DOI: 10.7511/jslx201701001

# 极端变形问题的物质点法研究进展

张 雄\*, 刘 岩, 张 帆, 陈镇鹏

(清华大学 航天航空学院,北京 100084)

摘 要:物质点法采用了拉格朗日和欧拉双重描述,将物体离散为一组在固定于空间的网格(欧拉描述)中运动的质点(拉格朗日描述),有效地综合了拉格朗日法和欧拉法的优点,是分析冲击爆炸等极端变形问题的一种有效方法。本文系统总结了本课题组近年来针对冲击、爆炸和流固耦合等极端变形问题在物质点法算法方面的研究进展,并简要介绍了开发的三维显式并行物质点法数值仿真软件 MPM3D 及其在超高速碰撞、侵彻、爆炸、边坡失效、金属切削和流固耦合等问题中的应用。

关键词:物质点法;冲击;爆炸;超高速碰撞;流固耦合

中图分类号:O351

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2017)01-0001-16

# 1 引 言

数值计算在科学研究和工程技术中得到了广泛应用,与理论和实验一起成为现代科学技术的三大支柱<sup>[1]</sup>,并具有快捷、安全和低成本的优势。然而,极端变形问题(如超高速碰撞、冲击侵彻、爆炸、金属加工成型、应变局部化、边坡失效和液体晃动等)是几何、材料和边界条件均为非线性的多物理场强耦合问题,涉及高速、高压、高温、相变和化学反应,气体、液体和固体等多种物质间相互耦合甚至混合,材料发生严重扭曲、破碎、熔化甚至气化,给数值计算带来了巨大的挑战。

拉格朗日法的网格与材料固连,因此格式简单,效率高,可以准确跟踪材料界面,易于引入与变形历史相关的材料模型。但是,在模拟极端变形问题时,材料的极端变形将会导致拉格朗日法的网格畸变,严重降低结果精度,甚至会使单元雅可比行列式在高斯点处为0或负值,使计算异常中止。网格畸变还会使显式时间积分的临界时间步长降低1~2个数量级,显著增加计算量。另外,拉格朗日网格类方法也难以有效地模拟材料的破碎、熔化和气化等复杂行为。LS-DYNA等商用软件引入侵蚀算法,将发生畸变或者破坏的单元人为地删除,以克服网格畸变带来的困难。但是侵蚀算法是一

收稿日期:2016-10-18;修改稿收到日期:2016-12-26.

基金项目:国家自然科学基金(11672154,11272180,11472153,10172052,10472052,10872107);国家重点基础研究发展计划(2010CB832701)资助项目.

作者简介:张 雄\*(1966-),男,教授,博士生导师 (E-mail: xzhang@tsinghua, edu, cn). 种非物理方法,会造成质量、动量和能量损失,且结果在很大程度上取决于侵蚀阈值的选取。欧拉法的网格固定在空间中,因此不存在网格畸变困难,适合于分析极端变形和流体流动问题。但由于网格与材料独立,不易准确跟踪材料界面,难以引入与变形历史相关的材料模型,且非线性对流项也会导致数值求解困难。

由质点网格法 PIC(Particle in Cell)<sup>[2,3]</sup>发展起来的物质点法 MPM(Material Point Method)<sup>[4-7]</sup>采用了拉格朗日和欧拉双重描述,将物体离散为一组在固定于空间的网格(欧拉描述)中运动的质点(拉格朗日描述)。质点携带了所有物质信息,因此便于跟踪材料界面和引入与变形历史相关的材料模型。固定于空间的网格只用于求解动量方程,不携带任何物质信息。物质点法是一种基于有限元法的拉格朗日粒子类方法,有效地综合了拉格朗日法和欧拉法的优点,是分析冲击爆炸等极端变形问题的一种有效方法。

本课题组自 2004 年开始,致力于冲击爆炸等极端变形问题的数值模拟方法和软件研究,先后建立了物质点法的高效实现方案、改进的物质点接触算法、自适应物质点法、并行物质点算法、不可压物质点法、物质点有限元法、杂交物质点有限元法、耦合物质点有限元法、自适应物质点有限元法以及物质点有限差分法等,并在算法研究的基础上,基于C++,Qt,VTK,CMake,OpenMP和MPI开发了可运行于Windows,Linux和Mac OS等多种平台上的三维显式并行物质点法数值仿真软件MPM3D,可应用于超高速碰撞、侵彻、爆炸、边坡

失效、金属切削和流固耦合等问题中。本文系统总结了本课题组近年来针对极端变形问题在算法、软件和应用方面的研究工作和成果。

# 2 物质点法及其改进

基于更新拉格朗日格式的控制方程的弱形式为

$$\int_{V} \delta u_{i} \rho \ddot{u}_{i} dV + \int_{V} \delta u_{i,j} \boldsymbol{\sigma}_{ij} dV - \int_{V} \delta u_{i} \rho b_{i} dV - \int_{V} \delta u_{i$$

式中 下标 i 和 j 指示空间坐标分量,并遵守 Einstein 求和约定, $\rho$  为当前时刻的密度, $b_i$  为体力, $u_i$  为位移, $\delta u_i$  为虚位移, $\sigma_{ij}$  为柯西应力张量, $\Gamma_i$  为现时构形中的指定面力边界, $\bar{\iota}_i$  为指定的面力。

#### 2.1 物质点法的基本格式

物质点法将材料区域离散为一组相对背景网格运动的质点,如图1所示。每个质点表示一个材料团簇,并携带其所有物质信息,如质量、速度、应力和应变等。背景网格仅用于求解动量方程和物理量的空间导数,一般取为固定于空间的规则网格。

将材料区域离散为质点后,其密度 $\rho$ 可近似为

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{n_p} m_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)$$
 (2)

式中  $n_p$  为物质点总数, $m_p$  为物质点所代表区域的质量, $\delta$  为 Dirac 函数, $x_p$  为质点 p 的坐标。

在求解动量方程时,背景网格和质点完全固连,可以将背景网格看成是对材料区域的有限元离散,因此域内任一点 *x* 的位移可以近似为

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_g} N_I(\mathbf{x}) u_{iI}$$
 (3)

式中 ng 为背景网格结点总数。

将式(2,3)代入式(1),并采用集中质量阵,可得

$$m_I \dot{v}_{iI} = f_{iI}$$
 (I=1,2,...,  $n_g$ ) (4)

式中 v, 为结点 I 的速度,

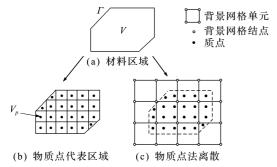


图 1 物质点法[6]

Fig. 1 Material point method<sup>[6]</sup>

$$m_{\rm I} = \sum_{p=1}^{n_p} N_{1p} m_p \tag{5}$$

是结点 I 的质量,其中,  $N_{Ip} = N_I(\mathbf{x}_p)$ ,

$$f_{iI} = f_{iI}^{\text{ext}} + f_{iI}^{\text{int}} \tag{6}$$

是结点力,其中

$$f_{iI}^{\text{int}} = -\sum_{p=1}^{n_p} N_{Ip,j} \sigma_{ij\,p} (m_p/\rho_p)$$
 (7)

是结点内力,

$$f_{iI}^{\text{ext}} = \sum_{k=1}^{n_p} m_p N_{1p} b_{ip}$$
 (8)

是结点外力, $\sigma_{ijp}$  和  $b_{ip}$  分别为质点 p 的应力和体积力。为了公式简洁,这里没有考虑自然边界条件。

背景网格结点动量方程式(4)可以采用显式积 分或者隐式积分求解,参考文献[6,7]。

由以上格式可以看出,物质点法在每个时间步中可以看成是采用了质点积分(即将质点取为积分点)的拉格朗日有限元法。当材料区域中的某个单元内不存在任何质点(即积分点)时,该单元为空单元,即材料在该单元处发生了数值断裂。在超高速碰撞等问题中,可以利用这个特性对材料破坏进行粗略模拟,但对某些问题可能会产生很大的误差。例如在模拟聚能射流问题时,在射流形成过程中材料会产生很大的拉应变,质点之间的距离不断增加,最终产生空网格,造成数值断裂。为此,马上等<sup>[8]</sup>提出了质点自适应分裂技术,当质点在某个方向的累积应变达到给定阈值时,将其在该方向上分裂为两个质点,有效地避免了数值断裂问题。

# 2.2 接触算法

在 MPM 中,质点和背景网格之间采用单值映 射函数,自动满足无穿透条件,可以处理无滑移接 触问题。但若要使界面间可以相互滑移和分离,则 需要引入接触算法。

York 等<sup>[9]</sup>提出,在物体相互接近时,采用标准物质点格式,当物体有相互分离趋势时,各物体采用独立的速度场进行计算,从而实现了接触物体的正常分离。Bardenhagen等<sup>[10]</sup>基于拉格朗日乘子法建立了物质点接触算法,并考虑了摩擦。Hu等<sup>[11]</sup>从多重背景网格的思路建立了物质点法接触算法,接触点的法向运动在公共背景网格上计算,切向运动则在物体各自的背景网格上计算,保证了接触点处法向运动连续,又允许切向运动独立。

物质点法的接触算法可分为三个步骤,(1)进行接触检测,确定可能发生接触的位置;(2)计算接触点处接触面法线向量,以确定接触力的方向;

(3) 计算接触力大小,并通过背景网格施加到相互

物质点法中的接触关系是通过背景网格定义 的。接触检测时,需要找出所有发生接触的背景网 格结点。若不同物体的质点对同一个背景网格结 点有贡献,则认为两个物体可能发生接触,如图 2 所示。

物质点法的接触算法一般通过背景网格结点 的质量梯度来计算物体 r的表面法向量,即物体 r在背景网格结点 I 处的表面法向量为

$$n_{li}^{b} = \sum_{i} N_{Ip,i} m_{p}^{b} / |\sum_{i} N_{Ip,i} m_{p}^{b}| \tag{9}$$

由式(9)得到的接触面法向量不共线,因此不 满足动量守恒条件。黄鹏等[12,13]提出了接触面法 向量计算的修正公式,保证接触面上法向量共线, 解决了原接触算法中动量不守恒的问题。

在施加接触力时,首先假设没有发生接触,不 同物体的动量方程在各自独立的背景网格上独立 求解,得到各自的试探速度。若试探速度

$$(\bar{v}_{i,1}^{r,n+1/2} - \bar{v}_{i,1}^{s,n+1/2}) n_{i,1}^{r,n} > 0$$
 (10)

表明两个物体将在该结点处发生穿透,需要施加法 向接触力

$$f_{I}^{s, \text{nor}, n} = -\frac{\left(m_{I}^{s, n} \bar{p}_{iI}^{r, n+1/2} - m_{I}^{r, n} \bar{p}_{iI}^{s, n+1/2}\right) n_{iI}^{r, n}}{\left(m_{I}^{r, n} + m_{I}^{s, n}\right) \Delta t}$$
(11)

对试探解进行修正。

马志涛等[14]指出式(10)会导致物体提前发生 接触。当物体之间的距离小于两个背景网格单元 尺寸时,虽然两个物体的材料区域并没有发生重 叠,但按式(10)则需要施加接触力。为此,提出了 一种辅助接触判断条件

$$\begin{cases} (\bar{v}_{iI}^{r,n+1/2} - \bar{v}_{iI}^{s,n+1/2}) n_{iI}^{r,n} > 0 \\ D_{I}^{rs} \leq \lambda d_{s} \end{cases}$$
(12)

式中 D° 为两个物体表面与接触结点 I 最近的距 离在该结点法线方向上的投影之和,如图 3 所示,  $d_c$  为背景网格的结点间距,  $\lambda$  是人为选取的系数, 可取为 0.5。式(12)表明,当两个物体的间距  $D_1^{rs}$  $<\lambda d_c$ 时,才需要施加接触力。

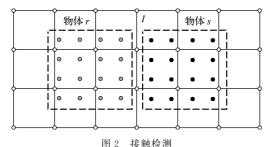


Fig. 2 Contact detection

上述接触算法需要建立多重背景网格用于独 立求解各个物体的动量方程,即每个物体需要一套 背景网格,大大地增加了内存量。马志涛等[14]提 出了局部多重背景网格接触算法,仅在发生接触的 区域为每个物体建立单独的背景网格,其余区域仍 然共用一套背景网格,如图 4 所示。该方法大大地 降低了内存使用量,提高了接触算法的效率。

#### 2.3 网格自适应技术

背景网格的尺寸是影响物质点法计算结果精 度的主要因素。加密网格可以提高结果的精度,但 同时会大幅度地增加计算量。为了在提高精度的 同时尽可能减少物质点法的计算量,本课题组先后 建立了动态网格、移动网格、多重网格、多级网格和 自适应网格等技术。

#### 2.3.1 动态网格

与欧拉法类似,物质点法的背景网格需要覆盖 物体可能运动到的所有区域。在大多数实际问题 中,质点一般不会充满整个背景网格,即存在大量 的不含有任何质点的空单元,采用静态网格(图 5 (a))时将会浪费大量的计算机内存和计算时间。 如在模拟某斜侵彻问题时,在每个时间步中大约有 87%的空单元,即只有13%左右的单元中存在质 点。马志涛等[14]基于 C++提出了动态背景网格 算法,在初始时刻只创建结点和背景网格单元的指 针数组,不创建其对象,因此不占内存,也不参与计 算。在计算过程中,只有当某个单元中存在质点 时,才创建该单元及其相关结点的实例,同时删除

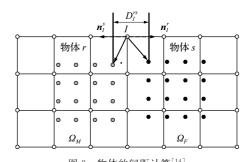


图 3 物体的间距计算[14] Fig. 3 Distance between two bodies<sup>[14]</sup>

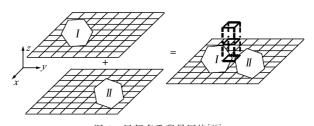


图 4 局部多重背景网格[35] Fig. 4 Local multiple background grid[35]

空单元及其相关结点的实例(图 5(b))。动态背景 网格技术可大幅度降低内存耗费量并提升计算效率。 2.3.2 移动网格

在计算过程中,某些质点可能会飞出预设的背景网格区域。为了避免这一现象,需要在初始时刻设置足够大的背景网格,但会大幅增加内存使用量和计算量。马志涛等[14]提出了移动网格技术,在计算过程中根据质点的当前位置自动调整背景网格在各方向上的单元尺寸,以在不改变网格拓扑的情况下覆盖整个材料域(图 6(b))。

保持网格拓扑结构不变而改变单元尺寸可能会导致单元在某方向的尺寸过大,如图 6(b)所示,影响计算精度。杨鹏飞<sup>[15]</sup>对移动网格技术进行了改进,通过调整网格的拓扑结构使得单元尺寸保持不变,同时删除没有包含质点的背景网格单元(图 6(c))。

#### 2.3.3 多重移动网格

在用物质点法模拟多个物体时,即使物体之间 只在局部发生作用,也需要将所有物体的质点信息 映射到同一套背景网格上求解。杨鹏飞<sup>[15]</sup>提出了 多重移动网格技术,允许每个物体具有各自的背景 网格,根据物体的运动范围进行实时调整,并且可 以关闭或者激活个别网格。如在模拟多层侵彻问 题时,在弹体与靶体发生接触前,动量方程在各自 的背景网格中求解(图 7(a)),接触后则在同一套 网格中求解(图 7(b)),而在弹体穿透靶体并与靶 体分离后,又可以在各自的网格中求解(图 7(c))。

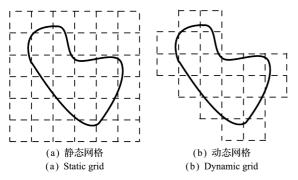
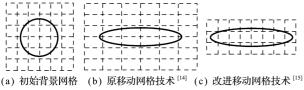


图 5 动态背景网格技术 Fig. 5 Dynamic backgroud grid



(a) Initial grid (b) Original moving grid (c) Improved moving grid scheme scheme

图 6 移动网格技术<sup>[14,15]</sup> Fig. 6 Moving grid scheme<sup>[14,15]</sup>

在弹体与靶体发生接触前,靶体没有外载荷和初速度,因此可以关闭靶体的背景网格,以进一步提高计算效率;在弹体和靶体分离后,当靶体的动能不再发生变化时也可以关闭其背景网格(图 7(d))。

#### 2.3.4 多级网格及其自适应

为了提高局部化问题的求解精度和效率, 杨鹏飞<sup>[15]</sup>提出了多级网格法,允许在同一套求解体系下存在不同级别(密度)的背景网格,即在局部大变形区域采用较密的物质点和背景网格,而在其余区域采用较疏的物质点和背景网格,如图 8 所示。

多级背景网格需要用户事先指定要加密的区域和加密的级数,并给定相应的多级背景网格。杨鹏飞[15]进一步提出了自适应背景网格技术,根据各时间步的计算结果(如应变梯度或能量范数),在梯度较大的区域自动加密背景网格并分裂物质点,提高了求解精度和效率。如图 9 所示,当单元2 满足分裂条件时,自动将其分裂为 4 个单元,并且单元可以进行多级分裂。

#### 2.4 不可压物质点法

自由液面的流动问题在工程实际中有着大量的应用,如航天器在变轨、交会以及对接过程中液体推进剂在外界刺激下产生的剧烈晃动和核反应

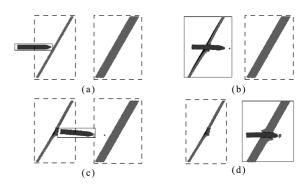


图 7 多重网格技术(虚线框和实线框分别表示 关闭和激活的背景网格边界)

Fig. 7 Multiple grid scheme (the dashed lines and solid lines represent the boundaries of background grid that are deactivated and activated, respectively)

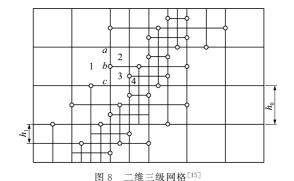


Fig. 8 Two-dimensional three-level grid<sup>[15]</sup>

堆堆芯在地震及海啸等突发激励下的晃动等。自由液面流动问题涉及液体表面的卷曲、破碎和融合等复杂的几何非线性,用拉格朗日和欧拉类方法模拟均较为困难。课题组提出了弱可压物质点法<sup>[16]</sup>和不可压物质点法<sup>[17]</sup>两种方案来模拟自由液面的流动问题。

在弱可压物质点法中,质点的压力通过人工状态方程<sup>[18]</sup>来计算。弱可压物质点法能较好地模拟溃坝、楔形体入水和晃动等问题<sup>[16,20]</sup>,但遇到了如下困难,(1)为了将流体密度变化控制在1%之内,人工声速至少要大于流场中最大流速的10倍,导致显式时间积分的临界值过小,计算成本偏高;(2)没有跟踪物质界面,难以准确施加压力边界条件;(3)质点在穿越网格时会导致数值振荡,弱可压状态方程放大了网格穿越误差,甚至会导致非物理飞溅。

为了解决弱可压物质点法的上述缺点,基于算子分裂技术<sup>[21,22]</sup>提出了完全不可压物质点法<sup>[17]</sup>。 利用算子分裂技术可将更新拉格朗日格式的控制 方程

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ii,j} + \rho b_i \tag{13}$$

分裂为 
$$\rho \ddot{u}_i = s_{ij,j} + \rho b_i \tag{14}$$

$$\rho \dot{v}_{i} = -p_{,i} \tag{15}$$

式(14)只和剪切变形有关,因此显式积分的临界时间步长取决于流体的剪切波速。流体的剪切波速远小于压力波速,因此式(14)可以利用显式积分采用大时间步长高效求解。将求解式(14)得到的试探速度场  $v_i^*$ 作为式(15)的初始条件,并要求由式(15)得到的速度场  $v_i^{n+1}$  应满足散度为 0 的条件,可得到压力泊松方程

$$p_{.ii}^{n+1} = (\rho/\Delta t) v_{i,i}^*$$
 (16)

将背景网格作为差分网格,采用中心差分法对式(16)进行离散,得到离散压力泊松方程组,可以利用预处理共轭梯度法高效求解。另外,采用level set 函数隐式跟踪自由表面,并采用虚拟网格法施加压力边界条件(含表面张力),同时引入沙漏阻尼来抑制压力-速度半交错格式产生的沙漏模态[17]。

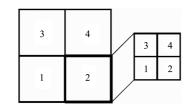


图 9 二维自适应网格[6]

## Fig. 9 Two-dimensional adaptive grid<sup>[6]</sup>

# 3 物质点法与其他方法的耦合

#### 3.1 与有限元法的耦合

物质点法在每个时间步开始都会抛弃上个时间步已经变形的背景网格,重新采用新的规则背景网格,因而避免了有限元法中的网格畸变问题,可以很方便地处理极端变形问题。物质点法可以看成是采用质点积分且在每个时间步中都进行网格重划分的有限元法。与高斯积分不同,质点积分无法高效准确地积分多项式,因而对于小变形问题,物质点法的精度和效率均低于采用单点高斯积分的有限元法。在很多工程问题中,极端变形可能只发生在局部区域,其他部分仍然是小变形。将物质点法和有限元法按一定方式进行耦合,如仅在大变形区域采用物质点法,而小变形区域仍采用有限元法,可以充分发挥二者的优势。

#### 3.1.1 物质点有限元法

有限元法在求解超高速碰撞问题时,为了模拟材料破碎和解决网格畸变,通常采用非物理的单元侵蚀算法,不但无法模拟超高速碰撞薄板形成碎片云的过程,且会造成质量、动量和能量不守恒。针对有限元法在大变形区域网格畸变的问题,张雄等[23]借鉴物质点法的思想,在大变形区域引入背景网格,提出了物质点有限元法(MPFEM)。计算过程中,所有物体仍用有限元离散,受背景网格覆盖的所有有限元结点的动量方程均映射到背景网格上求解,其余结点的动量方程仍在原有限元网格上求解。如果背景网格没有覆盖任何节点,则该方法退化为有限元法,如果背景网格覆盖所有结点,则该方法退化为物质点法。为了保证计算精度和计算效率,一般只需在局部大变形区域布置背景网格。

以二维 Taylor 杆碰撞问题为例,如图 10 所示。杆的底部在冲击载荷作用下将产生很大的变形,导致严重的网格畸变。为了解决单元畸变问题,可在杆的底部区域引入背景网格。

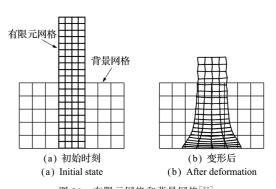


图 10 有限元网格和背景网格<sup>[23]</sup> Fig. 10 FEM grid and backgroud grid<sup>[23]</sup>

图 11 给出了 MPFEM 的基本原理,图中结点  $a \sim f$  是有限元结点,结点  $g \sim i$  是质点(进入背景 网格区域的有限元节点), $A \sim D$  是背景网格上的结点,称为网格点。当有限元结点在背景网格区域以外时,动量方程仍在有限元网格上求解,如  $a \sim f$ 。对于背景网格覆盖的材料子域,如结点  $g \sim i$ ,动量方程在背景网格上求解。求得背景网格结点上的变量后,将其映射回质点以更新质点信息,然后丢弃变形后的背景网格,在下一时间步重新使用规则的背景网格,从而避免了网格畸变。在大变形区域,时间步长取决于背景网格尺寸,不再是畸变的网格,因而提高了计算效率。

该算法适合于超高速碰撞等问题的模拟。由于物质点法可以自动处理无滑移接触,所以在背景网格内发生碰撞的两物体不会相互嵌入,无需引入接触算法。另外,在物质点法中,当两个质点的间距大于背景网格间距时,它们之间没有相互作用,可以作为对破坏现象的粗略描述。

#### 3.1.2 耦合物质点有限元法

在中低速冲击侵彻和流固耦合类问题中,弹体和固体的变形一般较小,而靶体和流体的变形可能很大。针对此类问题,廉艳平等<sup>[24]</sup>建立了耦合物质点有限元法 CFEMP(Coupled Finite Element Material Point Method)。该方法采用物质点法离散大变形物体,用有限元法离散小变形物体,并通过基于背景网格的接触算法实现两者的耦合。

考察图 12 所示的两个物体 r 和 s 的接触问题。 $\Omega_r$  和  $\Omega_s$  分别表示物体 r 和 s 所占据的区域, $\Gamma_r$ 

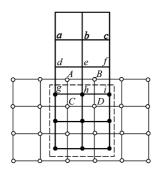


图 11 物质点有限元法[23]

Fig. 11 Finite element material point method<sup>[23]</sup>

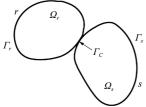


图 12 相互接触的两个物体[23]

Fig. 12 Two bodies in contact<sup>[23]</sup>

和  $\Gamma_s$  表示物体 r 和 s 的边界, $\Gamma_c = \Gamma_r \cap \Gamma_s$  表示接触 边界,接触界面条件为非嵌透条件和接触面力条件。

假设物体 r采用物质点离散,物体 s采用有限元离散,如图 13 所示。在每个时间步中,首先假设接触没有发生,求得两个物体动量方程的试探解;然后通过背景网格进行接触探测,若两物体发生接触,则计算接触力并修正试探解以消除嵌透,若未发生接触,则试探解即为真实解。在 CFEMP 中,分别采用有限元法和物质点法模拟求解不同的物体,以吸收二者各自的优点。此外,耦合接触算法还可以模拟界面的接触/滑移/分离。

在最初的耦合物质点有限元法中,物质点和有限单元之间的耦合是基于背景网格的接触算法实现的,因此要求有限元区域和物质点区域之间的网格离散尺寸相互匹配。该限制可能导致有限元区域网格过密,从而显著减少时间步长,增加计算成本和数据存储量。为了解决网格匹配限制问题,陈镇鹏等[20]提出了耦合物质点有限元的改进算法。该方法采用点面接触算法实现物质点粒子和有限单元之间的耦合,而非采用基于背景网格的接触算法,因此有限元网格的离散尺寸不再需要和背景网格匹配。数值研究表明,改进的耦合物质点有限元法(ICFEMP)稳定性更好,效率和精度均比纯物质点法和耦合物质点有限元法更高。如在模拟楔形体

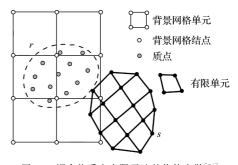


图 13 耦合物质点有限元法的物体离散<sup>[24]</sup> Fig. 13 Discretization of coupled finite element material point method<sup>[24]</sup>

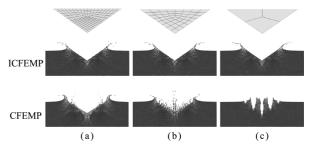


图 14 楔形体人水问题的 ICFEMP 和 CFEMP 结果对比,其中 楔形体分别采用三种不同尺寸的有限元模拟[20]

Fig. 14 Comparison of numerical results by ICFEMP and CFEMP with three different element sizes in modeling a wedge falling into water [20]

人水问题时,ICFEMP使用不同有限元尺寸的模型均获得了理想的结果,但CFEMP在使用较大尺寸的有限元模型时发生了严重的粒子穿透现象,如图 14所示。

## 3.1.3 自适应物质点有限元法

在许多工程实际问题(如超高速碰撞和侵彻) 中,远离载荷作用点的材料区域并没有发生大变 形,材料大变形和破碎等现象仅发生在物体局部区 域内;另外,初始时全部材料区域均为小变形状态, 而在加载过程中某些局部区域逐渐发生大变形直 至破碎。3.1.1 节的 MPFEM 需要事先指定可能 发生大变形的区域,且不区分材料的变形状态,即 使进入背景网格区域的单元仍处于小变形状态也 会强制转化为物质点。3.1.2 节的 CFEMP 分别 用物质点法和有限元法离散不同的物体,而不是根 据各区域的当前变形状态采用相应的离散方法。 为了充分发挥物质点法和有限元法各自的优势,廉 艳平等[23,24] 充分吸收 MPFEM 和 CFEMP 两种方 法的思想,提出了自适应物质点有限元法 AFEMP (Adaptive Finite Element Material Point Method)<sup>[25,26]</sup>。初始时所有物体均用有限元离散(图 15 (a)), 当某单元的变形满足给定条件时自动将其转 化为物质点(图 15(b))。同一个物体内物质点区域 和有限元区域通过背景网格实现内力的传递(与 MPFEM 类似),而不同物体之间的相互作用通过 接触算法实现(与 CFEMP 类似)。AFEMP 充分 发挥了 MPFEM 和 CFEMP 的优势,非常适合模 拟特大变形和破碎等问题。

与 CFEMP 类似, AFEMP 也要求有限元网格 尺寸和背景网格匹配。陈镇鹏等<sup>[20]</sup>利用点面接触 算法对自适应有限元物质点法进行了改进,消除了 背景网格和有限元网格的尺寸匹配限制,同时也具 有更高的精度和效率。

#### 3.1.4 杂交物质点有限元法

钢筋混凝土在工程中有着广泛的应用,钢筋在

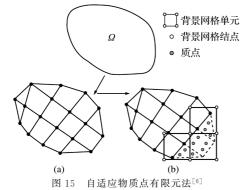


Fig. 15 Adaptive finite element material point method<sup>[6]</sup>

混凝土的受拉承载中起着非常重要的作用。一般 钢筋直径的尺寸较小而混凝土结构尺寸较大,若钢 筋和混凝土均采用物质点离散将导致计算规模过 于庞大。为了高效模拟钢筋混凝土问题,廉艳平 等[27] 将有限元法中的杆单元引入物质点法,提出 了杂交物质点有限元法 HFEMP(Hybrid Finite Element Material Point Method)。混凝土用物质 点离散,钢筋用有限元离散,如图 16 所示。为了保 证杆单元和物质点位移场及速度场的一致性,杆单 元结点和物质点采用同一背景网格构建方程和更 新变量。在每一个时间步开始时,将杆单元结点及 物质点的质量和动量映射到同一背景网格上,在背 景网格上求解杆单元结点和物质点的混合动量方 程。HFEMP避免了纯物质点法模拟钢筋混凝土 时计算规模庞大的问题,适合于模拟钢筋混凝土结 构在冲击爆炸等强动载荷下的响应问题。

#### 3.2 与有限差分法的耦合

物质点运动代表了材料区域的变形,能比较方便地跟踪材料界面和处理与变形历史相关的材料模型,适合模拟固体和流体的极端变形问题。但对于爆轰波传播等问题,有限差分法(FDM)更有效。

#### 3.2.1 交替物质点有限差分法

爆炸与结构相互作用的过程可以分为起爆阶段、冲击波传播阶段和流固耦合阶段,冲击波传播阶段和流固耦合阶段,冲击波传播阶段适合用有限差分法求解,其余两个阶段适合用物质点法求解。针对此类问题,崔潇骁等<sup>[28]</sup>将物质点法与有限差分法在时间上相结合,提出了交替物质点有限差分方法(AFDMP),如图 17 所示。在起爆阶段,采用物质点来模拟炸药的起爆和空气的运动;起爆过程结束后,将物质点法的背景网格作为差分网格,将质点作为无质量示踪点跟踪物质

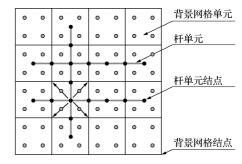


图 16 钢筋混凝土的离散[27]

Fig. 16 Discretization of reinforced concrete<sup>[27]</sup>



图 17 交替物质点有限差分法[28]

Fig. 17 Alternative finite difference material point method<sup>[28]</sup>

界面的运动,用差分法模拟冲击波传播过程,冲击波到达结构后,将示踪点转化为质点,用物质点法模拟流固耦合过程。

物质点法和差分法之间的物理量交替映射是通过背景网格进行的,这一过程中保证了质量、动量和能量的守恒,同时物质点和无质量示踪点进行交替转化。AFDMP 在空中爆炸问题的模拟中充分发挥了差分法和物质点法的各自优势。

#### 3.2.2 耦合物质点有限差分法

物质点法采用质点和背景网格双重描述,内存 需求和运算量比网格类方法大,而且不容易构造高 阶格式。崔潇骁等[29]基于握手区的思想提出了耦 合物质点有限差分法(CFDMP),将求解域分为有 限差分法区和物质点法区,两个区域的重叠部分为 握手区。如图 18 所示,空中爆炸问题,爆轰波传播 的流体区采用差分法模拟,流固耦合区域采用物质 点法模拟。在握手区中,物质点法将背景网格节点 的物理量映射至差分法的虚拟格心作为差分法的 边界条件,而差分法将格心量映射至物质点法处于 界面的背景网格节点,为物质点法提供边界条件, 即两个区域通过质点在握手区中的运动来实现相 互输运过程。在大范围流场及流固耦合问题中,相 比单纯物质点法,CFDMP运算量和内存需求少, 而且计算精度高;相比单纯有限差分法,CFDMP 可以很容易地处理结构变形及流固相互作用问题。

#### 3.3 与分子动力学方法的耦合

分子动力学(MD)方法在各领域得到了广泛的应用,但其所能模拟的时间尺度和空间尺度极为有限;物质点法基于连续介质方程,不能直接用于连续介质假设失效的问题。将物质点法和分子动力学相结合,是拓展两种方法适用范围的重要手段。

贺年丰等<sup>[30,31]</sup>发展了分子动力学-物质点无缝 耦合多尺度方法,连续介质假设可能失效的核心区 域用分子动力学模拟,其他区域用物质点法模

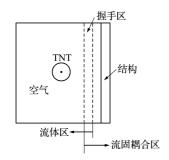


图 18 耦合物质点有限差分法[29]

Fig. 18 Coupled finite difference material point method<sup>[29]</sup>

拟,用光滑分子动力学(SMD)方法<sup>[32]</sup>作为两区域的过渡桥梁,如图 19 所示。SMD 方法是刘岩等<sup>[32]</sup>基于物质点法思想所提出的一种高效分子模拟方法,通过将原子运动方程映射到背景网格节点上求解,再由节点量计算原子变量增量,使得控制临界时间步长的变量转化为背景网格尺寸,从而可以采用比分子动力学临界时间步长大得多(甚至高一个量级以上)的时间步长,而整体精度保持良好。

MD 区域和 SMD 区域之间通过原子间作用力自动实现两区域间的耦合作用,同时在两区域间插入厚度只有几个原子的过渡区( $\Omega_T$ )。过渡区在 SMD 区不能描述的高频运动上施加阻尼,从而实现抑制高频波在 MD-SMD 界面处反射的效果 [33]。 SMD 方法和物质点法均在背景网格节点上求解方程,通过将原子/物质点的质量、力和动量映射到相同网格节点上自然实现了 SMD 区域和物质点区域的耦合。在 SMD 区域和物质点区域之间插入嵌入区( $\Omega_E$ ) 和虚原子,以消除 MD 的非局部性质可能带来的虚假力,嵌入区的尺寸只需大于 MD 势函数的截断半径即可。由于 SMD 方法与 MD 方法和物质点法在求解流程上的相似性,在上述耦合多尺度方法中,MD 区域和物质点区域通过 SMD 区域实现了无缝平滑过渡 [30.31]。

# 4 三维显式物质点法仿真软件 MPM3D 及其应用

数值模拟技术已愈来愈受到政府部门的关注和重视。美国自 1995 年启动了 ASC 计划(Advance Simulation and Computing),通过数值模拟而不是地下核试验来评估美国的核武器库存,执行计划的主体为美国国家核安全局及其三大国家实验室(Sanida, Los Alamos 和 Lawrence Livermore)。同时,许多商业公司亦开发了很多成熟的商业软件,如 LS-DYNA 和 AUTODYN。这些软件在极端变形的数值模拟中应用广泛,但也存在很

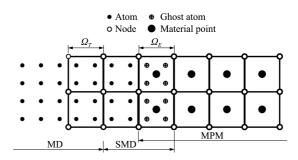


图 19 分子动力学-物质点耦合多尺度方法<sup>[30,31]</sup> Fig. 19 Multiscale molecular dynamics-material point coupling method<sup>[30,31]</sup>

多问题,如其采用的侵蚀(erosion)算法,当判断量(如单元的塑性应变)达到用户给定的阈值时即将单元删除,以形象地模拟材料的断裂和破碎,但导致了计算模型的质量、动量和能量不守恒。

自 2004 年开始,本课题组在算法研究的基础 上, 先后用 Fortran 90 和 C++语言, 研发了三维 显式物质点法并行数值仿真软件 MPM3D(计算机 软件著作权登记号 2009 SRBJ4761),可用于模拟超 高速碰撞、冲击、侵彻、爆炸、自由表面流动和强流 固耦合等极端变形问题。2013年,本课题组将 Fortran 90 版的 MPM3D 程序简化整理,推出了三 维显式物质点法开源代码 MPM3D-F90,作为物质 点法专著[6,7]的示例程序,供读者参考。C++ 版的 MPM3D程序仍在持续研发中,目前已实现了 USF、 USL 和 MUSL 求解格式(包括显式和隐式)、GIMP 算法、接触算法、多种自适应算法、不可压物质点 法、有限元法、杂交物质点有限元法、耦合物质点有 限元法、自适应物质点有限元法、有限差分法、交替 物质点有限差分法以及耦合物质点有限差分法,包 含了线弹性、理想弹塑性、各向同性线性强化弹塑 性、Johnson-Cook 塑性、简化的 Johnson-Cook 塑 性、高能炸药、空材料、Holmquist-Johnson-Cook 混凝土、RHT 混凝土、Holmquist-Johnson 陶瓷、 Taylor-Chen-Kuszmau 混凝土、Drucker-Prager 岩 土、Deshpande-Fleck 金属泡沫以及 Mooney-Rivlin 超弹性等材料模型和多项式、JWL、Gruneisen、 P-α以及 Holmquist-Johnson-Cook 等状态方程,具 有最大等效塑性应变失效、最大静水拉力失效、最 大主应力/剪应力失效、最大主应变/剪应变失效和 瞬时几何应变失效等失效模型。MPM3D具有 OpenMP 和 MPI 两种并行版本,实现了 SMP (Symmetric Multi Processing,对称多处理系统) 和 MPP(Massively Parallel Processing, 大规模并 行处理系统)两种体系下的并行计算。

另外,课题组基于跨平台的 C++图形用户界面应用程序框架 Qt、跨平台可视化工具包 VTK (Visualization Toolkit)和跨平台的开源自动化构建系统 CMake 开发了 MPM3D 的图形用户界面,具有优良的跨平台特性,可运行于 Windows、Linux 和 Mac OS 等操作系统。后处理采用 Para-View 软件,它是由美国 Kitware 公司、洛斯阿拉莫斯国家实验室、圣地亚国家实验室和 CSimSoft 公司联合研发的多平台数据分析和可视化应用开源程序,可对超大规模数据进行分析处理,既可运行

于台式机,也可运行于并行计算平台。

下面分别针对超高速碰撞问题、冲击侵彻问题、爆炸问题、流固耦合问题以及其他大变形问题介绍课题组开发的 MPM3D 软件的应用实例。

#### 4.1 超高速碰撞问题

超高速碰撞产生的压力通常远高于材料的强度,撞击区域的材料会发生破碎、熔化乃至气化。传统有限元法在求解此类问题时通常采用单元侵蚀技术,但无法模拟超高速碰撞中的碎片云及其对结构的作用过程。物质点法克服了传统有限元法的这些缺陷,可以很好地再现高速碰撞过程。

马上等[34,35]应用物质点法模拟了薄板和厚板 的超高速碰撞问题。超高速碰撞问题中的薄板通 常是指厚度比撞击弹丸尺寸小得多的靶板,撞击后 会在板的背面产生碎片云现象;厚板则是指厚度远 大于弹丸尺寸,撞击后会在板的表面形成撞击坑。 马上等[34,35]的工作表明,物质点法可以很好地模 拟碎片云和成坑过程,所得坑深和坑口直径等数值 与实验吻合良好,在4 km/s 以上撞击速度的结果 基本符合半球说[36]的理论预测值,即坑深约为坑 口直径的 1/2。张雄等[23] 还采用物质点有限元法 模拟了超高速碰撞问题,得到了很好的结果。黄鹏 等[37]用 OpenMP 并行物质点算法模拟了 1300 万 质点规模的铅弹撞击铅靶问题,撞击速度为 6.58 km/s,得到了与实验非常吻合的碎片云尺寸。刘 平等[38]全面研究了直径为微米量级的单铝颗粒和 铝颗粒群在不同角度下正斜高速撞击厚板过程,撞 击速度为 700 m/s 和 4500 m/s。单颗粒正撞击的 计算结果与半球说和能量-体积律等理论模型[36] 吻合;单颗粒斜撞击的计算结果表明,在撞击倾角 不大时,撞击坑的尺寸趋近于正撞击结果。在较低 速度下颗粒群撞击所得坑体尺寸相对独立,而在较 高速度下显现出坑体之间的相互影响,当速度达到 一定数值后,接近平板的撞击结果。刘平等[38]给 出了颗粒群正撞击的四种坑型模式和斜撞击的七 种坑型模式,以及相应的坑深经验公式。

Whipple 防护结构是航天器设计中常用的抵御空间碎片超高速撞击的防护结构形式,在Whipple结构中填充泡沫金属材料是提高防护效能的重要手段;蜂窝夹芯板是航天器中重要的承载结构,研究其在高速撞击下的响应与防护效果,对于构建新型空间碎片防护结构很有意义。泡沫材料和蜂窝材料的丰富内部结构对于超高速碰撞结果有着巨大的影响,不能将其等效为宏观连续体进行

分析,而直接基于内结构的模拟要求内结构建模简 单易行,且所得模型与实际情况吻合。宫伟伟 等[39,40]通过 CT 扫描重构,建立了泡沫铝的内结构 模型,并基于该模型模拟了填充式 Whipple 结构 和夹层式 Whipple 结构在 2 km/s 和 4 km/s 撞击 速度下的响应,所得结果均与实验吻合。蜂窝内结 构规则,但对于内结构胞壁在高速撞击下的断裂破 碎过程,传统有限元法仍难以模拟。刘平等[41]发 展了蜂窝夹芯结构的物质点建模方案,基于该模型 模拟的多种工况均与实验或经验公式吻合。在此 基础上,刘平等[41]模拟了弹丸质量为1g~20g, 撞击速度为 1300 m/s~4500 m/s 的蜂窝夹芯板高 速撞击过程,获得了上下面板孔径和撞击孔道锥度 随各参数的变化规律,图 20 所示为速度为 4500 m/s的1g弹丸撞击下,蜂窝板的破坏过程。蜂窝 芯质的存在,在一定程度上限制了碎片撞击上面板 之后的分散过程,不利于撞击防护,在蜂窝芯质中 增加一层中面板,即形成双层蜂窝板,可以在一定 程度上缓解此类问题,增强蜂窝结构的防撞击能 力。刘平等[42,43]借助物质点法内结构模型直接模 拟,提出了交错芯质双层蜂窝板和非等距双层蜂窝 板两种新型结构,通过令碎片更多地与蜂窝芯质胞 壁撞击,获得更好的吸能效果。计算结果表明,在 3 km/s~5 km/s 的撞击速度下,具有同等质量的 改进双层蜂窝板比原始双层蜂窝板和单层蜂窝板 都具有更小的下面板穿透孔径和剩余动能,在某些 工况下可以实现非穿透的理想效果。刘平等[42]还 进一步提出了多层蜂窝板结构。此外,超高速碰撞 下的高温高压对状态方程参数的合理确定提出了 很大的挑战,刘岩等[44]发展了一种层进多尺度计 算方法,首先通过分子动力学大量模拟获得各状态 变量构成的曲面,然后基于其拟合状态方程参数

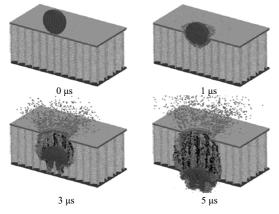


图 20 蜂窝夹芯板在超高速撞击下各时刻的构型<sup>[41]</sup> Fig. 20 Configurations of the honeycomb sandwich panel under hyper-velocity impact<sup>[41]</sup>

或直接将其作为数值本构,用物质点法进行超高速撞击模拟。基于这种方法对铜、铝等金属超高速撞击过程的模拟结果与实验吻合良好。

撞击结果的测量和显示等后处理技术对结果分析有重要意义,本课题组针对物质点模拟结果发展了相应的测量和显示方案。刘平等[41]在计算蜂窝板撞击孔洞尺寸时,发展了每隔60°测量直径,将平均值作为孔洞等效直径的方案。该方案针对六角蜂窝结构特点,可以推广用于其他具有各向异性性质靶板穿孔直径的测量。刘岩等[44]发展了一种碎片云结果显示方案,即将碎片中的各个物质点投影到与撞击方向平行的平面,根据投影点密度画图。这种显示方案与真实实验中X光照相的机理相近,可更好地与实验结果进行对比。

良好的接触算法是中低速碰撞问题准确求解的关键之一,但在超高速碰撞下,由于压力极大,采用内禀非滑移接触算法的标准物质点法与采用了接触算法的物质点法计算结果应该非常接近,刘平等<sup>[38]</sup>对 2200 m/s 速度撞击下坑型随摩擦系数变化的模拟工作证实了这一点。

#### 4.2 冲击侵彻问题

速度较低的冲击侵彻问题虽然不会出现物质相变和熔化气化现象,但通常也伴随着大变形和断裂现象,物质点法在模拟时较之传统有限元法也有很大优势。张雄及其合作者[13,24,25,27,45]采用物质点法和物质点有限元法,对金属靶体、混凝土靶体在各种速度下的侵彻过程进行了大量成功模拟,所得剩余弹速、靶体和弹体构型等均与实验吻合良好。

由于冲击侵彻问题具有显著的局部性,特别是 对于金属等韧性材料的冲击侵彻问题,核心撞击区 域的变形很大,而远场区域变形较小,甚至有区域仍 然处在弹性变形阶段。因此,将物质点格式用于核 心区域,将有限元格式用于远场区域,可以达到更好 的精度和效率。廉艳平等[25,26]用自适应物质点有限 元法(AFEMP)成功模拟了钨合金长杆弹侵彻问 题,速度分别为 1500 m/s 和 2500 m/s,剩余弹速和 剩余杆长均和实验吻合良好,如图 21 所示。单一的 物质点格式也可以很好地模拟该问题,但 AFEMP 的计算时间仅为物质点法的 1/3 左右。钢筋混凝土 材料在侵彻下损伤区域会迅速向外围区域扩展,绝 大部分区域需要采用物质点格式模拟,但钢筋截面 尺寸远小于长度,需要引入有限元的杆单元以克服 离散困难。廉艳平等[27]采用杂交物质点有限元法 (HFEMP)模拟了撞击速度从 300 m/s~1100 m/s 的钢筋混凝土靶板侵彻问题,所得结果与实验吻合

良好,能够很好地展现出钢筋断裂与拔出过程。冲击侵彻问题的局部性也适合在不同区域采用不同离散尺寸。廉艳平等<sup>[46]</sup>基于多重网格物质点有限元法对前述钢混侵彻问题进行了分析,当撞击速度为606 m/s,749 m/s 和1058 m/s时,多重网格法的计算耗时约为原 HFEMP 方法的1/4,大大提高了计算效率。

鸟撞是航空器面临的重要安全问题。航空器结构由板壳和薄壁构件组成,鸟撞下的破坏过程传统有限元法亦不易模拟。吴博<sup>[47]</sup>发展了物质点与板壳单元的耦合算法,并成功地应用于鸟撞问题。模拟时鸟体采用物质点格式,航空器结构采用板壳单元,两区域间通过接触算法实现相互作用,接触力即为鸟体撞击力。当板壳单元即将发生破坏时,将其转化为物质点继续进行模拟,可以很好地模拟航空器蒙皮等结构碎裂的过程。另外,通过引入梁单元及破坏模型,模拟了螺栓和铆钉等连接件在撞击中的响应。

生物体在低速撞击下的响应对于研究人体撞 击防护,降低各类事故中碰撞造成的损伤具有重要 意义。虽然低速撞击下通常不会出现物质的超大 变形和断裂,传统有限元法也能较好求解,但生物 组织的复杂性使得有限元建模存在不小的困难,而 物质点模型的建立则要容易得多,且离散质量良 好。周双珍等[48-50]基于 CT 扫描图片,分别重构了 人体头部、颈椎、胸椎、腰椎和骨盆的质点模型,研 究了上述部位在撞击下的响应。模拟结果显示,头 部在撞击下产生的应力波,可能导致眼窝处的应力 集中,从而造成损伤。周双珍等[49]还探讨了不同 模型边界对头部撞击结果的影响。啄木鸟以其头 部能高速啄击树木,引起了撞击防护领域研究者的 关注。刘雨喆等[51]基于 CT 扫描,构建了啄木鸟 头部的物质点模型,获得了撞击下啄木鸟头部应力 波的传播过程,揭示了啄木鸟的特殊舌骨结构对吸

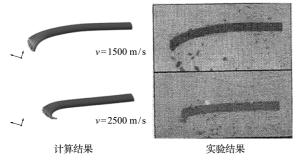


图 21 长杆弹侵彻问题弹体剩余构型对比<sup>[25]</sup> Fig. 21 Comparison of the residual configurations of long-rod penetration problem<sup>[25]</sup>

能和撞击防护的贡献,详细对比了不同损伤评价指标在啄木鸟头部撞击中的应用。

#### 4.3 爆炸问题

爆炸问题涉及爆轰波的传播和材料的超大变 形、破碎以及复杂物态变化,具有很强的非线性。 物质点法对于含能材料的起爆演化过程和爆轰波 作用下材料的动力学响应以及损伤破坏过程的模 拟颇具优势。特别是用物质点法模拟时,可将固体 材料和气体爆轰产物/爆轰波在同一框架下模拟, 很好地避免了界面处理的困难。由于爆炸后爆轰 产物体积的急剧膨胀,标准物质点法很可能出现数 值断裂现象。马上等[8,52]提出的自适应质点分裂 技术很好地解决了这一问题,成功地应用于一维激 波管问题、爆轰驱动飞片和三维聚能射流问题。图 22 所示为三维聚能射流构型及其速度分布。廉艳 平等[53]基于大量物质点法模拟,研究了爆轰驱动 下的飞片速度,对现有的 Gurney 公式进行了重要 改进。爆炸作用下壳体的碎裂过程研究对于理解 材料动态失效行为具有重要意义,杨鹏飞等[54]引 入宏观 Weibull 随机失效模型并考虑了微观孔洞 演化的 Gurson 模型,用物质点法很好地模拟了金 属壳体在爆炸载荷下的膨胀和破碎过程,模拟结果 的断裂模式和碎片质量分布均与实验结果或者理 论预测吻合良好。图 23 所示为球壳的破碎形态。



图 22 物质点法模拟三维聚能射流的构型图<sup>[52]</sup> Fig. 22 Configurations of the three-dimensional charged jet obtained by MPM<sup>[52]</sup>

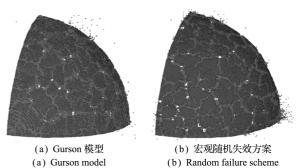


图 23 爆炸载荷作用下球壳破碎过程<sup>[54]</sup>

Fig. 23 Fragmentation process of the spherical shell under explosive loading [54] (grey represents fully damaged materials)

(灰色代表已完全损伤的材料)

与物质点法相比,有限差分法可以更好地模拟 爆轰波传播过程。将有限差分法和物质点法结合 起来,可以发挥两者各自的优势,是处理从起爆及 爆轰波传播到结构破坏全过程的有效方法。崔潇 骁等[28.29]将交替物质点有限差分法和耦合物质点 有限差分法成功用于爆炸全过程的模拟,包括空爆 下混凝土靶板和钢靶板的动态响应和损伤,其中炸 药起爆及结构在爆炸载荷下的响应等过程和区域 采用物质点法模拟,爆轰波传播等过程和区域采用 有限差分法模拟。

#### 4.4 流固耦合问题

流固耦合问题的难点在于界面处理。流体和固体区域性质差异很大,而在充液容器大幅晃动等问题中,还存在着自由液面破碎、卷曲和融合等强非线性过程。对于水体等近似不可压流体,通常可以采用两种方式进行模拟,一种是弱可压方案,通过引入压强和密度之间的状态方程近似实现不可压;另一种是不可压方案,即直接求解不可压流体方程。李金光等[16]基于弱可压方案的物质点法模拟了液滴撞击平板、水箱在摇摆和俯仰激励下的大幅晃动等流固耦合问题,计算结果均与实验结果吻合良好。

在许多流固耦合问题中,流体区域的变形通常

很大,而固体区域的变形往往较小,因此此类问题适合于用耦合物质点有限元法求解。廉艳平等<sup>[24]</sup>用弱可压物质点法模拟流体,用有限元法模拟弹性体,很好地模拟了水流冲击弹性挡板问题。陈镇鹏等<sup>[20]</sup>基于点-面接触算法改进了耦合物质点有限元法,允许流体区域和固体区域采用不同的离散尺寸。图 24 给出了由耦合物质点有限元法模拟得到的溃坝水流冲击弹性挡板过程的不同时刻构型。廉艳平等<sup>[55]</sup>利用物质点法和膜单元的耦合方法,模拟了球形水滴冲击薄膜、气体和薄膜相互作用等流固耦合问题。

为了保证近似不可压,弱可压方案所采用的声速往往很大,密度的微小扰动会带来压力的较大变化,有时会出现压力的严重振荡。声速过大还会导致过小的时间步长,严重影响计算效率。张帆等<sup>[17]</sup>基于算子分裂方案,提出了不可压物质点法,可以采用较大的时间步长,且压力场光滑;引入了局部水平集函数和表面张力模型,大幅提升了物质点法的自由液面处理精度。如图 25 所示为不可压物质点法模拟的液滴跌落深水池过程,得到的慢速射流(Worthington Jet)现象与实验一致。为了处理移动刚体和不规则边界问题,张雄等<sup>[56]</sup>将变分

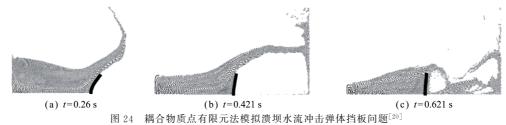


Fig. 24 Water column collapse on a flexible obstacle simulated by CFEMP<sup>[20]</sup>

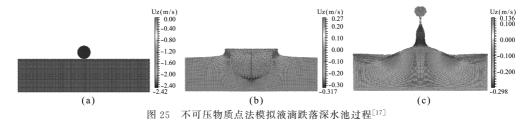
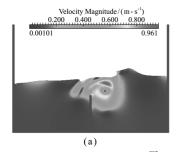
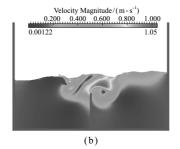


Fig. 25 Droplet impact simulated by incompressible material point method [17]





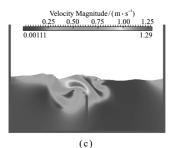


图 26 带有中间挡板的充液容器晃动过程速度场分布 Fig. 26 Velocity contour for tank sloshing with baffle

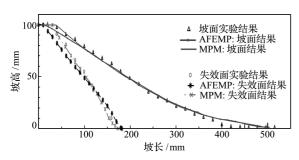


图 27 边坡失效问题结果对比[25]

Fig. 27 Result comparison of the slope failure problem<sup>[25]</sup>

形式的投影算法引入不可压物质点法,得到了体积加权的压力泊松方程,能很好地模拟运动刚性容器中的液体晃动问题。图 26 所示为水平激励下,带中间挡板的充液容器晃动过程中的速度场分布。

#### 4.5 其他大变形问题

边坡失效和材料切削加工也是典型的局部超 大变形问题,物质点法相比传统有限元法能更好地 模拟此类问题。黄鹏[12]将 Drucker-Prager 材料本 构引入物质点法,成功模拟了边坡失效和堆积物坍 塌等问题。物质点法和有限元法的模拟结果很接 近,但局部出现的超大变形使拉格朗日有限元法发 生了严重的网格畸变,导致时间步长大大降低,而 物质点法不存在网格畸变问题,计算效率远高于有 限元法。边坡失效和堆积物坍塌问题中,大部分区 域处于小变形乃至线弹性阶段,自适应物质点有限 元法非常适合模拟此类问题。图 27 是廉艳平 等[25]采用自适应物质点有限元法得到的砂土边坡 失效问题的计算结果,坡体初始用六面体单元离 散,随变形增大自动将可能畸变的单元转为物质点 继续进行计算。可以看出,自适应物质点法和标准 物质点法的失效面和坡面构型均与实验吻合良好, 但自适应物质点有限元法效率更高。在材料切削 方面, Ambati 等[57] 用物质点法模拟了金属切削过 程,王晓军[58]用物质点法模拟了氮化铝陶瓷的切 削过程,均取得了良好的效果。

# 5 结 论

物质点法综合了拉格朗日法和欧拉法的长处, 模拟物质大变形时不会出现网格畸变,且计算效率 很高,易于处理断裂现象和移动界面,因此非常适 于求解极端变形问题,本文详细总结了在极端变形 问题的物质点法理论与应用方面的工作。本文介 绍了物质点法的改进接触算法、网格自适应技术和 质点自适应分裂技术,这些算法和技术的发展大幅 提升了物质点法求解极端变形问题的精度和适用 性。不可压物质点法的提出,使得物质点法在求解液体流动和液固耦合方面具有更好的精度和效率。本文讨论了物质点法与有限元法、有限差分法及分子动力学方法的结合方法,这些方法充分发挥了物质点法与其他方法的独特优势,不仅明显提升了物质点法的精度和效率,也使得物质点法更适于爆轰问题和多尺度问题的分析。本文最后总结了物质点法在超高速碰撞、侵彻和流固耦合等典型极端变形问题中的应用,剖析了物质点法在模拟上述问题时的优势,显示出物质点法的巨大潜力。

综上可见,物质点法经过十余年的发展,已成为极端变形问题模拟分析的重要方法。未来工作应围绕多介质、多物理场、复杂材料及多种尺度进一步发展物质点法的算法理论,并与其他方法紧密结合,构建极端变形问题的新型高效且精准的数值模拟方法。

# 参考文献(References):

- [1] Benioff M R, Lazowska E D. Computational science: ensuring America's competitiveness[J]. President's Information Technology Advisory Committee, 2005, 52(9):594.
- [2] Harlow F H, A Machine Calculation Method for Hydrodynamic Problems [R]. Technical Report, LAMS-1956, Los Alamos Scientific Laboratory, 1955.
- [3] Harlow F H. The particle-in-cell computing method for fluid dynamics [J]. Methods in Computational Physics, 1964, 3(3):319-343.
- [4] Sulsky D, Chen Z, Schreyer H L. A particle method for history-dependent materials [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, 118(1):179-196.
- [5] Sulsky D, Zhou S J, Schreyer H L. Application of a particle-in-cell method to solid mechanics [J]. Computer Physics Communications, 1995, 87(1):236-252.
- [6] 张 雄,廉艳平,刘 岩,等.物质点法[M].北京:清华 大学出版社,2013. (ZHANG Xiong,LIAN Yan-ping, LIU Yan, et al. Material Point Method[M]. Beijing: Tsinghua University Press,2013. (in Chinese))
- [7] Zhang X, Chen Z, Liu Y. The Material Point Method ——A Continuum-Based Particle Method for Extreme Loading Cases [M]. Elsevier and Tsinghua University Press, 2016.
- [8] Ma S, Zhang X, Lian Y P, et al. Simulation of high explosive explosion using adaptive material point method[J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2009, 39(2):101-123.

- [9] York A R, Sulsky D, Schreyer H L. The material point method for simulation of thin membranes [J].

  International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 44(10):1429-1456.
- [10] Bardenhagen S G, Brackbill J U, Sulsky D. The material-point method for granular materials[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, 187(3):529-541.
- [11] Hu W, Chen Z. A multi-mesh MPM for simulating the meshing process of spur gears[J]. Computers & Structures, 2003, 81(20):1991-2002.
- [12] 黄 鹏. 金属及岩土冲击动力学问题的物质点法研究 [D]. 清华大学,2010. (HUANG Peng. Material Point Method for Metal and Soil Impact Dynamics Problems[D]. Tsinghua University,2010. (in Chinese))
- [13] Huang P, Zhang X, Ma S, et al. Contact algorithms for the material point method in impact and penetration simulation [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011, 85 (4): 498-517.
- [14] Ma Z T, Zhang X, Huang P. An object-oriented MPM framework for simulation of large deformation and contact of numerous grains [J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2010, 55(1):61-87.
- [15] 杨鹏飞. 局部化破坏问题的物质点法研究[D]. 清华 大学,2013. (YANG Peng-fei. Material Point Method for Localized Failure Problems[D]. Tsinghua University,2013. (in Chinese))
- [16] Li J G, Hamamoto Y, Liu Y, et al. Sloshing impact simulation with material point method and its experimental validations [J]. Computers & Fluids, 2014, 103:86-99.
- [17] Zhang F,Zhang X,Sze K Y, et al. Incompressible material point method for free surface flow[J]. *Journal of Computational Physics*[J]. 2017, 330:92-110.
- [18] Monaghan J J. Simulating free surface flows with SPH [J]. Journal of Computational Physics, 1994, 110(2):399-406.
- [19] Morris J P, Fox P J, Zhu Y. Modeling low reynolds number incompressible flows using SPH[J]. *Journal* of Computational Physics, 1997, 136(1):214-226.
- [20] Chen Z P, Qiu X M, Zhang X, et al. Improved coupling of finite element method with material point method based on a particle-to-surface contact algorithm[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2015, 293:1-19.
- [21] Chorin A J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations[J]. *Mathematics of Computation*, 1968, 22 (104):745-762.

- [22] Lo E Y M, Shao S D. Simulation of near-shore solitary wave mechanics by an incompressible SPH method [J]. Applied Ocean Research, 2002, 24(5):275-286.
- [23] Zhang X, Sze K Y, Ma S. An explicit material point finite element method for hyper-velocity impact[J].

  International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 66(4):689-706.
- [24] Lian Y P, Zhang X, Liu Y. Coupling of finite element method with material point method by local multimesh contact method [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200(47): 3482-3494.
- [25] Lian Y P,Zhang X,Liu Y. An adaptive finite element material point method and its application in extreme deformation problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2012, 241: 275-285.
- [26] Lian Y P, Zhang X, Liu Y. Coupling between finite element method and material point method for problems with extreme deformation [J]. Theoretical & Applied Mechanics Letters, 2012, 2(2):021003.
- [27] Lian Y P, Zhang X, Zhou X, et al. A FEMP method and its application in modeling dynamic response of reinforced concrete subjected to impact loading [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200(17):1659-1670.
- [28] Cui X X, Zhang X, Sze K Y, et al. An alternating finite difference material point method for numerical simulation of high explosive explosion problems[J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2013, 92(5):507-538.
- [29] Cui X X, Zhang X, Zhou X, et al. A coupled finite difference material point method and its application in explosion simulation [J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2014, 98(6):565-599.
- [30] He N F, Liu Y, Zhang X. Seamless coupling of molecular dynamics and material point method via smoothed molecular dynamics [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering. (under review).
- [31] 贺年丰. 基于光滑分子动力学方法的多尺度方法研究 [D]. 清华大学, 2016. (HE Nian-feng. Research on Multiscale Methods Based on Smoothed Molecular Dynamic [D]. Tsinghua University, 2016. (in Chinese))
- [32] Liu Y, Zhang X, Sze K Y, et al. Smoothed molecular dynamics for large step time integration[J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2007, 20(3): 176-191.

- [33] He N F, Liu Y, Zhang X. Molecular dynamics-smoothed molecular dynamics (MD-SMD) adaptive coupling method with seamless transition[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2016, 108(3):233-251.
- [34] 马 上,张 雄,邱信明. 超高速碰撞问题的三维物质点法[J]. 爆炸与冲击,2006,26(3):273-278. (MA Shang,ZHANG Xiong,QIU Xin-ming. Three dimensional material point method for hypervelocity impact [J]. Explosion and Shock Waves, 2006,26(3):273-278. (in Chinese))
- [35] 马 上. 超高速碰撞问题的三维物质点法模拟[D]. 清华大学,2005. (MA Shang. Material Point Method for 3D Hypervelocity Impact Simulation[D]. Tsinghua University,2005. (in Chinese))
- [36] 张庆明,黄风雷. 超高速碰撞动力学引论[M]. 北京: 科学出版社, 2000. (ZHANG Qing-ming, HUANG Feng-lei. Introduction to Dynamics of Hypervelocity Impact[M]. Beijing: Science Press, 2000. (in Chinese))
- [37] Huang P, Zhang X, Ma S, et al. Shared memory OpenMP parallelization of explicit MPM and its application to hypervelocity impact [J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2008, 38(2):119-147.
- [38] Liu P, Liu Y, Zhang X, et al. Investigation on high-velocity impact of micron particles using material point method [J]. International Journal of Impact Engineering, 2015, 75;241-254.
- [39] Gong W W, Liu Y, Zhang X, et al. Numerical investigation on dynamical response of aluminum foam subject to hypervelocity impact with material point method [J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2012, 83(5):527-545.
- [40] Liu Y, Gong W W, Zhang X. Numerical investigation of influences of porous density and strain-rate effect on dynamical responses of aluminum foam[J]. Computational Materials Science, 2014, 91:223-230.
- [41] Liu P, Liu Y, Zhang X. Internal-structure-model based simulation research of shielding properties of honeycomb sandwich panel subjected to high-velocity impact [J]. International Journal of Impact Engineering, 2015, 77:120-133.
- [42] Liu P, Liu Y, Zhang X. Improved shielding structure with double honeycomb cores for hyper-velocity impact [J]. Mechanics Research Communications, 2015, 69:34-39.
- [43] Liu P, Liu Y, Zhang X. Simulation of hyper-velocity impact on double honeycomb sandwich panel and its

- staggered improvement with internal-structure model [J]. International Journal of Mechanics and Materials in Design, 2016, 12(2):241-254.
- [44] Liu Y, Wang H K, Zhang X. A multiscale framework for high-velocity impact process with combined material point method and molecular dynamics [J]. International Journal of Mechanics and Materials in Design, 2013, 9(2):127-139.
- [45] Lian Y P,Zhang X,Zhang F,et al. Tied interface grid material point method for problems with localized extreme deformation [J]. International Journal of Impact Engineering, 2014, 70;50-61.
- [46] Lian Y P, Yang P F, Zhang X, et al. A mesh-grading material point method and its parallelization for problems with localized extreme deformation[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2015, 289:291-315.
- [47] 吴 博. 物质点法与壳单元的耦合及其在鸟撞问题中的应用[D]. 清华大学, 2016. (WU Bo. Coupling of MPM with Shell and Its Application in Bird Strike Simulation [D]. Tsinghua University, 2016. (in Chinese))
- [48] Zhou S Z, Zhang X, Ma H L. Numerical simulation of human head impact using the material point method [J]. International Journal of Computational Methods, 2013, 10(4):1350014.
- [49] 周双珍,张 雄,马红磊.利用物质点法研究不同头部模型对头部碰撞动态响应的影响[J]. 医用生物力学, 2013,28(2):142-147. (ZHOU Shuang-zhen, ZHANG Xiong, MA Hong-lei. Effects from different head models on dynamic responses of the head impact using material point method[J]. Journal of Medical Biomechanics, 2013,28(2):142-147. (in Chinese))
- [50] 周双珍,张 雄,马红磊.不同骨密度下人体脊柱着陆冲击响应的数值模拟[J]. 医用生物力学,2013,28 (6):591-595. (ZHOU Shuang-zhen, ZHANG Xiong, MA Hong-lei. Numerical simulation on response of human spine with different bone mineral density to landing impact [J]. Journal of medical Biomechanics,2013,28(6):591-595. (in Chinese))
- [51] Liu Y Z, Qiu X M, Zhang X, et al. Response of wood-pecker's head during pecking process simulated by material point method[J]. PloS ONE, 2015, 10(4): e0122677.
- [52] 马 上,张 雄.聚能装药射流形成的自适应物质点法模拟[J]. 固体力学学报,2009,30(5):504-508. (MA Shang, ZHANG Xiong. Adaptive material point method for shaped charge jet formation [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2009,30(5):504-508

(in Chinese))

- [53] Lian Y P, Zhang X, Zhou X, et al. Numerical simulation of explosively driven metal by material point method[J]. International Journal of Impact Engineering, 2011, 38(4):237-245.
- [54] Yang P F, Liu Y, Zhang X, et al. Simulation of fragmentation with material point method based on gurson model and random failure [J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2012, 85 (3): 207-236.
- [55] Lian Y P, Liu Y, Zhang X. Coupling of membrane element with material point method for fluid-membrane interaction problems[J]. International Journal of Mechanics and Materials in Design, 2014, 10(2): 199-211.
- [56]张 雄,张 帆.流固耦合不可压物质点法及其在晃

- 动问题中的应用[J]. 计算力学学报,2016,33(4):582-587. (ZHANG Xiong, ZHANG Fan. Fluid structure interaction incompressible material point method and its applications in sloshing problem[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2016, 33(4):582-587. (in Chinese))
- [57] Ambati R, Pan X F, Yuan H, et al. Application of material point method for cutting process simulations [J]. Computational Materials Science, 2011, 57:102-110.
- [58] 王晓军. 陶瓷和混凝土冲击问题的物质点法研究 [D]. 清华大学, 2012. (WANG Xiao-jun. Studies on Impact Problems of Ceramics and Concrete Based on Material Point Method [D]. Tsinghua University, 2012. (in Chinese))

# Recent progress of material point method for extreme deformation problems

ZHANG Xiong\*, LIU Yan, ZHANG Fan, CHEN Zhen-peng (School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: By employing both the Lagrangian and Eulerian descriptions, the material point method (MPM) discretizes a material domain into a set of particles (Lagrangian description) moving in a grid fixed in the space (Eulerian description). Thus, the MPM combines the advantages of both the Lagrangian methods and Eulerian methods, which makes MPM especially effective in modelling problems with extreme deformation such as impact and explosion problems. The research achievements of our group on MPM algorithms for impact, explosion, fluid-structure interaction and other problems with extreme deformation are systematically summarized in this paper. The three-dimensional parallel explicit simulation software MPM3D developed by our group is briefly introduced. The applications of MPM3D in hyper-velocity impact, perforation, explosion, slope failure, metal cutting, and fluid-structure interaction problems are described as well.

Key words: material point method; shock; explosion; hyper-velocity impact; fluid-structure interaction



特邀作者简介:张雄、清华大学航天航空学院教授、博士生导师,航空宇航工程系主任。现兼任中国力学学会理事及计算力学专业委员会委员、北京振动工程学会副理事长、《设计中的力学与材料国际杂志》副主编和多本国内外期刊编委、国际华人计算力学协会(ICACM)常务理事。

2004年入选教育部新世纪优秀人才支持计划,获教育部自然科学奖二等奖(2009)和一等奖(2008)、国防科学技术进步奖一等奖(2015)、钱令希计算力学奖成就奖(2016)、杜庆华工程计算方法奖(2015)、ICACM Computational Mechanics Award(2016)和 Fellows Award(2011)、北京市高等学校教学名师奖(2015)、北京市教育创新标兵(2003)、北京市高等教育教学成果奖二等奖(2004)等奖励,入选爱思唯尔 2015年中国高被引学者榜单。已出版专著4部、教材3部,发表期刊论文130余篇,一篇论文人选2012年度中国百篇最具影响国内学术论文。

主要从事计算力学基本理论、数值方法及其在科学与工程中的应用等方面的研究工作,尤其是强冲击载荷作用下材料与结构力学行为的多尺度、多种介质、多物理场耦合数值分析方法的研究。近年来以冲击爆炸等涉及特大变形的动力学问题为背景,对物质点法进行了系统研究和扩展,于2013年出版了国际上首部《物质点法》专著,并研发了三维显式并行物质点法数值仿真软件 MPM3D,可运行于 Windows、Linux 和 Mac OS 等多种平台上,已应用于超高速碰撞、侵彻、爆炸、边坡失效、金属切削和流固耦合等问题中。