

加权最小二乘无网格法¹⁾

张 雄 胡 炜 潘小飞 陆明万

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘要 在最小二乘法和移动最小二乘近似的基础上提出了加权最小二乘无网格法. 该方法除节点外又引入了一些辅助点, 控制方程在所有节点和辅助点处的残差用最小二乘法予以消除, 边界条件用罚函数法引入. 另外对移动最小二乘近似进行了改进, 并给出了最小二乘法中泛函的简化格式, 因而提高了计算效率. 与配点法相比, 新方法精度高, 稳定性好, 并且系数矩阵是对称正定矩阵. 与 Galerkin 法相比, 该方法不需要进行高斯积分, 因而计算量小. 算例表明该方法具有效率高、精度高和稳定性好等优点, 并且易于实现.

关键词 无网格法, 最小二乘法, 加权残量法

引 言

有限元法是目前在各领域中应用最为广泛且最为有效的数值方法, 但它在分析涉及特大变形的问题时遇到了一些困难, 同时复杂三维结构的网格生成也是很困难和费时的. 因此近年来兴起的无网格法受到了国际计算力学界的高度重视, 目前已提出了十余种无网格法^[1,2], 并已成功应用于高速碰撞^[3]、动态裂纹扩展^[4]、加工成型^[5]、节理岩体分析^[6]等许多领域中.

目前无网格法的最大缺点就是计算量大. 现有的无网格法基本上都是基于 Galerkin 法 (如 DEM, EFG^[7], RKPM, Hp-Clouds, PUM, MLPG 等) 和配点法 (SPH, Hp-meshless Clouds, FPM, RBF^[8]) 的. 所有基于 Galerkin 法的无网格法都需要进行数值积分, 其中 MLPG 利用各节点的子域进行积分, 而其它方法则需借助于背景网格进行积分. 与有限元法不同, 在无网格法中使用的近似函数都不是多项式, 因此需要使用高阶高斯积分, 计算量很大. 这类方法精度高, 且系数矩阵为对称的, 实现过程与有限元法类似, 因而目前在无网格法中主要使用 Galerkin 法. 基于配点法的无网格法不需要进行积分, 计算量小, 但这类方法精度低, 稳定性差, 并且系数矩阵是不对称的.

文献 [10] 在配点法的基础上, 提出了最小二乘配点法. 该方法除 N 个节点外又引入了 N_a 个辅助点, 控制方程要求在所有节点 (包括边界点) 和辅助

点处“满足”, 边界条件要求在相应的 N_b 个边界点处“满足”. 近似函数仍然只利用节点来构造, 因而引入辅助点并没有增加系统的未知数. 对二维系统而言, 共有 $2(N + N_a + N_b)$ 个方程, $2N$ 个未知数, 方程数大于未知数, 需要用最小二乘法来求解. 研究表明, 该方法的计算量远比基于 Galerkin 法的无网格方法小, 而精度和稳定性远比基于配点法的无网格法高. 该方法的缺点是系数矩阵是非对称的, 且方程数多于未知数, 需要用最小二乘法来求解.

本文直接使用最小二乘法来建立系统的变分原理, 并由此导出了一种新的高效无网格法——加权最小二乘无网格法. 与配点法相比, 本方法对控制方程的残差不仅在节点处予以消除, 而且在辅助点处也予以消除, 精度高、稳定性好, 并且系数矩阵也是对称的. 与 Galerkin 法相比, 本方法不需要进行高斯积分, 因而计算量小. 加权最小二乘无网格法的实现过程与有限元法完全相似, 易于程序实现.

1 移动最小二乘近似

本文采用移动最小二乘近似 (MLS)^[11] 构造近似函数, 即函数 $u(\mathbf{x})$ 在求解区域 Ω 内的近似函数 $u^h(\mathbf{x})$ 为

$$u(\mathbf{x}) \cong u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) \cdot a_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

其中 $p_i(\mathbf{x})$ 是基函数, m 是基函数的个数, $a_i(\mathbf{x})$ 是相应的系数. 基函数通常使用单项式, 也可使用其它函

2002-04-09 收到第一稿, 2002-11-15 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10172052) 与清华大学机械学院基础研究基金资助项目.

数,如三角函数,奇异函数等.对于二维二次基有 $\mathbf{p} = [1, x, y, x^2, xy, y^2]^T$, $\mathbf{a} = [a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \dots, a_6(\mathbf{x})]^T$.

式(1)中的系数根据加权最小二乘法来确定,即要求对函数 $u(\mathbf{x})$ 的近似在各节点处的误差的加权平方和

$$J = \sum_{I=1}^N w_I(\mathbf{x}) \cdot [u^h(\mathbf{x}_I) - u(\mathbf{x}_I)]^2 = \sum_{I=1}^N w_I(\mathbf{x}) \cdot \left[\sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}_I) \cdot a_i(\mathbf{x}) - u_I \right]^2 \quad (2)$$

取最小值.其中, $u_I = u(\mathbf{x}_I)$ 是函数 $u(\mathbf{x})$ 在节点 \mathbf{x}_I 处的值, $w_I(\mathbf{x})$ 是节点 \mathbf{x}_I 对应的权函数,并且它是以 \mathbf{x}_I 为中心的紧支函数.本文采用了高斯型权函数,即

$$w_I(\bar{r}) = \frac{e^{-\bar{r}^2 \beta^2} - e^{-\beta^2}}{1 - e^{-\beta^2}}, \quad \bar{r} \leq 1 \quad (3)$$

其中 $\bar{r} = r/d_{mI}$, d_{mI} 为权函数支撑域的半径, β 为常数.

令 J 取极小值,可得

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N w_I(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I)^T \quad (5)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [w_1(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w_2(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, w_N(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_N)] \quad (6)$$

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T \quad (7)$$

由式(4)解出 \mathbf{x} 点的系数向量 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, 并代入到式(1)中即可得到 $u(\mathbf{x})$ 的近似函数为

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{u} \quad (8)$$

其中形函数 $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$ 为

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})^T = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

式(8)即为MLS近似式.由于权函数具有紧支性,因此对于任一点 \mathbf{x} , 以上各式的计算只需对 \mathbf{x} 点的定义域内的节点(权函数 $w_I(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x} 处不为零的那些节点 \mathbf{x}_I) 进行.

为了计算形函数的导数,可以将式(9)改写为

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})^T = \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (10)$$

式中 $\mathbf{r}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})$, 即

$$\mathbf{A} \mathbf{r} = \mathbf{p} \quad (11)$$

由式(10)可以得到形函数的导数为

$$\left. \begin{aligned} \phi_{,i}^T &= \mathbf{r}_{,i}^T \cdot \mathbf{B} + \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{B}_{,i} \\ \phi_{,ij}^T &= \mathbf{r}_{,ij}^T \cdot \mathbf{B} + \mathbf{r}_{,i}^T \cdot \mathbf{B}_{,j} + \mathbf{r}_{,j}^T \cdot \mathbf{B}_{,i} + \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{B}_{,ij} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中 \mathbf{r} 的导数可由式(11)得到

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{,i} &= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{p}_{,i} - \mathbf{A}_{,i} \mathbf{r}) \\ \mathbf{r}_{,ij} &= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{p}_{,ij} - \mathbf{A}_{,i} \mathbf{r}_{,j} - \mathbf{A}_{,j} \mathbf{r}_{,i} - \mathbf{A}_{,ij} \mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

各节点的权函数都是紧支函数,因而在某计算点 \mathbf{x} 处的MLS近似只需利用对 \mathbf{x} 点有影响的节点 $\mathbf{x}_I (I = 1, 2, \dots, N)$ (即节点 \mathbf{x}_I 的权函数在 \mathbf{x} 点处不等于零,或者说该节点的支撑域半径大于它到 \mathbf{x} 点之间的距离)来构造.节点 \mathbf{x}_I 的支撑域一般为半径为 d_{mI} 圆形区域(二维问题)或球形区域(三维问题),因而计算点 \mathbf{x} 的定义域 $\Omega_{\mathbf{x}}$ 为半径分别为 d_{mI} , 圆心分别位于节点 \mathbf{x}_I 的 N 个圆形区域的并集^[9], 如图1所示.

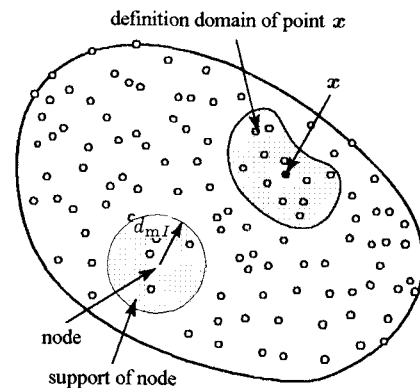


图1 计算点的定义域

Fig.1 Definition domain of an evaluation point

权函数一般在节点支撑域的边界处的值都很小,位于计算点 \mathbf{x} 的定义域边界附近的节点对式(2)中的泛函 J 的贡献很小,但却大幅度增加了计算量.另外,当计算点 \mathbf{x} 的定义域中节点数 n 大大地超过了MLS近似中基函数的项数 m 时,近似的精度也将会很差.因此在计算式(2)中的泛函 J 时,可以不计入计算点 \mathbf{x} 的定义域边界附近的节点.

本文中,各节点的支撑域半径取为距该节点最近的第 k 个节点的最大距离乘以系数 $scale$.本文需要计算形函数的二阶导数,因此采用了二次基, k

取为 12，scale 取为 2.0. 对计算点 \mathbf{x} 有影响的节点一般多于 12 个，本文只取距计算点 \mathbf{x} 最近的 12 个节点来构造其 MLS 近似函数，因此计算点的定义域 $\Omega\mathbf{x}$ 为这 12 个节点的支撑域 (相互覆盖的圆形区域) 的并集.

常数 k 决定了计算点的定义域中的节点总数，因而影响 MLS 近似的计算量. 系数 scale 决定了权函数的跨度，如图 2 所示. 图 2 中 u_i 表示函数 $u(\mathbf{x})$ 在节点 x_i 处的值， h 为节点的间距. 假定取 $k=4$ ，节点 x_1, x_6 和 x_7 的权函数当 $\text{scale}=2$ 时在计算点 \mathbf{x} 处不为零，但这些节点仍被排除在计算点 \mathbf{x} 的定义域之外，计算点 \mathbf{x} 的 MLS 近似函数只通过节点 x_2, x_3, x_4 和 x_5 来构造.

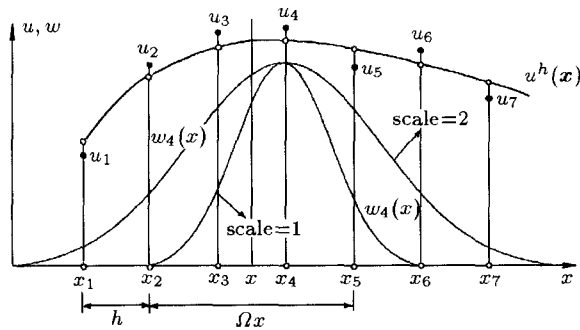


图 2 系数 scale 对 MLS 近似的影响

Fig.2 Effect of coefficient scale on MLS approximation

在计算 MLS 近似的形函数时涉及到系数矩阵 \mathbf{A} 的求逆，因此必须保证在所有计算点处矩阵 \mathbf{A} 都为非奇异的. 矩阵 \mathbf{A} 非奇异的必要条件是 \mathbf{x} 邻域内的节点数 n 必须大于基函数 $p_i(\mathbf{x})$ 的个数 m ，并且这些节点不能按特殊的方式排列，例如对线性基这些节点不能在一条直线上. 如果矩阵 \mathbf{A} 是奇异的，可以用对计算点 \mathbf{x} 有影响的其它节点来代替其定义域 $\Omega\mathbf{x}$ 中的第 k 个节点，直到 \mathbf{A} 成为非奇异的.

算例表明，本文对 MLS 的改进不但提高了 MLS 近似的计算效率，而且对大多数问题提高了 MLS 近似的精度.

2 加权最小二乘无网格法

下面以二维弹性静力问题为例，给出加权最小二乘无网格法的具体格式. 对其它问题可类似讨论. 弹性静力问题的基本方程为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_u \\ \mathbf{T}\mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_t \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中 Ω 为求解域， Γ_u 为位移边界， Γ_t 为力边界； $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 为待求位移场函数， $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ， $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ 和 $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$ 分别为定义在域内、位移边界上和力边界上的已知函数， \mathbf{B} 和 \mathbf{T} 为微分算子，即

$$\mathbf{B} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial y} & l \cdot \nu \frac{\partial}{\partial y} + m \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \\ m \cdot \nu \frac{\partial}{\partial x} + l \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial y} & m \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

式中 l, m 为边界外法线的方向余弦； E, ν 分别为弹性模量和泊松比.

求解式 (14) 的方法很多，目前在无网格方法中主要使用 Galerkin 法和配点法. 本文用加权最小二乘法 [12] 求解，其泛函为

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_{\Omega} [\mathbf{B}\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x})]^T \cdot [\mathbf{B}\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x})] d\Omega + \\ &\int_{\Gamma_u} \alpha [\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})]^T \cdot [\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})] d\Gamma + \\ &\int_{\Gamma_t} \beta [\mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x})]^T \cdot [\mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x})] d\Gamma \end{aligned} \quad (15)$$

式中 α 和 β 为罚函数. 类似于 Galerkin 法，式 (15) 需要进行积分，计算量很大. 为了避免使用积分，本文采用下式作为泛函

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_{i=1}^{N+N_a} [\mathbf{B}\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x})]_i^T \cdot [\mathbf{B}\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x})]_i + \\ &\sum_{j=1}^{N_u} \alpha [\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})]_j^T \cdot [\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})]_j + \\ &\sum_{k=1}^{N_t} \beta [\mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x})]_k^T \cdot [\mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x})]_k \end{aligned} \quad (16)$$

式中 N 为节点总数 (包括域内节点和边界节点)， N_a 为辅助点的总数， N_u 为位移边界上的节点总数， N_t 为力边界 (包括自由边界) 上的节点总数. 近似函数仅利用节点来构造，因此式 (16) 中的未知量总数仍为 $2N$ ，而辅助点只是用来消除方程的残

差的. 将 MLS 近似式 (8) 代入到式 (16) 中, 并由该泛函的极小值问题可以得到加权最小二乘无网格法的格式为

$$Ku = P \quad (17)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^{N+N_a} H^T H + \sum_{j=1}^{N_u} \alpha N^T N + \sum_{k=1}^{N_t} \beta Q^T Q \\ P &= - \sum_{i=1}^{N+N_a} H^T f + \sum_{j=1}^{N_u} \alpha N^T \bar{u} + \sum_{k=1}^{N_t} \beta Q^T \bar{t} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} N &= \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \cdots & \varphi_N & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & \cdots & 0 & \varphi_N \end{bmatrix} \\ H &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$Q = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} l \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + m \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & l\nu \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + m \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \\ m\nu \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + l \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & m \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + l \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (20)$$

由于 MLS 近似不具有插值特性, 即 $\varphi_i(x_j) \neq \delta_{ij}$, 因此未知数向量并不是系统的位移向量, 而只是一组未知参数, 或称为广义位移向量. 各节点的位移需要利用式 (8) 求解.

由式 (19) 可见, 矩阵 N 和 Q 的量级是不同的, 因此罚函数 α 和 β 也应该具有不同的量级. 本文取为 $\beta = 10^5, \alpha = \beta[E/(1-\nu^2)]^2$.

3 数值算例

为了对误差进行比较和分析, 这里使用了两种误差范数: 位移误差范数 L_u 和应力误差范数 L_σ ,

即

$$\left. \begin{aligned} L_u &= \sqrt{\frac{\sum_{I=1}^N (\mathbf{u}_I^h - \mathbf{u}_I)^T (\mathbf{u}_I^h - \mathbf{u}_I)}{\sum_{I=1}^N \mathbf{u}_I^T \mathbf{u}_I}} \times 100\% \\ L_\sigma &= \sqrt{\frac{\sum_{I=1}^N (\boldsymbol{\sigma}_I^h - \boldsymbol{\sigma}_I)^T (\boldsymbol{\sigma}_I^h - \boldsymbol{\sigma}_I)}{\sum_{I=1}^N \boldsymbol{\sigma}_I^T \boldsymbol{\sigma}_I}} \times 100\% \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中 \mathbf{u}_I^h 和 $\boldsymbol{\sigma}_I^h$ 为节点 I 处位移和应力的近似值, \mathbf{u}_I 和 $\boldsymbol{\sigma}_I$ 为节点 I 处位移和应力的精确值.

3.1 分片试验

在 2×2 的区域上进行分片试验 [7]. 与常应变状态所对应的位移场为

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 y, \quad v = b_0 + b_1 x + b_2 y \quad (22)$$

其中 a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 和 b_2 均为常数. 区域的所有边界点均按式 (22) 指定位移. 分片试验要求由无网格法计算得到的所有内部节点的位移与式 (22) 相一致, 并且所得应力和应变在区域内为常数. 本文分别对均匀和非均匀两种布点方案 (如图 3 所示) 进行了分析, 对每种布点方案都分别分析了有辅助点和没有辅助点两种情况. 辅助点的坐标分别为 (0.5, 0.5), (1.5, 0.5), (0.5, 1.5) 和 (1.5, 1.5). 计算结果表明, 本文的方法严格地通过了所有分片试验.

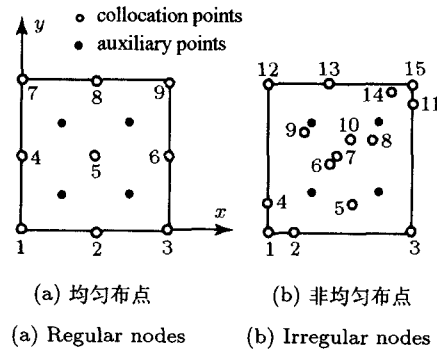


图 3 分片试验节点布置图

Fig.3 Nodal arrangements for patch test

图 3(b) 的节点坐标

Coordinates of nodes in Fig.3(b)

Node	2	4	5	6	7	8	9	10	11	13	14
x	0.3	0.0	1.2	0.8	0.9	1.4	0.5	1.1	2.0	0.8	1.6
y	0.0	0.2	0.4	0.9	1.0	1.2	1.3	1.2	1.8	2.0	1.9

3.2 悬臂梁

端部受集中载荷 P 作用的悬臂梁的解析解为

$$\left. \begin{aligned} u_x &= -\frac{P}{6EI} \left(y - \frac{D}{2} \right) \left[(6L - 3x)x + (2 + \nu)(y^2 - Dy) \right] \\ u_y &= \frac{P}{6EI} \left[3\nu \left(y - \frac{1}{2}D \right)^2 (L - x) + \frac{1}{4}(4 + 5\nu)D^2x + (3L - x)x^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y) &= -\frac{P}{I} (L - x) \left(y - \frac{1}{2}D \right) \\ \sigma_{yy}(x, y) &= 0 \\ \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{Py}{2I} (y - D) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

其中 $I = D^3/12$ 为转动惯量, E 为材料的弹性模量, ν 为泊松比. 计算模型所采用的悬臂梁为 $L = 12\text{m}$, $D = 2\text{m}$, $E = 10\,000\text{Pa}$, $\nu = 1/3$, $P = 6\text{N}$. 采用 5×31 布点方案, 共 159 个节点, 并引入了 120 个辅助点, 如图 4 所示. 悬臂梁的左端为指定位移边界, 上下表面为自由边界, 右端为指定面力边界. 权函数中常数 β 取为 3.

图 5 给出了悬臂梁上表面各点的垂向挠度, 图 6 给出了悬臂梁上表面正应力 σ_{xx} 分布. 由计算结果可以看出, 本文方法的计算精度远高于直接配点法.

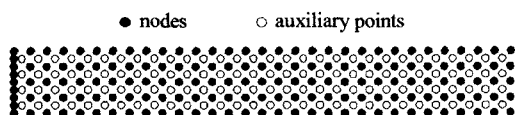


图 4 悬臂梁布点方案

Fig.4 Nodal arrangements of the cantilever beam

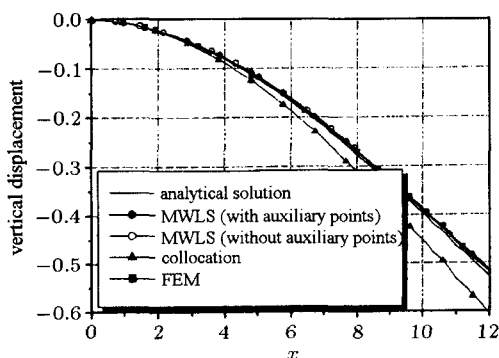


图 5 悬臂梁上表面各点的垂向挠度

Fig.5 Vertical displacement at points on the upper surface of the beam

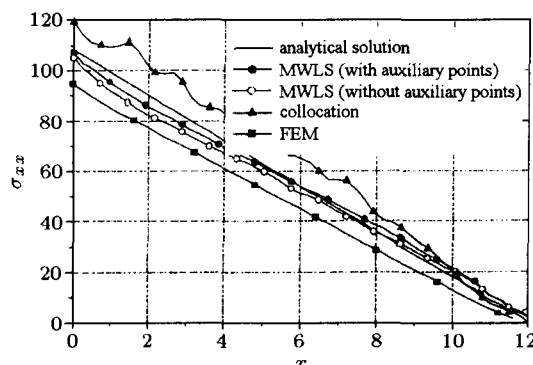


图 6 悬臂梁上表面正应力 σ_{xx} 分布

Fig.6 Stress σ_{xx} at points on the upper surface of the beam

3.3 开孔方板

具有中心圆孔的无限大方板在无穷远处承受水平均匀拉力 σ_0 的作用, 其解析解为

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{\sigma_0}{4G} \left\{ r \left[\frac{\kappa - 1}{2} + \cos 2\theta \right] + \frac{a^2}{r} \left[1 + (1 + \kappa) \cos 2\theta \right] - \frac{a^4}{r^3} \cos 2\theta \right\} \\ u_\theta &= \frac{\sigma_0}{4G} \left\{ (1 - \kappa) \frac{a^2}{r} - r - \frac{a^4}{r^3} \right\} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= \sigma_0 \left\{ 1 - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \right\} \\ \sigma_y(x, y) &= -\sigma_0 \left\{ \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \right) - \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \right\} \\ \tau_{xy}(x, y) &= -\sigma_0 \left\{ \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \sin 4\theta \right\} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

其中 $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$, $\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & (\text{平面应变}) \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & (\text{平面应力}) \end{cases}$, E

为材料的弹性模量, ν 为泊松比, (r, θ) 是相对于原点在圆孔中心的坐标系的极坐标, a 为中心圆孔的半径.

将坐标系原点取在圆孔中心, 由于结构的对称性, 仅取其中 1/4 进行分析, 如图 7 所示. 该板的对称面为指定位移边界, 上表面和右表面为指定面力边界. 材料参数取为 $E = 1000\text{Pa}$, $\nu = 1/3$. 计算中共使用了 81 个节点, 72 个辅助点, 权函数中常数 β 取为 2. 图 8 给出了 y 轴上各点的正应力 σ_{xx} 分布, 图 9 给出了 y 轴上各点的垂向位移分布. 同

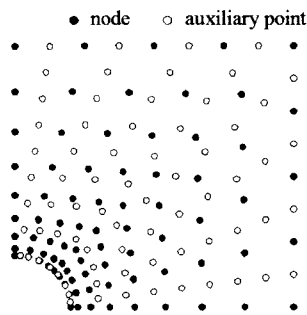
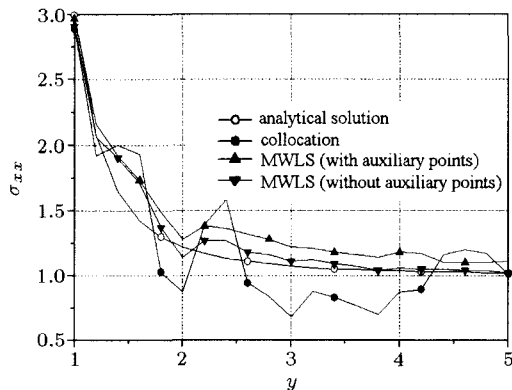
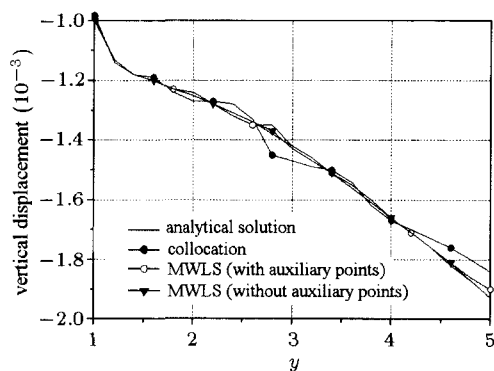


图7 开孔方板节点布置

Fig.7 Nodal arrangement of infinite plate

图8 y 轴上各点的正应力 σ_{xx} 分布Fig.8 Stress σ_{xx} at points along y axis图9 y 轴上各点的垂向位移分布Fig.9 Vertical displacement at points along y axis

样可以看出, 本文方法的精度远高于直接配点法.

4. 结束语

利用最小二乘法来构造无网格法, 提出了加权最小二乘无网格法. 与配点法相比, 本方法对控制

方程的残差不仅在节点处予以消除, 而且在辅助点处也予以消除, 精度较高, 并且系数矩阵也是对称的. 与 Galerkin 法相比, 本方法不需要进行高斯积分, 因而计算量小. 本文的方法具有效率高, 精度高的优点, 且其实现过程与有限元完全相似.

参 考 文 献

- 1 Belytschko T, Krongauz Y, et al. Meshless methods: An overview and recent developments. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 1996, 139(1-4): 3~47
- 2 宋康祖, 陆明万, 张雄. 固体力学中的无网格方法. *力学进展*, 2000, 30(1): 55~65 (Song Kangzu, Lu Mingwan, Zhang Xiong. Meshless methods for solid mechanics. *Advances in Mechanics*, 2000, 30(1): 55~65)
- 3 贝新源, 岳宗五. 三维 SPH 程序及其在斜高速碰撞问题的应用. *计算物理*, 1997, 14(2): 155~166 (Bei Xinyuan, Yue Zongwu. A study on 3 dimensional SPH. *Chinese Journal of Computational Physics*, 1997, 14(2): 155~166)
- 4 Sukumar N, Moran B, et al. An element-free Galerkin method for three-dimensional fracture mechanics. *Comput Mech*, 1997, 20(1-2): 170~175
- 5 Chen JS, Pan C, et al. A Lagrangian reproducing kernel particle method for metal forming analysis. *Comput Mech*, 1998, 22(3): 289~307
- 6 Zhang Xiong, Lu Mingwan, Wegner JL. A 2-D meshless model for jointed rock structures. *Int J Numer Meth Eng*, 2000, 47(10): 1649~1661
- 7 Belytschko T, Lu YY, et al. Element-free Galerkin methods. *Int J Numer Meth Eng*, 1994, 37(2): 229~256
- 8 Zhang Xiong, Song Kangzu, Lu Mingwan. Meshless method based on collocation with radial basis functions. *Comput Mech*, 2000, 26(4): 333~343
- 9 Mukherjee YX, Mukherjee S. On boundary conditions in the element-free Galerkin method. *Comput Mech*, 1997, 19(4): 264~270
- 10 Zhang Xiong, Liu Xiaohu, Song Kangzu, et al. Least-square collocation meshless method. *Int J Numer Meth Eng*, 2001, 51(9): 1089~1100
- 11 Lancaster P, Salkauskas K. Surfaces generated by moving least squares method. *Math Comput*, 1981, 37(155): 141~158
- 12 Zienkiewicz OC. *The Finite Element Method*, 3rd edition. New York: McGraw-Hill, 1977
- 13 Timoshenko SP, Goodier JN. *Theory of Elasticity*, 3rd edition. New York: McGraw-Hill, 1987

MESHLESS WEIGHTED LEAST-SQUARE METHOD¹⁾

Zhang Xiong Hu Wei Pan Xiaofei Lu Mingwan

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract Two methods of discretization, collocation method and Galerkin method, have been dominant in existing meshless methods. Although Galerkin method possesses several advantages, one of the major difficulties in the implementation of Galerkin based meshless method is how to evaluate integrals. In the Galerkin method, derivatives in domain integrals are lowered by using the divergence theorem to establish the weak form. The inaccuracy in integration will result in significant error in the solution. However, the shape functions in meshless method are very complex, so a large number of quadrature points must generally be used to integrate the weak form as accurate as possible. As a consequence, the Galerkin based meshless methods are much more expensive than FEM. In contrast, collocation based meshless methods are truly meshless methods, and are very efficient. However, equilibrium conditions are satisfied only at nodes within domain, even not at nodes on boundary, so significant error could be resulted in. These methods also suffer from instability.

Based on the weighted least-square method and the moving least-square approximation, a new efficient meshless method, Meshless Weighted Least-Square Method (MWLS), is developed. Except for nodes, a number of auxiliary points are used to eliminate the residual of governing equations in a weighted least-square sense. The trial functions are constructed by using the moving least-square approximation, and the boundary conditions are imposed by using the penalty method. The coefficient matrix obtained is symmetric and positive definite.

To investigate the accuracy of the proposed method, a patch test, a cantilerver beam and an infinite plate with a central circular hole are analyzed in detail. Numerical studies show that the new method possesses several advantages, such as high accuracy, high stability, and high efficiency.

Key words meshless, least-squares, weighted residual

Received 9 April 2002, revised 15 November 2002.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10172052) and Foundation of School of Mechanical Engineering, Tsinghua University.