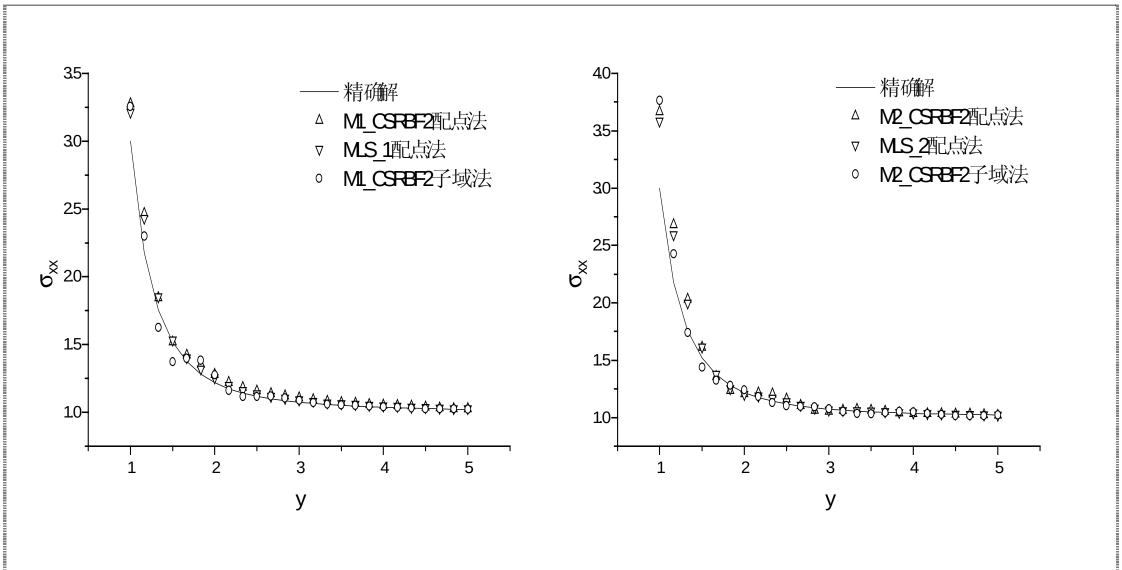


图 6-1 边界条件方式一，结点数 N=117 时，x=0 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 分布

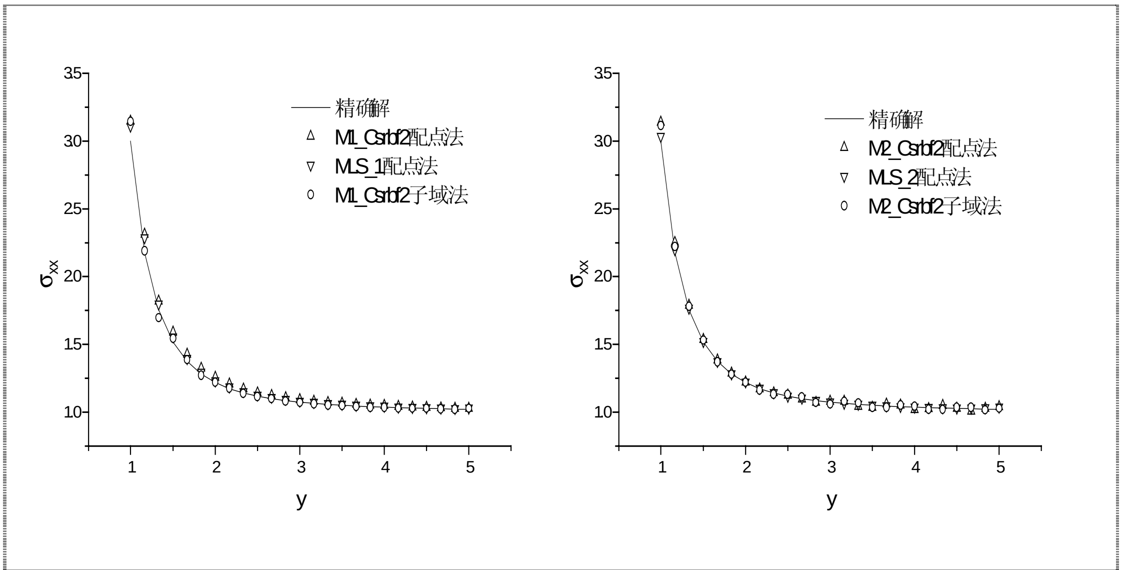


图 6-2 边界条件方式一，结点数 N=352 时，x=0 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 分布

表 6-3 给出了边界条件为方式二的情况下，使用 MLS_1 直接配点法、M1_CSRBF2 直接配点法，以及 M1_CSRBF2 子域法求解时，不同结点数 N 所对应的计算误差。计算中紧支权函数或基函数的影响域半径 R 也在表中说明；表 6-4 则给出了使用 MLS_2 直接配点法、M2_CSRBF2 直接配点法，以及 M2_CSRBF2 子域法求解时，相应的计算误差。

图 6-3 给出了边界条件为方式二的情况下，结点数 N=117 时，各种计算所得到的 x=0 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 分布；图 6-4 则给出了结点数 N=352 时的结果。

	N=117， $R=1.0$		N=352， $R=0.6$	
	L_u	L_σ	L_u	L_σ
MLS_1 直接配点法	6.1523	25.227	1.4962	1.4962
M1_CSRBF2 直接配点法	14.855	96.737	5.7928	59.435
M1_CSRBF2 子域法	3.4967	22.878	1.4244	4.9674

表 6-3 边界条件方式二时的计算误差（%）

	N=117， $R=1.5$		N=352， $R=1.0$	
	L_u	L_σ	L_u	L_σ
MLS_2 直接配点法	5.5711	23.273	0.92884	3.9378
M2_CSRBF2 直接配点法	5.3043	25.279	0.83548	4.1382
M2_CSRBF2 子域法	4.9415	28.441	0.34905	2.8180

表 6-4 边界条件方式二时的计算误差（%）

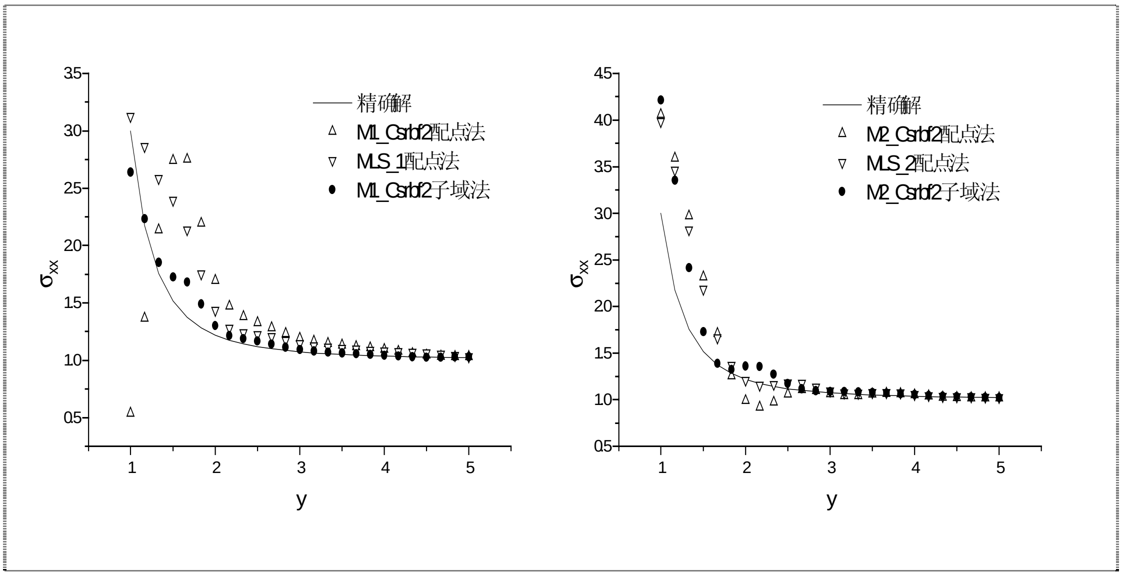


图 6-3 边界条件方式二，结点数 N=117 时，x=0 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 分布

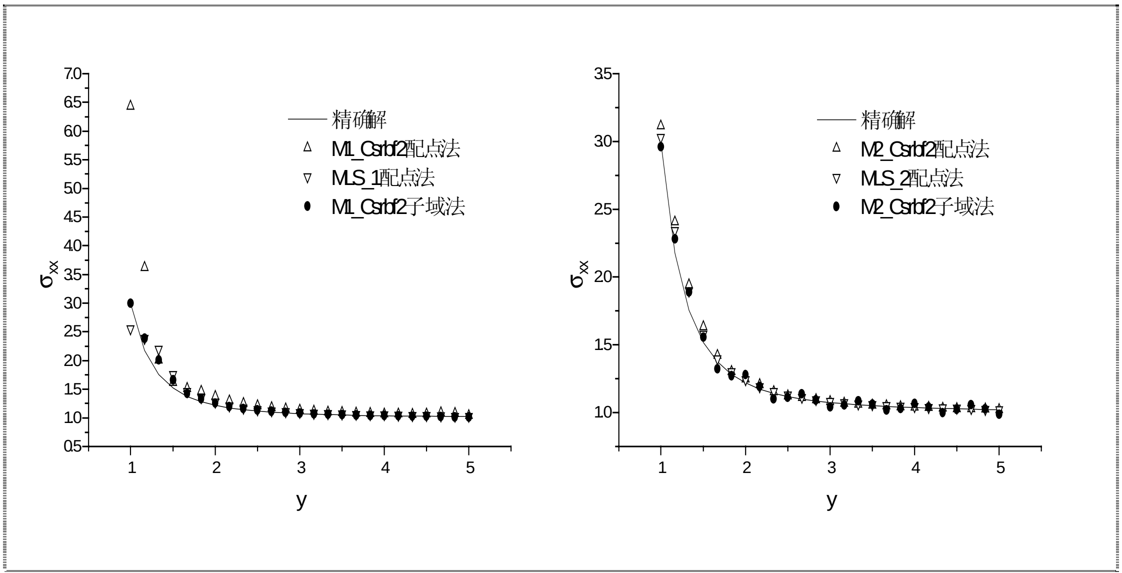


图 6-4 边界条件方式二，结点数 N=352 时，x=0 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 分布

6.4 小结

本章构造了基于子域法的无网格计算方法，并结合修正的紧支距离基函数近似进行了相应的算例分析。

由于无网格近似中插值函数的形式复杂且通常无解析表达式，因此为了提高

数值积分精度，需采用较高阶的 Gauss 积分，这必将产生较大的计算量。因此与配点型无网格方法相比，子域法的计算工作量将数倍于配点法。

通过对算例的比较分析，可以看出：子域法的计算精度稍优于同等条件的配点法计算结果，这一点在具有力边界条件时尤为明显。

另外，与基于 Galerkin 变分原理的无网格计算方案相比，子域法不需要积分网格，因此仍然具有形式简单、完全网格无关的优点。

第七章 域外结点近似的无网格方法

7.1 引言

通过以前章节的讨论可以看出，对于无网格近似配点法，计算结果误差最大的位置一般在边界附近，而在求解域内部可以达到很高的精度。因此可以设想，如果将求解域虚拟地向外扩展，使真实的边界成为虚拟域的域内部分，也许能够提高边界附近的计算精度。根据这种想法，本文提出了使用域外结点进行无网格近似的计算方法，并将在本章进行介绍，内容包括域外结点近似配点法和域外结点近似子域法。

与本文以前所述的无网格方法相比，域外结点近似无网格法具有以下特点：

1. 在形成近似时加入位于求解域外部的结点；
2. 域外结点不参与离散方程的形成；
3. 对于边界上的结点位置，不仅要求满足相应的边界条件，还要求满足平衡方程。

使用域外结点近似的无网格方法，能够有效地改善无网格配点法在边界位置的计算精度；同时又保持了无网格配点法简单、完全与网格无关的优点。通过对力学基本算例的分析，说明了该方法的有效性。

7.2 域外结点无网格近似方案

本节将以弹性静力问题的求解为例对域外结点无网格近似方案进行说明，并限于二维空间的描述。考虑弹性静力问题所对应的偏微分定解方程(以位移为基本未知量)：

$$\begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in S_u \\ \mathbf{T}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in S_t \end{cases} \tag{7-1}$$

其中Ω为求解区域，S_u为位移边界，S_t为力边界；$\mathbf{u}(\mathbf{x})$为待求位移场函数，$\mathbf{B}$和$\mathbf{T}$为微分算子，$\mathbf{f}(\mathbf{x})$、$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$和$\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$分别为定义在域内、位移边界上和力边界上的已知函数。

在求解域内及边界上布置 N 个离散结点 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\cdots\mathbf{x}_N$，其中位于边界上的结点个数记为 N_S；再在求解域外布置 N_S 个离散结点 $\mathbf{x}_{N+1},\mathbf{x}_{N+2}\cdots\mathbf{x}_{N+N_S}$，要求它们位于边界附近，并且与边界上的结点相对应。

在结点 $\mathbf{x}_I$ 处定义未知量 $\mathbf{u}_I$，则利用域内的、边界上的和域外的结点，根据某种无网格近似方案，可以建立位移场函数的近似：

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x})=\sum_{I=1}^{N+N_S}\phi_I(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}_I \tag{7-2}$$

其中 $\phi_I(\mathbf{x})$ 为无网格近似中结点 I 对应的插值函数。与本文以前所建立的近似不同的是，在形成近似的过程中使用了位于域外的结点；并且对于近似而言，它们与域内的结点具有同等的地位。

7.3 域外结点无网格近似配点法

7.3.1 域外结点无网格近似配点法

在域外结点无网格近似配点法中，对于求解域内部的结点，要求在该位置满足平衡方程；而对于边界上的结点，不仅要求在该位置满足相应的边界条件，而且要求在该位置满足平衡方程。方程(7-1)相应的配点格式为：

$$\begin{cases}\mathbf{B}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x}_I))=\mathbf{f}(\mathbf{x}_I) & I=1,2,\cdots N\\ \mathbf{u}^h(\mathbf{x}_I)=\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_I) & \forall\mathbf{x}_I\in S_u\\ \mathbf{T}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x}_I))=\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_I) & \forall\mathbf{x}_I\in S_t\end{cases} \tag{7-3}$$

在无网格近似式(7-2)中包含 $N+N_S$ 组未知量 $\mathbf{u}_I$，而式(7-3)共包含 $N+N_S$ 组方程，因此对应的离散方程组可解。

可以看出，由于引入了与边界结点数目相同的域外结点，从而可以在边界结点位置施加更为充分的约束，以提高配点计算的精度。

值得注意的是，域外结点 $\mathbf{x}_{N+1},\mathbf{x}_{N+2}\cdots\mathbf{x}_{N+N_S}$ 所对应的未知量 $\mathbf{u}_I$ 只在数值计算中使用，并不具有任何的物理意义。

7.3.2 修正紧支距离基函数域外结点近似配点法算例分析

结合修正的紧支距离基函数近似，进行了基本的算例分析。在计算中，使用

满足线性完备性的 M1_CSRBF2 和使用满足二次完备性的 M2_CSRBF2。

为了进行误差比较和分析，对于具有精确解的问题，此处仍采用本文以前定义的两种误差：结点位移相对误差 L_u 和结点应力相对误差 L_σ。

在以下的描述中，MLS_1 表示线性多项式基的移动最小二乘近似；MLS_2 表示二次多项式基的移动最小二乘近似。

算例 1　开圆孔方板：

中心圆孔半径为 $a=1$ 的无限大方板，在无穷远处承受水平均布拉力 σ_0。该算例的详细描述可参看本文以前章节，此处略过。

图 7-1 和图 7-2 分别给出了直接配点法和域外结点近似配点法计算中所使用的布点方案的示意图。

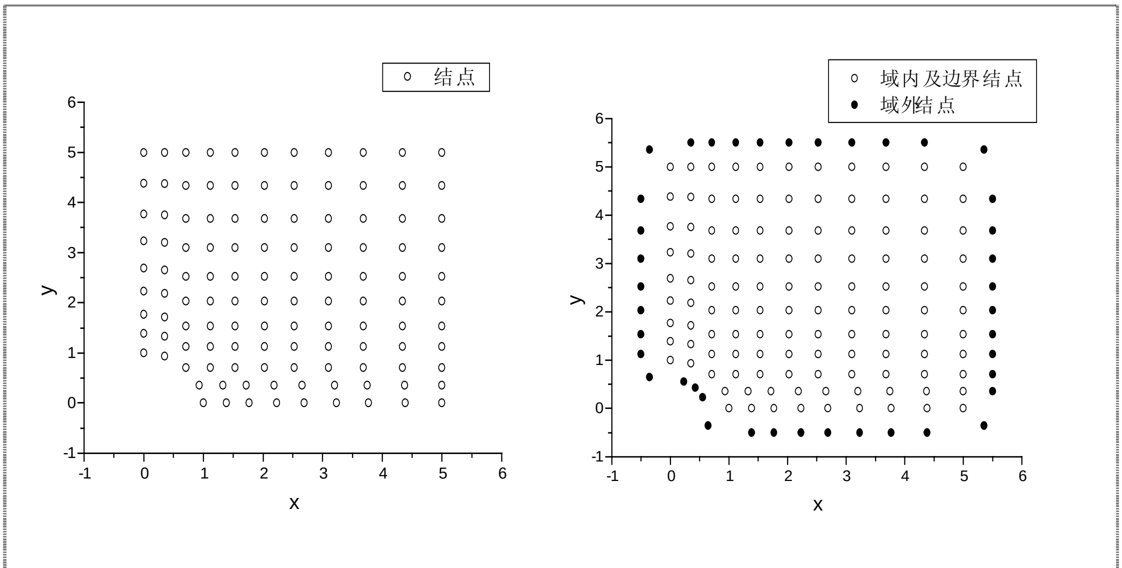


图 7-1 直接配点法布点　　　　图 7-2 域外结点近似配点法布点

在对该算例进行数值分析时，边界条件的提法仍采用两种方式：方式一，所有的边界点施加位移约束；方式二，具有对称性的左边界和下边界使用位移边界条件，其它边界使用力边界条件。

另外，当结点数 N=117 时，域外结点近似配点法另有 40 个域外结点；当结点数 N=352 时，域外结点近似配点法另有 72 个域外结点。

表 7-1 给出了边界条件为方式一的情况下，使用 MLS_1 直接配点法、M1_CSRBF2 直接配点法，以及 M1_CSRBF2 域外结点近似配点法求解时，不同

结点数 N 所对应的计算误差；表 7-2 则给出了使用 MLS_2 直接配点法、M2_CSRBF2 直接配点法，以及 M2_CSRBF2 域外结点近似配点法时，相应的计算误差。计算中紧支权函数或紧支距离基函数的影响域半径 R 也有说明。

图 7-3 给出了边界条件为方式一的情况下，当结点数 N=117 时，几种计算所得到的 x=0 处应力 σ_{xx} 的分布；图 7-4 则给出了结点数 N=352 时的计算结果。

	N=117， $R=1.0$		N=352， $R=0.6$	
	L_u	L_σ	L_u	L_σ
MLS_1 直接配点法	0.4831	9.6621	0.31074	5.3394
M1_CSRBF2 直接配点法	0.7575	9.9646	0.4899	5.9731
M1_CSRBF2 域外结点近似配点法	0.2600	6.4277	0.44316	4.2254

表 7-1 边界条件方式一时的计算误差（%）

	N=117， $R=1.5$		N=352， $R=1.0$	
	L_u	L_σ	L_u	L_σ
MLS_2 直接配点法	0.28385	11.717	0.03786	3.505
M2_CSRBF2 直接配点法	0.5557	12.773	0.05954	3.9143
M2_CSRBF2 域外结点近似配点法	1.2221	11.906	0.09241	2.5469

表 7-2 边界条件方式一时的计算误差（%）

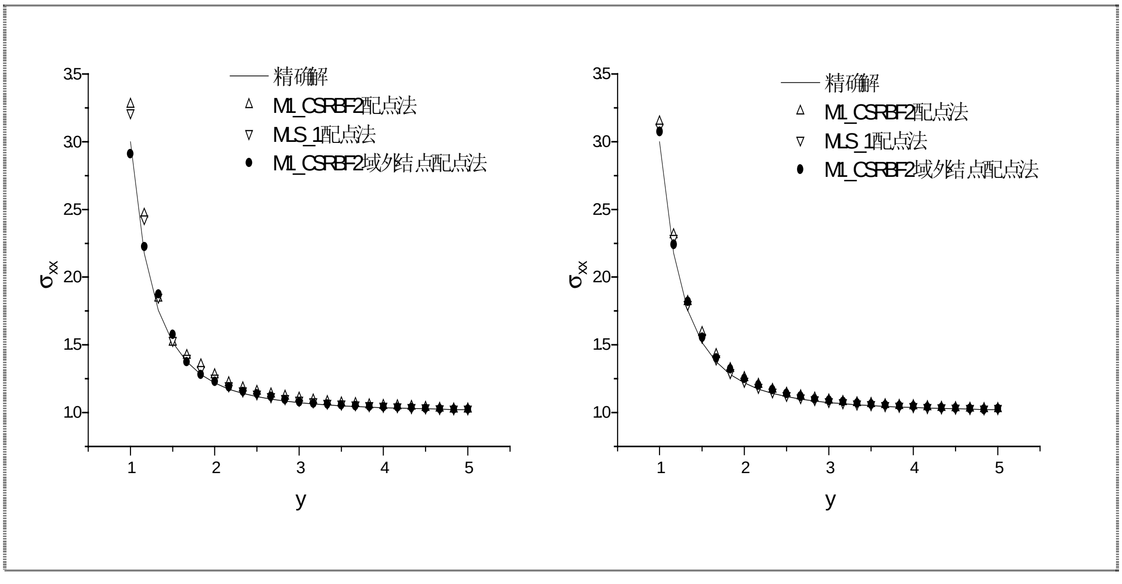


图 7-3 边界条件方式一，N=117　　图 7-4 边界条件方式一，N=352

表 7-3 给出了边界条件为方式二的情况下，使用 MLS_1 直接配点法、M1_CSRBF2 直接配点法，以及 M1_CSRBF2 域外结点近似配点法求解时，不同结点数 N 所对应的计算误差；表 7-4 则给出了使用 MLS_2 直接配点法、M2_CSRBF2 直接配点法，以及 M2_CSRBF2 域外结点近似配点法求解时的计算误差。计算中紧支权函数或紧支距离基函数的影响域半径 R 也有说明；

图 7-5 给出了边界条件为方式二的情况下，当结点数 N=117 时，几种计算所得到的 x=0 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 的分布；图 7-6 则给出了结点数 N=352 时的相应结果。

	N=117， $R=1.0$		N=352， $R=0.6$	
	L_u	L_σ	L_u	L_σ
MLS_1 直接配点法	6.1523	25.227	1.4962	1.4962
M1_CSRBF2 直接配点法	14.855	96.737	5.7928	59.435
M1_CSRBF2 域外结点近似配点法	4.8071	23.627	1.1679	4.5891

表 7-3 边界条件方式二时的计算误差（%）

	N=117， $R=1.5$		N=352， $R=1.0$	
	L_u	L_σ	L_u	L_σ
MLS_2 直接配点法	5.5711	23.273	0.92884	3.9378
M2_CSRBF2 直接配点法	5.3043	25.279	0.83548	4.1382
M2_CSRBF2 域外结点近似配点法	1.5834	13.696	0.27859	3.3213

表 7-4 边界条件方式二时的计算误差（%）

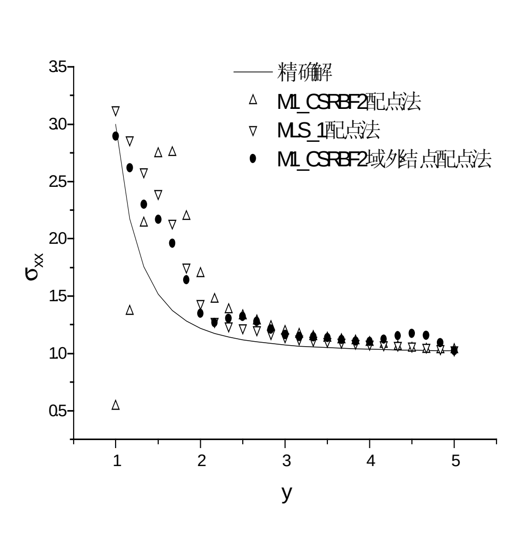


图 7-5 边界条件方式二，N=117

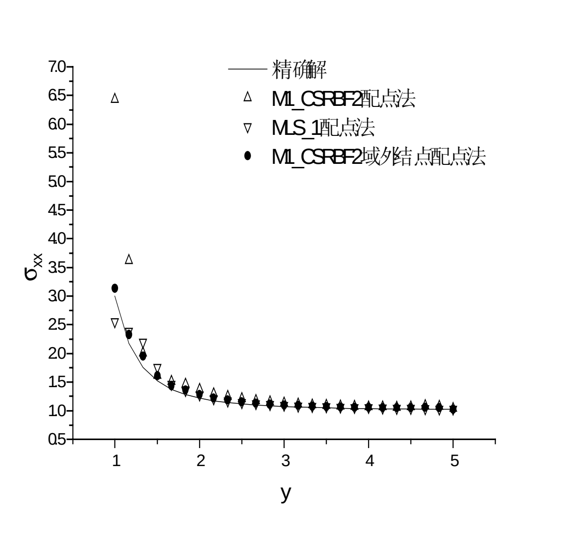


图 7-6 边界条件方式二，N=352

算例 2　悬臂梁：

端部受分布载荷的悬臂梁长度 $L = 12m$，宽度 $D = 2m$。关于该问题的详细描述及解析解，可参考本文前面的有关章节，此处略去。

使用域外结点近似配点法，对该问题进行了数值计算，并与直接配点法的结果进行了比较。在计算中，使用两种布点方案：结点均布与边界处结点加密。图 7-7 给出了结点均布时的情况，图 7-8 则给出了边界处结点加密时的情况。而将域外结点去掉，即为直接配点法计算的布点方案。

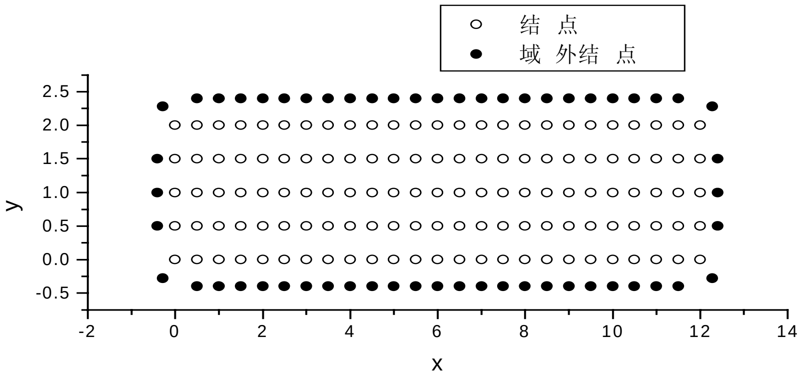


图 7-7 结点均布时的布点方案

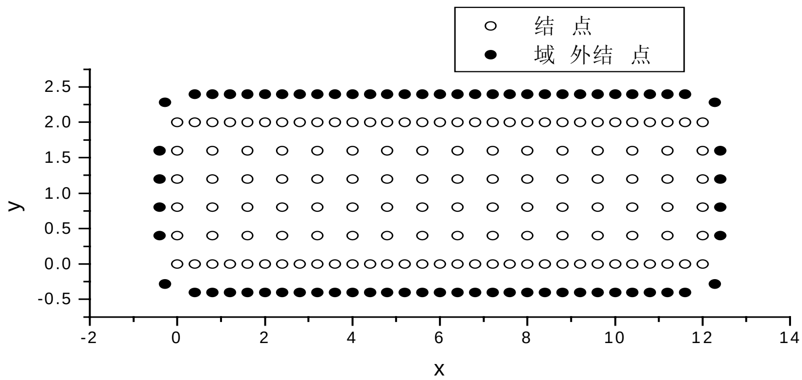


图 7-8 边界处结点加密时的布点方案

表 7-5 给出了在结点均布的情况下，使用 MLS_2 直接配点法、M2_CSRBF2 直接配点法，以及 M2_CSRBF2 域外结点近似配点法求解时，不同结点数 N 所对应的计算误差。计算中紧支权函数或紧支距离基函数的影响域半径 R 也在表

中说明。

对于结点均布情况，当结点数 N=125 时，域外结点近似配点法另有 56 个域外结点；当结点数 N=186 时，域外结点近似配点法另有 70 个域外结点。

	N=125， $R=2.0$		N=186， $R=2.0$	
	L_u	L_σ	L_u	L_σ
MLS_2 直接配点法	8.0042	8.4664	8.1712	9.2278
M2_CSRBF2 直接配点法	26.770	28.194	14.511	15.609
M2_CSRBF2 域外结点近似配点法	6.2173	6.4101	3.0107	3.1000

表 7-5 结点均布时的计算误差（%）

表 7-6 则给出了在结点非均布的情况下，相应的计算结果；

对于边界处结点加密的情况，当结点数 N=126 时，域外结点近似配点法另有 70 个域外结点；当结点数 N=169 时，域外结点近似配点法另有 84 个域外结点。

	N=126， $R=2.0$		N=169， $R=2.0$	
	L_u	L_σ	L_u	L_σ
MLS_2 直接配点法	3.5924	20.913	0.39218	4.3070
M2_CSRBF2 直接配点法	4.2233	80.337	5.9217	17.461
M2_CSRBF2 域外结点近似配点法	2.2999	2.7592	0.0772	1.8656

表 7-6 边界处结点加密时的计算误差（%）

图 7-9 给出了结点均布的情况下，当结点数 N=186 时，几种计算所得到的上表面应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 的分布结果。

图 7-10 则给出了边界处结点加密的情况下，当结点数 N=169 时，几种计算所得到的上表面应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 的分布结果。

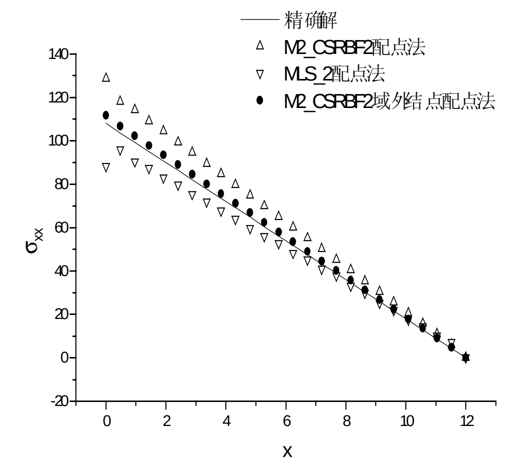


图 7-9 结点均布，N=186

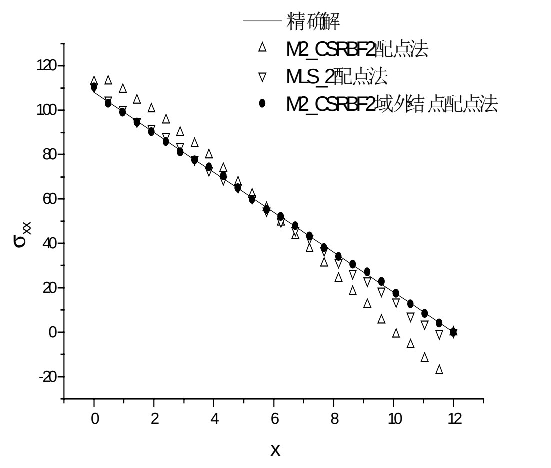


图 7-10 边界处结点加密，N=169

通过以上两个算例的分析可以看出，域外结点的引入能够有效地提高配点法地求解精度，修正了配点法在边界附近精度较差的缺点。而且，由引入域外结点所新增的计算量是微不足道的，丝毫没有破坏无网格配点法简洁、高效的优点。

7.3.3 小结

本节构造了基于域外结点近似和配点格式的无网格计算方法，并结合修正紧支距离基函数进行了相应的算例分析。

通过引入域外结点，可以有效地提高近似精度，尤其是在边界附近。这为无网格计算中边界条件的处理又提供了一条新的思路。

7.4 域外结点无网格近似子域法

7.4.1 域外结点无网格近似子域法

在域外结点近似子域法中，对于求解域内部和边界上的结点，要求在该结点对应的紧支子域中，平衡方程残差的加权积分为零；另外，要求在边界结点位

置满足相应的边界条件；从而形成求解方程。则方程(7-1)相应求解格式为：

$$\begin{cases} \iint_{\Omega_I} [\mathbf{B}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x})) - \mathbf{f}(\mathbf{x})] \cdot \phi_I(\mathbf{x})\, d\Omega_I & I = 1, 2, \cdots N \\ \mathbf{u}^h(\mathbf{x}_I) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_I) & \forall \mathbf{x}_I \in S_u \\ \mathbf{T}(\mathbf{u}^h(\mathbf{x}_I)) = \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_I) & \forall \mathbf{x}_I \in S_t \end{cases} \tag{7-4}$$

关于上式中所涉及的积分运算，可参看本文以前章节的相关内容。

7.4.2 普通紧支距离基函数的域外结点近似子域法算例分析

在本文以前的章节中曾经提到，使用普通紧支距离基函数直接近似配点法求解边值偏微分问题时有两点不足：一是当边界条件包含力边界时，求解精度差，尤其在边界附近。这一点通过 Hermit 近似可以得到改善；二是必须选取较大的紧支半径，才能达到较高的精度。本节将把域外结点近似子域法与紧支距离基函数相结合，形成紧支距离基函数的域外结点近似子域法。

为了考察该方法的有效性，对开圆孔无限大板的基本算例进行了对比计算分析。在计算中使用紧支距离基函数 CSRBF2，边界条件仍采用两种方式提出：方式一，仅有位移约束；方式二，有位移边界条件和力边界条件。

另外，当结点数 N=352 时，另有 72 个域外结点；当结点数 N=513 时，另有 88 个域外结点；当结点数 N=651 时，另有 100 个域外结点；当结点数 N=952 时，另有 120 个域外结点。在数值积分计算时，使用 6×6 的 Gauss 积分方案。

表 7-7 给出了边界条件为方式一的情况下，使用直接配点法、域外结点近似配点法，以及域外结点近似子域法求解时，不同结点数 N 对应的位移相对误差 L_u 和应力相对误差 L_σ。计算中紧支距离基函数的影响域半径 $R=1.0$。

	N=352		N=513		N=615		N=925	
	L_u	L_σ	L_u	L_σ	L_u	L_σ	L_u	L_σ
直接配点法	7.121	180.3	2.179	123.6	2.013	100.5	1.087	68.83
域外结点近似配点法	11.67	75.51	3.569	27.98	3.550	21.50	1.304	9.879
域外结点近似子域法	2.377	21.90	0.569	5.944	0.666	4.931	0.353	2.213

表 7-7 边界条件方式一，计算相对误差（%）

图 7-11 给出了边界条件为方式一的情况下，当结点数 N=615 时，几种计算所得到的 x=0 处应力 σ_{xx} 的分布。

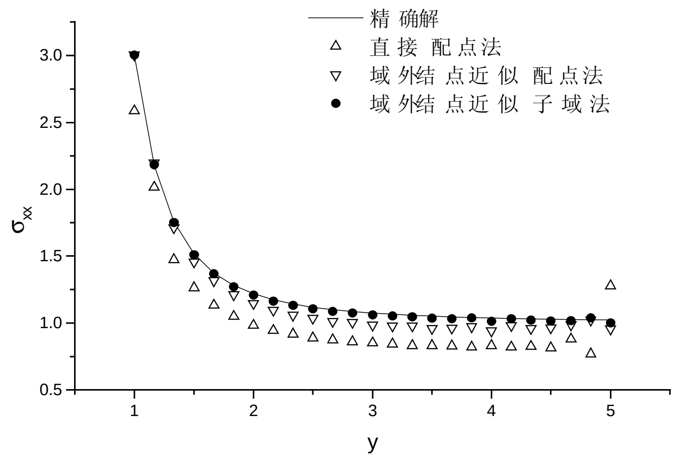


图 7-11 边界条件方式一, 结点数 N=615, 上表面应力 σ_{xx} 计算结果

表 7-8 给出了边界条件为方式二的情况下相应的求解结果，其中还包含了当力边界处使用 Hermit 插值近似时的计算结果。计算中紧支距离基函数的影响域半径 $R = 1.0$。

图 7-12 则给出了边界条件为方式二的情况下，当结点数 N=615 时，几种计算所得到的 x=0 处应力 σ_{xx} 的分布。直接配点法精度太差，故没有包含在内。

	N=352		N=513		N=615		N=925	
	L_u	L_σ	L_u	L_σ	L_u	L_σ	L_u	L_σ
直接配点法	294.9	1677.	458.6	2323.	309.4	805.7	200.5	647.5
Hermit 近似配点法	71.64	93.01	63.77	78.70	57.78	69.96	48.75	57.50
域外结点近似配点法	64.07	76.40	46.11	52.30	41.21	46.30	27.98	30.90
域外结点近似子域法	21.61	27.39	8.676	10.31	9.057	10.22	6.486	7.037

表 7-8 边界条件方式二，计算相对误差（%）

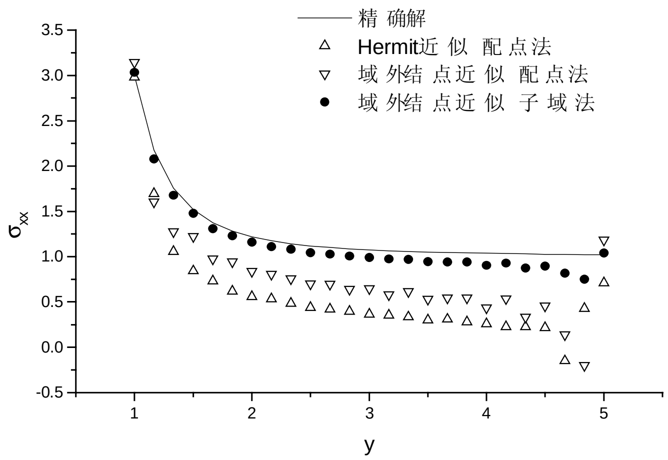


图 7-12 边界条件方式二,结点数 N=615,上表面应力σ_{xx}计算结果

通过以上算例的分析可以看出，紧支距离基函数的域外结点近似子域法能够有效地求解边值偏微分问题。与紧支距离基函数直接配点法和 Hermit 配点法相比，具有更高的计算精度和更好的数值求解属性。

紧支距离函数的域外结点近似子域法能够有效地提高紧支距离基函数的可用性和计算精度。虽然子域法中所涉及的积分具有较大的计算量，但基于紧支距离基函数近似的简洁，整个计算过程仍然十分高效。对比算例的结果可以看出：该方法对边界条件的处理是十分有效的，这一点在具有力边界约束时极其明显。

7.4.3 修正紧支距离基函数的域外结点近似子域法算例分析

在本节中，将修正的紧支距离基函数用于域外结点近似子域法，并进行了算例分析，表明了该方法的有效性。同样针对开圆孔无限大板算例进行对比计算，边界条件仍采用两种方式。计算中，使用线性完备性修正的紧支距离基函数 M1_CSRBF2。

当结点数 N=117 时，另有 40 个域外结点；当结点数 N=352 时，另有 72 个域外结点；当结点数 N=513 时，另有 88 个域外结点。

表 7-9 给出了边界条件为方式一的情况下，使用直接配点法、域外结点近似配点法，以及域外结点近似子域法求解时，不同结点数 N 所对应的位移相对误

差 L_u 和应力相对误差 L_σ 。计算中紧支距离基函数的影响域半径也在表中给出。

图 7-13 给出了边界条件为方式一的情况下，当结点数 N=352 时，几种计算所得到的 x=0 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 的分布。

	N=117, $R=1.0$		N=352, $R=0.6$		N=513, $R=0.6$	
	L_u	L_σ	L_u	L_σ	L_u	L_σ
直接配点法	0.7575	9.9646	0.489	5.973	0.086	3.338
域外结点近似配点法	0.26006	6.4277	0.443	4.225	0.050	0.999
域外结点近似子域法	0.0975	5.7711	0.101	1.663	0.013	0.620

表 7-9 边界条件方式一，计算相对误差（%）

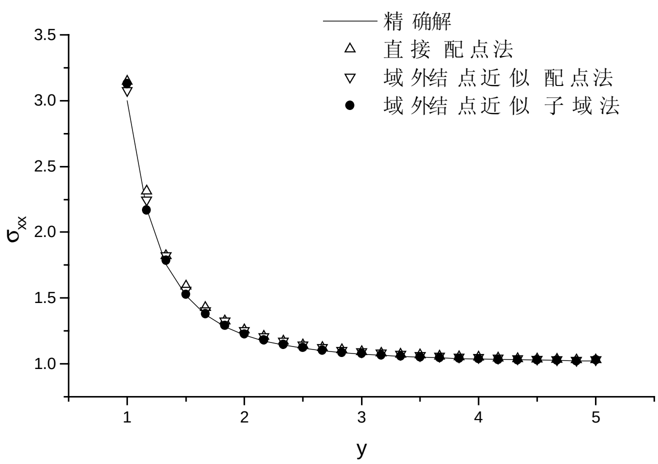


图 7-13 边界条件方式一, 结点数 N=352, 上表面应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 计算结果

表 7-10 给出了边界条件为方式二的情况下，相应的计算结果。

图 7-14 给出了边界条件为方式二的情况下，当结点数 N=352 时，几种计算所得到的 x=0 处应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 的分布。

	N=117， $R=1.0$		N=352， $R=0.6$		N=513， $R=0.6$	
	L_u	L_σ	L_u	L_σ	L_u	L_σ
直接配点法	14.85	96.73	5.792	59.43	0.977	3.894
域外结点近似配点法	4.807	23.62	1.167	4.589	0.212	2.046
域外结点近似子域法	0.825	6.379	0.241	1.817	0.088	1.470

表 7-10 边界条件方式二，计算相对误差（%）

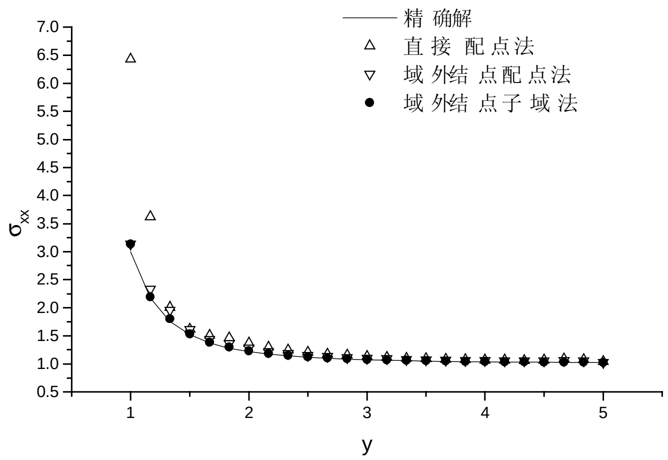


图 7-14 边界条件方式二,结点数 N=352,上表面应力 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$ 计算结果

7.5 小结

本章构造了基于域外结点近似的配点型和子域型无网格方法。结合修正的紧支距离基函数及普通的紧支距离基函数所进行的算例分析，表明了该方法的有效性。

本文以前章节提出了无网格子域法，其计算精度优于同等条件下的配点法；本章提出了域外结点近似配点法，它可以大大提高边界条件的处理精度。

综合域外结点近似和子域法的优点，本章构造了域外结点近似子域法的求解方案。域外结点无网格近似子域法具有以下特点：

1. 在形成近似时使用位于求解域外部的结点；

2. 对于位于域内和边界上的各个结点，平衡方程的残差在其影响子域中的加权积分为零；

3. 位于边界上的结点处，满足相应的边界条件。

使用域外结点近似子域法，能够有效地改善计算在边界位置的精度，同时又保持了计算简单、完全无网格的优点。

第八章 结论

8.1 本论文的主要结论和贡献

本论文的主要目的是在对紧支函数和加权残差法进行研究的基础上构造有效的无网格计算方法，并将其应用到力学计算中。目前已有的无网格方法主要是建立在 Galerkin 变分原理的基础上，具有计算效率低的缺点，因此本文以配点型无网格方法的构造和研究为主要内容。由于无网格方法的发展还处于初始阶段，在对这种新型数值算法的研究中，本文进行了大量尝试性的对比计算，编制了较多的程序代码。在程序设计中，使用了面向对象的 Visual C++语言。

本文主要的研究成果和结论如下：

1.对目前存在的各种无网格方法进行了综述，并按照加权残差的统一格式进行了分类和描述，使得对无网格方法的理解和研究更加系统化。

2.移动最小二乘(MLS)近似是目前在无网格计算中应用最为广泛的一种近似手段。本文对其进行了详细地论述，构造了移动最小二乘近似配点法，并成功地应用于力学方程的求解。该方法在建立近似和形成离散方程时都不需要网格的支持，是一种真正的无网格计算方法。

3.研究了无网格近似中结点影响域大小对计算精度的影响，提出并实现了影响域半径的自动选取方案。

4.研究了配点型无网格方法对各种边界条件的处理精度，提出了使用配点型无网格方法计算时边界条件的处理方案；针对直接配点法在边界附近精度较差的缺点，提出了最小二乘配点方案，并构造了相应的无网格计算格式。

5.成功地将无网格方法应用于材料非线性计算领域，构造了求解弹塑性问题的配点型无网格方法。基于无网格方法在处理大变形问题时的优势，该方法具有巨大的发展潜力。

6.将距离基函数近似引入到力学问题求解领域，构造了距离基函数近似配点法，它本质上也是一种无网格计算方法，具有简洁、高效的优点。通过计算，比较了几种常见距离基函数的特性。研究发现，该方法在边界附近导数的误差较大。针对这种缺陷，又提出了距离基函数 Hermit 近似方案，通过在边界位置引入导数型近似项，可以有效地提高计算精度。另外，研究

表明，紧支距离基函数在求解边值微分方程时效果较差。

7.针对紧支距离基函数的缺点，提出了相应的修正方案，构造了能够满足一定完备性要求的紧支距离基函数。使用修正的紧支距离基函数，建立了求解微分方程、弹性静力问题、弹塑性静力问题、以及弹性动力问题的无网格方法。通过对波传播问题的研究，给出了使用配点型无网格方法进行动力计算时，结点间距和时间步长的选取原则。

8.构造了子域型的无网格方法。与配点型无网格方法相比，它具有更高的求解精度；与 Galerkin 变分型的无网格方法相比，它不需要网格的支持，具有真正无网格的优点。

9.针对配点型无网格方法在处理边界条件上的弱势，提出了域外结点参与近似的无网格方法，并构造了域外结点近似配点法和域外结点近似子域法，它为无网格计算中边界条件的处理提供了一条新的思路。

8.2 本论文的主要创新点

1.将各种无网格方法归入加权残差的统一体系；

2.构造了移动最小二乘近似配点法（直接配点法和最小二乘配点法）；

3.成功地将无网格方法应用于材料非线性计算领域，构造了求解弹塑性问题的配点型无网格方法；

4.将距离基函数近似引入到力学问题求解领域，并提出了距离基函数 Hermit 近似方案；

5.提出了紧支距离基函数的修正方案，并建立了求解微分方程、弹性静力问题、弹塑性静力问题、以及弹性动力问题的无网格方法；

6.构造了子域型的无网格方法；

7.构造了域外结点参与近似的无网格方法。

8.3 未来的展望

无网格方法是一种新型的数值计算方法，它所具有的独特优点使之更适于处理传统数值方法所不能成功解决的某些问题。基于传统 Galerkin 变分原理的无网格方法，不仅计算量很大，远远超出有限元计算，而且通常还不能完全抛弃

网格。因此，很多学者也致力于其它形式的无网格方法的研究。本文也正是在这方面进行了大量的工作，并且这也仍是今后需要重点研究的。

有限元法具有较为完备的数学理论基础，而目前无网格方法在这方面还很不完善，这还需要力学工作者和数学工作者共同的努力。与有限元法相比，无网格方法在自适应求解方面应该具有很强的优势，然而理论的不完善严重地制约了自适应方法的发展。这也是下一步工作的一个方向。

参考文献

[1] Bathe K. J. Finite element procedures in engineering analysis. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, 1982

[2] 王勖成，劭敏. 有限单元法基本原理和数值方法（第 2 版）. 北京：清华大学出版社, 1997 年

[3] Zienkiewicz O.C. 有限元法（中译本）. 科学出版社，1985

[4] 张圣坤，李龙渊，韩继文. 非线性有限元分析 ADINA 理论文本. 上海交通大学科技交流室，1986 年

[5] 陆明万，罗学富. 弹性理论基础. 北京：清华大学出版社, 1990 年

[6] 关治，陈景良. 数值计算方法. 北京：清华大学出版社，1990 年

[7] 蔡大用，白峰杉. 高等数值分析. 北京：清华大学出版社，1997 年

[8] Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., et al. Meshless Method: An overview and recent developments, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1996,139: 3-47

[9] Lucy L.B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. The Astron. J. 1977, 8(12)：1013-1024

[10] Gingold R.A., Moraghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and applications to non-spherical stars. Mon. Not. Roy. Astrou. Soc. 1977, 181: 375-389

[11] Monaghan J.J. An Introduction to SPH, Comput. Phys. Comm. 1988, 48: 89-96

[12] Monaghan J.J. Why particle methods work. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1982, 3(4):422-433

[13] Swegle J.W., Hicks D.L., Attaway S.W. Smoothed particle hydrodynamics stability analysis, J.Comput.Phys. 1995, 116: 123-134

[14] Dyka C.T. Addressing tension instability in SPH methods, Technical Report NRL/MR/6384,NRL,1994

[15] Johnson G.R., Stryk R.A., Beissel S.R. SPH for high velocity impact computations, Comput. Methods Appl.Mech. Engrg. 1996, 139： 347-373

[16] Swegle J.W., Attaway S.W. On the feasibility of using smoothed particle hydrodynamics for underwater explosion calculations. Comput Mech, 1995, 17：151-168

[17] Libersky L.D., Petschek A.G., Carney T.C., et al. High strain lagrangian hydrodynamics: A three-dimensional SPH code for dynamic material response. J. Comput. Phys., 1993, 109: 67-75

[18] Johnson G.R., Beissel S.R. Normalized smoothing functions for SPH impact computations. Int. J. Numer. Methods Engrg. 1996, 39： 2725-2741

[19] 张锁春. 光滑质点流体动力学(SPH)方法(综述) 计算物理. 1996, 13(4)：385-397

[20] 贝新源,岳宗五.三维 SPH 程序及其在斜高速碰撞问题的应用. 计算物理. 1997, 14(2)：155～166

[21] Nayroles B., Touzot G., Villon P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. Comput. Mech. 1992, 10: 307-318

[22] Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L. Element free Galerkin methods. Int. J. Numer. Methods. Engrg. 1994, 37: 229-256

[23] Lu Y.Y., Beltschko T., et al. A new implementation of the element free Galerkin method. Comput Methods Appl Mech Engrg. 1994,113：397-414

[24] Krongauz Y., Belytschko T. EFG approximation with discontinuous derivatives. International Journal for Numerical methods in Engineering. 1998, 41：1215-1233

[25] Lu Y.Y., Belytschko T., Tabbara M. Element-free Galerkin methods for wave propagation and dynamic fracture. Comput Methods Appl Mech Engrg. 1995,126：131-153

[26] Belytschko T., Tabbara M. Dynamic fracture using element-free Galerkin methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1996,39：923-938

[27] Belytschko T., Gu L.and Lu Y.Y. Fracture and crack growth by element free Galerkin methods, Model. Simul. Mater. Sci. Engrg. 1994, 115: 277-286

[28] Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L. Crack propagation by element-free Galerkin methods, Engrg. Frac. Mech. 1995, 51: 295-315

[29] Fleming M., Belytschko T. Enriched Element_Free Galerkin Methods for Crack Tip Fields, Int. J. Numer. Methods Engrg., 1997, 40: 1483-1504

[30] Krysl P., Belytschko T. Analysis of thin shells by element-free Galerkin method. Comput. Mech., 1995, 17：26-35

[31] Ponthot J.P., Belytschko T. Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation for element-free Galerkin method. Comput Methods Appl Mech Engrg. 1998,152：19-46

[32] Beissel S., Belytschko T. Nodal integration of the element-free Galerkin method, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1996, 139: 49-74

[33] Belytschko T., Organ D., Krongauz Y. A Coupled finite element-element free Galerkin method, Comput. Mech. 1995, 17: 186-195

[34] Krongauz Y., Belytschko T. Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite element. Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg. 1996; 131: 133-145

[35] Hegen D. Element-free Galerkin methods in combination with finite element approaches, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1996, 135: 143-166

[36] Organ D., Fleming M., Terry T. Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency. Comput. Mech. 1996, 18: 225-235

[37] Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., et al. Smoothing and acclerated computations in the element free Galerkin method, J. Of Compu. And Appl. Math., 1996, 74: 111-126

[38] Belytschko T., Krysl P., Krongnauz Y. A Three-Dimensional Explicit Element-Free Galerkin Method. Int. J. Numer. Meth. Fluids., 1997, 24: 1253-1270

[39] Cordes L.W., Moran B. Treatment of material discontinuity in the element-free Galerkin method, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1996, 139: 75-89

[40] Liu W.K., Jun S., Zhang Y.F.. Reproducing Kernel Particle methods. Int. J. Numer. Meth. Fluids. 1995; 20: 1081-1106

[41] Liu W.K., Chen Y., Jun S., et al. Overview and applications of the reproducing kernel particle methods. Archives of Computational Methods in Engineering, State of the art review. 1996, 3(1): 3-80

[42] Liu W.K., Uras R.A., Chen Y. Enrichment of the Finite Element Method with the Reproducing Kernel Particle Method. Current Topics in Computational Mechanics, 1995, 305:253-258

[43] Liu W.K., Jun S., Li S.F., et al. Reproducing kernel particle methods for structural dynamics. Int. J. Numer. Methods Engrg., 1995, 38: 1655-1679

[44] Liu W.K., Chen Y., et al. Generalized multiple scale reproducing kernel particle methods. Comput Methods Appl Mech Engrg. 1996, 139: 91-157

[45] Liu W.K. and Chen Y. Wavelet and multiple scale reproducing kernel method. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1995, 21: 901-931

[46] Liu W.K., Chen Y., Chang C.T. et al. Advances in multiple scale kernel particle methods. Computational Mechanics. 1996, 18：73-111

[47] Liu W. K., Jun S., et al. Multiresolution Reproducing Kernel Particle Method for Computational Fluid Dynamics, Int. J. Numer. Methods Fluid, 1997, 24: 1391-1415

[48] Liu W.K., Li S., Moving least-square reproducing kernel method. Comput. Methods Appl.Mech.Engrg. 1996, 139: 159-193

[49] Chen J.S., Pan C., Wu C.T., et al. Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures, Comput.Methods Appl.Mech.Engrg. 1996, 139: 195-227

[50] Liu W.K., Uras R.A., Chen Y. Enrichment of the Finite Element Method with the Reproducing Kernel Particle Method, Int. J. Of Appl. Mech., 1997, 64: 861-870

[51] Gunther F.C., Liu W.K. Implementation of boundary conditions for meshless methods. Comput Methods Appl Mech Engrg. 1998, 163: 205-230

[52] 赵松年,熊小芸.子波变换与子波分析.电子工业出版社,1996 年 12 月第 1 版

[53] 李世雄,刘家琦.小波变换和反演数学基础.地质出版社,1994 年 5 月北京第 1 版

[54] Duarte C.A., Oden J.T. Hp clouds：a meshless method to solve boundary-value problems, Technical Report 95-05. Texas Institute for Computational and Applied Mathematics. University of Texas at Austin. 1995

[55] Duarte C.A., and Oden J.T. Hp clouds：a h-p meshless method, Numer. Methods for Partical Differential Equations, 1996, 12: 673-705

[56] Duarte C.A., Oden J.T. An h-p adaptive method using clouds. Comput Methods Appl Mech Engrg. 1996,139：237-262

[57] Oden J.T., Duarte C.A., Zienkiewicz O.C. A new cloud-based hp finite element method. Int J Numer Methods Engrg. 1998,50：160-170

[58] Liszka T.J., Duarte C., Tworzydlo W.W. Hp-meshless cloud method. Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg. 1996; 139: 263-288

[59] Melenk J.M, Babuska I., The partition of unity finite element methods：Basic theory and application. Comput Methods Appl Mech Engrg. 1996,139：263-288

[60] Babuska I., Melenk J.M, The partition of unity methods. Int. J. Numer. Methods Engrg. 1997, 40：727-758

[61] Onate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O.C., et al. A finite point method in computational mechanics: Applications to convective transport and fluid flow, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996,39：3839-3866

[62] Onate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O.C., et al. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 1996, 139：315-346

[63] Zhu T., Zhang, Atluri S.N. A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach, Comput. Mech. 1998; 21:223-235

[64] Atluri S.N., Sladek J., et al. The Loacl boundary integral equation (LBIE) and it's meshless implementation for linear elasticity. Comput. Mech. 2000; 25:180-198

[65] Atluri S.N., Zhu T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. Comput. Mech. 1998; 22:117-127

[66] Atluri S.N., Zhu T. The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics. Comput. Mech. 2000; 25:169-179

[67] Atluri S.N., Kim H.G., et al. A critical assessment of the truly Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG), and Local Boundary Integral Equation (LBIE) methods. Comput. Mech. 1999; 24:348-372

[68] Zhu T., Atluri S.N. Modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method. Comput. Mech. 1998; 21: 211-222

[69] Amaratunga K., Williams J.R. Wavelet-Galerkin Solutions for One-dimensional Partial Differential Equations, Int. J. Numer. Methods Engrg., 1994, 37: 2703-2716

[70] Kurdila A.J., Sun T., Grama P. A fine fractal interpolation functions and wavelet-based finite elements, Comput. Mech. 1995, 17: 169-185

[71] Oleg V., Samuel P., and Mihir S. A multilevel wavelet collocation method for solving partial differential equations in a finite domain, Journal of Computational Physics, 1995,120: 33-47

[72] Oleg V., Samuel P. A Dynamically adaptive multilevel wavelet collocation method for solving partial differential equations in a finite domain, Journal of Computational Physics, 1996,125: 498-512

[73] Juan M.R., Gary K. Wavelet-Galerkin discretization of hyperbolic equations, Journal of Computational Physics, 1995,122：118-128

[74] Sonia M., Elsa C. Convergence estimates for the wavelet Galerkin method, SIAM J. Numer. Anal, 1996,33(1)：149-161

[75] Ko J. and Kurdila A.J. On the conditioning of numerical boundary measures in wavelet Galerkin methods, Communications In Numerical Methods In Engineering, 1996,12：281-294

[76] 刘洋，陈勇，陆明万. 塑性变形局部化的小波模拟. 计算力学学报，1997，14（增刊）：745-748

[77] Buhmann, M.D., Multivariable interpolation using radial basis functions. Ph. D. Thesis, University of Cambridge 1989

[78] 吴宗敏. 函数的径向基表示. 数学进展, 1988, 27(3):202-208

[79] Dubal, M.R. Construction of three-dimensional black-hole initial data via multiquadric, Phys. Rev. D 1992, 45: 1178-1187

[80] Sun, X. Conditional positive define functions and their application to multivariate interpolations, Journal of Approximation Theory, 1993, 74: 159-180

[81] Wu Z., Schaback R. Local error estimates for radial basis function interpolation of scattered data, IMA journal of Numerical Analysis, 1993, 13: 13-27

[82] Zhang X., Song K.Z., Lu M.W. Meshless Methods Based on Collocation with Radial Basis Function. Comput. Mech., in press

[83] 宋康祖，张雄，陆明万. 紧支距离函数配点法，强度与环境，2000 年增刊 1: 52-57

[84] Zhang X., Lu M.W., Wegner J.L. A 2-D meshless modal for jointed rock structures. Int. J. Numer. Methods Engrg. 2000; 47(10): 1647-1661

[85] U Haussler-Combe, C Korn. An adaptive approach with the Element-Free Galerkin method. Comput Methods Appl Mech Engrg. 1998,162：203-222

[86] Lancaster P. and Salkauskas K., Surfaces generated by moving least-squares methods, Math.Comput.37(1981)141-158

[87] Yagawa G., and Yamada T. Free mesh method:A new meshless finite element method, Compu.Mech.18(1996) 383-386

[88] 刘小虎,张雄,陆明万.基于 MLS 的最小二乘配点法,强度与环境,2000 年增刊 1: 46-51

[89] Finlayson B.A., Scriven L.E. The method of weighted residuals — a review, Applied Mechanics Reviews, 1966, 19(9):735-748

[90] 徐次达. 固体力学加权残值法. 同济大学出版社，1987

[91] 邱吉宝. 加权残值法的理论及应用. 宇航出版社，1991

[92] 夏永旭,孙忠第,任艺宏. 板壳力学中的加权残值法,西北工业大学出版社. 1994 年 11 月第 1 版

[93] 徐次达,陈学潮,郑瑞芬. 新计算力学加权残值法—原理、方法及应用. 同济大学出版社,1997

[94] 谢秀松. 康托洛维奇加权残数法，计算结构力学及其应用，1985，2(1)

[95] 陈虬，李贤兴. 随机场分析的加权残量法，第三届全国加权残值法会议论文集，峨嵋：西南交通大学出版社，1989

[96] 朱宝安，力学问题优化计算 — 现代数学规划加权残值法，天津：天津科学技术出版社，1992

[97] 成鸿学，郭建华，包亦望. 加权残数法的配点、配线、配域，第二届加权残数法会议论文，杭州：浙江大学力学系，1986

[98] Lancaster P., Salkauskas K. Surfaces generated by moving least squares method, Math. Comput., 1981, 37: 141-158

[99] Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of Elasticity, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 1987

[100] Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. The clarendon pr: Oxford, 1950

[101] Frank R. Scattered data interpolation: tests of some methods. Math. Comput. 1972, 38: 181-199

[102] Hardy R.L. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. J. Geophys. Res. 1971, 76: 1905-1915

[103] Wu Z. Hermit-Birkhoff interpolation of scattered data by radial basis functions, Approx. Theroy Appl. 1992, 8: 1-10

[104] Kansa E.J., Multiquadrics – a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics - I. Surface approximations and partial derivative estimates. Comput. Math. Applic. 1990, 19: 127-145

[105] Kansa E.J., Multiquadrics – a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics - II. Solutions to hyperbolic, parabolic, and elliptic partical differential equations. Comput. Math. Applic. 1990, 19: 147-161

[106] Sharan M., Kansa E.J., Gupta S. Applications of the multiquadric method for the solution of elliptic partial differential equations. Appl. Math. Comput. 1997, 84: 275-302

[107] Franke C. and Schaback R. Solving partial differential equations by collocation using radial basis functions. Appl. Math. Comput. 1998, 93: 73-82

[108] Wu Z. Compactly supported positive definite radial functions. Adv. Comput. Math. 1995, 4: 283-292

[109] Wendland H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degree. Adv. Comput. Math. 1995, 4: 389-396

[110] Buhmann M.D. Radial functions on compact support. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 1998, 41: 33-46

[111] Micchelli C.A. Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions. Constr. Approx. 1986, 2: 11-22

[112] 黎在良，刘殿魁. 固体中的波，科学出版社，1995，第一版

[113] Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solid, North-Holland Publishing Company, 1973

[114] 杜庆华，余寿文，姚振汉. 弹性理论，科学出版社，1986

[115] Miklowitz J., Achenbach J.D. Modern Problems in Elastic Wave Propagation, International Union of Theoretical and Applied Mechanics, Symposium held at Northwestern University, Evanston, Illinois, USA, September 12-15, 1977

致谢

本论文是在陆明万教授和张雄副研究员的精心指导下完成的。指导老师严谨求实的治学态度，朴实细致的工作作风和井然有序的工作方法给我留下了深刻的印象，将使我终生受益。我诚挚地感谢两位导师多年来不倦的教诲，并向他们致以深深的敬意。

衷心感谢本研究室的陈勇副教授和刘欣博士后，他们对我的论文工作提出了很多有用的建议，并给予了宝贵的帮助。同时感谢本研究室的其他同学，他们和我有过很多有益的讨论和协作，并给予了我很多帮助。

特别感谢我的妻子刘畅女士，对于我的论文工作，她给予了极大的理解和支持。还要感谢我的父母和岳父母，以及所有关心我的亲人和朋友。

最后，感谢国家自然科学基金委员会的帮助。

发表的学术论文

1. 宋康祖，陆明万，张雄. 固体力学中的无网格方法. 力学进展，30(1):55-65，2000
2. 张雄，宋康祖，陆明万. Meshless Methods Based on Collocation with Radial Basis Functions, Computational Mechanics， 已录用
3. 宋康祖，张雄，陆明万. Meshless method based on collocation for elasto-plastic analysis, in: Proceedings of Internal Conference on Computational Engineering & Science, 1451-1456, August 20-25, 2000, Los Angeles, USA
4. 张雄，宋康祖，陆明万. Hermite type collocation with radial basis functions, in: Proceedings of Internal Conference on Computational Engineering & Science, 1445-1450, August 20-25, 2000, Los Angeles, USA
5. 宋康祖，张雄，陆明万. 紧支距离函数配点法. 强度与环境，2000 年增刊 1, 52-57
6. 张雄，宋康祖，陆明万. 紧支试函数加权残量法. 强度与环境，2000 年增刊 1, 58-63
7. 张雄，刘小虎，宋康祖，陆明万. Least-square collocation meshless method, Int. J. Numer. Methods Engrg. 已录用
8. 张雄，刘欣，宋康祖，陆明万. Imposition of essential boundary conditions by displacement constraint equations in meshless methods, **Communications in Numerical Methods in Engineering**, 已录用
9. 宋康祖，张雄，陆明万. Meshless method based on collocation with modified compactly supported radial basis functions. Meshless Session for First MIT Conference.
10. 张雄，宋康祖，陆明万. 紧支权函数的加权残量法. 已发出。
11. 宋康祖，张雄，陆明万. Meshless method based on collocation for elasto-plastic analysis, Computational Mechanics， 已发出