

DOI: 10.7511/jslx201604025

流固耦合不可压物质点法及其在晃动问题中的应用

张 雄, 张 帆*

(清华大学 航天航空学院, 北京 100086)

摘 要:作为一种混合拉格朗日欧拉法,物质点法在流固耦合问题中具有重要的应用前景。对于自由液面的流动问题,基于物质点法框架已建立了弱可压物质点法和完全不可压物质点法,但在处理流固耦合问题时遇到了困难。弱可压物质点法由于采用可压缩状态方程,导致求解时间步长过小,压力振荡严重,产生了非物理的飞溅现象;完全不可压物质点法基于投影算法和不可压条件,消除了弱可压物质点法的压力振荡,提高了时间步长,但难以处理移动边界问题。基于变形式的投影算法提出了一种新型流固耦合不可压物质点法,得到了体积加权的压力泊松方程 PPE(Pressure Poisson Equation),解决了完全不可压物质点法无法处理不规则边界和移动边界的问题。采用流固耦合不可压物质点法研究了运动刚体容器中的液体晃动问题,并与已有实验和数值结果进行对比,验证了算法的正确性和精度。

关键词:物质点法;流固耦合不可压物质点法;压力泊松方程;液体晃动

中图分类号:O351 **文献标志码:**A **文章编号:**1007-4708(2016)04-0582-06

1 引 言

在航天航空、船舶与海洋工程、水利工程和核反应堆等领域中存在大量的流固耦合问题。如航天器在变轨、交会、对接以及装配过程中,液体推进剂在外界激励下产生的剧烈晃动^[1];大型液化天然气船(LNG)等载货船内部液体在波浪载荷下的晃动;核反应堆堆芯在地震和海啸等突发刺激下的晃动。晃动问题的研究存在以下困难:(1)液体自由边界是一个非定常的动边界。当液体大幅晃动时,自由液面可能发生卷曲、破碎和融合等复杂的拓扑形状变化,具有高度的非线性。(2)流固界面的存在。流固耦合问题中的一个难点是耦合作用机制,流固界面必须满足速度和应力协调条件,某些情况下还得考虑法向接触分离和切向滑移边界条件,大大增加了问题的复杂度。(3)流体的模拟。流体的模拟既可以引入弱可压状态方程,采用局部拉格朗日变形求解流体内力,也可以引入完全不可压条件,采用投影算法建立全局椭圆方程求解内力。前者由于考虑了弱可压缩性,时间步长小,压力振荡严重;后者增大了时间步长,但需要全局求解线性方程组。

针对流固耦合问题,已经建立了许多数值求解方法,如标记网格 MAC(Marker-and-Cell)^[2]法、流体体积 VOF(Volume of Fluid)^[3]法和任意拉格朗日欧拉法 ALE(Arbitrary Lagrangian-Eulerian)^[4]。这些方法在跟踪自由液面方面取得了一定的进展,但复杂的界面重构或者网格重构限制了其在晃动问题中的应用。近年来发展起来的新型无网格法摆脱了网格的依赖,结合水平集方法(Level Set Method)^[5]能更好地跟踪自由液面,在流体晃动中取得了显著的进展。如 Chen 等^[6]研究了弱可压 SPH 方法和不可压 SPH 方法在晃动问题中的应用, Pan 等^[7]利用 MPS(Moving Particle Semi-Implicit)方法研究了二维容器中粘性流体的晃动问题,李金光等^[8]利用弱可压物质点法(WCMPM)研究了三维水箱在水平激励和俯仰激励下的大幅晃动问题,数值模拟结果与实验结果吻合。

但传统的弱可压物质点法在求解晃动问题时存在以下困难^[9]。(1)WCMPM 采用弱可压状态方程计算压力并显式积分动量方程,临界时间步长由材料声速决定,导致了其在模拟晃动问题时时间步长太小,计算效率低下。(2)WCMPM 采用物质点积分,其偏应力张量和压力状态方程在质点上求解,导致质点在穿越背景网格时产生应力振荡。在计算水等几乎不可压流体问题中,压力振荡会非常严重,质点会发生非物理的飞溅。(3)用拉格朗日质点表示物质界面,其精度较低,不能准确地描

收稿日期:2016-05-16;修改稿收到日期:2016-06-16.

基金项目:国家自然科学基金(11272180)资助项目.

作者简介:张 雄(1966-),男,教授,博士生导师

张 帆*(1986-),男,博士生;

(E-mail:zhangfan3141@163.com).

述自由液面的位置,给准确施加压力边界条件造成了较大的困难。

张帆等^[9]提出的不可压物质点法(iMPM)有效地克服了压力振荡问题,但难以处理不规则固体与流体的耦合问题。强制让处于固体区域的结点速度等于固体速度会增加压力振荡,并伴随质点的穿透。

本文基于物质点法框架和变分形式的投影算法^[10],将固体的运动以及流体动能看成一个能量系统,建立了一种流固耦合不可压物质点法。在每个时间步中,压力对预估速度的修正看成一个完全非弹性碰撞过程,利用其系统能量损耗最大原理推导出一个含固体动边界的 Poisson 方程。新的不可压物质点法可以自动处理流固耦合界面,并满足滑移边界条件。

2 流固耦合不可压物质点法

2.1 流体方程

流体运动方程为

$$\rho \dot{\mathbf{u}} = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{s} + \rho \mathbf{b} \quad (1)$$

式中 \mathbf{u} 为流体速度, p 为静水压力, \mathbf{s} 为流体的粘性力。对于完全不可压流体,本文采用散度为 0 的质量守恒方程

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

并在自由表面施加边界条件

$$p = 0 \quad \partial \Omega \quad (3)$$

2.2 基于变分法的投影算法

投影算法^[11]将式(1)的求解分解为预测步

$$\rho \mathbf{u}^* = \rho \mathbf{u}^n + \Delta t(\nabla \cdot \mathbf{s} + \rho \mathbf{b}) \quad (4)$$

和修正步

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - (\Delta t/\rho)\nabla p \quad (5)$$

修正后的速度场 \mathbf{u}^{n+1} 在流体区应满足条件

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (6)$$

在流固界面处应满足条件 $\mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_s^{n+1} \cdot \mathbf{n}$, 即

$$(\Delta t/\rho)\nabla p \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}_s^{n+1} \cdot \mathbf{n} \quad (7)$$

式中 \mathbf{u}_s^{n+1} 为固体界面的速度。

如果将投影算法看成一个接触碰撞问题,流体压力作为接触力,且本文假设流体不可压,则流体声速无穷大,此接触问题为完全非弹性碰撞,其系统内能损失最大。预测步流体动能为

$$KE^* = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{u}^*\|^2 dV \quad (8)$$

修正步的流体动能为

$$KE^{n+1} = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{u}^{n+1}\|^2 dV \quad (9)$$

压力在移动固体边界上做的功为

$$W_s = \iint_S p \mathbf{n} \cdot \Delta t \mathbf{u}_s dS = \Delta t \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (p \mathbf{u}_s) dV = \Delta t \iiint_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{u}_s dV + \Delta t \iiint_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{u}_s dV \quad (10)$$

按照上述完全非弹性碰撞假设,求解流体压力可转化为如下形式的能量最小化问题,

$$\min_p (KE^{n+1} - KE^* + W_s) \quad (11)$$

令式(11)的能量变分为 0,可得

$$\frac{\partial KE^{n+1}}{\partial p} - \frac{\partial KE^*}{\partial p} + \frac{\partial W_s}{\partial p} = 0 \quad (12)$$

2.3 泊松方程的离散

如果采用背景网格结点速度和格心压力对方程(12)进行离散,数值解将会存在棋盘格振荡,因此本文采用面心速度和格心压力对方程(12)进行离散。利用式(5)可知,面心 $(i+1/2, j, k)$ x 方向速度的更新格式为

$$u_{i+1/2, j, k}^{n+1} = u_{i+1/2, j, k}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p_{i, j, k} - p_{i-1, j, k}}{\Delta x} \quad (13)$$

式中 $u_{i+1/2, j, k}^*$ 为面心的预测速度,可以由结点预测速度插值得到。将式(13)代入式(12)可得

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [(\theta_{i+1/2, j, k} + \theta_{i, j+1/2, k} + \theta_{i, j, k+1/2} + \theta_{i-1/2, j, k} + \\ & \theta_{i, j-1/2, k} + \theta_{i, j, k-1/2}) p_{i, j, k} - \theta_{i+1/2, j, k} p_{i+1, j, k} - \\ & \theta_{i, j+1/2, k} p_{i, j+1, k} - \theta_{i, j, k+1/2} p_{i, j, k+1} - \\ & \theta_{i-1/2, j, k} p_{i-1, j, k} - \theta_{i, j-1/2, k} p_{i, j-1, k} - \\ & \theta_{i, j, k-1/2} p_{i, j, k-1}] = -\frac{1}{\Delta x} (V_{i+1/2, j, k} u_{i+1/2, j, k} - \\ & V_{i-1/2, j, k} u_{i-1/2, j, k} + V_{i, j+1/2, k} v_{i, j+1/2, k} - \\ & V_{i, j-1/2, k} v_{i, j-1/2, k} + V_{i, j, k+1/2} w_{i, j, k+1/2} - \\ & V_{i, j, k-1/2} w_{i, j, k-1/2}) + \frac{1}{\Delta x} [(V_{i+1/2, j, k} - \\ & V_{i, j, k}) u_{i+1/2, j, k}^{\text{solid}} - (V_{i-1/2, j, k} - V_{i, j, k}) u_{i-1/2, j, k}^{\text{solid}} + \\ & (V_{i, j+1/2, k} - V_{i, j, k}) v_{i, j+1/2, k}^{\text{solid}} - (V_{i, j-1/2, k} - \\ & V_{i, j, k}) v_{i, j-1/2, k}^{\text{solid}} + (V_{i, j, k+1/2} - V_{i, j, k}) w_{i, j, k+1/2}^{\text{solid}} - \\ & (V_{i, j, k-1/2} - V_{i, j, k}) w_{i, j, k-1/2}^{\text{solid}}] \quad (14) \end{aligned}$$

式中 $\theta_{p, q, l} = V_{p, q, l} / \rho_{p, q, l}$, $V_{p, q, l}$ 为对应流体面心速度的控制体体积, $\rho_{p, q, l}$ 为流体面心处密度, $p_{i, j, k}$ 为流体格心压力。

与原不可压物质点法^[9]相比,流固耦合不可压物质点法将固体对流体的影响自动耦合到压力 Poisson 方程中,并且流固界面自动满足滑移边界条件。

式(14)可写成一包含未知流体压力的线性方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{b} \quad (15)$$

式中 \mathbf{A} 为拉普拉斯算子系数矩阵, \mathbf{p} 为待求的压力向量, \mathbf{b} 为右端项向量。对于整个求解域, 离散的 Poisson 方程是一个 7 点差分格式, 并且是一个对称, 半正定的线性系统, 可以用预处理共轭梯度算法(PCG)求解器高效的求解。

2.4 质点信息与网格信息的相互映射及转化

本文方法中, 所有物质信息由物质点携带, 动量方程在背景网格结点处求解, 压力 Poisson 方程在格心求解。因此, 在每个时间步中, 首先将物质信息由质点映射到网格结点建立结点动量方程, 得到结点预测速度后将其插值到面心获得面心预测速度, 以建立格心压力 Poisson 方程。由压力 Poisson 方程得到格心压力后计算面心压力导数, 进而得到网格结点的压力梯度, 并根据式(5)更新结点速度场。最后, 利用更新的结点速度场完成质点的输运并进行下一个时间步的计算。

在以上求解过程中, 质点信息和网格结点信息的互相映射和标准物质点法相同。由式(4)得到结点预测速度后, 利用插值可得面心预测速度(以二维为例)为

$$\begin{cases} u_{ij+1/2}^* = 0.5(u_{ij}^* + u_{ij+1}^*) \\ v_{i+1/2j}^* = 0.5(v_{ij}^* + v_{i+1j}^*) \end{cases} \quad (16)$$

由式(15)求得格心压力值后, 利用差分格式可以得到面心压力梯度。为了统一处理自由液面和流固界面的结点速度更新, 网格结点压力梯度可以近似为

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_{ij} = \bar{\omega}_{ij-1/2} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_{ij-1/2} + \bar{\omega}_{ij+1/2} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_{ij+1/2} \\ \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_{ij} = \bar{\omega}_{i-1/2j} \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_{i-1/2j} + \bar{\omega}_{i+1/2j} \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_{i+1/2j} \end{cases} \quad (17)$$

式中

$$\begin{cases} \bar{\omega}_{ij-1/2} = V_{ij-1/2} / (V_{ij-1/2} + V_{ij+1/2}) \\ \bar{\omega}_{ij+1/2} = V_{ij+1/2} / (V_{ij-1/2} + V_{ij+1/2}) \end{cases}$$

$\bar{\omega}$ 为相邻流体速度控制体的加权值, 取值范围为 $[0, 1]$ 。在流体内部 $\bar{\omega} = 0.5$, 表示两侧面心压力导数对结点压力导数贡献值一样, $\bar{\omega} = 0$ 表示固体内部的面心压力导数对流体结点压力导数的贡献

为 0, $\bar{\omega} = 1$ 表示结点压力导数由单侧的流体面心导数决定。由式(17)得到结点压力梯度后, 根据式(5)修正结点速度。

2.5 流体控制体体积的计算

建立离散压力 Poisson 方程(14)时, 需要计算参数 V , 即流体面心速度代表的控制体体积。如图 1(a)所示, 水平方向的面心速度代表的控制体为实线内空白区域, 固体为灰色区域。为了便于计算固体区域的体积, 本文将固体也离散成物质点, 固体区域的体积可近似为 $V_s = (\sum m_p) / \rho_s$, 则流体体积为

$$V_f = V - V_s \quad (18)$$

为了提高 V_f 的精度, 需要提高固体质点的离散密度。在各坐标轴方向上, 固体质点分布密度一般可取为流体质点分布密度的 2 倍, 如图 1(b)所示。

3 晃动问题的研究

为了验证本文提出的流固耦合不可压物质点法, 研究二维容器在水平激励和俯仰激励下的晃动问题, 并将数值结果与已有实验结果和数值结果进行对比。

3.1 二维水平激励下的晃动问题

Faltinsen 等^[12]进行了水平晃动实验, 几何尺寸如图 2 所示, 其中 $L_B = 1.730$ m, 初始静止水面的高度 $H_w = 0.6$ m。水箱在水平方向的位移激励大小为 $S = A \cos(2\pi t/T)$, 其中幅值 $A = 0.032$ m, T 为外界激励的周期。在水箱左侧初始水面安置

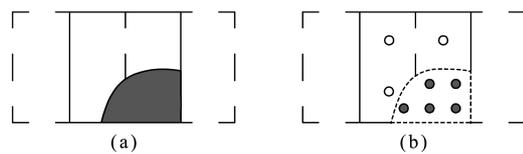


图 1 流体面心控制体的计算
Fig. 1 Calculation of fluid volume at the center of cell face

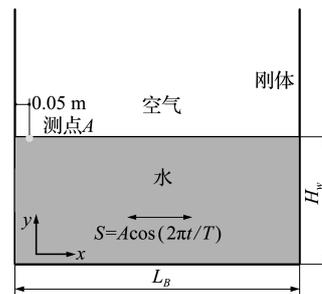


图 2 水平晃动示意图
Fig. 2 Illustration of water sloshing for forced horizontal motion

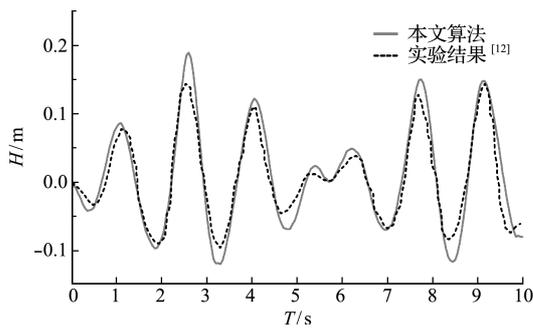


图3 工况1的测点液面高度 $H(T)$ 时程曲线
Fig. 3 Time history of wave height for case 1

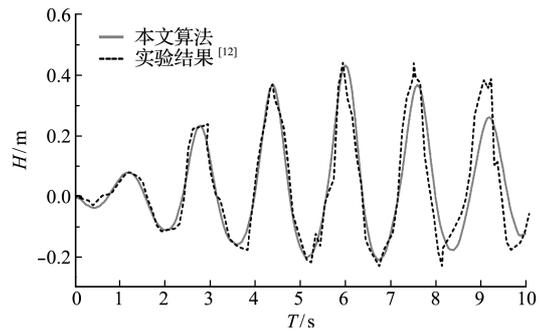


图4 工况2的测点液面高度 $H(T)$ 时程曲线
Fig. 4 Time history of wave height for case 2

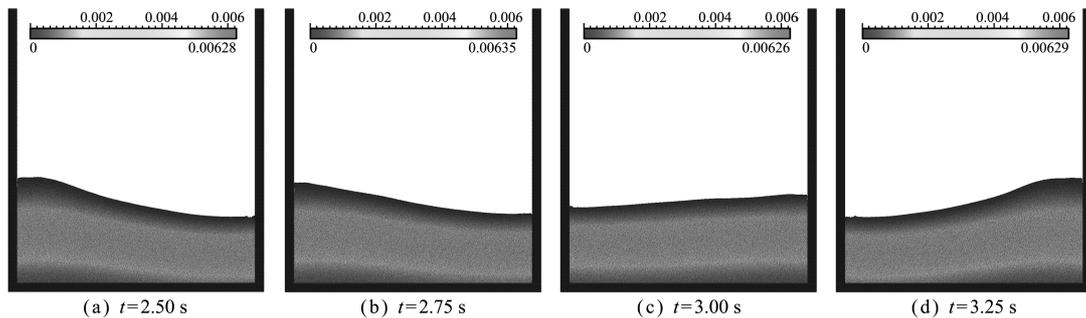


图5 不同时刻的压力云图
Fig. 5 Fluid profiles and pressure distribution at four different time instants

一个传感器来测量液面的位置。本文模拟了两种工况,工况1中 $T=1.3\text{ s}$,工况2中 $T=1.5\text{ s}$ 。背景网格尺寸的大小为 $D_{\text{cell}}=10\text{ mm}$ 。两种工况离散质点数相同,流体质点数为41520,刚体容器离散质点数为112319,模拟的物理时间为10 s。

在传统的ALE计算中,一般是在非惯性系中将外界激励转化成流体惯性力,而本文直接给定固体的运动。初始时刻,水柱向右侧开始移动,并沿着右侧固壁逐渐上升。当到达最大高度时,又开始逐渐的下降向左侧重复相同的现象。流体晃动的幅值和频率将随着激励周期的不同而不同。从图3和图4可以看出,两种不同周期的工况,其晃动周期也不相同,流固耦合不可压物质点法的结果与实验结果吻合。图5展示了四个不同时刻流体的压力云图,压力分布光滑。可见,本文方法即避免了WCMPM中流体的压力振荡问题,又可以方便地处理运动边界问题。

3.2 二维俯仰激励下的晃动问题

模拟水箱在俯仰激励下的晃动,并和ISPH方法及实验结果^[13]进行对比。如图6所示,水箱的几何尺寸 $H=1\text{ m}$, $L_B=1\text{ m}$,水池的深度 $H_w=0.3\text{ m}$ 。在左侧位于水面以下0.1 m的容器壁设

置一压力传感器,用来记录晃动过程中壁面的压力时程曲线。外界激励以容器壁底面中心位置为轴进行转动,转动角度 α 服从 $\alpha = A \sin(\omega t)$,其中幅值 $A=5^\circ$,角频率 $\omega=0.95\text{ rad/s}$, t 为时间变量。

分别用两组不同的网格尺寸($D_{\text{cell}}=10\text{ mm}$ 和 $D_{\text{cell}}=5\text{ mm}$)对该问题进行了模拟。图7给出了采用 $D_{\text{cell}}=10\text{ mm}$ 网格计算得到的四个典型时刻的压力云图,与ISPH模拟的流体构型^[6]一致。图8给出了测量点处的压力变化曲线,本文结果与实验结果及ISPH结果吻合。通过对比可知,流固耦合不可压物质点法在同等级离散尺度下的计算精度高于ISPH方法。

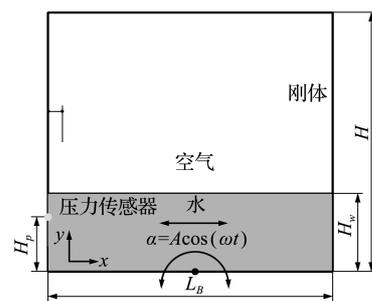


图6 俯仰晃动示意图
Fig. 6 Illustration of water sloshing for forced rolling motion

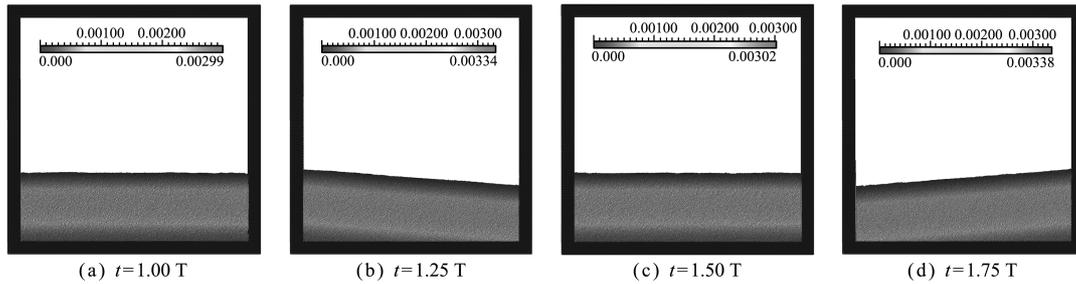


图7 不同时刻的压力云图

Fig. 7 Fluid profiles and pressure distribution at four different time instants

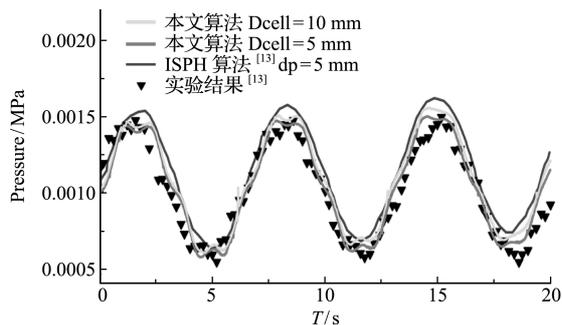


图8 压力时程曲线对比

Fig. 8 Comparison of time history of pressure at the location of sensor

4 结论

本文在不可压物质点法的基础上,利用变分形式的投影算法提出了一种流固耦合不可压物质点法,建立了背景网格节点信息和面心信息的映射关系,提出了一种简单的计算流体控制体体积的方法。新算法能将不规则运动固体边界以体积加权的形式引入到压力 Poisson 方程中,自动处理流固耦合边界,并且满足滑移边界条件。晃动问题的模拟,以及与实验结果和 ISPH 结果的对比,验证了本文算法的正确性和精度。

参考文献(References):

- [1] 岳宝增. 液体大幅晃动动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2011. (YUE Bao-zeng. *The Dynamics of Large Amplitude Liquids Sloshing* [M]. Beijing: Science Press, 2011. (in Chinese))
- [2] Harlow F H, Welch J E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface[J]. *Physics of Fluids*, 1965, **8**(12): 2182-2189.
- [3] Hirt C W, Nichols B D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries[J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, **39**(1): 201-225.
- [4] Hughes T J R, Liu W K, Zimmermann T K. Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1981, **29**(3): 329-349.
- [5] Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed; algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, **79**(1): 12-49.
- [6] Chen Z, Zong Z, Liu M B, et al. A comparative study of truly incompressible and weakly compressible SPH methods for free surface incompressible flows [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2013, **73**(9): 813-829.
- [7] Pan X J, Zhang H X, Lu Y T. Numerical simulation of viscous liquid sloshing by moving-particle semi-implicit method [J]. *Journal of Marine Science and Application*, 2008, **7**(3): 184-189.
- [8] Li J G, Hamamoto Y, Liu Y, et al. Sloshing impact simulation with material point method and its experimental validations [J]. *Computers & Fluids*, 2014, **103**: 86-99.
- [9] Zhang F, Zhang X, Lian Y P, et al. Incompressible material point method for free surface flow [J]. *Journal of Computational Physics (in minor revision)*.
- [10] Batty C, Bertails F, Bridson R. A fast variational framework for accurate solid-fluid coupling [A]. *ACM Transactions on Graphics (TOG)* [C]. ACM, 2007.
- [11] Chorin A J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations [J]. *Mathematics of Computation*, 1968, **22**(104): 745-762.
- [12] Faltinsen O M, Rognbakke O F, Lukovsky I A, et al. Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2000, **407**: 201-234.
- [13] Chen Z, Zong Z, Li HT, et al. An investigation into the pressure on solid walls in 2D sloshing using SPH method [J]. *Ocean Engineering*, 2013, **59**: 129-141.

Fluid structure interaction incompressible material point method and its applications in sloshing problem

ZHANG Xiong, ZHANG Fan*

(School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100086, China)

Abstract: As a hybrid meshless method, material point method (MPM) takes advantages of both Eulerian and Lagrangian methods, so it possesses unique advantages in solving fluid-structure interaction (FSI) problems. For free surface flow problems, our group has developed a weakly compressible material point method (WCMPM) and a fully incompressible material point method (iMPM) based on the MPM of MPM. However, both of them suffer from some difficulties in solving FSI problems. The weakly compressible EOS adopted in the WCMPM leads to a very small time step size, serious pressure oscillation and even non-physical spray and splash; The iMPM eliminates the pressure oscillation existing in WCMPM and allows a significantly bigger time step size, but it is difficult to handle the moving solid boundary conditions. In this paper, a novel fluid-structure interaction incompressible material point method (FSI-iMPM) is proposed based on a variational form projection scheme. A volume-weighted pressure Poisson equation (PPE) is established on the background grid. The proposed FSI-iMPM couples fluid with irregular solid boundary and moving solid wall boundary automatically. To validate the proposed FSI-iMPM, two problems of sloshing in a moving rigid container are investigated, and the numerical results agree well with the available experiment and numerical results.

Key words: material point method; fluid structure interaction incompressible material point method; pressure Poisson equation; liquid sloshing

~~~~~  
(上接第 548 页)

## The refined algorithm of generalized density evolution equation based on reproducing kernel particle method

LI Jie\*, SUN Wei-ling

(School of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** The response of dynamic systems can be approximated by the particle approximation or the reproducing kernel particle method. The refined algorithm of generalized density evolution equation is developed based on the reproducing kernel particle method. The steps of the refined algorithm are detailed in the paper. Through the system of a single degree of freedom as an example, the accuracy of the refined algorithm is investigated based on the PDFs of the response. Then through a stochastic structure of multi degrees of freedom as an example, the refined algorithm based on the reproducing kernel particle method can solve the nonlinear stochastic system.

**Key words:** stochastic dynamics system; probability density; reproducing kernel particle method; refined algorithm