陶瓷和混凝土冲击问题的物质点法研究

（申请清华大学工学硕士学位论文）

培 养 单 位 ： 航天航空学院

学　　　科 ： 力学

研　究　生 ： 王 晓 军

指 导 教 师 ： 张 雄 教 授

二〇一二年五月

陶瓷和混凝土冲击问题的物质点法研究

王晓军

Studies on Impact Problems of Ceramics and Concrete Based on Material Point Method

Thesis Submitted to

Tsinghua University

in partial fulfillment of the requirement

for the degree of

Master of Science

in

Mechanics

by

Wang Xiaojun

Thesis Supervisor: Professor Zhang Xiong

May, 2012

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：

清华大学拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：（1）已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；（2）为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供校内师生阅读，或在校园网上供校内师生浏览部分内容。

本人保证遵守上述规定。

（保密的论文在解密后遵守此规定）

作者签名：______________ 导师签名：______________

日　　期：______________ 日　　期：______________

摘　要

冲击问题会引起结构的大变形甚至破坏，涉及到几何非线性、材料非线性和边界条件非线性。数值模拟手段为解决这类问题提供了有力工具。物质点法采用质点对变形体进行离散，质点携带位置、速度、应力、应变等信息，可以描述物体的受力和变形，适合处理与变形历史相关的本构关系。MPM在规则的背景网格上求解动量方程和空间导数，避免了拉格朗日法的网格畸变以及欧拉法的物质界面追踪和对流项处理，可以有效模拟冲击问题。陶瓷和混凝土属于脆性材料，在受压状态下强度很高，广泛应用于装甲和防护结构。本文将陶瓷和混凝土的本构方程引入物质点法中，对冲击问题进行数值模拟，分析结构的防护性能。

本文对三类本构关系做了介绍，推导了超弹性材料的应力应变关系，得出了材料参数的数量关系。由本构关系的客观性得出了次弹性本构方程中的应力率需为客观张量，并以 Drucker-Prager 模型为例介绍了应力更新步骤和径向返回法。

陶瓷的本构方程为 JH-2 模型，本文先将该模型在有限元程序中实现，求解一个单元模型在不同工况下的应力、应变值，与商用软件 LS-DYNA 的结果非常吻合，验证了模型实现方式的正确性。然后基于物质点法模拟了陶瓷材料的碰撞和侵彻问题，分析了材料的力学性能。

本文介绍了两种常用的混凝土模型 HJC 和 RHT，针对 HJC 模型做了与 JH-2 模型类似的验证，发现 LS-DYNA 在受拉段对静水拉应力进行了截断，此时对损伤量不做处理，指出了 LS-DYNA 在求解屈服应力时出现的错误。对于 RHT 模型，本文采用 P-α 状态方程求解压力，在本课题组开发的物质点法程序 MPM3D 中实现该模型，模拟了弹体对混凝土靶板的侵彻问题，结果与实验值较吻合。

关键词：陶瓷；混凝土；冲击问题；物质点法

Abstract

Impact problems involve large deformation and damage of structures, along with geometric nonlinearity, material nonlinearity and boundary condition nonlinearity. Numerical simulation is a powerful tool for solving these problems. Material point method (MPM) discretizes a material domain by using a collection of particles, which carry all state variables such as position, velocity, stress, strain, etc and can describe load carrying and deformation of the material domain, so this method is suited for history-dependent material models. MPM, which can effectively simulate impact problems, solves momentum equations and computes spatial derivative using regular background grid, so it eliminates the drawbacks of mesh distortion in Lagrangian description and difficulties of tracking material interface and dealing with convection term in Eulerian description. The brittle materials, ceramics and concrete, whose strength increases as the pressure increases, are widely used for armor and protective structures. In this thesis, ceramics and concrete material models are implemented in MPM and then numerical simulation is made for impact problems, so as to analyze the protective property of structures.

Three types of constitutive models, including hyper-elasticity and hypo-elasticity, are introduced. For hyper-elasticity stress-strain equation is derived and quantitative relations of material parameters are shown. When it comes to hypo-elasticity, stress rate must be an objective tensor to meet the principle of objectivity of the constitutive equations. The stress update procedure and radial return of Drucker-Prager material model, for example, are also introduced.

In order to validate the stress update procedure, JH-2 model, for ceramics material, is implemented in our explicit FE code EFEM, and the comparison of results, such as stress, strain, damage and so on, between EFEM and commercial finite element software LS-DYNA, is made by using single element model under different loading cases. Then crash and penetration problems are simulated to analyze material property of ceramics based on MPM.

HJC and RHT material models are adopted to describe the behavior of concrete. The results show that in LS-DYNA pressure is cut off without dealing with damage and there is an obvious error of calculating the yield stress when validation is done for HJC model in the similar way for JH-2. The RHT material model, together with P-α EOS (Equation of State), is implemented in our three-dimensional explicit material point method code MPM3D, and the results from simulating projectile penetrating targets are in good agreement with those from experiments.

Key words: ceramics; concrete; impact problems; material point method

目 录

主要符号对照表

MPM	物质点法 (Material Point Method)
ρ	材料密度
σ_{ij}	应力张量
σ_m	球应力
s_{ij}	偏应力张量
p	静水压力
d_{ij}	变形率
l_{ij}	速度梯度
w_{ij}	旋率
$\Delta\varepsilon_{ij}$	应变增量
D	损伤量
E	杨氏模量
v	泊松比
K	体积模量
G	剪切模量、拉梅常数
λ	拉梅常数
m_p	物质点 p 质量
V_p	物质点 p 体积
Ω_p	物质点 p 代表的区域

第 1 章　引言

1.1　研究背景

冲击动力学是研究在短暂而剧烈的载荷作用下，包括高速碰撞时的接触载荷和爆炸产生的冲击波等，结构的受力、变形和破坏规律的一门科学[1]。冲击现象在人类实践活动中普遍存在，特别在军事上，比如对地面设施（雷达、机场、装甲车）的轰炸，对地下结构（指挥所、弹药库、发射井）的深度侵彻，对舰船和卫星的攻击等；在日常生活中有手机的跌落，汽车、高速列车的碰撞，地震、海啸对建筑物的破坏，化工厂、储油罐、核反应堆的爆炸，建筑物、矿山、隧道的工程爆破等；在航空航天领域有飞鸟对起降飞机的撞击，空间碎片对航天器的超高速碰撞。冲击问题不同于结构动力学问题[2]，从载荷上来看，爆炸产生的冲击波或者高速撞击引起的接触力作用时间历程短暂，一般在毫秒、微妙甚至纳秒尺度上。此外这些载荷异常剧烈，已经远远超出材料的屈服强度，比如炸药爆炸的压力有 10GPa 量级，碰撞的接触力会达到自身重量的上万倍；从结构响应上来看，结构会在短时间内产生局部的大变形，甚至断裂和破碎，材料的应变率高达 $10^2 s^{-1}$~$10^4 s^{-1}$，随之出现的是几何非线性、材料非线性以及本构关系的应变率效应等问题。由于惯性效应，结构所受外载荷的扰动在短时间内来不及作用到整个结构上，而是以波的形式由近及远地传播出去，称为应力波的传播。应力波的传播规律是冲击动力学分析的重要内容。

陶瓷是陶器和瓷器的总称，中国人早在一万年以前就发明了陶器，瓷器是在陶器的基础上制作的，与陶器有着近似的功能和性质，故统称为陶瓷。陶器和瓷器的差异主要体现在制作原料和烧成温度上，具体来说，陶器是由粘土在 700℃烧结而成，而瓷器是由高岭土在 1300℃烧结而成。随着现代科技的进步，人工合成材料不断涌现，替代传统的硅酸盐材料后制成的现代陶瓷材料，如碳化硼 (B_4C)、碳化硅 (SiC)、氮化硅 (SiN)、氧化铝 (Al_2O_3)和氮化铝 (AlN)等陶瓷，在各方面的性能都有很大的提高。现代陶瓷材料具有低密度、高硬度、高强度的特点，能够抵御强冲击载荷，可作为装甲和防护材料，在国防中有重要应用，比如可将陶瓷加工成人体曲面的形状制作防弹衣（如图 1.1 所示），还有将陶瓷片粘结到金属底板上（如图 1.2 所示）作为坦克和运输车辆的装甲防护结构，提高整体结构的防护性能。但陶瓷又是典型的脆性材料、抵抗塑性变形的能力很弱，容易发生断裂，这给数值模拟制造了难题。此外，陶瓷还具有耐磨损、耐高温、耐腐蚀、电绝缘的多种优良特性，在工业领域有着广泛的应用[3]。

图 1.1　陶瓷材料制作防弹衣[4]

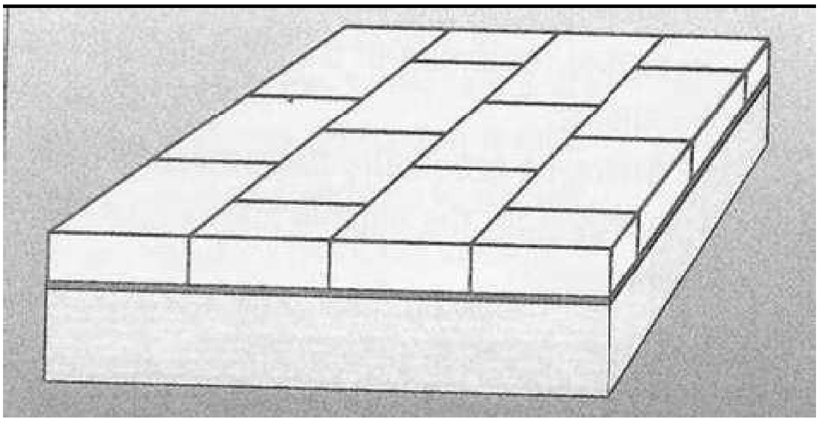


图 1.2　陶瓷材料用于坦克等装甲车[4]

混凝土是指由胶凝材料（水泥）、集料（砂子、石子等）和水按照一定比例配合而成，经浇筑、成型后得到可承受载荷的人工材料。混凝土可现场浇注或者预制，形状和尺寸适应性非常强，且在受压条件下有很高的强度。此外混凝土还具有造价低廉、耐腐蚀性好的特点，相比于钢材，其耐火性优势更为明显。这些优点使得混凝土广泛应用于楼房、大坝、桥梁、公路等众多领域，成为衡量经济社会发展的一项重要指标。但是混凝土属于脆性材料，抗拉强度相比抗压强度很低、延展性很差，解决这一问题的方案通常是在混凝土构件的受拉一侧布置钢筋[5]。在国防领域，许多掩体和军事设施都是混凝土结构，因此研究混凝土的抗冲击性能具有重要意义。

综上，陶瓷和混凝土材料因其特殊的性质在冲击问题上有着广泛应用，研究这两类材料的抗冲击性能从而指导工程应用具有重要的现实意义，而冲击问题一般会涉及几何大变形和材料非线性等问题，数值方法成为解决这一问题的有效手段。

1.2　数值方法概述

力学和其他物理问题，如热、电磁，是基于一定的假设，得出关于物理场变量的控制方程和定解条件，求解这些方程是一项很重要的研究内容。这些控制方程为偏微分方程组，通常只有对几何形状规则、方程性质简单的少数问题才能得到理论解，而对于冲击这类涉及几何非线性、材料非线性的问题求出解析解是不可能的。实验研究是解决这个问题的另一种途径，它要比理论研究更符合客观实际，因为理论解是基于一定假设得出的，如连续介质假设、材料模型假设等。但实验研究只能是得到少许情形的结果，不能得出关于全场的解析表达，且实验研究具有周期长、花费大和安全性差的缺点。

随着计算机技术的发展，数值方法的功能越来越强大，在科学研究和工程技术中扮演着重要的角色。力学问题的数值方法是求原问题的近似解，由两部分组成：控制方程的近似和场变量或其导数的近似[6, 7]。方程的近似方法有加权余量法（包括配点法、子域法、最小二乘法、力矩法和伽辽金法）、等效积分弱形式的虚功原理和泛函形式的最小势能原理（静力问题）或哈密顿原理（动力问题）。场变量的近似是以试探函数的线性组合的形式构造位移场，具体可分为基于网格和基于离散点的构造方法。接下来分别介绍网格类方法、基于离散点的无网格方法以及兼具网格和离散点特征的物质点法。

1.2.1　网格类方法

网格类方法是指在参考域上划分网格，并借助网格来构造物理场或计算空间导数，主要求解方法包括有限单元法（Finite Element Method，FEM）、有限差分法（Finite Difference Method，FDM）和有限体积法（Finite Volume Method，FVM）。它们将偏微分方程组转化成关于网格节点物理量的常微分方程组或者代数方程组，引入边界条件后求出节点变量，进而得到可以描述整个求解区域的近似解。

有限单元法是采用等效积分弱形式（伽辽金法、虚功原理或最小势能原理）代替控制方程，根据单元类型，通过单元形函数构造以节点位移为未知量的位移场，代入等效积分弱形式方程，并引入本质边界条件求解节点位移，进而求解单元应变和应力的一种数值方法。有限元法一般采用拉格朗日描述，多用于求解与变形历史相关的固体力学问题[6]。

有限差分法对控制方程用加权余量法的配点法近似，即要求在一组离散点上满足微分方程组。有限差分法用网格节点场变量的差分格式代替其微分，代入离散点处的微分方程组，建立关于节点场变量的代数方程组。有限差分法一般建立在欧拉网格上，适合求解流动问题，在计算流体力学方法中占据支配地位[8]。

有限体积法中围绕网格节点的空间称为控制容积，其对控制方程的近似是将控制方程在控制容积上积分，即加权余量法中的子域法，子域为控制容积。接下来有限体积法的处理与有限差分法类似，是用网格节点的场变量近似积分方程（有限差分法是用场变量的差分代替微分），同样得到关于网格节点场变量的代数方程组。与有限差分法相比，有限体积法建立的离散方程各项有明确的物理意义，能够很好地保持微分方程的守恒性[8, 9]。

网格是建立在参考域上的，根据参考域的运动情况，网格类方法又可分为三种：参考域与材料域固结在一起，随材料一起运动（拉格朗日描述）、参考域在空间固定不动（欧拉描述）、参考域以指定方式运动（任意拉格朗日欧拉描述，Arbitrary Lagrangian Eulerian，ALE）[7, 10]。拉格朗日法描述和欧拉描述可以看成任意拉格朗日欧拉描述的特例。设材料点为 $\boldsymbol{X}$，参考域中的点为 $\boldsymbol{\chi}$，空间点为 $\boldsymbol{x}$，材料域和参考域的运动可表示成

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, t) \tag{1-1}$$

$$\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{\chi}, t) \tag{1-2}$$

由逆映射可以得出材料点和参考点的对应关系

$$\boldsymbol{\chi} = \hat{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}(\boldsymbol{x}, t) = \hat{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, t), t) \triangleq \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{X}, t) \tag{1-3}$$

材料运动速度 $\boldsymbol{v}$ 和网格运动速度 $\hat{\boldsymbol{v}}$ 满足

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{X}, t)}{\partial t} = \hat{\boldsymbol{v}} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{X}, t)}{\partial t} \tag{1-4}$$

其中对流速度为

$$\boldsymbol{c} \triangleq \boldsymbol{v} - \hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{X}, t)}{\partial t} \tag{1-5}$$

在参考域中定义的物理量 $f(\boldsymbol{\chi}, t)$（如材料密度、材料速度等）的物质导数

$$\dot{f}(\boldsymbol{\chi}, t) = \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} + f \nabla \cdot \boldsymbol{c} \tag{1-6}$$

因而 ALE 格式的控制方程（质量守恒方程、动量方程、能量守恒方程）的物质导数中会出现对流项，进而在离散方程中也会出现，给方程的求解带来困难。对于拉格朗日描述，材料和网格一起运动，对流速度为零，运动方程求解、材料界面追踪、处理与变形历史相关的本构方程都比较容易，但网格畸变会导致计算精度下降甚至无法求解，多与有限元法结合，求解固体力学问题。对于欧拉描述，网格在空间保持不动，材料可以随意变形，适合求解大变形问题，但在界面追踪和

本构关系处理上较为困难，欧拉法多与有限差分法和有限体积法结合求解流体动力学问题。对于 ALE 描述，网格可以按照指定的方式运动，灵活性高，但同时也继承了拉格朗日法和欧拉法的缺点。

1.2.2　无网格方法

无网格法的研究最早是 Lucy[11]和 Gingold[12]在 1977 年提出光滑质点流体动力学（SPH）并用来求解天体物理问题。1994 年 Belytschko 等[13]采用伽辽金法近似动量方程、移动最小二乘法（MLS）构造位移场，提出了无单元伽辽金法（EFG），成功地模拟了动态裂纹扩展，激发了学者对无网格法的研究兴趣。无网格法是通过离散的点构造位移场，摆脱了网格的束缚，在模拟超高速碰撞、动态裂纹扩展、流体动力学等问题有明显的优势。SPH 和 EFG 已被加入到商用显式动力学有限元软件 LS-DYNA 中，下面具体介绍这两种无网格方法。

SPH 位移场采用核函数近似[14]

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \approx \int_{\Omega} \boldsymbol{u}(\bar{\boldsymbol{x}}) w(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}) d\bar{\Omega} \tag{1-7}$$

其中 $w(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})$ 为核函数或光滑函数，它的作用是将相应的物理量（位移、密度、应力等）在局部做光滑化处理。求解域用质点进行离散后，位移场为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_{p}^{N_p} w_p(\boldsymbol{x}) V_p \boldsymbol{u}_p = \sum_{p}^{N_p} N(\boldsymbol{x})_p \boldsymbol{u}_p \tag{1-8}$$

其中 $w_p(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_p)$，$V_p$ 为质点 p 代表区域的体积（三维），$\boldsymbol{u}_p$ 为质点 p 的位移。SPH 对运动方程的近似采用配点法，即在各质点 p 处满足偏微分方程，

$$\rho_p \dot{\boldsymbol{v}}_p = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)_p \tag{1-9}$$

将式(1-8)形式的应力场代入上式，可以对上式进行时间积分。Liu 等[15]指出因核近似不满足一致性要求，数值解在边界处会恶化，并提出了重构核近似

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \approx \int_{\Omega} \boldsymbol{u}(\bar{\boldsymbol{x}}) w(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}) C(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}) d\bar{\Omega} \tag{1-10}$$

其中 $C(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})$ 为校正函数，可通过令上式满足一致性条件求出。若核函数 $w_p(\boldsymbol{x})$ 取以点 $\boldsymbol{x}$ 到质点 $\boldsymbol{x}_p$ 的距离为自变量的函数，则称为径向基函数，它具有形式简单、各向同性、空间维数无关的优点[14]。

EFG 采用移动最小二乘法构造位移场，首先在求解域 Ω 中布置 N 个节点，节点位移为 $\boldsymbol{u}_I$，且每个节点对应一个权函数 $w_I(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_I)$。权函数具有紧支性，即在节点 $\boldsymbol{x}_I$ 周围的有限区域内大于零，在域外其值为零，该有限区域称为节点 $\boldsymbol{x}_I$ 的

影响域。对于域Ω内任意一点$\boldsymbol{x}$，会处于若干节点$\boldsymbol{x}_J$的影响域内，选定一组基函数（可选为多项式函数、奇异函数、三角函数等），对节点$\boldsymbol{x}_J$的位移$\boldsymbol{u}_J$做最小二乘拟合，得到关于计算点$\boldsymbol{x}$的一个函数$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\bar{x})$，对于整个位移场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$在计算点$\boldsymbol{x}$的值取作$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$，从而得到 MLS 的位移场。EFG 用伽辽金法近似运动方程，将移动最小二乘得出的位移场代入可以求得节点力和刚度矩阵，但需要借助背景网格进行积分。因权函数的紧支性，刚度矩阵是稀疏矩阵，且具有对称性。MLS 构造的位移场具有精度高、可精确重构基底的任何函数的特点，但节点形函数不具有插值特性，Belytschko 采用拉格朗日乘子法引入本质边界条件。对此，刘桂荣等[16]提出令对计算点$\boldsymbol{x}$有影响的节点个数与基函数个数相等，得到的形函数具有插值特性，称为点插值法（Point Interpolation Method，PIM）。

1.2.3　物质点法

物质点法借助网格而又不依赖网格，采用离散点来描述物体的运动，利用网格建立位移场，即吸收了网格法和无网格法的优势，在此单独介绍。物质点法由质点网格法（Particle-in-Cell，PIC）发展而来，该方法用离散的拉格朗日点表示求解区域，这些点携带有质量和位置信息，并在网格间流动。在求解流体力学问题时，这些质点能够很好的追踪界面，并描述高度扭曲的流动问题，但会有数值耗散。针对这一问题，Brackbill 等[17, 18]提出令质点携带更多的材料信息，如动量和能量，称为 FLIP 方法（Fluid Implicit Particle），数值耗散得到解决。Sulsky 等[19, 20]对 FLIP 方法做了三点改进：（1）在拉格朗日离散点上计算应力，可处理与变形历史相关的本构方程，以求解固体力学问题；（2）利用等效积分弱形式近似动量方程，得到离散的运动方程；（3）采用显式积分求解运动方程，提出了物质点法（Material Point Method，MPM）。

物质点法集中了拉格朗日法和欧拉法的优势，具体来说是 MPM 用离散的质点描述材料域，这些质点携带物体的所有信息（位置、速度、密度、应力、应变、能量），完全可以表征材料的变形和受力，可以处理与变形历史相关的本构方程，并很容易追踪材料界面；物质点法在材料域布置规则的背景网格，利用虚功原理近似动量方程，在规则的网格上利用有限元形函数构造位移场并求解空间导数，从而建立关于背景网格节点的运动方程；在每一时间步物质点同背景网格一起运动，不需要处理对流项，时间步结束时，将所有运动信息记录到物质点上，并在下一步采用新的规则背景网格，避免了拉格朗日法的网格畸变引起的数值困难。因此物质点法特别适合求解涉及大变形甚至材料破坏的问题，并得到了广泛应用。比如，Sulsky 等[21]建立轴对称格式 MPM 求解 Taylor 杆碰撞和材料成型，Ma 和

Zhang[22-24]研究了超高速碰撞和爆炸问题，Wang 等[25]应用 MPM 模拟了爆炸焊接，Nairn 研究组发展了 MPM 裂纹扩展算法[26]，黄[27]利用 MPM 研究了金属和岩土的冲击，Ambati 等[28]模拟了金属材料的切削。本文采用物质点法对陶瓷和混凝土的冲击问题进行数值模拟。

1.3　本文主要内容

本文针对陶瓷和混凝土这两种脆性材料在结构防护上的特性，在物质点法框架下模拟冲击问题。

本章介绍了冲击动力学问题和陶瓷、混凝土材料的特征，然后对几种数值方法进行了概述，特别是物质点法及其在处理冲击问题上的优势，阐述了选题意义。

第 2 章详细介绍了物质点法的离散和运动方程，以及运动方程的显式和隐式求解方法，然后对与 MPM 相关的广义插值物质点法和无反射边界条件两个问题做了简要介绍。

第 3 章首先从整体上介绍了超弹性、率形式、牛顿流体三类本构关系，然后以 Drucker-Prager 模型为例对率形式本构关系的应力更新做了说明，最后介绍了 JH-2 陶瓷模型，并做了验证和应用。

第 4 章针对混凝土材料两种常用的材料模型 HJC 和 RHT，分别介绍了它们的状态方程、强度模型和损伤模型，然后对 HJC 模型与有限元做了对比，对 RHT 模型进行了侵彻问题的应用。

第 5 章对全文工作进行总结，并对工作中需要改进的地方做了说明。

第 2 章　物质点法基本理论

本章介绍物质点法的相关理论，包括运动方程的建立和求解、物质点法的改进方案广义插值物质点法以及无反射边界条件在物质点法框架下的实现。物质点法是一种求解连续介质力学问题的质点类方法，它是将求解区域离散成物质点（如图 2.1 所示）。物质点的质量为其离散区域的质量，并且物质点携带速度、应力、应变等物理量，因此可用这些点来描述求解区域的运动和变形。物质点法在求解动量方程时需要借助背景网格，即在 t^n 时刻将物质点的信息映射到规则的背景网格上，得到关于背景网格节点的运动方程，求解运动方程后得到 t^{n+1} 时刻的量。在这一过程中物质点随背景网格一起运动，因此物质点的量也得到了更新，这样就可以舍弃已经变形的背景网格，在下一时间步重新采用规则的背景网格。可以发现，物质点法是用物质点来描述求解区域，借助于网格，而又不受制于网格，有效避免了因网格畸变引起的时间步长变小、负体积和数值精度降低等问题[19, 20]。

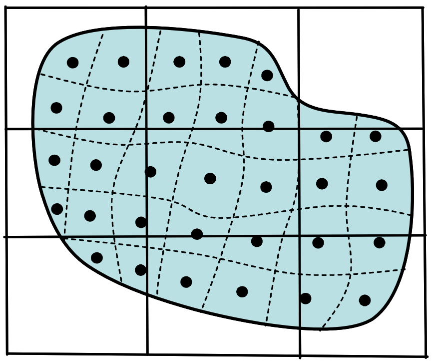


图 2.1　物质点离散和背景网格

2.1　物质点法运动方程

力学是研究物体在力的作用下的运动。物体在变形前的状态称为参考构型，每一质点用其位置矢量 $\boldsymbol{X}$ 表示，变形后 t 时刻的构型称为现时构型，质点 $\boldsymbol{X}$ 的位置矢量为 $\boldsymbol{x}$，如图 2.2 所示[29]。

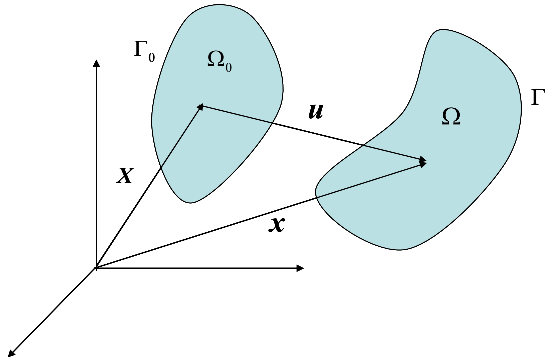


图 2.2　物体的参考构型和现时构型

物体的运动方程为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t) \tag{2-1}$$

变形梯度

$$F_{iA}=\frac{\partial x_i}{\partial X_A} \tag{2-2}$$

根据连续介质力学假设，得到物体运动的微分形式控制方程

质量守恒方程：
$$\dot{\rho}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{2-3}$$

动量方程：
$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla+\rho\boldsymbol{f}=\rho\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{2-4}$$

能量守恒方程：
$$\rho\dot{e}=\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d} \tag{2-5}$$

其中式(2-3)~(2-5)中 ρ 为材料密度，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}$ 为位移，$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{u}}$ 为质点速度，$\boldsymbol{\sigma}$ 为 Cauchy 应力，$\boldsymbol{f}$ 为质量力，e 为单位质量内能，

$$\boldsymbol{d}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\nabla+\nabla\boldsymbol{v}) \tag{2-6}$$

为变形率。

边界条件

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\big|_{\Gamma_u}=\bar{\boldsymbol{u}}(t)\\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}\big|_{\Gamma_\sigma}=\bar{\boldsymbol{t}}(t)\end{cases} \tag{2-7}$$

对于动力问题需要给出初始条件

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},0)=\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{X})\\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X},0)=\tilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{X})\end{cases} \tag{2-8}$$

此外要建立变形与受力之间的关系，即本构方程

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},\tau),-\infty<\tau\le t) \tag{2-9}$$

直接求解以上定解方程是非常困难的，物质点法与有限元法类似，都是求解动量方程的弱形式虚功原理[10]，由

$$\int_{\Omega}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla+\rho\boldsymbol{f}-\rho\ddot{\boldsymbol{u}})\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Omega=0 \tag{2-10}$$

分部积分得

$$\int_{\Omega}\rho\ddot{\boldsymbol{u}}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\boldsymbol{\sigma}:\nabla\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega}\rho\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_\sigma}\bar{\boldsymbol{t}}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Gamma \tag{2-11}$$

求解式(2-11)需要对求解区域进行离散，得到关于背景网格节点的位移场

$$u_i=\sum_{I=1}^{N_g}N_I u_{iI} \tag{2-12}$$

其中用自然坐标表示的形函数

$$N_I=\frac{1}{8}(1+\xi_I\xi)(1+\eta_I\eta)(1+\zeta_I\zeta) \tag{2-13}$$

将式(2-12)代入式(2-11)，得

$$\sum_{J=1}^{N_g}M_{IJ}\ddot{u}_{iJ}+f_{iI}^{\mathrm{int}}=f_{iI}^{\mathrm{ext}} \tag{2-14}$$

其中

协调质量阵：
$$M_{IJ}=\int_{\Omega}\rho N_I N_J\mathrm{d}\Omega \tag{2-15}$$

节点内力：
$$f_{iI}^{\mathrm{int}}=\int_{\Omega}\frac{\partial N_I}{\partial x_j}\sigma_{ij}\mathrm{d}\Omega \tag{2-16}$$

节点外力：
$$f_{iI}^{\mathrm{ext}}=\int_{\Omega}\rho N_I f_i\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_\sigma}N_I\bar{t}_i\mathrm{d}\Gamma \tag{2-17}$$

可以发现以上公式推导与有限元非常相似，差异只是物质点法的运动方程(2-14)节点位移是背景网格节点的位移，而有限元是单元节点的位移。如图 2.1 所示的物质点离散，每一物质点代表一块区域，并且假设该区域的质量集中于这一物质点上，即

$$\Omega=\bigcup_{p=1}^{N_p}\Omega_p \tag{2-18}$$

$$\rho=\sum_{p=1}^{N_p}m_p\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_p) \tag{2-19}$$

其中 Ω_p 为质点 p 代表的区域，m_p 和 $\boldsymbol{x}_p$ 分别为质点 p 的质量和位置，则式(2-15)~(2-17)可写成

$$M_{IJ}=\sum_{p=1}^{N_p}\int_{\Omega_p}\rho N_I N_J \mathrm{d}\Omega=\sum_{p=1}^{N_p}m_p N_{Ip}N_{Jp} \tag{2-20}$$

$$f_{iI}^{\text{int}}=\sum_{p=1}^{N_p}\int_{\Omega_p}\frac{\partial N_I}{\partial x_j}\sigma_{ij}\mathrm{d}\Omega\approx\sum_{p=1}^{N_p}N_{I,jp}\sigma_{ijp}V_p \tag{2-21}$$

$$f_{iI}^{\text{ext}}=\sum_{p=1}^{N_p}\int_{\Omega_p}\rho N_I f_i\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_\sigma}N_I\bar{t}_i\mathrm{d}\Gamma=\sum_{p=1}^{N_p}m_p N_{Ip}f_{ip}+\int_{\Gamma_\sigma}N_I\bar{t}_i\mathrm{d}\Gamma \tag{2-22}$$

式中 $N_{Ip}=N_I(\boldsymbol{x}_p)$，$N_{I,jp}=N_{I,j}(\boldsymbol{x}_p)$，$\sigma_{ijp}$ 和 V_p 为质点 p 的应力和代表区域的体积，$f_{ip}=f_i(\boldsymbol{x}_p)$。

如果采用集中质量阵，则式(2-14)成为

$$M_I\ddot{u}_{iI}+f_{iI}^{\text{int}}=f_{iI}^{\text{ext}} \tag{2-23}$$

其中节点质量

$$M_I=\sum_{J=1}^{N_g}M_{IJ}=\int_\Omega\rho N_I\mathrm{d}\Omega=\sum_{p=1}^{N_p}m_p N_{Ip} \tag{2-24}$$

2.2　运动方程求解方法

首先，由上一节的运动方程(2-23)及其推导过程可以看出，除了节点质量、节点内力和节点外力的求解，物质点法基本上与有限元相同。有限元一般选择高斯积分，而物质点法是在物质点上进行积分。其次，物质点法的特点是物质点携带物体运动的所有信息包括应力和变形，背景网格只是用来在每一时间步建立运动方程，下一时间步会采用规则的背景网格。而有限元的网格节点上会一直保留位移和速度的信息。因而这就要求在每一时间步开始时为背景网格节点赋速度信息，在每一时间步结束时将位移和速度信息反映到物质点上。类似式(2-24)，背景网格节点动量

$$p_{iI}=\sum_{p=1}^{N_p}m_p v_{ip}N_{Ip}=m_I v_{iI} \tag{2-25}$$

最后，由上式的节点速度得出的速度场，一般与物质点的速度不协调，因而在时间步结束时，物质点位置和速度的更新采用

$$x_{ip}^{n+1}=x_{ip}^n+\Delta t\sum_{I=1}^{8}\frac{p_{iI}^{n+1}}{m_I^n}N_{Ip} \tag{2-26}$$

$$v_{ip}^{n+1} = v_{ip}^{n} + \Delta t \sum_{I=1}^{8} \frac{f_{iI}^{n}}{m_I^{n}} N_{Ip} \tag{2-27}$$

式(2-27)中 $f_{iI}^{n} = f_{iI}^{\text{ext},n} - f_{iI}^{\text{int},n}$ 为节点力。以上是物质点法与有限元的三点差异。

建立运动方程实际上就是通过在空间域上离散，将偏微分方程组转化成时间函数的常微分方程组，如式(2-23)。式(2-23)的求解有多种方法，比如加权余量法，其中用的最广泛的是类似有限差分法的配点法，如 Houbolt 法、Wilson θ 法等[7]。这些方法都是要求在某些时间点上满足式(2-23)，比如在 t^n 时刻有

$$M_I^{n} \ddot{u}_{iI}^{n} + f_{iI}^{\text{int},n} = f_{iI}^{\text{ext},n} \tag{2-28}$$

此外还需用差分代替时间微分，即给出位移、速度、加速度三者之间的关系。根据三者关系的不同，可分为显式求解和隐式求解，下面分别以中心差分法和 Newmark 法为例说明各自的求解过程。

2.2.1　显式求解

中心差分法中的时间节点如图 2.3 所示，$\Delta t^{n+1/2} = t^{n+1} - t^{n}$，$t^{n+1/2} = \frac{1}{2}(t^{n+1} + t^{n})$，$\Delta t^{n} = \frac{1}{2}(t^{n+1/2} - t^{n-1/2})$。位移、速度、加速度三者之间的关系为

$$\boldsymbol{v}^{n+1/2} = \boldsymbol{v}^{n-1/2} + \Delta t^{n} \ddot{\boldsymbol{u}}^{n} \tag{2-29}$$

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}^{n} + \Delta t^{n+1/2} \boldsymbol{v}^{n+1/2} \tag{2-30}$$

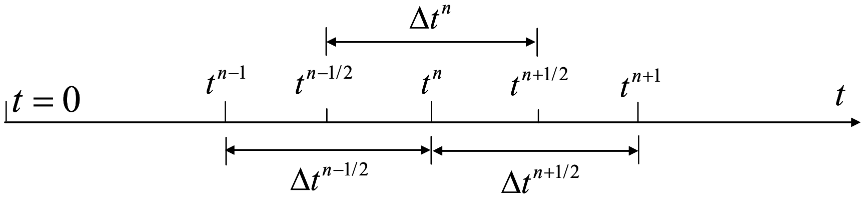


图 2.3　中心差分法时间节点

在 t^n 时刻，物质点的坐标、应力、体积已知，由式(2-24)、式(2-21)、式(2-22)可得网格节点的质量、节点内力和节点外力，由式(2-28)可直接求得节点加速度 $\ddot{\boldsymbol{u}}^{n}$，不需要求解方程组，进而再由式(2-29)和式(2-30)求得节点速度 $\boldsymbol{v}^{n+1/2}$ 和节点位移 $\boldsymbol{u}^{n+1}$。物质点的位置和速度由式(2-26)和式(2-27)更新。对于增量本构关系，物质点的应力和体积更新方式如式(2-31)和式(2-32)

$$\boldsymbol{\sigma}_p^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_p^{n} + \Delta t^{n+1/2} \boldsymbol{D} : \boldsymbol{d}_p^{n+1/2} \tag{2-31}$$

$$V_p^{n+1} = V_p^{n}(1 + \text{tr}(\Delta t^{n+1/2} \boldsymbol{d}_p^{n+1/2})) \tag{2-32}$$

与有限元法不同的是，每一时间步会采用新的背景网格，上一时间步结束时网格节点的速度与本时间步开始时的节点速度并不相同，因而对物质点应力和体积的更新就有两种选择：在变形前的规则网格上和在变形后的不规则网格上。

Bardenhagen[30]和 Nairn[26]给出三种应力更新格式：USF（Update-Stress-First）、USL（Update-Stress-Last）、MUSL（Modified-Update-Stress-Last），并比较了三种格式的能量守恒性，发现 USF 和 MUSL 类似，能量守恒性较好，USL 能量耗散较严重。

USF 格式是指在时间步开始时，利用式(2-25)得到的节点速度在规则的背景网格上更新当前时刻物质点的应力和体积，然后求解节点质量和节点力并更新网格节点加速度和速度，最后更新物质点的速度和位置。

USL 格式是指利用上一时间步结束时得到的应力和体积求解节点内力，并更新本时间步的网格节点加速度和速度，利用此时的节点速度在变形的背景网格上更新物质点应力和体积，并同时更新物质点速度和位置。

MUSL 格式是对 USL 的修正，它是将本时间步结束时的物质点速度重新映射回变形的背景网格，再利用这时的节点速度更新物质点应力和体积。

综上，USF 格式和 MUSL 格式是利用物质点映射到背景网格的速度来更新应力，USL 格式是直接利用动量方程积分后的速度更新应力；USF 格式是在规则的背景网格上更新应力用于本时间步计算内力，USL 格式和 MUSL 格式是在变形的背景网格上更新应力用于下一时间步计算内力。

2.2.2　隐式求解

隐式求解是指将位移、速度、加速度之间的关系代入式(2-28)后，得到的是代数方程组，对于非线性问题，方程组是非线性的。Newmark 法给出的关系式为

$$\boldsymbol{v}^{n+1} = \tilde{\boldsymbol{v}}^{n} + \gamma \ddot{\boldsymbol{u}}^{n+1} \Delta t \tag{2-33}$$

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \tilde{\boldsymbol{u}}^{n} + \beta \ddot{\boldsymbol{u}}^{n+1} (\Delta t)^2 \tag{2-34}$$

其中 $\Delta t = t^{n+1} - t^{n}$， β 和 γ 为积分常数，

$$\tilde{\boldsymbol{v}}^{n} = \boldsymbol{v}^{n} + (1-\gamma) \ddot{\boldsymbol{u}}^{n} \Delta t \tag{2-35}$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}^{n} = \boldsymbol{u}^{n} + \boldsymbol{v}^{n} \Delta t + (\frac{1}{2} - \beta) \ddot{\boldsymbol{u}}^{n} (\Delta t)^2 \tag{2-36}$$

将式(2-33)和式(2-34)代入 t^{n+1} 时刻向量形式的运动方程，有

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}^{n+1}, t^{n+1}) = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \boldsymbol{M} (\boldsymbol{u}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{u}}^{n}) + \boldsymbol{f}^{\text{int}} (\boldsymbol{u}^{n+1}) - \boldsymbol{f}^{\text{ext}} (\boldsymbol{u}^{n+1}, t^{n+1}) = 0 \tag{2-37}$$

上式是以 $\boldsymbol{u}^{n+1}$ 为自变量的非线性方程组。

Newton-Raphson 迭代法是求解非线性方程组的有效方法，其迭代格式为

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}^{n+1}}(\boldsymbol{u}_k^{n+1}, t^{n+1}) \cdot (\boldsymbol{u}_{k+1}^{n+1} - \boldsymbol{u}_k^{n+1}) = -\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}_k^{n+1}, t^{n+1}) \tag{2-38}$$

迭代初值一般取 $\boldsymbol{u}_0^{n+1} = \tilde{\boldsymbol{u}}^n$，牛顿迭代将求解非线性代数方程组转化为多次求解线性代数方程组。式(2-38)的求解主要有以下两种方式，

一是用共轭梯度迭代或 GMRES 迭代[31, 32]求解线性方程组，其特点是在迭代过程中，只须求切线刚度矩阵 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}^{n+1}}(\boldsymbol{u}_k^{n+1}, t^{n+1})$ 与共轭向量或 Krylov 向量 $\boldsymbol{p}$ 的乘积 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}^{n+1}}(\boldsymbol{u}_k^{n+1}, t^{n+1}) \cdot \boldsymbol{p}$，而 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}^{n+1}}(\boldsymbol{u}_k^{n+1}, t^{n+1})$ 为梯度，所以 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}^{n+1}}(\boldsymbol{u}_k^{n+1}, t^{n+1}) \cdot \boldsymbol{p}$ 为方向导数，可用差商来近似

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}^{n+1}}(\boldsymbol{u}_k^{n+1}, t^{n+1}) \cdot \boldsymbol{p} \approx \frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}_k^{n+1} + h\boldsymbol{p}, t^{n+1}) - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}_k^{n+1}, t^{n+1})}{h} \tag{2-39}$$

因而求解过程中无需显式求出切线刚度矩阵。另外为了提高迭代收敛速度，一般需要对系数矩阵做预处理。

二是显式求出切线刚度矩阵[33]，然后用高斯消去或 LDLT 分解等方法求解。刚度阵

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{u}^{n+1}}(\boldsymbol{u}_k^{n+1}, t^{n+1}) &= \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\boldsymbol{M} + \frac{\partial \boldsymbol{f}^{\text{int}}(\boldsymbol{u}^{n+1})}{\partial \boldsymbol{u}^{n+1}} - \frac{\boldsymbol{f}^{\text{ext}}(\boldsymbol{u}^{n+1}, t^{n+1})}{\partial \boldsymbol{u}^{n+1}} \\ &= \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}^{\text{mat}} + \boldsymbol{K}^{\text{geo}} - \boldsymbol{K}^{\text{ext}}\end{aligned} \tag{2-40}$$

其中

$$\boldsymbol{K}^{\text{mat}} = \sum_{p=1}^{N_p} \boldsymbol{B}_{Ip}^{\text{T}} \boldsymbol{C}_p^{\sigma\text{T}} \boldsymbol{B}_{Jp} V_p \tag{2-41}$$

$$\boldsymbol{K}^{\text{geo}} = \sum_{p=1}^{N_p} \boldsymbol{I}\boldsymbol{G}_{Ip}^{\text{T}} \left[\sigma_{ijp}\right] \boldsymbol{G}_{Jp} V_p \tag{2-42}$$

上两式中 $\sum_{p=1}^{N_p}$ 表示类似于有限元的刚度阵组装（有限元是对单元循环，这里是对物质点循环），$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla\text{T}} = \boldsymbol{C}^{\sigma\text{T}} : \boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla\text{T}}$ 为 Truesdell 应力率，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，此外

$$\boldsymbol{B}_I^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_I}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial N_I}{\partial x_3} & \dfrac{\partial N_I}{\partial x_2} \\ 0 & \dfrac{\partial N_I}{\partial x_2} & 0 & \dfrac{\partial N_I}{\partial x_3} & 0 & \dfrac{\partial N_I}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial N_I}{\partial x_3} & \dfrac{\partial N_I}{\partial x_2} & \dfrac{\partial N_I}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \tag{2-43}$$

$$\boldsymbol{G}_I^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_I}{\partial x_1} & \dfrac{\partial N_I}{\partial x_2} & \dfrac{\partial N_I}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{2-44}$$

$\boldsymbol{B}_{Ip} = \boldsymbol{B}_I(\boldsymbol{x}_p)$，$\boldsymbol{G}_{Ip} = \boldsymbol{G}_I(\boldsymbol{x}_p)$。

牛顿迭代收敛准则主要有残差 $\boldsymbol{r}$ 或位移增量小于某一值时，迭代停止。然后再更新物质点的位移和速度，结束本时间步。

显式求解和隐式求解各自有其特点和适用范围。显式方法需要较小的时间步长 $\Delta t \le \Delta t_{\mathrm{cr}}$，根据 CFL（Courant-Friedrichs-Lewy）条件[24]

$$\Delta t_{\mathrm{cr}} = \min_e \frac{d_c}{c + |u|} \tag{2-45}$$

上式中 d_c 为背景网格尺寸，c 为声速，u 为物质点运动速度。但在每一时间步中显式方法不需要求解方程组，计算量很小。隐式方法中的 Newmark 法当积分常数 β 和 γ 满足

$$\gamma \ge \frac{1}{2}，\quad \beta \ge \frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2 \tag{2-46}$$

积分为无条件稳定，对时间步长的限制主要考虑精度的要求。隐式求解的时间步长虽然可比显式求解高 2~4 个数量级，但每一步需要求解方程组，可能还会遇到迭代收敛性的问题。显式求解能够捕捉应力波的传播过程，适合求解冲击爆炸等涉及高频响应而计算时间短的问题；对于结构振动这类低频问题，一般求解时间较长，适合用隐式求解[7, 10]。

2.3　广义插值物质点法

标准物质点法是将物体的离散区域用物质点代替，这样物质点在跨网格时会有很强的间断，容易产生数值噪音。Bardenhagen 等[34]提出将物理量在离散区域上做光滑化处理，改进后的物质点法称为广义插值物质点法（Generalized Interpolation Material Point，GIMP）。设物质点特征函数为 $\chi_p(\boldsymbol{x})$，则物理量有

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{p=1}^{N_p} f_p \chi_p(\boldsymbol{x}) \tag{2-47}$$

其中 f_p 为物理量 f 在物质点 p 处的值，$\chi_p(\boldsymbol{x})=0, \boldsymbol{x}\notin\Omega_p$。从而密度场和应力场

$$\rho(\boldsymbol{x})=\sum_{p=1}^{N_p}\frac{m_p}{V_p}\chi_p(\boldsymbol{x}) \tag{2-48}$$

$$\sigma_{ij}=\sum_{p=1}^{N_p}\sigma_{ijp}\chi_p(\boldsymbol{x}) \tag{2-49}$$

将上两式代入(2-24)、式(2-21)和式(2-22)得

$$M_I=\sum_{p=1}^{N_p}\int_{\Omega_p}\frac{m_p}{V_p}\chi_p(\boldsymbol{x})N_I \mathrm{d}\Omega=\sum_{p=1}^{N_p}m_p S_{Ip} \tag{2-50}$$

$$f_{iI}^{\mathrm{int}}=\sum_{p=1}^{N_p}\int_{\Omega_p}N_{I,j}\sigma_{ijp}\chi_p(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Omega=\sum_{p=1}^{N_p}S_{I,jp}\sigma_{ijp}V_p \tag{2-51}$$

$$f_{iI}^{\mathrm{ext}}=\sum_{p=1}^{N_p}\int_{\Omega_p}\frac{m_p}{V_p}\chi_p(\boldsymbol{x})N_I f_{ip}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_\sigma}N_I\bar{t}_i\mathrm{d}\Gamma=\sum_{p=1}^{N_p}m_p S_{Ip}f_{ip}+\int_{\Gamma_\sigma}N_I\bar{t}_i\mathrm{d}\Gamma \tag{2-52}$$

其中

$$S_{Ip}=\frac{1}{V_p}\int_{\Omega_p}\chi_p(\boldsymbol{x})N_I\mathrm{d}\Omega \tag{2-53}$$

$$S_{I,jp}=\frac{1}{V_p}\int_{\Omega_p}N_{I,j}\chi_p(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Omega \tag{2-54}$$

若取

$$\chi_p(\boldsymbol{x})=V_p\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_p) \tag{2-55}$$

则 $S_{Ip}=N_{Ip}$，$S_{I,jp}=N_{I,jp}$，GIMP 退化为标准物质点法。若取

$$\chi_p(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1 & \boldsymbol{x}\in\Omega_p\\ 0 & \boldsymbol{x}\notin\Omega_p\end{cases} \tag{2-56}$$

则式(2-53)和式(2-54)为

$$S_{Ip}=\frac{1}{V_p}\int_{\Omega_p}N_I\mathrm{d}\Omega \tag{2-57}$$

$$S_{I,jp}=\frac{1}{V_p}\int_{\Omega_p}N_{I,j}\mathrm{d}\Omega \tag{2-58}$$

随着物体的变形，每一物质点代表的区域Ω_p不断变化，为求解式(2-57)和式(2-58)，可有以下几种方案：

一是 uGIMP（Uniform GIMP）[35, 36]。假设Ω_p为边平行于背景网格的长方体，且边长不随区域的变形而变化。

二是 cpGIMP（Contiguous Particle GIMP）[35, 36]。同样假设Ω_p为边平行于背景网格的长方体，边长值由初始边长与变形梯度对角元素的乘积得到。对于 uGIMP 和 cpGIMP 积分区域为长方体，N_I和$N_{I,j}$又可表达成三个坐标变量函数的乘积，因此式(2-57)和式(2-58)可写成这三个函数各自积分的乘积。

三是 CPDI（Convected Particle Domain Interpolation Method）[37]。若物体发生较大的剪切或旋转变形，uGIMP 和 cpGIMP 的求解结果会出现一些问题，Sadeghirad 等提出的 CPDI 将Ω_p近似为平行六面体，其三条边通过物质点的变形梯度求出。

2.4　无反射边界条件

在地质力学等问题中，求解域为半无限体，而数值方法的求解区域只能是有限的。解决的方法就是施加无反射边界条件，即让应力波在传播到边界时能够像在半无限体中一样，不会发生反射。从受力的角度看，就是将求解区域外的部分对求解区域的作用力以边界力的方式施加在无反射边界上。Lysmer 和 Kuhlemeyer[38]给出了一种形式简洁、容易施加而又能够有效吸收纵波和横波的边界力计算公式

$$\sigma_n = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} = -\rho c_d \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = -\rho c_d v_n \tag{2-59}$$

$$\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} - \sigma_n\boldsymbol{n}) = -\rho c_s(\boldsymbol{v} - v_n\boldsymbol{n}) = -\rho c_s \boldsymbol{v}_\tau \tag{2-60}$$

其中$\boldsymbol{n}$为边界的外法向单位向量，c_d为纵波波速，c_s为横波波速。对于各向同性线弹性材料

$$c_d = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \tag{2-61}$$

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{2-62}$$

其中λ和G为拉梅常数。这种实现无反射边界条件的方式得到了广泛应用，如 LS-DYNA[39]和 ABAQUS 等。

Chen[40]等将式(2-59)和式(2-60)在物质点法框架下实现，根据圣维南原理[41]将

无反射边界上的面力等效为作用在最外层网格上的质量力，如图 2.4 所示，

$$\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \boldsymbol{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \tag{2-63}$$

由上式得质量力 $\boldsymbol{f} = \dfrac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}}{\rho \cdot \Delta x}$，代入式(2-22)实现无反射边界条件。

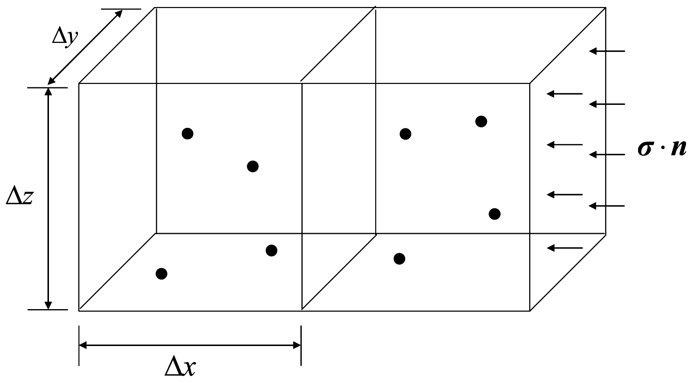


图 2.4　面力转化为质量力

2.5　本章小结

本章对物质点法的基本理论作了介绍，首先基于虚功原理推导了物质点法运动方程，阐述了物质点法与有限元的异同；然后介绍了运动方程的显式和隐式求解格式，讨论了显式求解中 USF、USL 和 MUSL 的差异以及显式求解与隐式求解的特点；接着推导了广义插值物质点法 GIMP 的计算公式，介绍了三种积分方案；最后简要介绍了无反射边界条件以及在物质点法框架下的实现方法。

第 3 章　陶瓷冲击问题模拟

陶瓷属于脆性材料，在受拉时易断裂，而在受压时具有很高的强度，且密度低，在装甲和结构防护上有广泛应用。本章首先对本构关系相关理论做简要说明，然后以岩土材料的 Drucker-Prager 模型为例介绍基于增量理论的弹塑性模型应力更新过程，最后着重论述反映陶瓷材料力学性能的 JH-2 模型，包括模型的实现、在有限元框架下与 LS-DYNA 的对比验证、基于物质点法的脆性特征以及防护性能模拟。

3.1　本构关系理论

力学研究的是物质在力的作用下的机械运动情况。在同样的几何尺寸和载荷条件下，不同材料的物质运动方式是不同的，比如说同样尺寸的木条和粉笔从同一高度跌落到地面的响应。这是由于每种材料都是有不同的微观结构和性质，从而在宏观上表现出不同的力学性能。在进行力学分析时，无论是理论分析还是数值模拟，都需要给出材料的本构关系。

本构关系简单来说就是建立材料受力（应力）与变形（应变）之间的关系，然而材料的特性各异，建立本构关系也不是显而易见的事情。一般情况是根据实验中的现象再基于一定的假设，给出应力与应变的解析表达式。在连续介质力学中，本构关系要遵循以下原理：坐标不变性原理、应力确定性原理、局部作用原理和客观性原理[29]。

在 CAE 商用软件中，一般是将应力张量分解为球应力张量和偏应力张量

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij} \tag{3-1}$$

其中平均应力（或压力）可使用不同的状态方程求解，偏应力根据本构方程计算。在商用软件中，常用的本构关系大致可以分为以下三类：

一是超弹性模型。超弹性模型给出以格林应变为自变量的应变能函数表达式，根据共轭关系得出第二类 Piola-Kirchhoff（PK2）应力。LS-DYNA 中的 27 号材料 *MAT_MOONEY_RIVLIN_RUBBER 描述的是各向同性超弹性材料，单位初始体积的应变能函数[39]

$$W = a(I-3) + b(II-3) + c(III^{-2}-1) + d(III-1)^2 \tag{3-2}$$

其中 a 、b 、c 、d 为材料参数，I 、II 、III 为右 Cauchy-Green 变形张量 $\boldsymbol{C}$ 的三个不变量

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \triangleq \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F}=2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G} \tag{3-3}$$

$\boldsymbol{F}$ 为变形梯度，$\boldsymbol{E}$ 为 Green 应变张量，$\boldsymbol{G}$ 为单位张量。

对于初始状态有 $I=3$ 、$II=3$ 、$III=1$，代入式(3-2)有 $W=0$，满足无初应变能条件。因 I 、II 、III 为 $\boldsymbol{C}$ 的三个不变量，故有

$$\frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{C}}=\boldsymbol{G} \tag{3-4}$$

$$\frac{\partial II}{\partial \boldsymbol{C}}=I\boldsymbol{G}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \tag{3-5}$$

$$\frac{\partial III}{\partial \boldsymbol{C}}=III\boldsymbol{C}^{-\mathrm{T}} \tag{3-6}$$

由共轭关系得 PK2 应力

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}&=\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{E}}=2\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{C}}\\&=2\left[\frac{\partial W}{\partial I}\boldsymbol{G}+\frac{\partial W}{\partial II}(I\boldsymbol{G}-\boldsymbol{C})+\frac{\partial W}{\partial III}III\boldsymbol{C}^{-1}\right]\\&=2a\boldsymbol{G}+2b(I\boldsymbol{G}-\boldsymbol{C})-4cIII^{-2}\boldsymbol{C}^{-1}+4dIII(III-1)\boldsymbol{C}^{-1}\end{aligned} \tag{3-7}$$

根据无初应力假设，由式(3-7)得

$$c=\frac{1}{2}a+b \tag{3-8}$$

弹性刚度张量

$$\boldsymbol{L}=\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{E}}=2\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{C}} \tag{3-9}$$

需满足 Voigt 对称性。可以证明

$$\frac{\partial C_{AB}}{\partial C_{CD}}=\delta_{AC}\delta_{BD} \tag{3-10}$$

$$\frac{\partial C_{AB}^{-1}}{\partial C_{CD}}=-C_{AC}^{-1}C_{BD}^{-1} \tag{3-11}$$

所以将式(3-7)代入式(3-9)并对称化得

$$\begin{aligned}L_{ABCD}&=4b\delta_{AB}\delta_{CD}-2b(\delta_{AC}\delta_{BD}+\delta_{AD}\delta_{BC})\\&\quad+16cIII^{-2}C_{AB}^{-1}C_{CD}^{-1}+4cIII^{-2}(C_{AC}^{-1}C_{BD}^{-1}+C_{AD}^{-1}C_{BC}^{-1})\\&\quad+8d(2III^{2}-III)C_{AB}^{-1}C_{CD}^{-1}-4d(III^{2}-III)(C_{AC}^{-1}C_{BD}^{-1}+C_{AD}^{-1}C_{BC}^{-1})\end{aligned} \tag{3-12}$$

在小变形情况下，$C_{AB}^{-1}\approx\delta_{AB}$ 且 L_{ABCD} 可过渡到各向同性线弹性的刚度张量，即

$$\begin{aligned} L_{ABCD} &= (4b+16c+8d)\delta_{AB}\delta_{CD} + (-2b+4c)(\delta_{AC}\delta_{BD} + \delta_{AD}\delta_{BC}) \\ &= \lambda\delta_{AB}\delta_{CD} + G(\delta_{AC}\delta_{BD} + \delta_{AD}\delta_{BC}) \end{aligned} \tag{3-13}$$

从而

$$4b+16c+8d = \lambda \tag{3-14}$$

$$-2b+4c = G \tag{3-15}$$

其中 λ 和 G 为拉梅常数[41]，与式(3-8)联立得

$$a+b = \frac{G}{2} \tag{3-16}$$

$$d = \frac{a(5v-2)+b(11v-5)}{2(1-2v)} \tag{3-17}$$

其中 v 为泊松比。

在每一时间步计算变形梯度张量 $\boldsymbol{F}$，由式(3-7)计算 PK2 应力，再由

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{F}^{T} \tag{3-18}$$

计算 Cauchy 应力，式中 $J = \det(\boldsymbol{F})$。

二是率形式模型。率形式模型是在 CAE 中被广泛采用的一类模型，描述的是应力率与应变率之间的关系，根据是否有塑性变形可分为次弹性和次弹塑性。次弹塑性与次弹性相比，会涉及到屈服条件和流动法则，在 3.2 节以 Drucker-Prager 模型为例进行阐述。次弹性是指应力率与应变率之间保持线弹性关系，即

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}:\boldsymbol{d} \tag{3-19}$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 为某种应力率，$\boldsymbol{C}$ 为弹性刚度张量，$\boldsymbol{d}$ 见式(2-6)。

本构关系的客观性是指本构方程独立于参考系，率形式本构关系的客观性要求在参考系 χ 和 $\tilde{\chi}$ 中分别满足式(3-19)和

$$\tilde{\boldsymbol{X}} = \tilde{\boldsymbol{C}}:\tilde{\boldsymbol{d}} \tag{3-20}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{X}}$、$\tilde{\boldsymbol{C}}$、$\tilde{\boldsymbol{d}}$ 分别为 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{d}$ 在参考系 $\tilde{\chi}$ 中对应的量。

设 t 时刻某一质点在参考系 χ 和 $\tilde{\chi}$ 的位置分别为 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$，则可列出

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t) \tag{3-21}$$

其中 $\boldsymbol{Q}(t)$ 为任意正交张量，反映 χ 和 $\tilde{\chi}$ 的方向差异；$\boldsymbol{b}(t)$ 为任意矢量，反映 χ 和 $\tilde{\chi}$ 的位置差异。于是有[29]

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{3-22}$$

$$\tilde{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{3-23}$$

设 $\boldsymbol{e}_i$ 为参考系 χ 的一组标准正交基，则 $\tilde{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_i$ 为参考系 $\tilde{\chi}$ 的对应的标准正交基。设 C_{ijkl} 为 $\boldsymbol{C}$ 在 $\boldsymbol{e}_i$ 下的分量，$\tilde{C}_{ijkl}$ 为 $\tilde{\boldsymbol{C}}$ 在 $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ 下的分量，因 $\boldsymbol{C}$ 是弹性刚度张量，是材料的属性，所以

$$\tilde{C}_{ijkl} = C_{ijkl} \tag{3-24}$$

从而

$$\tilde{\boldsymbol{X}} = \tilde{\boldsymbol{C}} : \tilde{\boldsymbol{d}} = C_{ijkl}\tilde{\boldsymbol{e}}_i\tilde{\boldsymbol{e}}_j\tilde{\boldsymbol{e}}_k\tilde{\boldsymbol{e}}_l : \tilde{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{C}:\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{3-25}$$

即本构关系的客观性要求应力率 $\boldsymbol{X}$ 为客观张量。由式(3-22)知

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \boldsymbol{Q}\cdot\dot{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} + \dot{\boldsymbol{Q}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}} \neq \boldsymbol{Q}\cdot\dot{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{3-26}$$

因而 $\boldsymbol{X}$ 不能选用 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$。常用的客观应力率有 Jaumann 率和 Truesdell 率

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla \mathrm{J}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \tag{3-27}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla \mathrm{T}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + (\mathrm{tr}\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} \tag{3-28}$$

其中速度梯度和旋率

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{v}\nabla \tag{3-29}$$

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\nabla - \nabla\boldsymbol{v}) \tag{3-30}$$

三是牛顿流体模型。牛顿流体模型可描述气体或液体的粘性行为，本构方程

$$s_{ij} = \mu d'_{ij} \tag{3-31}$$

满足客观性条件，其中 μ 为粘性系数，d'_{ij} 为变形率 $\boldsymbol{d}$ 的偏量。

3.2　Drucker-Prager 模型

对于岩土、陶瓷以及混凝土等材料，实验中会发现这些材料的屈服应力会随着压力的增加而增长，金属材料的 Tresca 和 Mises 屈服条件都与静水压力无关，不再适用于这些材料[10, 42]。设 $\boldsymbol{\sigma}$ 为材料某点应力，$\boldsymbol{n}$ 为某一斜截面外法向单位向量，则斜面正应力、剪应力分别为

$$\sigma_n = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} \tag{3-32}$$

$$\tau_n = \sqrt{|\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}|^2 - \sigma_n^2} \tag{3-33}$$

Mohr-Coulomb 模型假设屈服条件类似于 Coulomb 摩擦定律，即在斜截面上

$$\tau_n = c - \sigma_n \tan\varphi \tag{3-34}$$

其中c为粘聚力，φ为内摩擦角，需通过实验确定。确定一点应力为临界屈服状态，即为应力 Mohr 圆与式(3-34)表示的直线相切（如图 3.1 所示）。因而有屈服函数

$$f(\boldsymbol{\sigma})=\sigma_1-\sigma_3+(\sigma_1+\sigma_3)\sin\varphi-2c\cos\varphi=0 \tag{3-35}$$

上式只对$\sigma_3\le\sigma_2\le\sigma_1$的情况，由材料的各向同性性质不难得出其他情况的屈服函数。在π平面上的屈服面如图 3.2 所示。

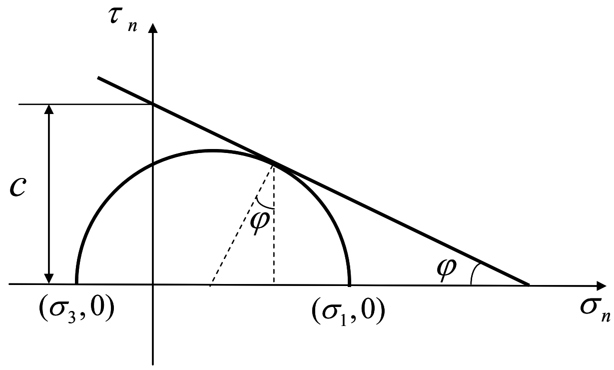


图 3.1　Mohr-Coulomb 模型临界屈服状态

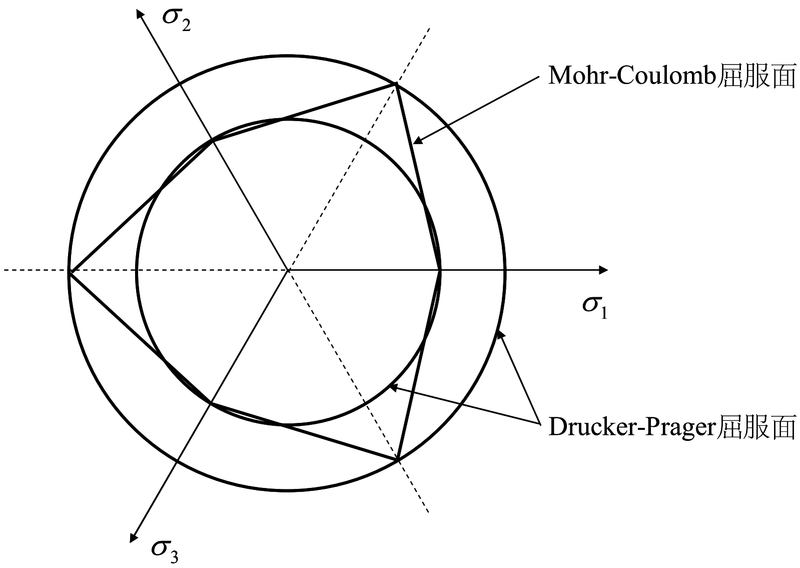


图 3.2　π平面上的 Mohr-Coulomb 和 Drucker-Prager 屈服面

Mohr-Coulomb 屈服面是由六个平面围成的，屈服面不光滑，不利于数值方法的处理。类比 Tresca 与 Mises 屈服条件，Drucker-Prager 模型给出了一种既光滑又考虑了静水压力影响的屈服函数

$$f(\boldsymbol{\sigma})=\bar{\sigma}+3\alpha\sigma_m-\sigma_Y=0 \tag{3-36}$$

其中$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}$为等效应力，$\sigma_m=-p=\frac{1}{3}\sigma_{ii}$为平均应力，$\alpha$和$\sigma_Y$为材料参数。在

π 平面上的屈服面如图 3.2 所示。若屈服面外接 Mohr-Coulomb 屈服面，则需满足式(3-37)和式(3-38)；若内接 Mohr-Coulomb 屈服面，则需满足式(3-39)和式(3-40)。

$$\alpha = \frac{2\sin\varphi}{3-\sin\varphi} \tag{3-37}$$

$$\sigma_Y = \frac{6c\cos\varphi}{3-\sin\varphi} \tag{3-38}$$

$$\alpha = \frac{2\sin\varphi}{3+\sin\varphi} \tag{3-39}$$

$$\sigma_Y = \frac{6c\cos\varphi}{3+\sin\varphi} \tag{3-40}$$

接下来推导中心差分法显式求解的 Drucker-Prager 模型应力更新公式。客观应力率采用 Jaumann 率，应变增量 $\Delta\varepsilon_{ij}^{n+1/2} \triangleq d_{ij}^{n+1/2}\Delta t^{n+1/2}$ 可分为弹性部分和塑性部分

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{n+1/2} = \Delta\varepsilon_{ij}^{(e)n+1/2} + \Delta\varepsilon_{ij}^{(p)n+1/2} \tag{3-41}$$

Jaumann 率与变形率的弹性部分满足弹性关系

$$\sigma_{ij}^{\nabla\mathrm{J}} = C_{ijkl} d_{ij}^{(e)} \tag{3-42}$$

其中各项同性弹性刚度张量

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{3-43}$$

对于弹塑性模型应力更新是先假设材料处于弹性阶段，求解试探应力。若试探应力没有落在屈服面外，即为真实应力；否则需由流动法则确定塑性应变增量，代入屈服条件求解真实应力。可直接得出试探应力

$$\begin{aligned} {}^{*}\sigma_{ij}^{n+1} &= {}^{*}s_{ij}^{n+1} + {}^{*}\sigma_m^{n+1}\delta_{ij} \\ &= \sigma_{ij}^{n} + \dot{\sigma}_{ij}^{n+1/2}\Delta t^{n+1/2} \\ &= \tilde{\sigma}_{ij}^{n} + C_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}^{n+1/2} \\ &= \tilde{\sigma}_{ij}^{n} + K\Delta\varepsilon_{kk}^{n+1/2}\delta_{ij} + 2G\Delta\varepsilon_{ij}'^{n+1/2} \end{aligned} \tag{3-44}$$

其中 K 为体积模量，且

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{n} = \sigma_{ij}^{n} + (w_{ik}^{n+1/2}\sigma_{kj}^{n} + \sigma_{ik}^{n} w_{jk}^{n+1/2})\Delta t^{n+1/2} \tag{3-45}$$

$${}^{*}s_{ij}^{n+1} = \tilde{s}_{ij}^{n} + 2G\Delta\varepsilon_{ij}'^{n+1/2} \tag{3-46}$$

$${}^{*}\sigma_m^{n+1} = \sigma_m^{n} + K\Delta\varepsilon_{kk}^{n+1/2} \tag{3-47}$$

将试探应力代入式(3-36)，若 $f({}^{*}\sigma_{ij}^{n+1}) = {}^{*}\bar{\sigma}^{n+1} + 3\alpha\,{}^{*}\sigma_m^{n+1} - \sigma_Y > 0$，则真实应力

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{n+1} &= s_{ij}^{n+1} + \sigma_m^{n+1}\delta_{ij} \\ &= \tilde{\sigma}_{ij}^{n} + K\Delta\varepsilon_{kk}^{(e)n+1/2}\delta_{ij} + 2G\Delta\varepsilon_{ij}^{\prime(e)n+1/2} \\ &= {}^{*}\sigma_{ij}^{n+1} - K\Delta\varepsilon_{kk}^{(p)n+1/2}\delta_{ij} - 2G\Delta\varepsilon_{ij}^{\prime(p)n+1/2}\end{aligned} \tag{3-48}$$

其中

$$s_{ij}^{n+1} = {}^{*}s_{ij}^{n+1} - 2G\Delta\varepsilon_{ij}^{\prime(p)n+1/2} \tag{3-49}$$

$$\sigma_m^{n+1} = {}^{*}\sigma_m^{n+1} - K\Delta\varepsilon_{kk}^{(p)n+1/2} \tag{3-50}$$

设塑性势

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = \bar{\sigma} + 3\beta\sigma_m - \sigma_Y = 0 \tag{3-51}$$

其中

$$\beta = \frac{2\sin\psi}{3 \pm \sin\psi} \tag{3-52}$$

ψ 称为膨胀角，反映塑性体积变化。

流动法则

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{(p)} = \Delta\lambda\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}} = \Delta\lambda\left(\frac{3s_{ij}}{2\bar{\sigma}} + \beta\delta_{ij}\right) \tag{3-53}$$

代入式(3-49)和式(3-50)

$$s_{ij}^{n+1}\left(1 + \frac{3G\Delta\lambda^{n+1}}{\bar{\sigma}^{n+1}}\right) = {}^{*}s_{ij}^{n+1} \tag{3-54}$$

$$\sigma_m^{n+1} = {}^{*}\sigma_m^{n+1} - 3\beta K\Delta\lambda^{n+1} \tag{3-55}$$

由式(3-54)得

$$\bar{\sigma}^{n+1} + 3G\Delta\lambda^{n+1} = {}^{*}\bar{\sigma}^{n+1} \tag{3-56}$$

$$s_{ij}^{n+1} = \frac{\bar{\sigma}^{n+1}}{{}^{*}\bar{\sigma}^{n+1}}\,{}^{*}s_{ij}^{n+1} \tag{3-57}$$

发生塑性流动时真实应力需落在屈服面上，即

$$\begin{aligned}f(\sigma_{ij}^{n+1}) &= \bar{\sigma}^{n+1} + 3\alpha\sigma_m^{n+1} - \sigma_Y \\ &= {}^{*}\bar{\sigma}^{n+1} - 3G\Delta\lambda^{n+1} + 3\alpha({}^{*}\sigma_m^{n+1} - 3\beta K\Delta\lambda^{n+1}) - \sigma_Y = 0\end{aligned} \tag{3-58}$$

解得

$$\Delta\lambda^{n+1} = \frac{{}^{*}\bar{\sigma}^{n+1} + 3\alpha\,{}^{*}\sigma_m^{n+1} - \sigma_Y}{3G + 9\alpha\beta K} \tag{3-59}$$

然后代入式(3-55)、式(3-56)和式(3-57)可求得平均应力、等效应力以及偏应力。由式(3-57)知，在求偏应力时，直接将试探偏应力等比例缩小，称为径向返回法。等效塑性应变增量

$$\Delta\varepsilon^{(p)} \triangleq \sqrt{\frac{2}{3}\Delta\varepsilon_{ij}'^{(p)}\Delta\varepsilon_{ij}'^{(p)}} = \Delta\lambda \tag{3-60}$$

对式(3-51)若取 $\beta=\alpha$，则为关联流动法则；若取 $\beta=0$，则式(3-55)和式(3-59)成为

$$\sigma_m^{n+1} = {}^*\sigma_m^{n+1} \tag{3-61}$$

$$\Delta\lambda^{n+1} = \frac{{}^*\bar{\sigma}^{n+1} - (\sigma_Y - 3\alpha\sigma_m^{n+1})}{3G} \tag{3-62}$$

即试探球应力不需要修正，且对偏应力的修正也与理想弹塑性基本一致。后文涉及的陶瓷和混凝土模型屈服应力都与压力相关，但都采用非关联流动法则，求内变量也都与式(3-62)类似，偏应力的修正直接采用径向返回法[7]。

3.3　JH-2 陶瓷材料模型

陶瓷材料属于脆性材料，其力学行为较为复杂，但因其在装甲防护方面广泛应用，很多人提出了不同的模型[43]，其中应用最为广泛的是 JH-2 模型，在冲击动力学软件 LS-DYNA 和 AUTODYN 中已包含这一模型。下面对 JH-2 模型进行介绍，并验证实现这一模型的正确性，最后基于物质点法进行冲击问题的数值模拟。

3.3.1　模型描述

Johnson 和 Holmquist[44, 45]在混凝土材料 HJC 模型的基础上提出了 JH-2 陶瓷模型，该模型由三部分构成：状态方程，强度模型和损伤模型。

状态方程是由体积变化确定当前压力（如图 3.3 所示）

$$p = \begin{cases} K_1\mu + K_2\mu^2 + K_3\mu^3 + \Delta p & \mu \ge 0 \\ K_1\mu & \mu < 0 \end{cases} \tag{3-63}$$

其中压力增量 Δp 见式(3-75)，

$$\mu = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \tag{3-64}$$

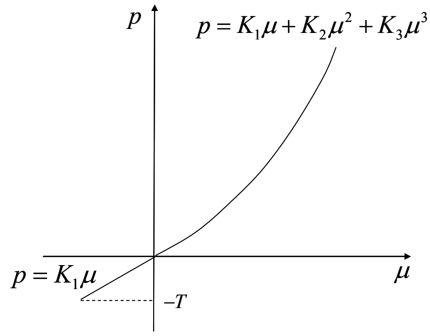


图 3.3　JH-2 模型状态方程

强度模型给出了当前状态下的屈服应力（如图 3.4 所示）。材料完好时的屈服应力为

$$\sigma_i = \sigma_{\text{HEL}} \cdot A \cdot (p^* + T^*)^N \cdot (1 + C \ln \dot{\varepsilon}^*) \tag{3-65}$$

其中 σ_{HEL} 为 HEL（Hugoniot Elastic Limit）时的等效应力，A、N、C 为材料参数，

$$p^* = \frac{p}{p_{\text{HEL}}} \tag{3-66}$$

$$T^* = \frac{T}{p_{\text{HEL}}} \tag{3-67}$$

p 为当前的静水压应力，T 为材料能承受的最大静水拉应力（拉为正），p_{HEL} 为 HEL 时的静水压应力，

$$\dot{\varepsilon}^* = \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \tag{3-68}$$

$$\dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}'_{ij}\dot{\varepsilon}'_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{9}[(\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y)^2 + (\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_z)^2 + (\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_x)^2 + \frac{3}{2}(\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2)]} \tag{3-69}$$

$\dot{\varepsilon}$ 为等效应变率，$\dot{\varepsilon}_0 = 1.0 s^{-1}$ 为参考应变率。材料完全损伤时的屈服应力为

$$\sigma_f = \sigma_{\text{HEL}} \cdot B \cdot (p^*)^M \cdot (1 + C \ln \dot{\varepsilon}^*) \le \sigma_{\text{HEL}} \cdot S_{\max}^f \tag{3-70}$$

其中 B、M、$S_{\max}^f$ 为材料参数，此时材料不能承受拉应力。当材料介于完好和完全损伤状态之间时，屈服应力为式(3-65)和式(3-70)的线性插值

$$\sigma_Y = (1 - D) \cdot \sigma_i + D \cdot \sigma_f \tag{3-71}$$

其中 D 为损伤量，见下文。

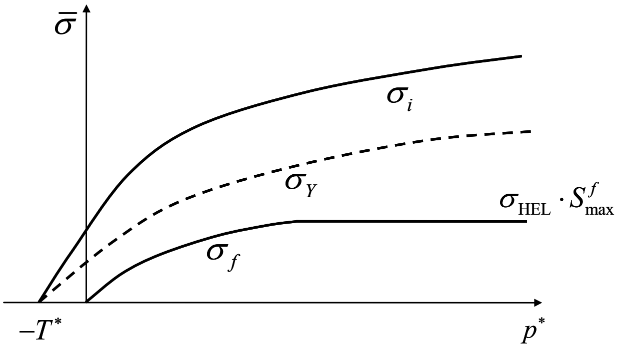


图 3.4　JH-2 模型强度模型

损伤模型描述了材料的破坏程度（如图 3.5 所示），用损伤量 D 描述

$$0 \le D = \sum \frac{\Delta \varepsilon_p}{\varepsilon_p^f} \le 1 \tag{3-72}$$

其中 $\varepsilon_p^f = D_1 \cdot (p^* + T^*)^{D_2}$ 为材料破坏的塑性应变，$\Delta \varepsilon_p$ 为当前时间步的塑性应变增量，见式(3-60)。

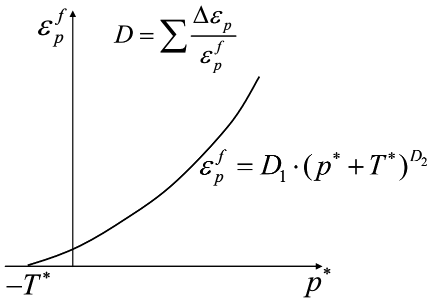


图 3.5　JH-2 模型损伤模型

Johnson 和 Holmquist[44, 45]认为随着损伤量的增加，材料会发生膨胀，从而引起压力的增加。从能量的角度看，这是由于材料损伤程度增加导致屈服应力降低（如图 3.4 所示），进而偏应力降低。而单位体积内能的弹性部分又可分为两部分：一部分是由压力引起的体积改变应变能，另一部分是偏应力引起的形状改变应变能

$$U = \frac{\bar{\sigma}^2}{6G} \tag{3-73}$$

其中 $\bar{\sigma}$ 为等效应力。由损伤量增加引起的形状改变应变能减少

$$\Delta U = U_t - U_{t+\Delta t} \tag{3-74}$$

从而压力增量（如图 3.6 所示）

$$\Delta p_{t+\Delta t} = -K_1 \mu_{t+\Delta t} + \sqrt{(K_1 \mu_{t+\Delta t} + \Delta p_t)^2 + 2\beta K_1 \Delta U} \tag{3-75}$$

其中$0 \le \beta \le 1$为能量转化系数。

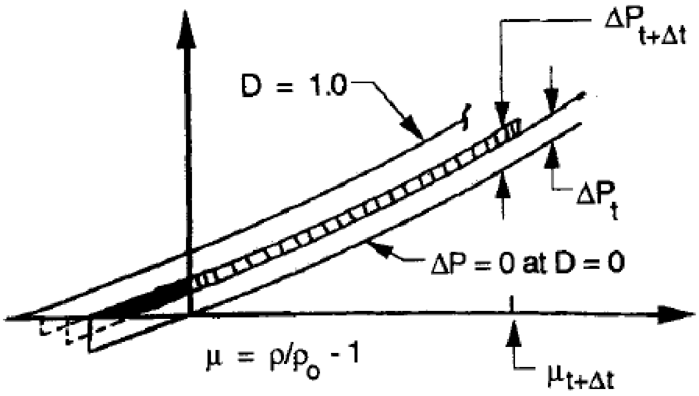


图 3.6　JH-2 模型压力增量[44]

3.3.2　模型验证

LS-DYNA 是应用广泛的显式动力学有限元程序，并已经将 JH-2 模型引入其中。为了精确验证实现该模型的正确性，首先在本课题组编写的显式有限元程序 EFEM 中加入 JH-2 模型，然后建立只有一个单元的模型[46]，在不同的加载条件和材料参数下比较 LS-DYNA[47]和 EFEM 的计算结果。在显式有限元程序中，一般都采用单点高斯积分，而本构关系描述的只是材料中某点的应力与应变关系，因而采用一个单元进行验证既简单又准确。另外，在有限元中对材料模型的实现过程可直接运用到物质点法程序中。

由于材料模型较为复杂（包括后面的 HJC 和 RHT 模型），状态方程、强度模型和损伤模型之间相互作用，在验证的过程中，通过调整一些材料参数，使之尽量避免相互干扰，简化验证过程。其次可选择特殊的加载方式，发现 LS-DYNA 软件在一些细节上的处理方式，比如拉力截断、损伤量累积等。验证时采用的单元为边长为 3mm 的立方体，节点 1~4 固定，如图 3.7 所示。

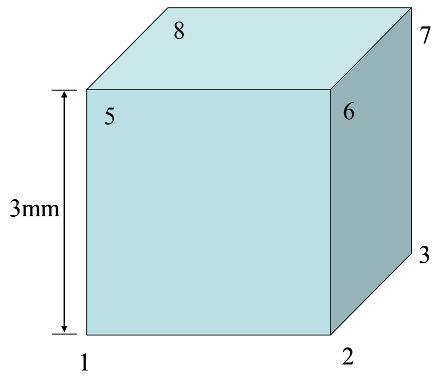


图 3.7　验证所用单元

工况一：为了避免式(3-65)、(3-70)中应变率和式(3-75)压力增量的影响，取 $C=0$，$\beta=0$，其余参数取值如表 3.1 所示，同时节点 5~8 以指定速度运动。LS-DYNA 和 EFEM 结果对比如图 3.8~图 3.11 所示，压力、等效应力、等效塑性应变、损伤量，以及拉力截断以及此时的损伤量处理两者都非常一致。

表 3.1　三种工况的 JH-2 模型材料参数

材料参数	工况一	工况二	工况三
ρ_0（g/mm^3）	3.226e-3	3.226e-3	3.226e-3
G（MPa）	127e3	127e3	127e3
A	0.85	0.05	0.8
B	0.31	0.04	0.8
C	0.0	0.5	0.0
M	0.21	0.21	0.0
N	0.29	0.29	0.0
$\dot{\varepsilon}_0$（1/ms）	0.001	0.001	0.001
T（MPa）	0.32e3	0.32e-3	0.32e3
$S^f_{\max}$	1.0e20	1.0e20	1.0e20
σ_{HEL}（MPa）	6.0e3	6.0e-3	6.0e3
p_{HEL}（MPa）	5.0e3	5.0e-3	5.0e3
β	0.0	0.0	1.0
D_1	0.02	0.02	0.02
D_2	1.85	1.85	1.85
K_1（MPa）	201e3	201e3	201e3
K_2（MPa）	260e3	260e3	260e3
K_3（MPa）	0.0	0.0	0.0

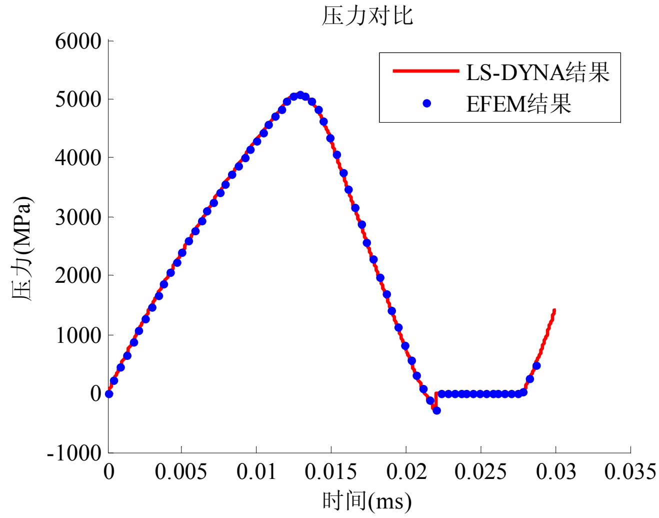


图 3.8　工况一压力对比

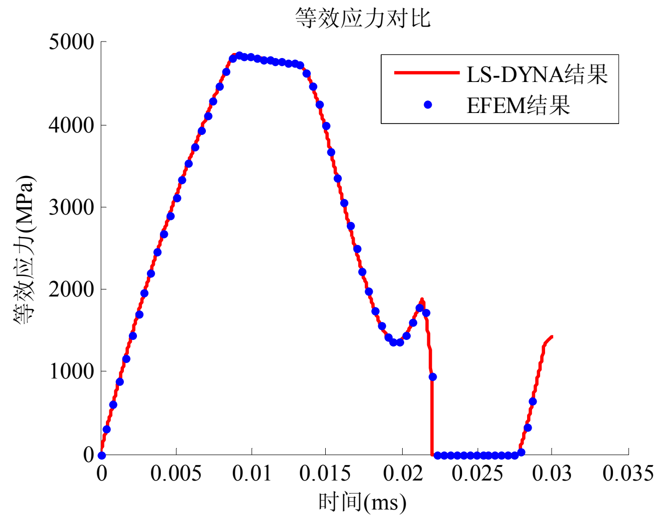


图 3.9　工况一等效应力对比

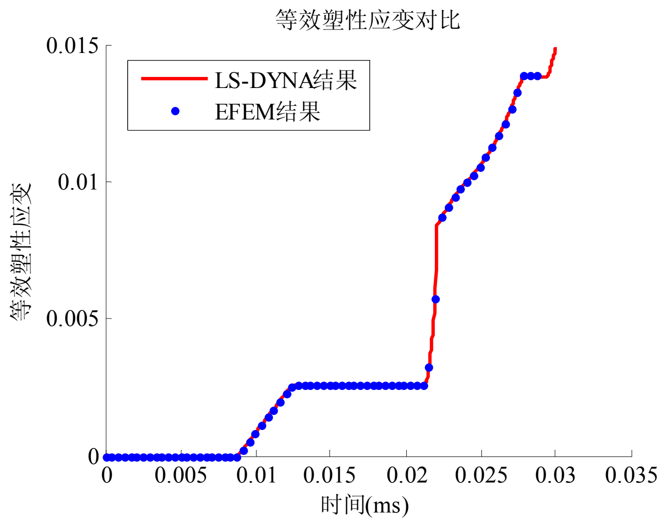


图 3.10　工况一等效塑性应变对比

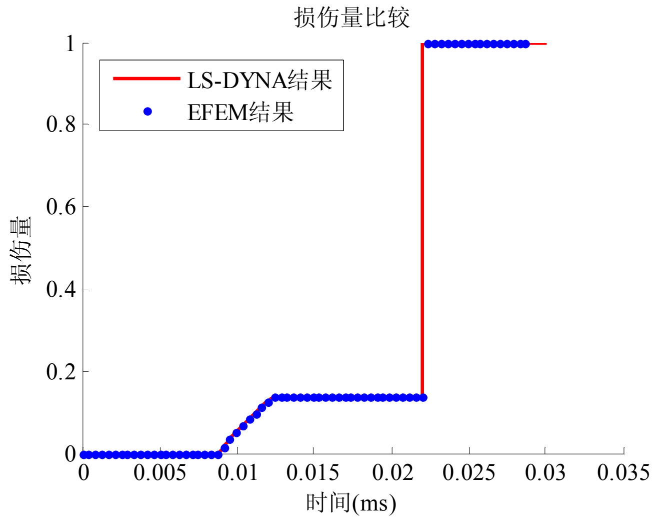


图 3.11　工况一损伤量对比

工况二：取 $C=0.5$， $\beta=0$ 考虑应变率对屈服应力的影响，其余参数取值如表 3.1 所示。节点 5~8 的 x，y 向运动固定，z 向运动速度随时间变化如表 3.2 所示。计算结果中等效塑性应变一直增加，即表明每一计算步都会屈服，屈服应力等于等效应力。由式(3-65)和式(3-70)可知如果 $\dot{\varepsilon}^*$ 值过小，会导致屈服应力为负，不符合材料的真实状况。图 3.12 中 EFEM 求解的等效应力是采取对应变率因子 $1+C\ln\dot{\varepsilon}^*$ 取绝对值的方式求得，与 LS-DYNA 的等效应力结果非常吻合，而"LS-DYNA 屈服应力"曲线是用 LS-DYNA 输出的压力、应变率、损伤量数据由式(3-65)和式(3-70)计算的结果，其中负值部分与 LS-DYNA 的等效应力结果相反，这就表明 LS-DYNA 中对应变率因子也采用了取绝对值的处理方式。LS-DYNA 软件中的其他材料模型，如 *MAT_JOHNSON_HOLMQUIST_CONCRETE 和 *MAT_JOHNSON_COOK 的屈服应力都包含 $1+C\ln\dot{\varepsilon}^*$，处理方式与 JH-2 模型相同。

表 3.2　工况二节点指定运动速度

时间（ms）	速度（mm/ms）
0.0	-0.003
0.015	0.0
0.03	-0.003

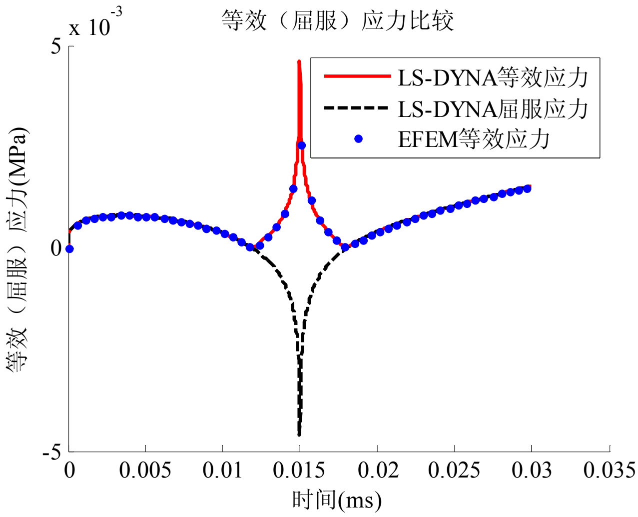


图 3.12　工况二等效应力比较

工况三：取 $C=0.0$， $\beta=1.0$ 考虑压力增量的情况，其余参数取值如表 3.1 所示，同时节点 5~8 以指定速度运动。若材料参数取表 3.1 的数值，由式(3-65)、式(3-70)和式(3-71)知屈服应力 $\sigma_Y = A\cdot\sigma_{\mathrm{HEL}}$ 为常数，与压力、应变率、损伤量无关，相当于理想弹塑性材料。如图 3.13 所示，因从 0.01ms 开始材料一直处于屈服状态，屈服应力等于等效应力，而等效应力一直保持为常数。按照前一小节对材料的描述，此时不会产生压力增量，图 3.14 表明 LS-DYNA 计算的压力增量不断增加，彼此不符。

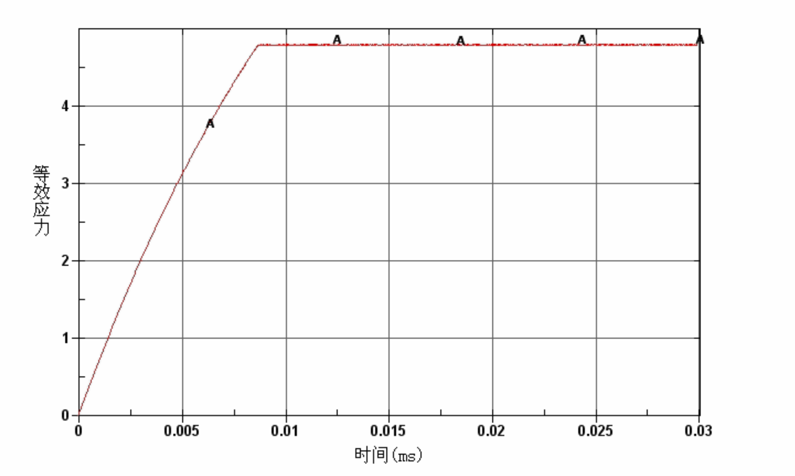


图 3.13　工况三 LS-DYNA 等效应力

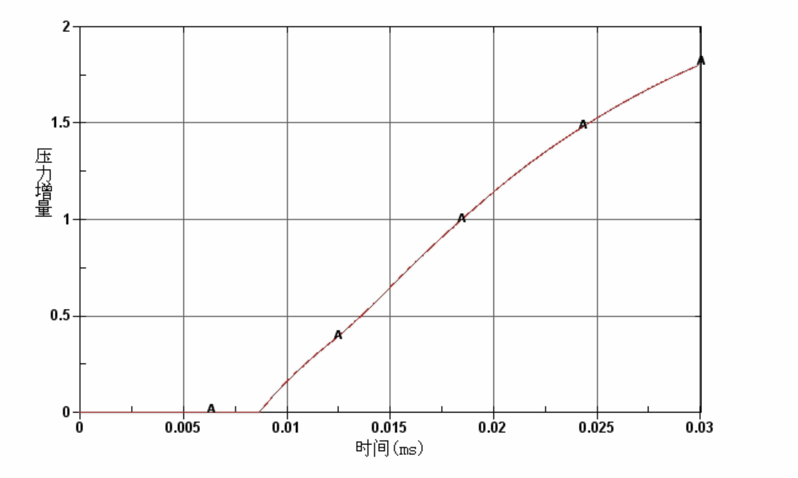


图 3.14　工况三 LS-DYNA 压力增量

以上分析可知，在有限元程序 EFEM 中实现的 JH-2 模型是正确的，该材料模型应力更新程序见附录 A。

3.3.3　冲击问题模拟

本节用 JH-2 模型描述陶瓷材料的力学行为，基于物质点法模拟冲击问题，包括刀具对陶瓷试件的切削以及陶瓷作为遮弹层材料在结构防护上的应用。

3.3.3.1　脆性切削模拟

陶瓷是典型的脆性材料，它与韧性材料（如金属）在力学性能上有很大不同。本算例通过模拟刀具对陶瓷试件的切削，认识脆性材料的特征。陶瓷试件和刀具的尺寸及相对位置如图 3.15 所示，粒子尺寸为 5um，背景网格尺寸 10um，粒子总数为 14 万，在厚度方向布置一层粒子并设置对称边界，试件的底边和左侧边界固定。刀具为刚体，以 50m/s 的恒定速度向左运动，试件材料为 AlN 陶瓷，材料参数见表 3.3。

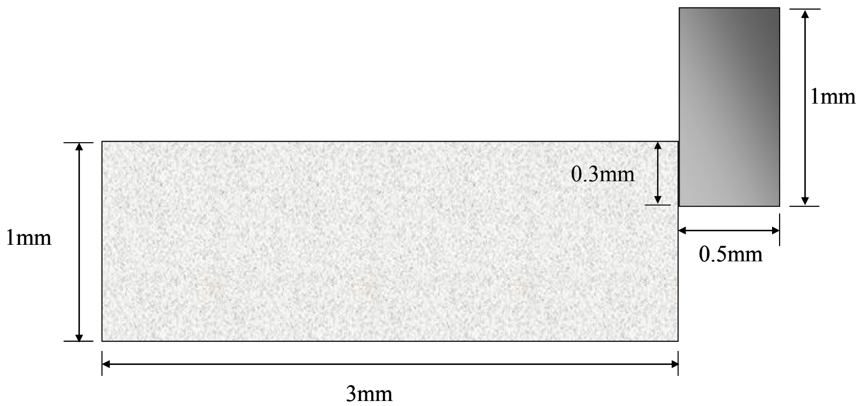
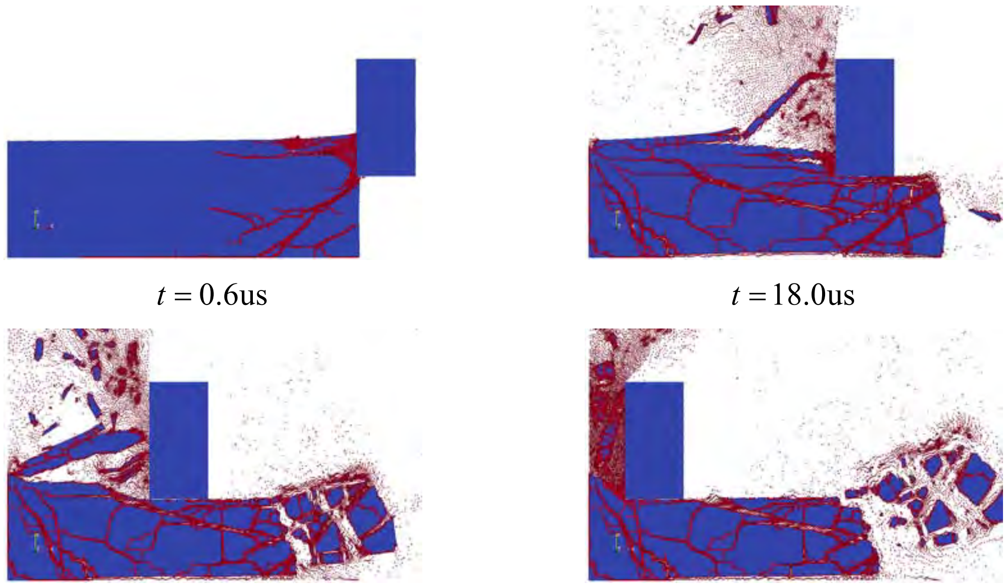


图 3.15　切削模型几何尺寸及位置

表 3.3　AlN 陶瓷 JH-2 模型材料参数

ρ_0（g/mm^3）	E（MPa）	v	A	B	C
3.226e-3	314.7e3	0.239	0.85	0.31	0.013
M	N	T（MPa）	$S^f_{\max}$	σ_{HEL}（MPa）	p_{HEL}（MPa）
0.21	0.29	0.32e3	1.0e20	6.0e3	5.0e3
β	D_1	D_2	K_1（MPa）	K_2（MPa）	K_3（MPa）
1.0	0.02	1.85	201e3	260e3	0.0

物质点法模拟的切削过程如图 3.16 所示，图中红色线条为材料损伤区域，是由静水拉应力引起的，表示材料在切削过程中产生的裂纹。在 JH-2 模型中，这些区域不再承受拉应力，但在受压时仍具有一定的强度，这可以描述裂纹的特点，即裂纹两侧之间不存在拉应力，但接触后仍有挤压力和摩擦力。与有限元法不同的是，物质点法用离散的点描述物体的运动，不依赖网格，在处理材料断裂时不需要特殊处理。可见基于 MPM 的 JH-2 模型可以很容易地模拟脆性材料的裂纹扩展问题。文献[28]基于 GIMP 模拟了刀具对 4340 钢的切削，如图 3.17 所示，响应与 AlN 切削相比有明显的不同：韧性切削时试件被卷起的部分仍然连在一起，且出现了明显的剪切带，没被卷起的部分没有明显变化；而脆性切削时，刀具撞到试件后出现大面积的裂纹扩展而产生大量碎片，由此可见材料的性质有很大差异。



$t = 0.6$us　$t = 18.0$us　$t = 36.0$us　$t = 54.0$us

图 3.16　AlN 陶瓷切削损伤图

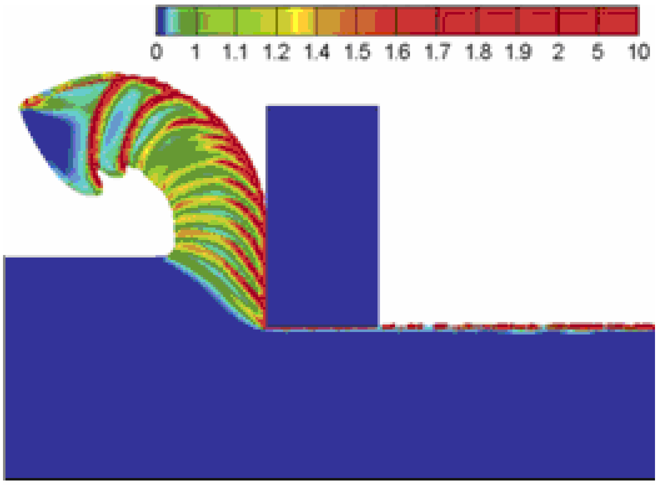


图 3.17　4340 钢切削塑性应变图[28]

3.3.3.2　遮弹层防护模拟

在军事上，研究导弹对目标的侵彻轰炸可分为两方面：一是弹体，提高其穿甲能力；二是结构，增强其防护性能。在结构防护方面，可通过使用高强度的材料或增大结构的几何尺寸来提高其性能，但这会显著增加成本。另外一条途径是在结构和材料两方面入手，即在结构上增加高强度的异形体（如结构表面设置半球、在结构内部放置块状体等）[48]，称为遮弹层。遮弹层可选用陶瓷、钢等材料，能够使弹体偏转、跳弹甚至破坏，达到防护的效果。本算例针对 4.2.3.1 节中弹体侵彻混凝土靶板问题，在混凝土表面布置半球形的遮弹层（图 3.18 所示），基于物质点法研究其防护效果。遮弹层材料为 AlN 陶瓷，采用 JH-2 模型，材料参数见表 3.3。根据对称性，模拟时采用 1/2 模型，其他参数同 4.2.3.1 节算例。

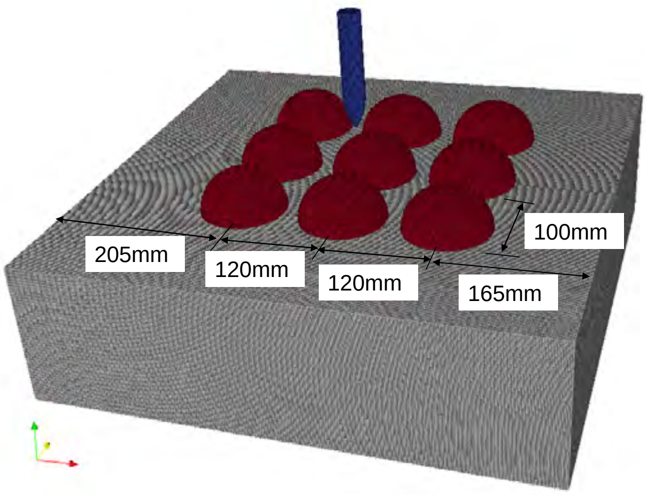


图 3.18　遮弹层设置情况

物质点法模拟的弹体侵彻过程如图 3.19 所示，可以看出，弹体在撞到 AlN 半球后发生了较大偏转。为具体表现 AlN 遮弹层的作用，现用靶板的混凝土材料代替 AlN 做遮弹层，弹体侵彻过程如图 3.20 所示。可以发现，混凝土遮弹层也能够使弹体偏转，但偏转角比 AlN 的要小得多。无遮弹层、AlN 遮弹层和混凝土遮弹层三种工况下弹体的动能变化曲线如图 3.21 所示，弹体最终的动能分别减少为初始时刻的 64.3%、41.4%和 56.5%，并且在开始阶段 AlN 遮弹层的弹体动能下降最快，这表明 AlN 材料有很高的强度，能够有效阻止弹体侵彻。从质心速度方向角和弹体偏转角来看（如图 3.22 所示），在弹体离开靶板时（0.6ms），AlN 遮弹层的弹体偏转角达到了 46.1°，混凝土遮弹层的弹体偏转角为 13.3°，这说明 AlN 遮弹层能够有效地诱偏弹体，并且可以看出 AlN 遮弹层的弹体偏转角与速度方向角相差较大（23.7°），这可以增大弹体在侵彻过程中的阻力。综上，AlN 遮弹层能够有效地改变弹体方位、降低弹体的速度，具有良好的防护性能。

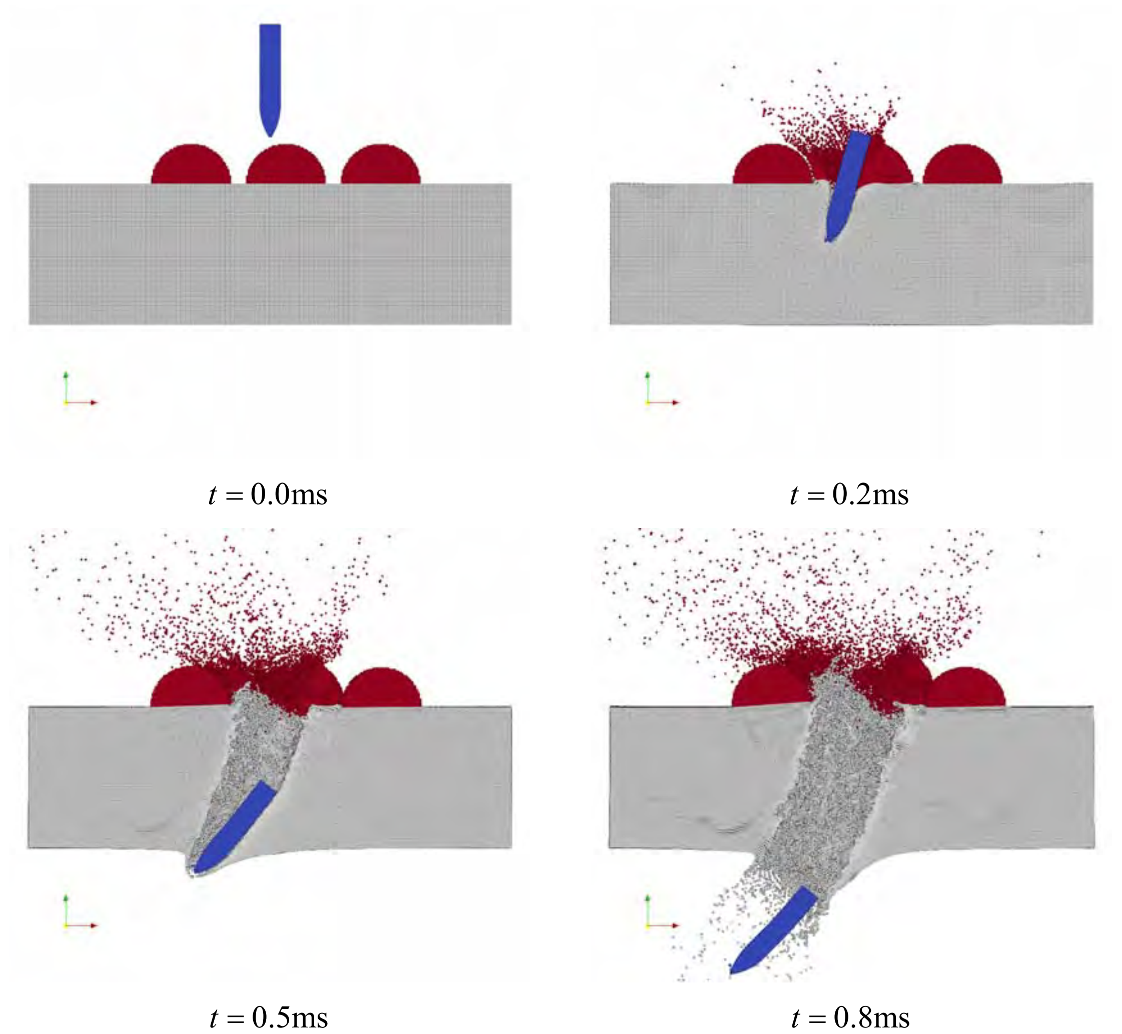


图 3.19　弹体侵彻 AlN 遮弹层过程

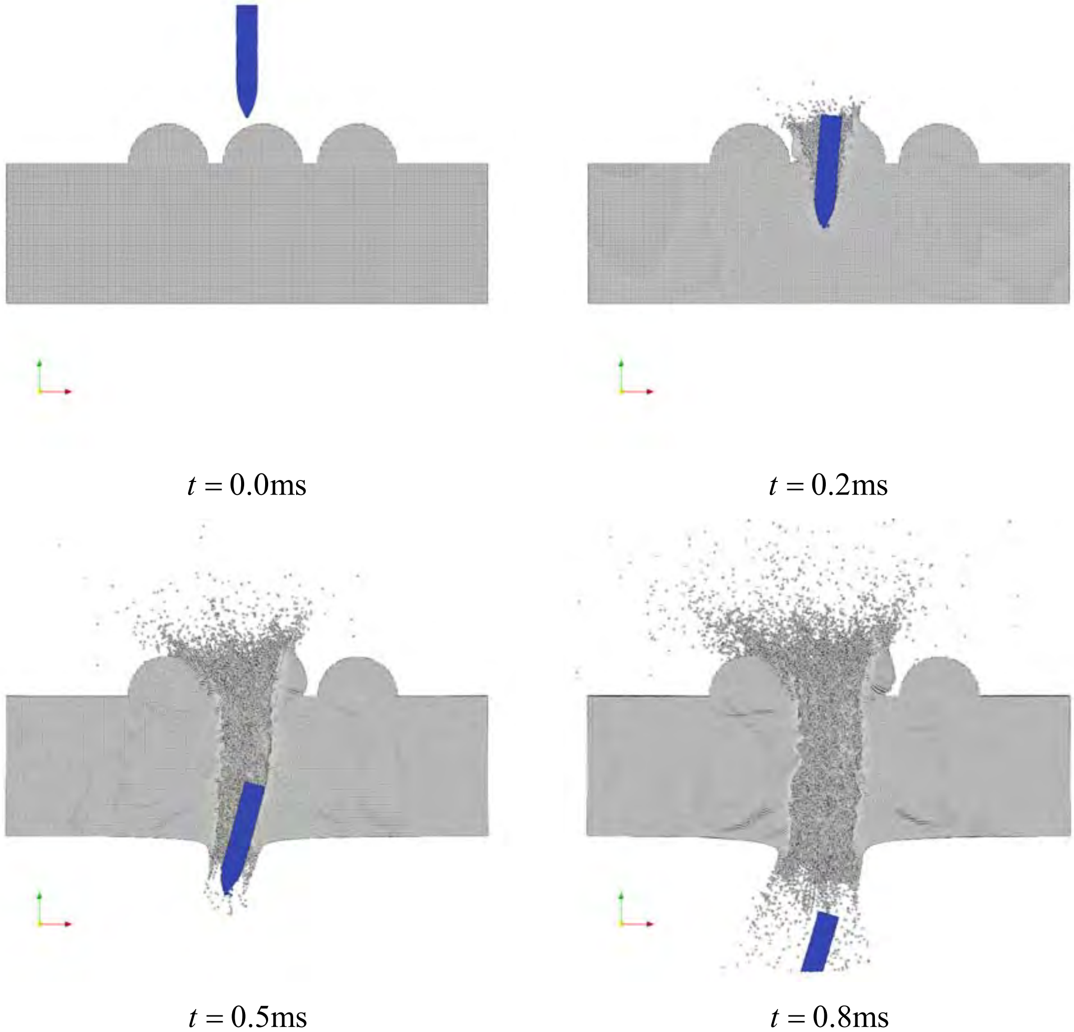


图 3.20　弹体侵彻混凝土遮弹层过程

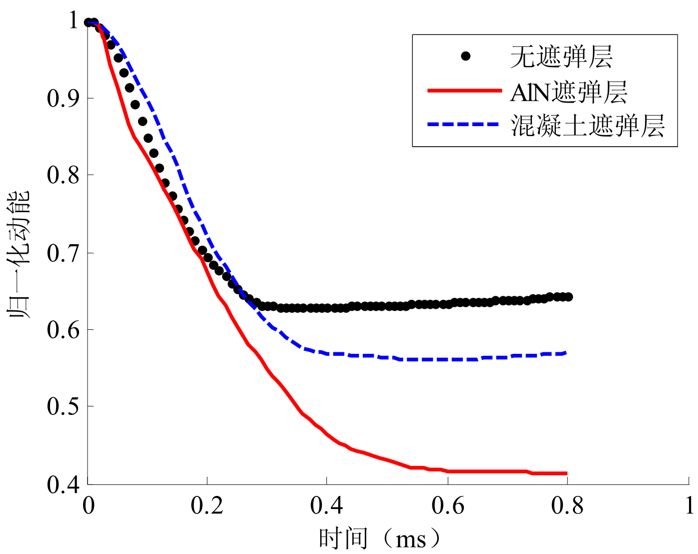


图 3.21　AlN 和混凝土遮弹层弹体动能比较

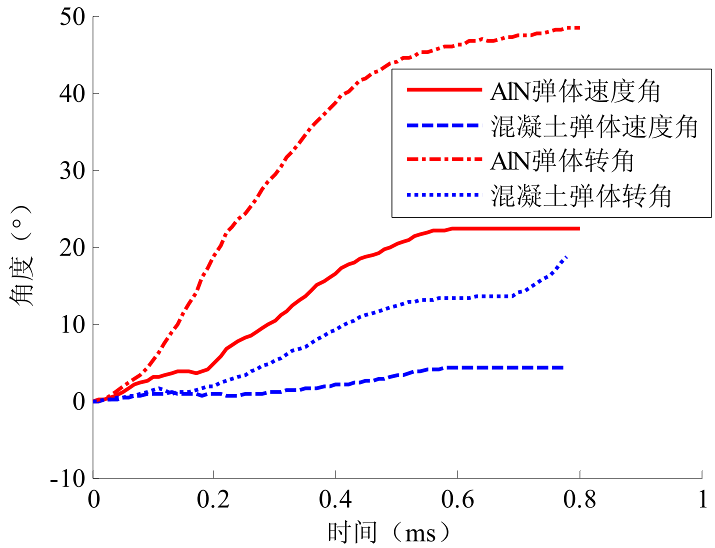


图 3.22　弹体质心速度角和弹体偏转角比较

3.4　本章小结

本章首先介绍了三种类型的本构关系，推导了 Mohr-Coulomb 模型和 Drucker-Prager 模型的屈服函数，并以 Drucker-Prager 模型为例演示了应力更新过程和径向返回法；然后主要介绍脆性材料陶瓷的 JH-2 模型，并在有限元框架下，基于一个单元与 LS-DYNA 对比验证，结果非常吻合；最后在物质点法中实现 JH-2 材料模型，用以求解脆性切削和遮弹层防护问题，取得了很好的结果。

第 4 章　混凝土冲击问题模拟

混凝土是应用广泛的脆性材料，很多研究人员提出了各种各样的模型来描述混凝土的力学行为，比如 HJC、RHT、TCK、K&C 模型等[49]。因混凝土为脆性材料，在受压时强度较高，在受拉时容易断裂，所以这些模型的屈服强度一般会考虑压力和应变率，在受拉时会做一些特殊处理。

本章首先介绍 HJC 混凝土模型、以及在有限元框架下与 LS-DYNA 的对比验证，然后介绍另一种应用广泛的 RHT 强度模型和 P-α 状态方程，在此基础上基于物质点法模拟弹体侵彻混凝土靶板问题。

4.1　HJC 混凝土材料模型

4.1.1　模型描述

第 3 章中提到的 HJC 模型是 Holmquist、Johnson 和 Cook[50]提出的用于模拟混凝土材料的模型。该模型又称为 JH-1 模型，与 JH-2 陶瓷模型非常类似，同样包括状态方程、强度模型和损伤模型。

混凝土材料表现出明显的多孔特征，状态方程分为三个阶段（如图 4.1 所示）：弹性阶段、过渡阶段、压实阶段。弹性阶段是指混凝土材料整体上是弹性的，即静水压力与体积应变之间有

$$p = K_{\text{elastic}}\mu \tag{4-1}$$

其中

$$K_{\text{elastic}} = \frac{P_{\text{crush}}}{\mu_{\text{crush}}} \tag{4-2}$$

$$\mu = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \tag{4-3}$$

P_{crush} 为弹性极限压力，μ_{crush} 为与 P_{crush} 对应的体积应变。

压力超过 P_{crush} 并逐步增加，混凝土中的孔洞会出现不可逆的减少，当压力首次达到 P_{lock} 时就进入了压实阶段。压实段修正的体积应变

$$\bar{\mu} = \frac{\mu - \mu_{\text{lock}}}{1 + \mu_{\text{lock}}} \tag{4-4}$$

其中 μ_{lock} 为压实段的塑性体积应变。此时的状态方程为

$$p=\begin{cases}K_1\bar{\mu}+K_2\bar{\mu}^2+K_3\bar{\mu}^3 & \bar{\mu}\ge 0\\ K_1\bar{\mu} & \bar{\mu}<0\end{cases} \tag{4-5}$$

令上式中 $p=P_{\text{lock}}$，可解得 $\mu=\mu_{\text{plock}}$。

由弹性段向压实段转变的阶段称为过渡段。定义

$$F=\frac{\mu_{\max}-\mu_{\text{crush}}}{\mu_{\text{plock}}-\mu_{\text{crush}}} \tag{4-6}$$

表示混凝土材料的压实程度（$0<F<1$），其中 $\mu_{\max}$ 为材料所经历的最大体积应变。如果在过渡段加载，则压力

$$p=(1-F)\cdot P_{\text{crush}}+F\cdot P_{\text{lock}} \tag{4-7}$$

在此过程中，孔洞减少，塑性体积应变增加。修正的体积应变

$$\bar{\mu}=\frac{\mu-\mu_p}{1+\mu_p}\approx\frac{p}{(1-F)\cdot K_{\text{elastic}}+F\cdot K_1} \tag{4-8}$$

其中 $0<\mu_p<\mu_{\text{lock}}$ 为当前的塑性体积应变，通过上式可解出。如果在过渡段卸载

$$p=\begin{cases}(1-F)\cdot K_{\text{elastic}}\bar{\mu}+F\cdot(K_1\bar{\mu}+K_2\bar{\mu}^2+K_3\bar{\mu}^3) & \bar{\mu}\ge 0\\ (1-F)\cdot K_{\text{elastic}}\bar{\mu}+F\cdot K_1\bar{\mu} & \bar{\mu}<0\end{cases} \tag{4-9}$$

其中 $\bar{\mu}$ 见式(4-8)。此外在受拉时需满足

$$p\ge-(1-D)\cdot T \tag{4-10}$$

其中 D 为损伤量，T 为材料能承受的最大静水拉力（拉为正）。至此可求得当前的压力和塑性体积应变及其增量。

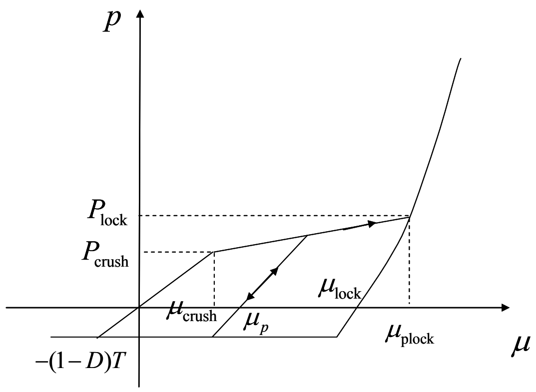


图 4.1　HJC 模型状态方程

强度模型给出的屈服应力与当前压力、损伤量、应变率有关（如图 4.2 所示）

$$\sigma_Y = \begin{cases} f_c \cdot [A\cdot(1-D) + B\cdot p^{*N}]\cdot(1+C\ln\dot{\varepsilon}^*) \le f_c \cdot S_{\max}^f & p \ge 0 \\ f_c \cdot [A\cdot(1-D) + A\cdot\dfrac{p}{T}]\cdot(1+C\ln\dot{\varepsilon}^*) & p < 0 \end{cases} \tag{4-11}$$

其中 A、B、N、C、$S_{\max}^f$ 为材料参数，f_c 为单轴抗拉强度，$\dot{\varepsilon}^*$ 见式(3-68)和式(3-69)

$$p^* = \frac{p}{f_c} \tag{4-12}$$

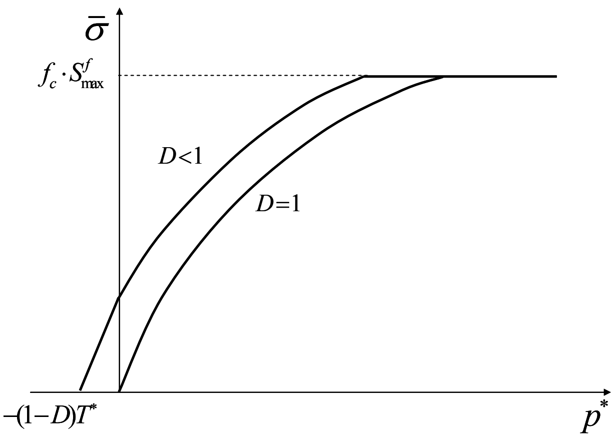


图 4.2　HJC 模型强度模型

损伤模型与 JH-2 模型相比考虑了塑性体积应变的影响（如图 4.3 所示）

$$0 \le D = \sum \frac{\Delta\varepsilon_p + \Delta\mu_p}{\varepsilon_p^f + \mu_p^f} \le 1 \tag{4-13}$$

其中 $\Delta\varepsilon_p$ 和 $\Delta\mu_p$ 为当前时间步的塑性应变增量和塑性体积增量

$$\varepsilon_p^f + \mu_p^f = D_1 \cdot (p^* + T^*)^{D_2} \ge \varepsilon_{\min}^f \tag{4-14}$$

其中 $\varepsilon_{\min}^f$ 为材料参数

$$T^* = \frac{T}{f_c} \tag{4-15}$$

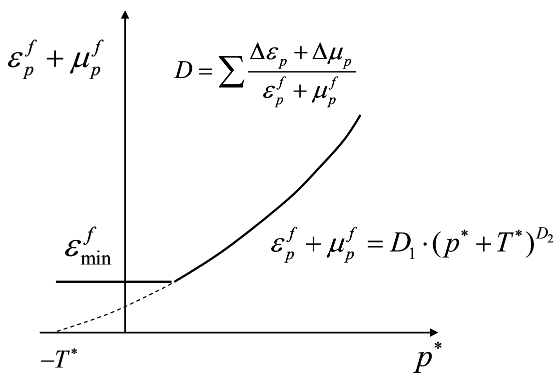


图 4.3　HJC 模型损伤模型

4.1.2　模型验证

HJC 模型的验证与 3.3.2 节的 JH-2 模型验证方法相同。考虑 HJC 模型状态方程较为复杂，可通过调整参数将其简化为线性状态方程（如表 4.1 所示），以验证强度模型和损伤模型，参数见表 4.2 和表 4.3。节点 5~8 以指定速度运动，LS-DYNA 和 EFEM 的计算结果对比如图 4.4~图 4.8 所示，两者非常吻合。这里需要指出，图 4.4 和图 4.6 中 0.02~0.025ms 之间的压力最小，等效塑性应变一直增加，说明屈服应力等于等效应力，而图 4.5 中 0.02~0.025ms 之间的等效应力并非最小，说明 LS-DYNA 的屈服应力计算有误。在 EFEM 程序中，式(4-11)拉伸段的屈服应力为

$$\sigma_Y = f_c \cdot [A \cdot (1-D) - A \cdot \frac{p}{T}] \cdot (1 + C \ln \dot{\varepsilon}^*) \tag{4-16}$$

此时，EFEM 的结果与 LS-DYNA 的结果一致，这也说明 LS-DYNA 软件出现了错误。另外需要说明的一点，当静水拉应力超过 $(1-D)\cdot T$ 时，直接令其取 $(1-D)\cdot T$，而损伤量并没有变化，在使用 LS-DYNA 的 HJC 模型时，要注意这一点。一般情形下，状态方程较为复杂，涉及到弹性卸载以及求解塑性体积应变增量，计算的压力与 LS-DYNA 稍有差异。

表 4.1　HJC 状态方程材料参数

P_{crush}（MPa）	μ_{crush}	P_{lock}（MPa）	μ_{lock}	K_1（MPa）	K_2（MPa）	K_3（MPa）
16	0.001	800	0.0	16e3	0.0	0.0

表 4.2　HJC 强度模型材料参数

G（MPa）	A	B	C	N	f_c（MPa）	T（MPa）	$S_{\max}^f$
14.86e3	0.79	1.6	0.007	0.61	48.0	4.0	7.0

表 4.3　HJC 损伤模型材料参数

$\varepsilon_{\min}^f$	D_1	D_2
0.01	0.04	1.0

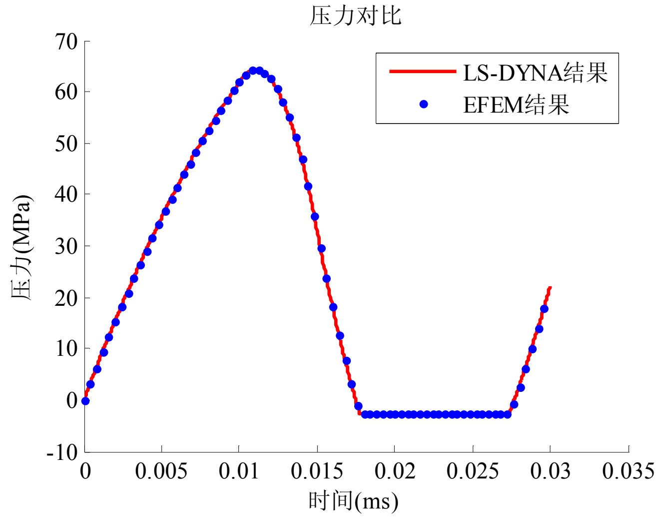


图 4.4　LS-DYNA 和 EFEM 压力对比

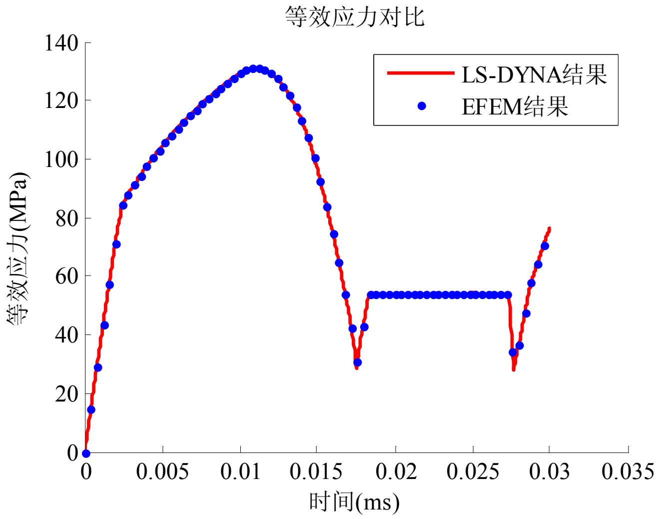


图 4.5　LS-DYNA 和 EFEM 等效应力对比

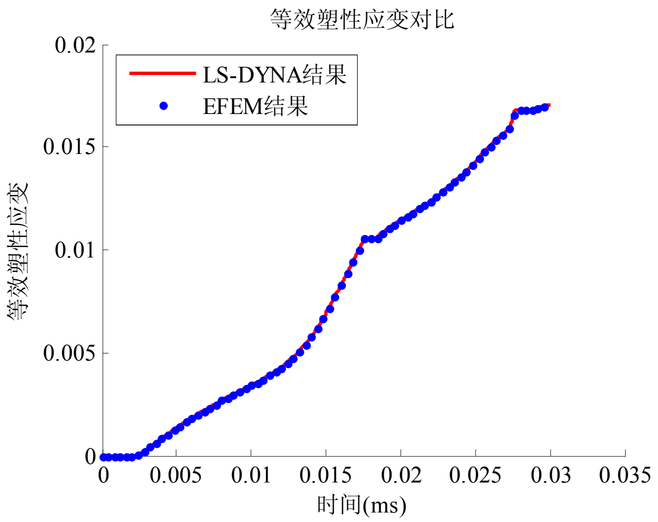


图 4.6　LS-DYNA 和 EFEM 等效塑性应变对比

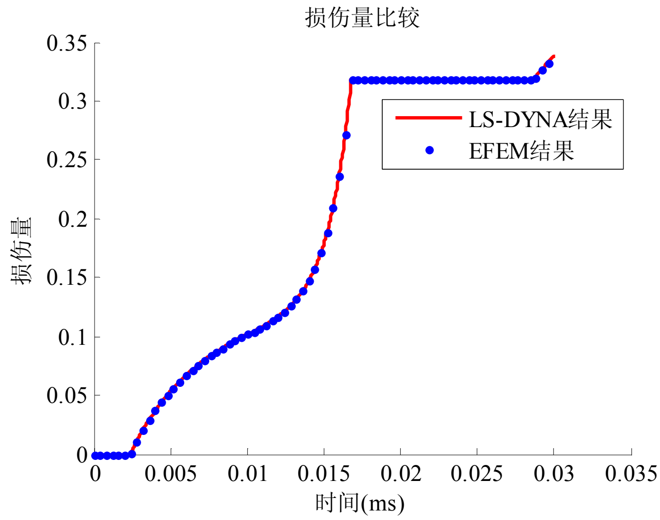


图 4.7　LS-DYNA 和 EFEM 损伤量对比

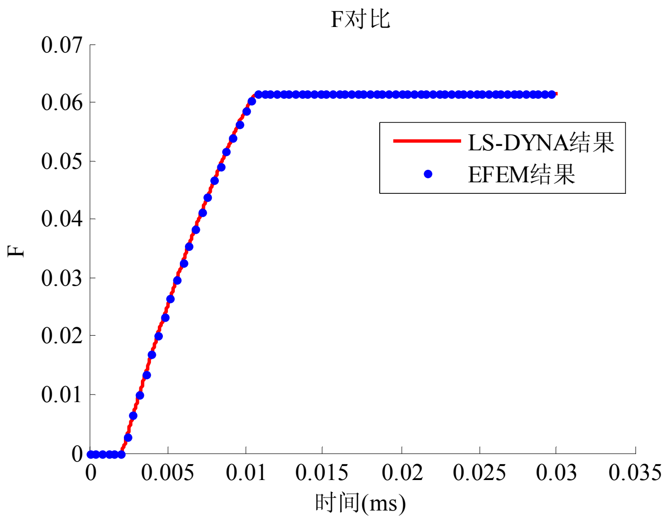


图 4.8　LS-DYNA 和 EFEM 压实度 F 对比

HJC 材料模型应力更新的程序见附录 B。本课题组的马[51]和廉[52]已在物质点法中应用 HJC 模型模拟了混凝土的侵彻问题，并取得了很好的结果，在此不再给出相关算例。

4.2　RHT 混凝土材料模型

4.2.1　模型描述

RHT 模型是由 Riedel、Hiermaier 和 Thoma[53, 54]提出的混凝土模型。该模型包括强度模型和损伤模型，一般与下文 4.2.2 节的 P-α 状态方程一起使用。

强度模型指出材料的等效应力在超出弹性极限应力前为弹性状态，而后进入

线性强化阶段直至失效应力；超出失效应力后，材料开始累积损伤量并软化，屈服应力随损伤量增加而降低，最终为残余应力（如图 4.9 所示）。失效应力、弹性极限应力、残余应力由当前的压力、偏应力和应变率确定，与 JH-2 和 HJC 模型不同的是，RHT 模型的屈服应力考虑了罗德角的影响。

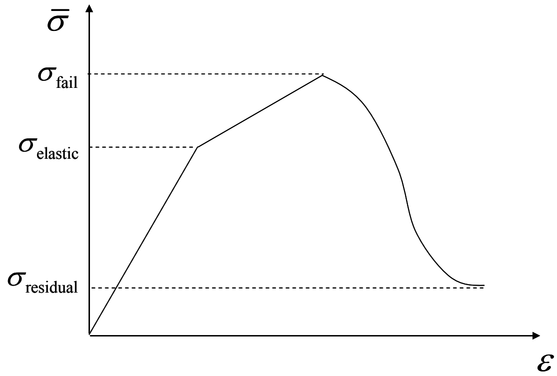


图 4.9　RHT 模型材料历经阶段图

失效应力

$$\sigma_{\text{fail}}(p,\theta,\dot{\varepsilon}) = f_c \cdot \sigma^*_{\text{TXC}}(p_s) \cdot R_3(\theta) \cdot F_{\text{rate}}(\dot{\varepsilon}) \tag{4-17}$$

其中 f_c 为单轴抗压强度，$\dot{\varepsilon}^*$ 见式(3-68)和式(3-69)。应变率因子

$$F_{\text{rate}}(\dot{\varepsilon}) = \begin{cases} (\dfrac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0^c})^\alpha & p \ge f_c/3 \\ \dfrac{p+f_t/3}{f_c/3+f_t/3} \cdot (\dfrac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0^c})^\alpha + \dfrac{p-f_c/3}{-f_t/3-f_c/3} \cdot (\dfrac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0^t})^\delta & -f_t/3 < p < f_c/3 \\ (\dfrac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0^t})^\delta & p \le -f_t/3 \end{cases} \tag{4-18}$$

且需 $F_{\text{rate}}(\dot{\varepsilon}) \ge 1$，其中 f_t 为单轴抗拉强度（拉为正），$\dot{\varepsilon}_0^c = 30\times10^{-6}\dot{\varepsilon}_0$，$\dot{\varepsilon}_0^t = 3\times10^{-6}\dot{\varepsilon}_0$，$\dot{\varepsilon}_0 = 1.0s^{-1}$，$\alpha$ 和 δ 为材料参数。罗德角因子（如图 4.10 所示）

$$R_3(\theta,Q_2) = \frac{2(1-Q_2^2)\cos\theta + (2Q_2-1)\sqrt{4(1-Q_2^2)\cos^2\theta + 5Q_2^2 - 4Q_2}}{4(1-Q_2^2)\cos^2\theta + (2Q_2-1)^2} \tag{4-19}$$

其中 $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ 为罗德角，$0.5 \le Q_2 = Q_{20} + BQ \cdot p^* \le 1$，

$$p^* = \frac{p}{f_c} \tag{4-20}$$

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}} = \frac{27J_3}{2\bar{\sigma}^3} \tag{4-21}$$

其中 J_2 、 J_3 为偏应力张量的第二、三不变量， $\bar{\sigma}=\sqrt{3J_2}$ 为等效应力。若 $Q_2\equiv 1$ ， $R_3=1$ ；若 $Q_2\equiv 0.5$ ， $R_3=\dfrac{1}{2\cos\theta}$ 。若应力状态为单向受压，则 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ ， $R_3^c=1$ ；若为单向受拉，则 $\theta=0$ ， $R_3^t=Q_2$ ；若为纯剪切，则 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ ， $R_3^s=R_3(\dfrac{\pi}{6},Q_2)$ 。 $\sigma^*_{\mathrm{TXC}}(p_s)$ 中

$$p_s=\frac{p}{F_{\mathrm{rate}}(\dot{\varepsilon})} \tag{4-22}$$

在准静态加载条件下，单轴抗拉极限、纯剪切抗剪极限、单轴抗压极限应力状态均处于临界失效状态，即满足式(4-17)

$$f_t=f_c\cdot\sigma^*_{\mathrm{TXC}}(-\frac{f_t}{3})\cdot R_3^t \tag{4-23}$$

$$f_s=f_c\cdot\sigma^*_{\mathrm{TXC}}(0)\cdot R_3^s \tag{4-24}$$

$$f_c=f_c\cdot\sigma^*_{\mathrm{TXC}}(\frac{f_c}{3})\cdot R_3^c \tag{4-25}$$

即 $(-\dfrac{f_t}{3},\dfrac{f_t}{f_c\cdot Q_2})$ ， $(0,\dfrac{f_s}{f_c\cdot R_3^s})$ ， $(\dfrac{f_c}{3},1)$ 过 $\sigma^*_{\mathrm{TXC}}=\sigma^*_{\mathrm{TXC}}(p_s)$ 的曲线，其中， f_s 为纯剪切抗剪强度。由此假设（如图 4.11 所示）

$$\sigma^*_{\mathrm{TXC}}(p_s)=\begin{cases}\dfrac{p_s}{-f_t/3}\cdot\dfrac{f_t}{f_c\cdot Q_2}+\dfrac{p_s+f_t/3}{f_t/3}\cdot\dfrac{f_s}{f_c\cdot R_3^s} & -T_s\le p_s\le 0\\ \dfrac{p_s-f_c/3}{-f_c/3}\cdot\dfrac{f_s}{f_c\cdot R_3^s}+\dfrac{p_s}{f_c/3} & 0<p_s\le f_c/3\\ A\cdot(p_s^*-HTL^*)^N & p_s>f_c/3\end{cases} \tag{4-26}$$

其中 A 和 N 为材料参数，

$$p_s^*=\frac{p_s}{f_c} \tag{4-27}$$

由 $\sigma^*_{\mathrm{TXC}}(p_s)=0$ ，得

$$T_s=\frac{f_t}{3}\cdot\frac{f_s/(f_c\cdot R_3^s)}{f_s/(f_c\cdot R_3^s)-f_t/(f_c\cdot Q_2)} \tag{4-28}$$

在受拉时需满足

$$p\ge-(1-D)\cdot T_s\cdot F_{\mathrm{rate}}(\dot{\varepsilon})=-(1-D)\cdot T=-(1-D)\cdot T^*\cdot f_c \tag{4-29}$$

由$\sigma^*_{\mathrm{TXC}}(p_s)$在$p_s = f_c/3$处满足连续性得

$$HTL^* = 1/3 - (1/A)^{1/N} \tag{4-30}$$

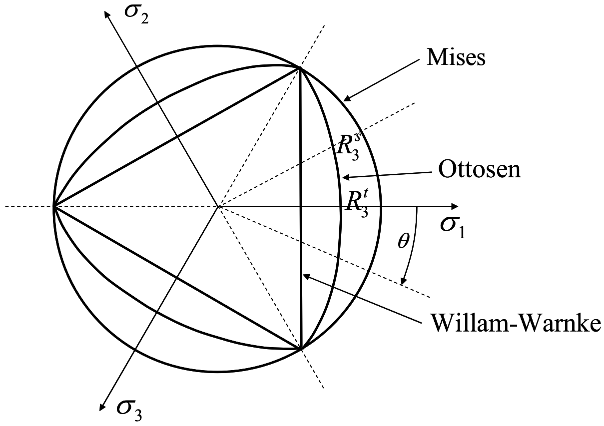


图 4.10　罗德角因子

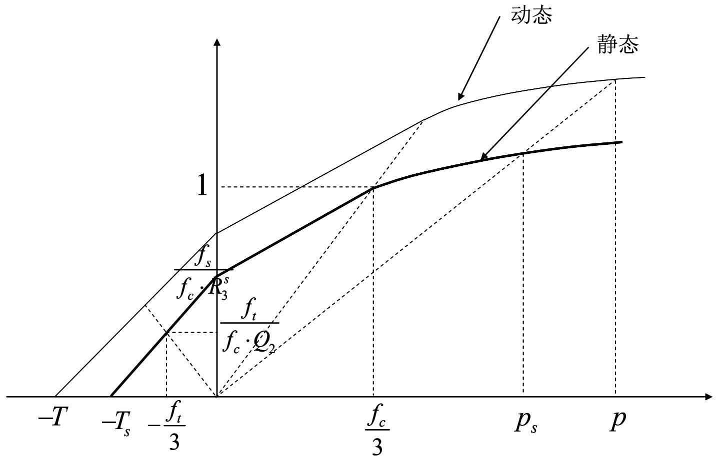


图 4.11　失效面的子午线

弹性极限应力（如图 4.12 所示）

$$\sigma_{\mathrm{elastic}} = f_c \cdot \sigma^*_{\mathrm{TXC}}(p_{s,el}) \cdot R_3(\theta) \cdot F_{\mathrm{rate}}(\dot{\varepsilon}) \cdot F_{\mathrm{elastic}} \cdot F_{\mathrm{cap}} \tag{4-31}$$

其中

$$F_{\mathrm{elastic}} = \begin{cases} R_c & p \ge f_{c,el}/3 \\ \dfrac{p + f_{t,el}/3}{f_{c,el}/3 + f_{t,el}/3} \cdot R_c + \dfrac{p - f_{c,el}/3}{-f_{t,el}/3 - f_{c,el}/3} \cdot R_t & -f_{t,el}/3 < p < f_{c,el}/3 \\ R_t & p \le -f_{t,el}/3 \end{cases} \tag{4-32}$$

其中$f_{c,el} = f_c \cdot R_c$，$f_{t,el} = f_t \cdot R_t$，R_c和R_t为材料参数。式(4-31)中

$$p_{s,el} = \frac{p_s}{F_{\text{elastic}}} \tag{4-33}$$

为限制在高压力时的弹性极限应力，引入

$$F_{\text{cap}} = \begin{cases} 1 & p \le p_u = f_c/3 \\ \sqrt{1-(\dfrac{p-p_u}{p_o-p_u})^2} & p_u < p < p_o \\ 0 & p \ge p_o = P_{\text{crush}} \end{cases} \tag{4-34}$$

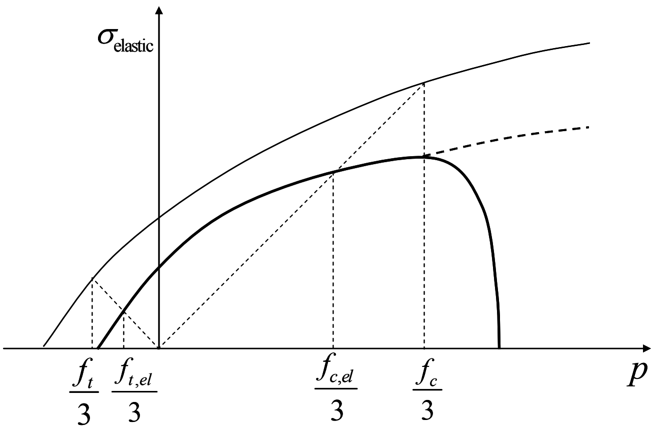


图 4.12　弹性极限面的子午线

残余应力

$$\sigma_{\text{residual}} = f_c \cdot B \cdot (p^*)^M \le f_c \cdot S_{\max}^f \tag{4-35}$$

其中 B， M， $S_{\max}^f$ 为材料参数。主应力空间下，失效应力和弹性极限应力、失效应力和残余应力表示的屈服面如图 4.13、图 4.14 所示。

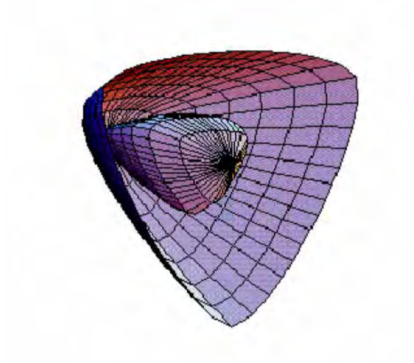


图 4.13　失效应力和弹性极限应力的屈服面[55]

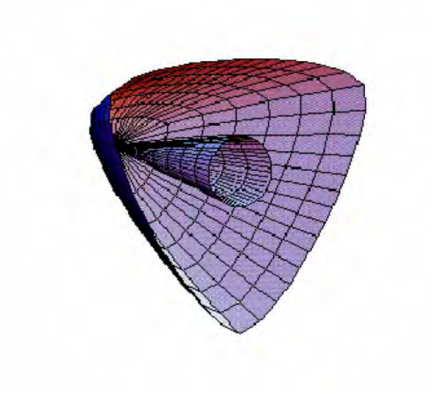


图 4.14　失效应力和残余应力的屈服面[55]

以上介绍了 RHT 模型的三个应力，材料的行为有三种阶段：弹性阶段、线性强化阶段、损伤阶段。在等效应力未超出弹性极限应力时，材料的变形为弹性变形，之后会产生塑性应变，屈服应力为线性强化模型

$$\sigma_{\mathrm{Yhard}} = \sigma_{\mathrm{elastic}} + \frac{3G}{PREFACT} \cdot \varepsilon_p \tag{4-36}$$

其中 G 为材料初始剪切模量， $PREFACT$ 为材料参数。若 $PREFACT = 0$ 表示在等效应力未超出失效应力时都为弹性阶段。等效应力超出失效应力后，开始累积损伤量，屈服应力

$$\sigma_{\mathrm{Yfrac}} = (1 - D) \cdot \sigma_{\mathrm{fail}} + D \cdot \sigma_{\mathrm{residual}} \tag{4-37}$$

损伤模型与 JH-2 类似

$$0 \le D = \sum \frac{\Delta \varepsilon_p}{\varepsilon_p^f} \le 1 \tag{4-38}$$

其中

$$\varepsilon_p^f = D_1 \cdot (p^* + (1 - D) \cdot T^*)^{D_2} \ge \varepsilon_{\min}^f \tag{4-39}$$

D_1， D_2， $\varepsilon_{\min}^f$ 为材料参数，T^* 见式(4-29)。
此外 RHT 模型还考虑了材料损伤对剪切模量的影响，当前剪切模量

$$G_D = (1 - D) \cdot G_0 + D \cdot G_1 \tag{4-40}$$

$$G_0 = G \tag{4-41}$$

$$G_1 = SHRATD \cdot G_0 \tag{4-42}$$

其中 $SHRATD$ 为材料参数。因 RHT 模型过于复杂，在此不再给出与 JH-2 和 HJC 模型类似基于一个单元的验证，只用在物质点法中模拟混凝土的冲击问题。

4.2.2　P-α 状态方程

Herrmann[56]提出了适用于多孔材料的 P-α 状态方程。假设多孔材料在密实时的状态方程为

$$p = f(\rho_s, E) \tag{4-43}$$

其中 ρ_s 为密实材料的密度，E 为单位质量的内能（比内能）。P-α 状态方程的基本假设是，在相同的压力和温度条件下，多孔材料和其密实材料具有相同的比内能。多孔材料的孔隙率

$$\alpha(p, E) \triangleq \frac{\rho_s(p, E)}{\rho(p, E)} \tag{4-44}$$

因而多孔材料的压力

$$p = f(\alpha\rho, E) \tag{4-45}$$

这里还需给出 $\alpha(p, E)$ 的具体形式才能求压力。假设孔隙率 α 只与压力有关，且在加载情况下具有如下形式（如图 4.15 所示）

$$\alpha(p) = \begin{cases} \alpha_0 & p \le P_{\text{crush}} \\ 1 + (\alpha_0 - 1)\left(\dfrac{P_{\text{lock}} - p}{P_{\text{lock}} - P_{\text{crush}}}\right)^n & P_{\text{crush}} < p < P_{\text{lock}} \\ 1 & p \ge P_{\text{lock}} \end{cases} \tag{4-46}$$

其中 P_{crush}、P_{lock}、n 为材料参数，初始孔隙率

$$\alpha_0 = \frac{\rho_{s0}}{\rho_0} \tag{4-47}$$

ρ_0 和 ρ_{s0} 为多孔材料和密实材料的初始密度。在卸载时，α 保持不变（如图 4.15 所示）。

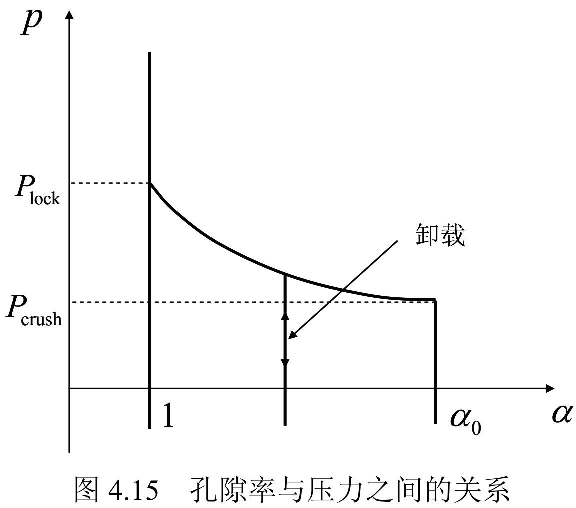


图 4.15　孔隙率与压力之间的关系

对于混凝土材料，密实材料的状态方程式(4-43)一般采用多项式形式[57]

$$p=\begin{cases}A_1\mu+A_2\mu^2+A_3\mu^3+(B_0+B_1\mu)E & \mu\geq 0\\ T_1\mu+T_2\mu^2+B_0E & \mu<0\end{cases} \tag{4-48}$$

其中 A_1、A_2、A_3、B_0、B_1、T_1、T_2 为材料参数，E 为单位初始体积的内能，

$$\mu=\frac{\rho}{\rho_0}-1 \tag{4-49}$$

4.2.3　冲击问题模拟

将上一节介绍的 RHT 模型和 P-α 状态方程在物质点法程序 MPM3D 中实现，用来模拟弹体对混凝土靶板的侵彻问题。

4.2.3.1　侵彻算例 1

本算例对 Hanchak 等[58]进行的混凝土侵彻实验进行物质点法模拟。Hanchak 等的实验包括弹体以不同速度侵彻 C48 和 C140 混凝土，现只对弹体以 749m/s 初速度侵彻 C48 混凝土靶板的工况进行模拟。实验中，弹体外形如图 4.16 所示，其中半径 $r=12.7\text{mm}$，圆柱体长 $L=101.6\text{mm}$，卵形体 $R=6r=76\text{mm}$，混凝土靶板如图 4.17 所示，计算时不考虑钢筋的作用，考虑到对称性，建立 1/4 模型进行模拟。离散时，物质点间距为 2mm，背景网格间距为 4mm，粒子总数约为 209 万。混凝土 RHT 模型和 P-α 状态方程材料参数如表 4.4~表 4.6 所示。

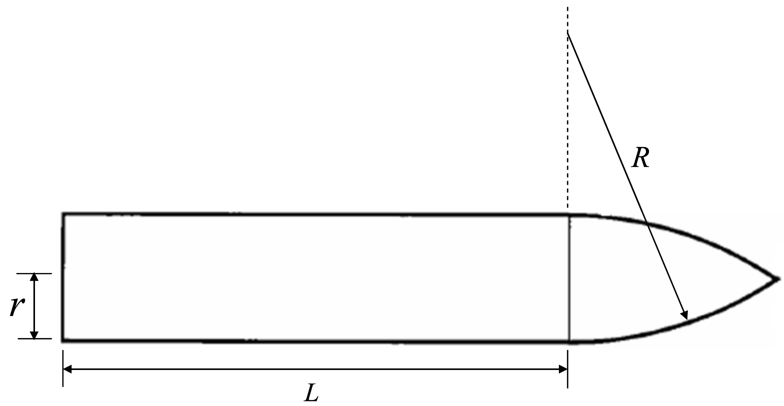


图 4.16　卵形弹外形

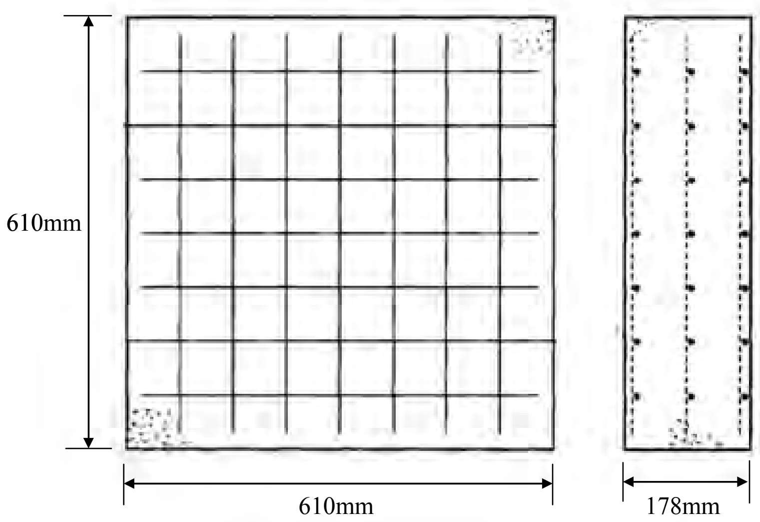


图 4.17　混凝土靶板几何尺寸

表 4.4　混凝土 RHT 强度模型材料参数

ρ_0（g/mm^3）	E（MPa）	v	f_c（MPa）	f_t/f_c	f_s/f_c
2.44e-3	35.664e3	0.2	48	0.0833	0.18
A	N	Q_{20}	BQ	$PREFACT$	R_t
1.6	0.61	0.6805	0.0105	2.0	0.7
R_c	B	M	α	δ	$S_{\max}^f$
0.53	1.6	0.61	0.0292	0.0331	1.0e20

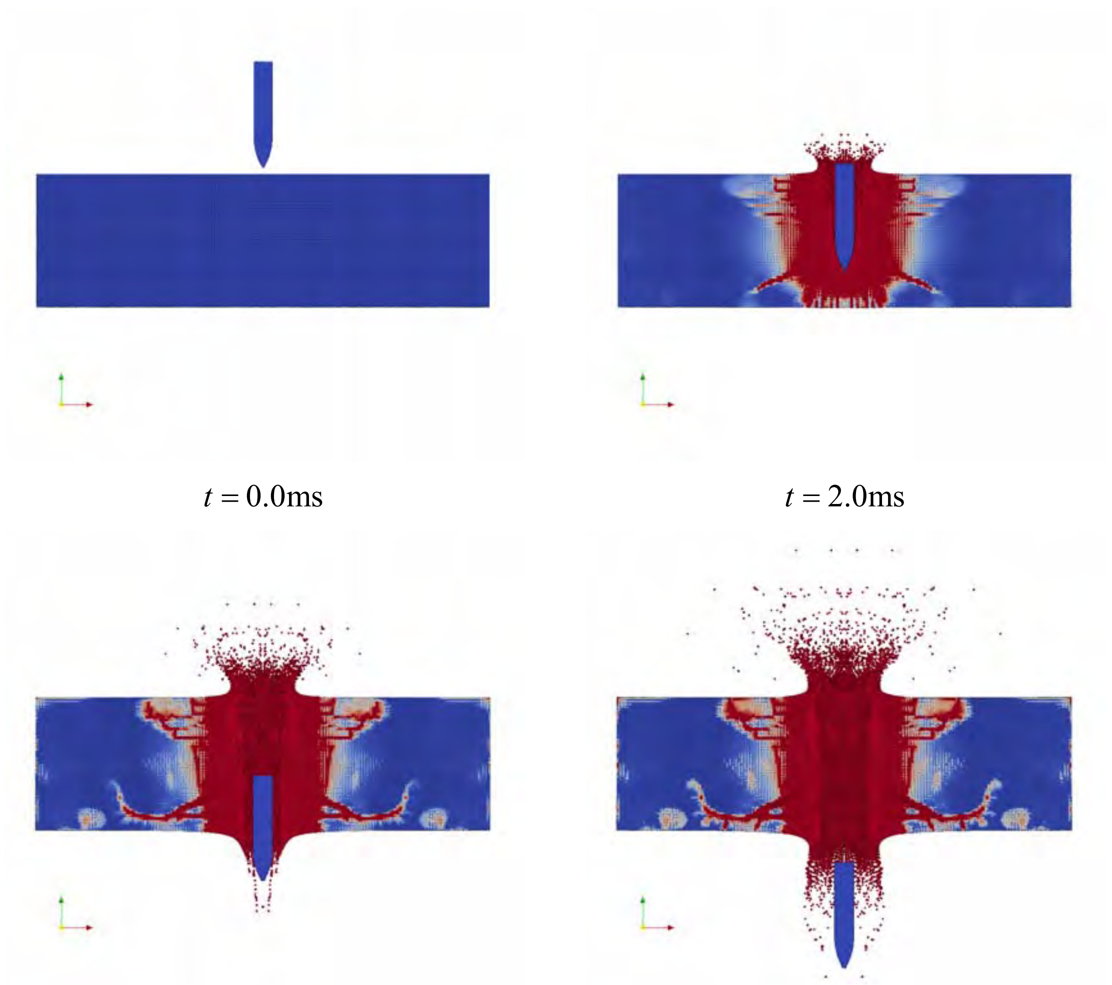
表 4.5　混凝土 RHT 损伤模型材料参数

D_1	D_2	$\varepsilon_{\min}^f$	$SHRATD$
0.04	1.0	0.01	0.13

表 4.6　混凝土 P-α 状态方程材料参数

P_{lock}（MPa）	P_{crush}（MPa）	n	ρ_{s0}	A_1（MPa）	A_2（MPa）
6.0e3	32	3.0	2.75e-3	35.27e3	39.58e3
A_3（MPa）	B_0	B_1	T_1（MPa）	T_2（MPa）	
9.04e3	1.22	1.22	35.27e3	0.0	

物质点法模拟的侵彻过程如图 4.18 所示，红色区域代表混凝土材料完全损伤，不可承受静水拉力，但在受压下仍具有一定的强度。可以看出，在侵彻过程中，靶板出现大变形甚至材料的破碎现象，如果用拉格朗日法求解，会出现网格畸变甚至负体积问题，而物质点法可以很容易地进行模拟，体现了其优势。穿透靶板后，弹体的剩余速度为 587.22m/s，与实验值 615m/s 比较吻合。



$t = 0.0$ms　　$t = 2.0$ms

$t = 4.0$ms　　$t = 6.0$ms

图 4.18　弹体侵彻混凝土靶板损伤图

4.2.3.2　侵彻算例 2

Unosson 和 Nilsson[59]进行了两组弹体对混凝土靶的侵彻实验，分别为弹体穿透靶板和未穿透靶板。实验中，弹体外形如图 4.16 所示，其中半径 $r = 37.5$mm，圆柱体长 $L = 141$mm，卵形体 $R = 3r = 112.5$mm，混凝土靶板为半径等于 700mm 的圆柱体，对于弹体穿透靶板和停在靶板内的情形，靶板厚度分别为 400mm 和 800mm。混凝土 RHT 模型和 P-α 状态方程材料参数如表 4.7~表 4.9 所示。

表 4.7　混凝土 RHT 强度模型材料参数

ρ_0（g/mm^3）	E（MPa）	v	f_c（MPa）	f_t/f_c	f_s/f_c
2.546e-3	54.61e3	0.2	153	0.1	0.18
A	N	Q_{20}	BQ	$PREFACT$	R_t
1.6	0.61	0.6805	0.0105	2.0	0.7
R_c	B	M	α	δ	$S_{\max}^f$
0.53	1.6	0.61	0.0063	0.0063	1.0e20

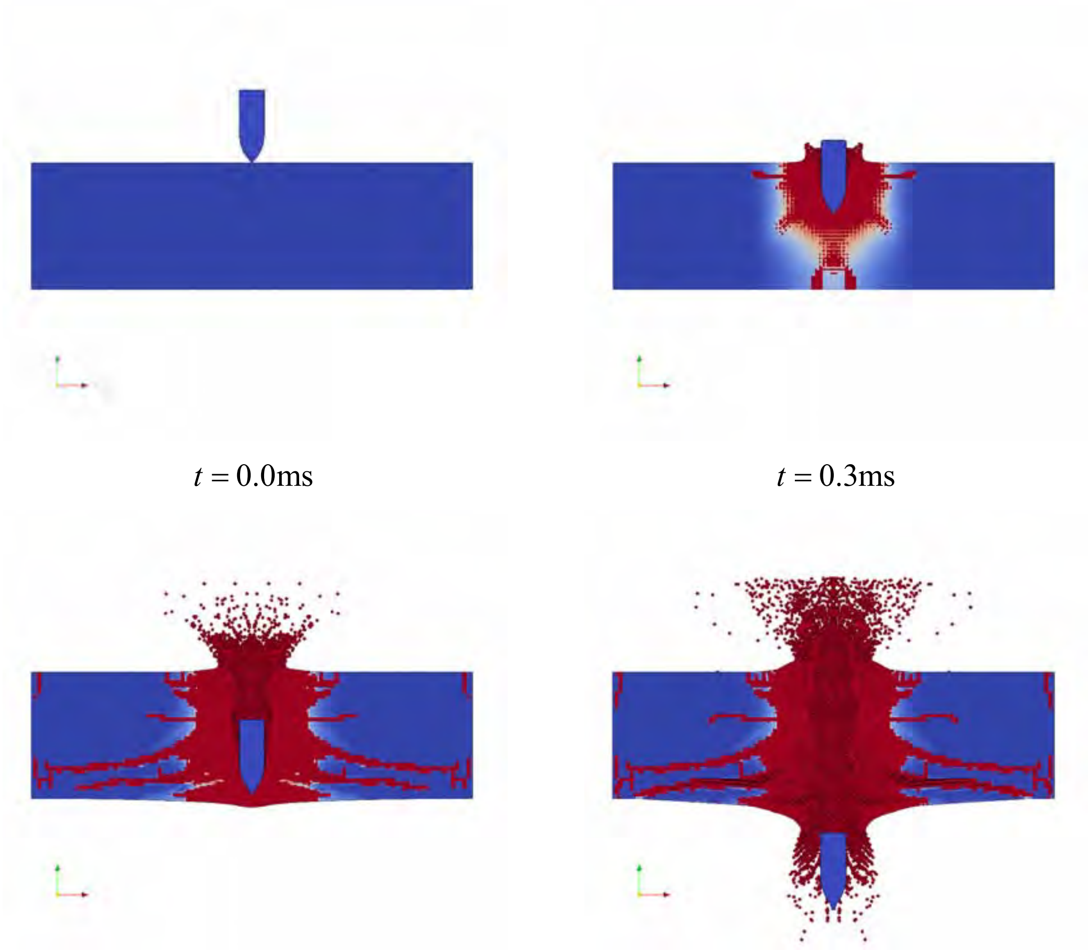
表 4.8　混凝土 RHT 损伤模型材料参数

D_1	D_2	$\varepsilon_{\min}^f$	$SHRATD$
0.04	1.0	0.01	0.13

表 4.9　混凝土 P-α 状态方程材料参数

P_{lock}（MPa）	P_{crush}（MPa）	n	ρ_{s0}	A_1（MPa）	A_2（MPa）
6.0e3	102	3.0	2.75e-3	35.27e3	39.58e3
A_3（MPa）	B_0	B_1	T_1（MPa）	T_2（MPa）	
9.04e3	1.22	1.22	35.27e3	0.0	

对于弹体穿透靶板的情形（工况一），文献[59]对这一工况进行了三次实验（如表 4.10 所示），弹体平均侵彻速度为 617m/s，平均剩余弹速为 290.7m/s，物质点法模拟的侵彻过程如图 4.19 所示。从图中可以看出，在 $t = 0.3$ms 时，靶板的背面出现损伤，这是由于冲击波在自由表面反射后成为拉伸波，引起混凝土强度降低出现破坏；在弹体穿透靶板后 $t = 2.5$ms 时这一现象更为明显，致使靶板背面出现较大面积的破裂。文献[60]对 RHT 模型进行修正，采用有限元法做了数值模拟，同物质点法的模拟结果见表 4.11。结果表明，数值模拟的剩余弹速与实验值较为接近。



$t = 0.0\text{ms}$　　$t = 0.3\text{ms}$

$t = 1.0\text{ms}$　　$t = 2.5\text{ms}$

图 4.19　工况一弹体侵彻混凝土损伤图

表 4.10　工况一实验数据

侵彻速度（m/s）	616	616	618	617
剩余弹速（m/s）	276	303	293	290.7

表 4.11　剩余弹速比较（m/s）

实验	RHT 修正前[60]	RHT 修正后[60]	MPM
290.7	200	335	239

对于弹体未穿透靶板的情形（工况二），文献[59]对这一工况进行了三次实验（如表 4.12 所示），弹体平均侵彻速度为 616m/s，平均侵彻深度为 500mm，物质点法模拟的侵彻过程如图 4.20 所示。从图中可以看出，在 $t = 5.0\text{ms}$ 时，弹体停在靶板内，靶板背面出现局部损伤。文献[60]和 MPM 模拟的侵彻深度结果见表 4.13，与实验值较为吻合。

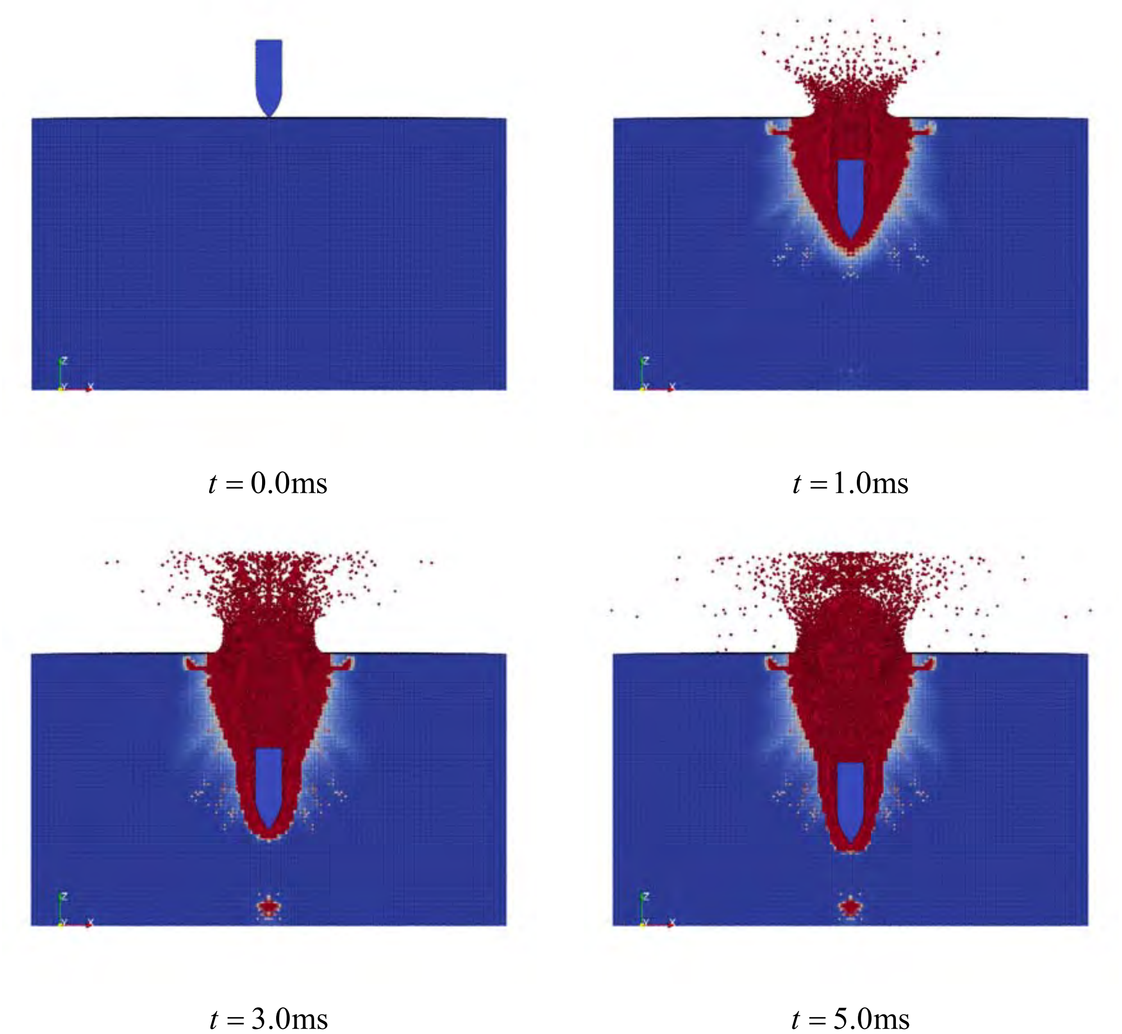


图 4.20　工况二弹体侵彻混凝土损伤图

表 4.12　工况二实验数据

侵彻速度（m/s）	617	612	619	616
侵彻深度（mm）	450	540	510	500

表 4.13　侵彻深度比较（mm）

实验	RHT 修正前[60]	RHT 修正后[60]	MPM
500	260	460	546.2

4.3　本章小结

本章介绍了两种常用的混凝土模型 HJC 和 RHT，并分别对它们做了描述。对于 HJC 模型，在有限元框架下，基于一个单元模型与 LS-DYNA 做了对比验证，

结果吻合很好；对于 RHT 模型介绍了与其经常组合使用的 P-α 状态方程，在此基础上应用物质点法模拟了混凝土靶板的侵彻问题，包括弹体穿透靶板和未穿透靶板的情形，并取得了较好的结果。

第 5 章　结论

物质点法克服了网格畸变带来的数值困难，非常适合模拟冲击问题。陶瓷和混凝土为脆性材料，在受压状态下具有很高的强度，在装甲和结构防护上得到广泛应用。本文针对陶瓷和混凝土的冲击问题做了以下几点工作：

1.在本构关系方面，针对 LS-DYNA 给出的超弹性材料应变能表达式，推导了应力应变关系，利用无初应力假设和在小变形下与弹性刚度张量的一致性，得到了应变能表达式中各材料参数之间的关系；由本构方程的客观性得出了次弹性本构关系中的应力率须为客观张量；以 Drucker-Prager 模型为例详细介绍了应力更新的步骤，这对其他模型的应力更新有借鉴意义。

2.在陶瓷冲击应用方面，用 JH-2 模型来描述陶瓷材料的力学行为，先在有限元框架下实现该模型，基于一个单元模型分析在多种工况下的拉应力截断、损伤量累积、应力应变更新和应变率效应，并与 LS-DYNA 进行对比，结果非常吻合，验证了该模型实现的正确性，然后基于物质点法模拟了陶瓷材料的切削和遮弹层防护问题，取得了较好的结果。

3.在 HJC 混凝土模型验证方面，该模型包含状态方程、强度模型和损伤模型，与 JH-2 模型验证类似，基于一个单元模型得到的压力、偏应力、损伤量、等效塑性应变的数值与 LS-DYNA 结果一致。从结果中发现在受拉段，LS-DYNA 对压力做截断处理，损伤量没有变化，并且此时屈服应力的计算有误，在使用 LS-DYNA 的 HJC 模型时要注意这两点。

4.在 RHT 模型冲击应用方面，介绍了模型的失效应力、弹性极限应力、残余应力以及 P-α 状态方程，结合物质点法模拟了弹体对混凝土靶板的侵彻，计算结果与实验值吻合。

回顾以上工作，仍有一些需要改进的地方：鉴于 RHT 模型较为复杂，材料参数较多，且彼此相互影响，没能如 JH-2 和 HJC 模型那样做基于一个单元模型的验证；物质点法模拟的陶瓷和混凝土冲击问题主要集中在侵彻方面，需要针对爆炸载荷开展进一步的研究；陶瓷和混凝土因制作工艺上的不同，材料性质差异较大，需要针对现有的材料模型确定不同的材料参数，还可根据数值模拟中发现的问题对原有材料模型做出修正。

参考文献

[1] 余同希, 邱信明. 冲击动力学. 北京: 清华大学出版社, 2011.

[2] 王礼立. 应力波基础. 北京: 国防工业出版社, 2005.

[3] 郭景坤, 寇华敏, 李江. 高温结构陶瓷研究浅论. 北京: 科学出版社, 2011.

[4] Lutz E H, Hoppert H. High-Tech Ceramics in Ballistic Protection. Catalogue, 2001.

[5] 吴科如, 张雄, 姚武, 等. 混凝土. 北京: 化学工业出版社, 2004.

[6] 王勖成. 有限单元法. 北京: 清华大学出版社, 2003.

[7] 张雄, 王天舒. 计算动力学. 北京: 清华大学出版社, 2007.

[8] 张德良. 计算流体力学教程. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[9] 李人宪. 有限体积法基础. 北京: 国防工业出版社, 2005.

[10] 庄茁. 连续体和结构的非线性有限元. 北京: 清华大学出版社, 2002.

[11] Lucy L. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. Astrophysical journal, 1977, 82: 1013.

[12] Gingold. Smoothed particle hydrodynnamics: theory and application to non-spherical stars. Monthly notices of the Royal Astronomical Society, 1977, 181: 375-389.

[13] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element free Galerkin methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37: 229-256.

[14] 张雄, 刘岩. 无网格法. 北京: 清华大学出版社, 2004.

[15] Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing kernal particle methods. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1995, 20: 1081-1106.

[16] Liu G R, Gu Y T. A point interpolation method for two-dimensional solids. International Journal for Numerical Method in Engineering, 2001, 50: 937-951.

[17] Brackbill J U, Ruppel H M. FLIP: a method for adaptively zoned, particle-in-cell calculations in two dimensions. Journal of Computational Physics, 1986, 65: 314-343.

[18] Brackbill J U, Kothe D B, Ruppel H M. FLIP: a low-dissipation, particle-in-cell method for fluid flow. Computer Physics Communications, 1988, 48: 25-38.

[19] Sulsky D, Chen Z, Schreyer H L. A Particle Method for History-Dependent Materials. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, 118(1-2): 179-196.

[20] Sulsky D, Zhou S J, Schreyer H L. Application of a Particle-in-Cell Method to Solid Mechanics. Computer Physics Communications, 1995, 87(1-2): 236-252.

[21] Sulsky D, Schreyer H L. Axisymmetric form of the material point method with applications to upsetting and Taylor impact problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139(1-4): 409-429.

[22] 马上，张雄，邱信明. 超高速碰撞问题的三维物质点法. 爆炸与冲击，2006，26(3): 273-278.

[23] Ma S, Zhang X, Lian Y, et al. Simulation of high explosive explosion using adaptive material point method. Computer Modeling In Engineering & Sciences, 2009, 39: 101-123.

[24] 马上. 冲击爆炸问题的物质点无网格法研究[博士学位论文]. 北京: 清华大学, 2009.

[25] Wang Y X, Beom H G, Sun M, et al. Numerical simulation of explosive welding using the material point method. International Journal of Impact Engineering, 2011, 38: 51-60.

[26] Nairn J A. Material Point Method Calculations with Explicit Cracks. Computer Modeling In Engineering & Sciences, 2003, 4: 649-663.

[27] 黄鹏. 金属及岩土冲击动力学问题的物质点法研究[博士学位论文]. 北京: 清华大学, 2010.

[28] Ambati R, Pan X F, Yuan H, et al. Application of material point methods for cutting process simulations. Computational Materials Science, 2011, 57: 102-110.

[29] 黄克智, 黄永刚. 固体本构关系. 北京: 清华大学出版社, 1999.

[30] Bardenhagen S G. Energy Conservation Error in the Material Point Method for Solid Mechanics. Journal of Computational Physics, 2002, 180: 383-403.

[31] Cummins S J, Brackbill J U. An Implicit Particle-in-Cell Method for Granular Materials. Journal of Computational Physics, 2002, 180: 506-548.

[32] Sulsky D, Kaul A. Implicit dynamics in the material-point method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193: 1137-1170.

[33] Guilkey J E, Weiss J A. Implicit time integration for the material point method: Quantitative and algorithmic comparisons with the finite element method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 57: 1323-1338.

[34] Bardenhagen S G, Kober E M. The Generalized Interpolation Material Point Method. Computer Modeling In Engineering & Sciences, 2004, 5: 477-495.

[35] Steffen M, Wallstedt P C, Guilkey J E, et al. Examination and Analysis of Implementation Choices within the Material Point Method (MPM). Computer Modeling In Engineering & Sciences, 2008, 31: 107-127.

[36] Wallstedt P C, Guilkey J E. An evaluation of explicit time integration schemes for use with the generalized interpolation material point method. Journal of Computational Physics, 2008, 227: 9628-9642.

[37] Sadeghirad A, Brannon R M, Burghardt J. A convected particle domain interpolation technique to extend applicability of the material point method for problems involving massive deformations. International Journal for Numerical Method in Engineering, 2011, 86: 1435-1456.

[38] Lysmer J, Kuhlemeyer R L. Finite Dynamic Model for Infinite Media. Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE, 1969, 95: 859-877.

[39] Hallquist J O. LS-DYNA Theory Manual. Livermore Software Technology Corporation, 2006.

[40] Shen L M, Chen Z. A Silent Boundary Scheme with the Material Point Method for Dynamic Analyses. Computer Modeling In Engineering & Sciences, 2005, 7: 305-320.

[41] 陆明万, 罗学富. 弹性理论基础. 北京: 清华大学出版社, 1990.

[42] 余同希. 塑性力学. 北京: 高等教育出版社, 1989.

[43] 杨江丽, 宋顺成. 国外陶瓷材料抗侵彻研究进展. 兵器材料科学与工程, 2007, 30(2): 72-74.

[44] Johnson G R, Holmquist T J. An improved computational constitutive model for brittle materials. AIP Conference Proceedings, Colorado Springs, Colorado (USA), 1993.

[45] Holmquist T J, Templeton D W, Bishnoi K D. Constitutive modeling of aluminum nitride for large strain, high-strain rate, and high-pressure applications. International Journal of Impact Engineering, 2001, 25: 211-231.

[46] Cronin D S, Bui K, Kaufmann C, et al. Implementation and Validation of the Johnson-Holmquist Ceramic Material Model in LS-Dyna. 4th European LS-DYNA Users Conference, 2003.

[47] Hallquist J O. LS-DYNA Keyword User's Manual. Livermore Software Technology Corporation, 2009.

[48] 王起帆, 郭志昆, 田强, 等. 含高强 RPC 球柱的复合遮弹层偏航试验研究. 地下空间与工程学报, 2009, 5(5): 972-975.

[49] 李世民, 李晓军. 几种常用混凝土动态损伤本构模型评述. 混凝土, 2011, 260(6): 19-22.

[50] Holmquist T J, Johnsson G R, Cook W H. A computational constitutive model for concrete subjected to large strains,high strain rates and high pressures. 14th International Symposium on Ballistics, Quebec, Canada, 26-29 September, 1993.

[51] 马志涛. 物质点法几个问题的研究[博士后出站报告]. 北京: 清华大学, 2010.

[52] Lian Y P, Zhang X, Zhou X, et al. A FEMP method and its application in modeling dynamic response of reinforced concrete subjected to impact loading. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200: 1659-1670.

[53] Riedel W, Thoma K, Hiermaier S. Penetration of reinforced concrete by BETA-B-500 numerical analysis using a new macroscopic concrete model for hydrocodes. 9th International Symposium Interaction of the Effects of Munitions with Structures, 1999.

[54] Riedel W, Kawai N, Kondo K. Numerical assessment for impact strength measurements in concrete materials. International Journal of Impact Engineering, 2009, 36: 283-293.

[55] Hansson H, Skoglund P. Simulation of concrete penetration in 2D and 3D with the RHT material model. Technical Report FOI-R-0720-SE Tumba, Sweden: Swedish Defence Research Agency, 2002.

[56] Herrmann W. Constitutive Equation for the Dynamic Compaction of Ductile Porous Materials. Journal of Applied Physics, 1969, 40(6): 2490-2499.

[57] Century Dynamics Inc. AUTODYN Theory Manual. Century Dynamics Inc, 2005.

[58] Hanchak S J, Forrestal M J, Young E R, et al. Perforation of concreteslabs with 48MPa (7 ksi) and 140 MPa (20 ksi) unconfined compressive strengths. International Journal of Impact Engineering, 1992, 12(1): 1-7.

[59] Unosson M, Nilsson L. Projectile penetration and perforation of high strength concrete: experimental results and macroscopic modelling. International Journal of Impact Engineering, 2006, 32: 1068-1085.

[60] Tu Z G, Lu Y. Modifications of RHT material model for improved numerical simulation of dynamic response of concrete. International Journal of Impact Engineering, 2010, 37: 1072-1082.

致　谢

衷心感谢导师张雄教授对本人的精心指导，他严谨的治学态度和渊博的学识将使我终生受益！感谢刘岩老师的热情指导和帮助。

感谢计算动力学研究室的各位同窗，与他们相处让我获益良多。

感谢背后默默支持我的家人。

声　明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签　名：______________日　期：____________

附录 A　JH-2 材料模型程序

在 3.3.2 节对陶瓷材料的 JH-2 模型进行了验证，与 LS-DYNA 结果吻合非常好。为了清晰表述该模型的应力更新过程，这里给出其在 EFEM 程序中的代码。

```
/*
eps[6]=local strain increment
sd[6]=local deviatoric stress
seqv=equivalent stress
erate=current equivalent strain rate
*/
sd[0]+=2*G*eps[0];
sd[1]+=2*G*eps[1];
sd[2]+=2*G*eps[2];
sd[3]+=2*G*eps[3];
sd[4]+=2*G*eps[4];
sd[5]+=2*G*eps[5];
seqv=sqrt(1.5*(sd[0]*sd[0]+sd[1]*sd[1]+sd[2]*sd[2])+3*(sd[3]*sd[3]+sd[4]*sd[4]
+sd[5]*sd[5]));

mu=dens/dens0;
if(mu>=0)      //compression
    P=(K1+(K2+K3*mu)*mu)*mu+deltaP;
else           //tension
    P=K1*mu
    if(P+T<0.0)
        P=0.0;
        damage=1.0;
    end
    if(damage>=1.0)
        P=0.0;
    end
end
```

```
Frate=1+C*log(max(1.0e-6,erate/EPSI));
Frate=fabs(Frate);
P1=P/phel;
T1=T/phel;
sigma_i=shel*A*pow(P1+T1,N)*Frate;
if(P1>=0.0)
    sigma_f=shel*min(SFMAX, B*pow(P1,M)*Frate);
else
    sigma_f=0.0;
end
sigma_y=(1-damage)*sigma_i+damage*sigma_f;

if(seqv>sigma_y)
    depeff=(seqv-sigma_y)/(3*G);
    epeff=epeff+depeff;
    if(P1>=0.0)
        epf=D1*pow(P1+T1,D2);
        damage=min(1.0,damage+depeff/epf);
    end
    sigma_y1=(1-damage)*sigma_i+damage*sigma_f;
    ratio=sigma_y1/seqv;
    sd[0]*=ratio;
    sd[1]*=ratio;
    sd[2]*=ratio;
    sd[3]*=ratio;
    sd[4]*=ratio;
    sd[5]*=ratio;
    seqv=sigma_y1;
    if(mu>=0.0)
        deltaU=(sigma_y*sigma_y-sigma_y1*sigma_y1)/(6*G);
        deltaP=-K1*mu+sqrt(pow(K1*mu+deltaP,2)+2*beta*K1*deltaU);
    end
end
```

附录 B　HJC 材料模型程序

在 4.1.2 节对混凝土材料的 HJC 模型进行了验证，与 LS-DYNA 结果吻合非常好。为了清晰表述该模型的应力更新过程，这里给出其在 EFEM 程序中的代码。

```
sd[0]+=2*G*eps[0];
sd[1]+=2*G*eps[1];
sd[2]+=2*G*eps[2];
sd[3]+=2*G*eps[3];
sd[4]+=2*G*eps[4];
sd[5]+=2*G*eps[5];
seqv=sqrt(1.5*(sd[0]*sd[0]+sd[1]*sd[1]+sd[2]*sd[2])+3*(sd[3]*sd[3]+sd[4]*sd[4]
+sd[5]*sd[5]));

//********************
计算当前压力 P 和本时间步的塑性体积应变增量 dmup（此处省略）
//********************
if(P+(1-damage)*T<0.0)
    P=-(1-damage)*T;
end

Frate=1+C*log(max(1.0e-6,erate/EPS0));
Frate=fabs(Frate);
P1=P/FC;
T1=T/FC;
if(P1>=0.0)
    sigma_y=A*(1-damage)+B*pow(P1,N);
else
    sigma_y=A*(1-damage+P/T);   //not A*(1-damage-P/T)
end
sigma_y*=Frate;
sigma_y=FC*min(SFMAX,sigma_y);
```

```
depeff=0.0;
if(seqv>sigma_y)
    depeff=(seqv-sigma_y)/(3*G);
    epeff=epeff+depeff;
    ratio=sigma_y/seqv;
    sd[0]*=ratio;
    sd[1]*=ratio;
    sd[2]*=ratio;
    sd[3]*=ratio;
    sd[4]*=ratio;
    sd[5]*=ratio;
    seqv=sigma_y;
end
epf=D1*pow(P1+T1,D2);
if(epf>=EFMIN)
    damage=min(1.0,damage+(depeff+dmup)/epf);
end
```

个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果

个人简历

1987 年 7 月 27 日出生于山东省临沂市。

2005 年 9 月考入大连理工大学工程力学系工程力学专业，2009 年 7 月本科毕业并获得工学学士学位。

2009 年 9 月考入清华大学航天航空学院攻读力学硕士至今。