

无网格法研究进展及其应用

张 雄*, 宋康祖, 陆明万

(清华大学 工程力学系, 北京 100084)

摘 要: 从加权残量法的角度出发, 系统地总结了现有各种无网格法的基本格式, 阐明了无网格法的特点, 论述了无网格法的研究进展, 给出了无网格法在碰撞、动态裂纹扩展、金属加工成型、流体力学以及其它领域中的应用。

关键词: 无网格法; 大变形; 高速碰撞; 断裂力学

中图分类号: O 242.21 **文献标识码:** A

1 引 言

有限元法是基于网格的数值方法, 它在分析涉及特大变形(如加工成型、高速碰撞、流固耦合)、奇异性或裂纹动态扩展等问题时遇到了许多困难。同时, 复杂三维结构的网格生成和重分也是相当困难和费时的。近年来, 无网格法得到了迅速发展, 受到了国际计算力学界的高度重视。不同于有限元法, 无网格法的近似函数是建立在一系列离散点上的, 不需要借助于网格, 克服了有限元法对网格的依赖性, 在涉及网格畸变、网格移动等问题中显示出明显的优势, 同时无网格法的前处理过程也比有限元法更为简单。

本文从加权残量法的角度出发, 系统地总结了现有各种无网格法的基本格式, 阐明了无网格法的特点, 论述了无网格法的研究进展, 给出了无网格法在碰撞、动态裂纹扩展、金属加工成型等领域中的应用。

2 无网格法的研究历史与现状

对无网格法的研究可以追溯到 20 世纪 70 年代对非规则网格有限差分法的研究^[1,2], 由于当时有限元法的巨大成功, 这类方法没有受到重视。1977 年 Lucy 和 Gingold 等分别提出了光滑质点流体动力学方法 (Smoothed Particle Hydrodynamics, 简称 SPH)^[3,4], 并且成功地应用于天体物理领域中。Johnson 等提出了归一化光滑

函数算法^[5], 提高了 SPH 法的精度, 并使其能够通过分片试验, 可以正确模拟常应变状态; Swegle、Dyka 和 Chen 等提出了 SPH 方法不稳定的起因及稳定化方案^[6-8]; Vignjevic 等提出了克服零能模式的具体方案^[9]; Monaghan 对 SPH 法进行了总结^[10]; SPH 法已被应用于水下爆炸仿真模拟^[11]、高速碰撞等材料动态响应的数值模拟^[12-14]等领域。近几年来, 我国的学者也开始关注 SPH 法, 张锁春对 SPH 方法进行了综述^[15], 贝新源等将 SPH 方法用于高速碰撞问题^[16]。

Nayroles 等于 1992 年将移动最小二乘近似^[17] (Moving Least Square, 简称 MLS) 引入 Galerkin 法中, 提出了散射元法 (Diffuse Element Method, 简称 DEM)^[18]。Belytschko 等对 DEM 进行了两点改进, 在计算形函数导数时保留了被 Nayroles 忽略掉的所有项, 并利用拉格朗日乘子法引入本质边界条件, 提出了无单元 Galerkin 法 (The Element-free Galerkin Method, 简称 EFG)^[19], 给出了误差估计^[20], 并成功地应用于动态裂纹扩展数值模拟^[24,29]和三维撞击分析^[38], 掀起了无网格法的研究热潮。这类方法比 SPH 方法计算费用高, 但具有较好的协调性及稳定性。Belytschko 等对 EFG 法中的数值积分方案以及近似函数的计算方法进行了深入研究^[21-23], 并将 EFG 方法用于动态裂纹扩展的数值模拟^[24-32], 克服了有限元方法在模拟裂纹扩展时需要不断进行网格重新划分的缺点; 用 MLS 可以较容易地构造具有 C^1 连续性的函数, 因此 Krysl 等将 EFG 用于板壳分析中^[33]; Liu 等将 EFG 和边界元法相耦合, 用于固体的应力分析^[34]; Belytschko 和 Hegen 等

收稿日期: 2001-12-26; 修改稿收到日期: 2002-03-25.

基金项目: 国家自然科学基金 (10172052); 清华大学机械学院基础研究基金资助项目.

作者简介: 张 雄* (1968-), 男, 副研究员, 工学博士.

将 EFG 方法和有限元方法耦合^[35,36], 以发挥各自的优势; Belytschko 和 Du 等将 EFG 用于三维撞击和流体晃动分析^[37-39]; Cordes 等将 EFG 方法用于相变问题的研究^[40]; 张雄等将 EFG 法的思想应用于节理岩体的分析中^[41]; 为了避免使用背景网格, Beissel 等提出了节点积分方案^[42], 但计算稳定性较差; Smolinski 等给出了 EFG 法显式时间积分方案并用于求解扩散问题^[44]; 周维垣等对 EFG 进行了详细介绍^[45], 并应用于裂纹扩展分析中^[46]; 张伟星等将 EFG 法应用于地基板的应力分析中^[47]; 庞作会等也对 EFG 法进行了介绍^[48], 并将其应用于边坡开挖问题中^[49]; 陈建等采用 EFG 法计算含边沿裂纹功能梯度材料板的应力强度因子^[50]。研究表明, EFG 法精度和收敛速度都高于有限元法, 而且没有体积锁死现象, 但 EFG 法计算量大, 并且需要借助于背景网格进行数值积分。

O nate 等利用移动最小二乘法来构造近似函数, 并采用配点格式进行离散, 提出了有限点法 (The Finite Point Method, 简称 FPM)^[51-53]。该方法不需要背景网格, 效率高, 主要应用于流体动力学领域。宋康祖等将其应用于弹塑性分析中^[54]。

L iu 等根据函数积分变换的思想, 基于 Galerkin 法提出了重构核点法 (Reproducing Kernel Particle Method, 简记为 RKPM)^[55,56], 并结合小波 (Wavelets) 的概念, 构造了多尺度重构核点法 (Multi Scale Reproducing Kernel Particle Method, 简记为 MRKPM)^[57-59]。MRKPM 利用小波函数的多尺度分析思想, 构造了一系列可同时伸缩和平移的窗函数, 实现了 RKPM 的自适应分析。应用 RKPM 法已对大量问题进行了数值分析, 如结构动力学^[60]、流体动力学^[61-63]、动态断裂和局部化^[64-65]、应力集中^[66]、大变形^[67-70]、金属加工成形^[71,72]、中厚梁板^[73]和微电子机械系统^[74]等。Ohs 用重构核函数近似和配点法, 提出了无网格配点法 (Meshless Point Collocation Method, 简称 PCM)^[75], 并用于分析压电元件。

Oden 等利用移动最小二乘法建立单位分解函数, 由此构造权函数和试函数, 再通过 Galerkin 法建立离散格式, 提出了 Hp 云团 (Clouds) 法^[77]。Oden 等对这种方法进行了严格的数学论证^[77]。Mendonca 等将该方法用于求解铁摩辛柯梁问题^[79], Garcia 等将其用于求解厚板的弯曲问题^[80], 刘欣等将其用于平面裂纹问题的自适应分析^[81]。

Oden 等又将有限元形函数作为单位分解函数, 提出了基于云团法的新型 Hp 有限元 (New Clouds-Based Hp FEM)^[82]。该方法需要借助于有限元网格, 破坏了“无网格”的部分特性, 但能很容易进行 H、p 和 Hp 自适应分析。Liszka 等改用配点格式, 避免了 Galerkin 格式中用于积分计算的背景网格, 提出了 Hp 无网格云团法 (Hp Meshless clouds Method)^[83]。

Babuska 等将单位分解法与有限元法相结合, 提出了单位分解有限元法^[84,85]和广义有限元法^[86,87]方法。该方法在标准有限元空间中加入一系列能够反映待求边值问题特性的函数 (如由角点附近精确解的局部渐进展开而得到的奇异函数), 并将这些特殊函数与单位分解函数相乘后和原有的有限元形函数一起构成了新的增广协调有限元空间。用该方法求解动态裂纹扩展问题时, 可以处理任意裂纹形状, 并且不需要重新划分网格^[88,89]。刘欣等将单位分解法用于求解奇异问题中^[90]。

Atluri 等提出了局部边界积分方程法 (Local Boundary Integral Equation Method, 简称 LBIE)^[91-93]和无网格局部 Petrov-Galerkin 法 (Meshless Local Petrov-Galerkin Method, 简称 MLPG)^[94-97]。这两种方法都是用移动最小二乘法建立场函数的近似, 用局部 Petrov-Galerkin 法建立无网格格式, 积分时不需要背景网格。LBIE 可以看成是 MLPG 的一种特殊情况, 它只需对区域边界用一些点来离散, 不需要对区域内部离散, 但需要进行奇异积分计算。Liu 等^[98]将 MLPG 和有限元及边界元相耦合, 充分发挥它们各自的优势。张见明等将用于杂交边界元的修正变分原理与移动最小二乘近似结合, 提出了杂交边界点法^[99,100], 其输入数据只是求解域边界上的离散点。

距离基函数 (Radial Basis Functions, 简称为 RBF) 具有形式简单、各向同性等优点, 数学界对其进行了大量的研究^[101-108]。张雄等将紧支距离函数应用于配点法中, 建立了相应的无网格方法^[110,111], 用于求解固体力学问题。虽然紧支距离函数具有许多优势, 但它们不能满足完备性条件, 甚至不能正确描述场应变状态。宋康祖等提出了满足完备性条件的紧支距离函数, 并建立了相应的配点型无网格格式^[112], 大幅度提高了计算精度。

基于 Galerkin 法的无网格法精度高, 但它需要进行数值积分, 不但计算量大, 而且要引入背景

网格。基于配点法的无网格法计算效率高,但其精度低,稳定性差。张雄等基于最小二乘法提出了最小二乘配点无网格法^[113]和加权最小二乘无网格法^[114],很好解决了这一问题。该类方法的计算精度远高于配点法,而计算量远小于 Galerkin 法,兼有 Galerkin 法和配点法的优点,是一种很有发展前途的无网格方法。

与有限元法不同,无网格法中使用的近似函数大都不具有插值特性,因此在基于 Galerkin 法的无网格法中处理本质边界条件具有一定的困难。Belytschko, Atluri, Mukherjee, Liu 和张雄等都对本质边界条件的处理进行了深入研究^[115-121],提出了直接配点法^[24, 117, 118]、拉格朗日乘子法^[19, 33]、修正变分原理^[117, 118]、罚函数法^[41, 94, 116]、与有限元耦合法^[115, 36]、容许近似法^[119]、达朗伯原理^[120]、修正配点法^[116]和位移约束方程法^[121]等方法。

3 无网格法的近似函数

目前在无网格法中使用的近似函数主要有:核函数近似、重构核近似、最小二乘近似、单位分解函数和径向基函数等。

3.1 移动最小二乘近似

在移动最小二乘(MLS)近似中,函数近似的形式为^[19]

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) \cdot a_i(x) = p^T(x) \cdot a(x) \quad (1)$$

其中 m 是基函数的个数, $p_i(x)$ 是基函数, $a_i(x)$ 是相应的系数,并且它们都是空间坐标的函数。通常使用单项式作为基函数,也可以使用任何其它函数,如奇异函数。

系数 $a_i(x)$ 是根据加权最小二乘法确定的,即要求误差泛函

$$J = \int_I w(x - x_I) \cdot [u^h(x, x_I) - u_I]^2 \quad (2)$$

取最小值,其中 u_I 为问题的真实解,权函数 $w(x - x_I)$ 具有紧支性,常用的核函数有指数函数、高斯函数、三次样条和四次样条函数等。它们的基本变量均为 $s = |x - y|$,因此紧支集为圆形或球形。记 $\bar{s} = s/s_{\max}$,其中 s_{\max} 是紧支子域的半径,则

$$\text{指数型: } w(\bar{s}) = e^{-\bar{s}/\omega}, \bar{s} \geq 1 \quad (3)$$

$$\text{高斯型: } w(\bar{s}) = (e^{-\bar{s}^2\beta^2} - e^{-\beta^2}) / (1 - e^{-\beta^2}), \bar{s} \geq 1 \quad (4)$$

三次样条:

$$w(\bar{s}) = \begin{cases} 2/3 - 4\bar{s}^2 + 4\bar{s}^3, & \bar{s} < 1/2 \\ 4/3 - 4\bar{s} + 4\bar{s}^2 - 4\bar{s}^3/3, & 1/2 \leq \bar{s} < 1 \end{cases} \quad (5)$$

四次样条:

$$\bar{s} w(\bar{s}) = 1 - 6\bar{s}^2 + 8\bar{s}^3 - 3\bar{s}^4, \bar{s} < 1 \quad (6)$$

其中指数型权函数的连续性是 C^{-1} ,因为它在 $\bar{s} = 1$ 处不连续,但是对于数值计算而言,它近似于 C^1 或更高的连续性。对于三次样条、四次样条,都具有 C^2 连续性。

根据式(2)可求得系数 $a_i(x)$,从而可建立 MLS 的近似式

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^N \phi_I(x) \cdot u_I \quad (7)$$

其中形函数 $\phi(x)$ 为

$$\phi(x) = [p(x)^T \cdot A^{-1}(x) \cdot B(x)]_I \quad (8)$$

式中

$$A(x) = \sum_{I=1}^N w_I(x) p(x_I) p(x_I)^T$$

$$B(x) = [w_1(x)p(x_1) \quad w_2(x)p(x_2) \quad \dots \quad w_N(x)p(x_N)] \quad (9)$$

这里系数 $a_i(x)$ 是空间坐标的函数,因此将这种方法称为移动最小二乘近似。

3.2 单位分解近似和 Hp 云团

单位分解法使用一些以节点 x_I 为中心、半径为 h_I 的子域 Ω_I ($\Omega_I = \{y \in R^n \mid |x_I - y| \leq h_I\}$) 来覆盖整个求解区域 $\Omega \in R^n$; $n = 1, 2$ 或 3 , 即 $\bigcup_{I=1}^N \Omega_I \supset \Omega$ 。在每个子域 Ω_I 上定义一个仅在该子域内非零的函数 $\phi_I(x)$,并且要求它们满足单位分解条件

$$\sum_I \phi_I(x) = 1 \quad (10)$$

函数集 $\{\phi_I(x)\}_{I=1}^N$ 称为属于开覆盖 $\{\Omega_I\}_{I=1}^N$ 的单位分解^[77, 84]。构造单位分解 $\{\phi_I(x)\}_{I=1}^N$ 的方法很多,MLS 的形函数、有限元形函数、Shepard 函数等都是单位分解函数。Duarte 等^[76, 77]将单位分解函数与多项式或其它函数系列(如奇异函数等)相乘,形成了 Hp 云函数(Hp clouds)。利用 Hp 云函数,函数 $u(x)$ 可以近似为



$$u^h(x) = \sum_l [\phi(x) \cdot u_l + \sum_{i=1}^m b_{il} \cdot \phi(x) \cdot q_i(x)] \quad (11)$$

其中 $q_i(x)$ 是选定的基函数, 一般使用单项式或勒让得多项式, 也可以是其它函数系列; 系数 u_l 和 b_{il} 是待解未知量。由式(11) 可看出, 在这类方法中一个节点所对应的未知量个数可以多于节点的自由度数, 因此可很容易实现 p 自适应分析。

3.3 核函数近似和重构核近似

核函数近似使用积分变换对函数 $u(x)$ 进行近似, 即

$$u^h(x) = \int_{\Omega} w(x-y, h) u(y) d\Omega, \quad (12)$$

其中 $u^h(x)$ 是 $u(x)$ 的近似函数, $w(x-y, h)$ 称为核函数或权函数, 它具有紧支性, h 是其紧支集尺寸的一个度量。核函数必须满足以下条件:

1. 半正定性, 即在紧支子域内满足 $w(x-y, h) \geq 0$;
2. 紧支性, 即在紧支子域外满足 $w(x-y, h) = 0$;
3. 规一性, 即 $\int_{\Omega} w(x-y, h) d\Omega = 1$;
4. $w(x-y, h)$ 是距离 $s = |x-y|$ 的单调递减函数;
5. 当 $h \rightarrow 0$ 时, $w(x-y, h) \rightarrow \delta(x-y)$, 这里 $\delta(s)$ 是 Dirac delta 函数。

其中条件(2) 使得近似是局部的, 即 $u^h(x)$ 仅仅取决于紧支子域包含 x 的那些结点。

常用的权函数形式参见 3.1 节, 它们的基本变量均为 $s = |x-y|$, 因此紧支集为圆形或球形。式(12) 的离散形式是

$$u^h(x) = \sum_{l=1}^N w(x-x_l) \cdot u_l \cdot \Delta V_l = \sum_{l=1}^N \phi_l(x) \cdot u_l \quad (13)$$

其中 ΔV_l 是关于结点 l 的某种区域度量, $u_l = u(x_l)$, $\phi_l(x) = w(x-x_l) \cdot \Delta V_l$ 为核函数近似的形函数。一般情况下 $u_l = u^h(x_l)$, 因此结点对应的参数 u_l 并不代表结点处的函数值。

重构核近似法又引入边界校正函数和多尺度分析, 精度与灵活性更好, 其函数近似式为

$$u^h(x) = \int_{\Omega} C(a_0, x, y) \cdot \phi\left(\frac{x-y}{a_0}\right) \cdot u(y) d\Omega, \quad (14)$$

所对应的离散格式为

$$u^h(x) = \sum_{l=1}^N \left[C(a_0, x, x_l) \cdot \phi\left(\frac{x-x_l}{a_0}\right) \cdot \Delta\Omega_l \right] u(x_l) \quad (15)$$

其中 $C(a_0, x, x_l)$ 为边界校正函数, $\phi((x-x_l)/a_0)$ 为含伸缩系数 a_0 的紧支核函数。引入边界校正函数是为了修正边界处位于积分区域外的权函数被忽略而导致的截断误差。利用紧支核函数 $\phi(x)$ 的可伸缩性, 多尺度 RKPM 法定义了一系列的核函数 $\phi_m(x)$

$$\begin{aligned} \phi_m(x) &= \phi(x/a_0), \quad \phi_m(x) = \phi\left(\frac{x}{2^m a_0}\right) \\ m &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

引入相应于这些核函数的小波函数 $\psi_m(x)$

$$\psi_{m+1}(x) = \phi_m(x) - \phi_{m+1}(x) \quad (17)$$

将式(17) 代入式(14) 并反复迭代, 则可以得到多尺度的分解格式, 即

$$\begin{aligned} u^h(x) &= u_0(x) && \text{第一阶分解} \\ &= w_1(x) + u_1(x) && \text{第二阶分解} \\ &= w_1(x) + w_2(x) + u_2(x) && \text{第三阶分解} \\ &= \dots \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$u_m(x) = \int_{\Omega} C(2^m a_0, x, y) \cdot \phi_m(x-y) \cdot u(y) d\Omega, \quad (19)$$

$$w_m(x) = \int_{\Omega} \psi_m(x-y) \cdot u(y) d\Omega, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \psi_m(x-y) &= C(2^{m-1} a_0, x, y) \cdot \phi_{m-1}(x-y) - \\ &C(2^m a_0, x, y) \cdot \phi_m(x-y) \end{aligned} \quad (21)$$

利用多尺度分解, 可实现多分辨率分析和自适应分析。对于高维问题, 各插值点的控制域 $\Delta\Omega$ 的计算存在较大的困难。

3.4 径向基函数

径向基函数 (Radial Basis Function, 简记为 RBF) 是一类以函数定义点到节点的距离为自变量的函数, 以每个离散节点 x_i 为中心定义一组径向基函数记为 $\phi_i(x-x_i)$, 则函数 $u(x)$ 可以近似为

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \cdot \phi(x-x_i) \quad (22)$$

其中 N 为节点总数, u_i 为待定系数. RBF 具有形式简单、空间维数无关、各向同性等适用于数值计算的优点, 受到计算数学界的关注^[101]. 目前已有多种定义在全域上的径向基函数可供选择, 如 MQ 函数^[109], 薄板样条函数、高斯分布函数等. 近年提出的紧支径向基函数^[104-108] 也具有系数矩阵稀疏、带状分布的特点, 有利于求解大型问题.

4 无网格法的离散原理——加权残量法

考虑弹性力学问题:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + b_i = 0 & \text{在域 } \Omega \text{ 内} \\ \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i & \text{在边界 } \Gamma_t \text{ 上} \\ u_i = \bar{u}_i & \text{在边界 } \Gamma_u \text{ 上} \end{cases} \quad (23)$$

其中 b_i 为体力矢量, n_j 为边界 Γ_t 的外法线单位矢量, \bar{t}_i 为 Γ_t 上的指定面力矢量, \bar{u}_i 为 Γ_u 上的指定位移矢量, σ_{ij} 为应力张量, u_i 为位移矢量. 用于求解控制方程 (23) 的加权残量方程为

$$\int_{\Omega} v_i \cdot (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \hat{v}_i \cdot (\sigma_{ij} n_j - \bar{t}_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \bar{v}_i \cdot (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma = 0 \quad (24)$$

式中 v_i , \hat{v}_i 和 \bar{v}_i 为权函数. 将前面讨论的近似函数 $u_i(x) = u_i^h(x)$ 代入加权残量方程 (24) 中, 并选用不同的权函数即可得到不同的无网格方法.

4.1 Galerkin 法

在 Galerkin 法中权函数和近似函数取自同一函数空间, 即式 (24) 中取 $v_i(x) = \sum_{l=1}^N \phi_l(x) v_{il}$, $\hat{v}_i(x) = -v_i(x)$, $\bar{v}_i(x) = 0$. Galerkin 法计算精度高, 但需要布置背景网格进行数值积分, 无网格近似函数一般不是多项式, 为了保证精度必须使用较高阶的高斯积分, 因而计算量很大.

4.2 配点法

在配点法中, 权函数取为 δ 函数, 即 $v_i = \delta(x - x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, 此时仅要求平衡方程在域内节点处严格满足, 边界条件在边界节点处严格满足. 由配点法导出的无网格法不需要背景网格, 是一种纯无网格方法, 且计算量小, 但其精度低, 稳定性差.

4.3 局部 Petrov-Galerkin 法

在局部 Petrov-Galerkin 法中, 要求方程的残差在一些子域内消除^[94, 95], 即

$$\int_{\Omega_s} (\sigma_{ij,j} + b_i) v_i d\Omega - \int_{\Gamma_{su}} (u_i - \bar{u}_i) v_i d\Gamma = 0 \quad (25)$$

式中 v_i 为权函数, α 是用于引入位移边界条件的罚函数, Γ_{su} 是子域 Ω_s 的边界 $\partial\Omega_s$ 上指定本质边界条件的部分, $\partial\Omega_s$ 上指定自然边界条件的部分称为 Γ_{st} , 其它部分称为 L_s , 即 $\partial\Omega_s = L_s \cup \Gamma_{su} \cup \Gamma_{st}$, $L_s = \partial\Omega_s - \Gamma_{su} - \Gamma_{st}$. 考虑到关系式 $\sigma_{ij,j} v_i = (\sigma_{ij} v_{i,j} - \sigma_{ij} v_{i,j})$, 并利用散度定理, 上式可写为

$$\int_{L_s} \sigma_{ij} n_j v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} \sigma_{ij} n_j v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{st}} \bar{t}_i v_i d\Gamma - \int_{\Omega_s} (\sigma_{ij} v_{i,j} - b_i v_i) d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_{su}} (u_i - \bar{u}_i) v_i d\Gamma = 0 \quad (26)$$

当某子域完全处于求解域内部时有 $\partial\Omega_s = L_s$, 上式中沿 Γ_{su} 和 Γ_{st} 的积分为零. 子域 Ω_s 一般取以节点为中心的球形 (三维问题) 或圆形 (二维问题) 区域.

与 Galerkin 法不同, Petrov-Galerkin 法的权函数和近似函数取自不同的函数空间. 为了简化上式, 可以取在 L_s 上等于零的权函数, 如在 MLS 中使用的权函数. 上式最终可写为

$$\int_{\Omega_s} \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{su}} u_i v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} \sigma_{ij} n_j v_i d\Gamma = \int_{\Gamma_{st}} \bar{t}_i v_i d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}} \bar{u}_i v_i d\Gamma + \int_{\Omega_s} b_i v_i d\Omega \quad (27)$$

局部 Petrov-Galerkin 法中积分是在每个规则子域 Ω_s 中进行的, 不需要引入背景网格, 是一种纯无网格方法.

4.4 最小二乘配点法

在配点法中, 控制方程只在所有域内节点处严格满足, 而没有在边界节点处和域内其它点处满足. 最小二乘配点无网格法^[113] 要求控制方程不但在所有节点处“满足”, 而且要在 N_a 个指定的辅助点处“满足”, 即权函数取为 $v_i = \delta(x - x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N + N_a$. 在该方法中, 方程数多于未知数, 需要用最小二乘法求解, 因此控制方程的残差实际上是在最小二乘意义上予以消除的. 为了保证解的精度, 边界条件必须在边界点处严格满足. 与配点法相比, 该方法大大提高了解的精度, 并且继承了配点法高效的优点.

4.5 加权最小二乘法

在加权最小二乘法^[114] 中, 方程和边界条件的

残差是在加权最小二乘意义上消除的, 权函数为 $v_i = \alpha(\sigma_{ij,j} + b_j)/\hat{u}_i, \hat{v}_i = \alpha\alpha(u_i - \hat{u}_i)/\hat{u}_i, \hat{v}_i = \beta\alpha(\sigma_{ijn_j} - \hat{t})/\hat{u}_i$, 其中 α 和 β 分别为用于施加位移边界条件和力边界条件的罚函数, 对弹性力学问题可取为 $\beta = 10^5, \alpha = \beta[E/(1 - \nu^2)]^2$ 。为了避免数值积分, 提高计算效率, 张雄等^[114] 用被积函数在一些离散点处值之和来代替式(24) 中的积分, 即

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \left[\sum_{i=1}^{N+N_a} (\sigma_{ij,j} + b_j)^2 + \sum_{i=1}^{N_t} \beta(\sigma_{ijn_j} - \hat{t})^2 + \sum_{i=1}^{N_u} \alpha(u_i - \hat{u}_i)^2 \right] = 0 \quad (28)$$

其中 N 为节点总数, N_a 为辅助点总数, N_t 为边界 Γ_t 上的节点数, N_u 为边界 Γ_u 上的节点数。

5 现有无网格方法小结

只要建立近似函数时不需要借助于网格, 不论是否需要背景网格计算积分, 这种方法都是无网格方法。目前已提出的无网格法有 10 余种, 它们都可以由加权残量法导出, 见表 1 所示。

建立近似函数时不借助网格, 基于函数逼近近似(而非插值)以及采用不同的形函数是无网格法与有限元法的主要区别。采用定义在离散节点上(通常具有紧支特性)的一组权函数和基函数来构造近似函数, 而不用定义在全域上的级数展开形式是无网格法与经典加权残量法的主要区别。无网格法具有以下优点:

1) 无网格法的近似函数没有网格依赖性, 减少了因网格畸变而引起的困难, 适用于处理高速碰撞、动态断裂、塑性流动、流固耦合等涉及大变形和

需要动态调整节点位置(网格)的各类应用问题。

2) 无网格法的基函数可以包含能够反映待求问题特性的函数系列, 适用于分析各类具有高梯度、奇异性等特殊性质的应用问题。

3) 采用紧支函数的无网格法和有限元法一样具有带状稀疏系数矩阵的特点。适用于求解大型科学与工程问题。

4) 无网格法的自适应很强。在 h 自适应分析中不需要重新划分网格, 且极易实现 p 自适应分析, 若引进小波函数还具有多尺度分析功能。

5) 无网格法的前处理只要节点位置信息, 不用网格信息, 比有限元法简单。

6) 无网格计算的结果是光滑连续的, 不必再进行应力光顺化等后处理。

无网格法才刚刚起步, 在严格的数学论证、计算效率、边界条件处理和大量应用实例等方面都还不能与成熟的有限元法相媲美, 更未形成有效的通用软件。另外, 用MLS 和RKPM 等建立无网格近似函数时, 涉及到对矩阵求逆, 计算量较大。与有限元法不同, 无网格法的近似函数大都不是多项式, 因而基于 Galerkin 法的无网格法(如 EFG、RKPM、MLPG 等)需要在每个背景网格中使用高阶高斯积分以保证计算精度, 因此无网格法的计算量一般大于有限元法。如何提高无网格法的计算效率也是近年来的研究热点。虽然无网格法还远不成熟, 但由于它不需要网格, 因此它在超高速碰撞、爆炸、裂纹扩展、金属加工成型等领域中具有广阔的发展前景。图 1 至图 4 给出了无网格法在超高速碰撞、裂纹扩展、金属加工成型等方面的应用实例。

表 1 主要无网格法小结

Tab. 1 Summary of existing meshless methods

名称	代表学者	近似方案	离散方案	背景网格
光滑质点流体动力学方法 (SPH) ^[3-16]	Lucy	核函数	配点法	无
散射单元法 (DEM) ^[18]	Nayroles	移动最小二乘	Galerkin 法	有
无单元伽辽金法 (EFG) ^[19-50]	Belytschko	移动最小二乘	Galerkin 法	有
有限点法 (FPM) ^[51-54]	Oñate	移动最小二乘	配点法	无
重构核粒子法 (RKPM) ^[55-74]	Liu	重构核近似	Galerkin 法	有
无网格配点法 (PCM) ^[75]	Aluru	重构核近似	配点法	无
Hp 云法 (Hp-Clouds) ^[76-82]	Oden	移动最小二乘	Galerkin 法	有
Hp 无网格云法 (Hp-Meshless Clouds) ^[83]	Liszka	移动最小二乘	配点法	无
单位分解法 (PUM) ^[84-90]	Babuska	单位分解	Galerkin 法	有
局部边界积分法 (LBIE) ^[91-93]	Atluri	移动最小二乘	Petrov-Galerkin 法	无
局部 Petrov-Galerkin 无网格法 (MLPG) ^[94-98]	Atluri	移动最小二乘	Petrov-Galerkin 法	无
紧支径向基函数无网格法 ^[110-112]	张雄等	紧支径向基函数	配点法	无
最小二乘配点无网格法 (LSC) ^[113]	张雄等	移动最小二乘	最小二乘配点法	无
加权最小二乘无网格法 (WLSM) ^[114]	张雄等	移动最小二乘	加权最小二乘法	无

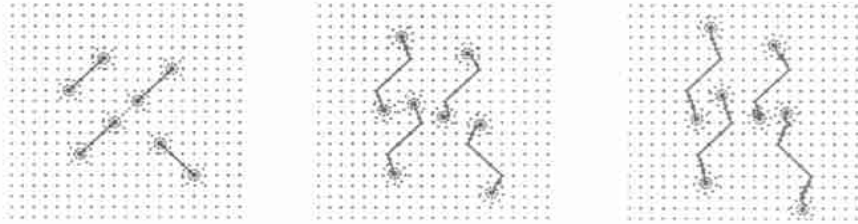


图1 在压力场作用下裂纹扩展过程^[7]
Fig.1 Crack propagation

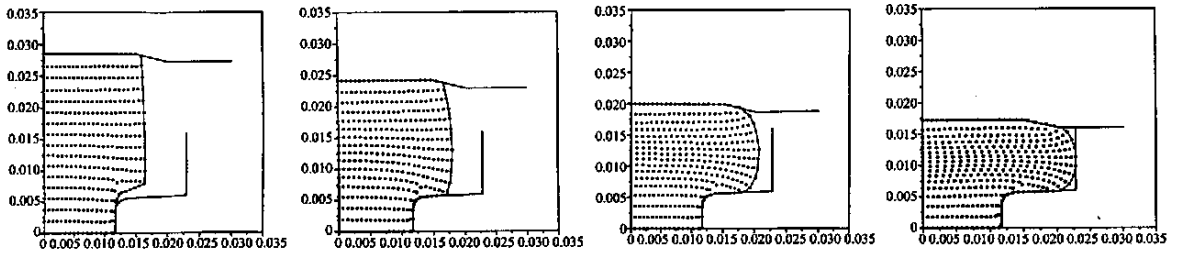


图2 金属加工成型过程分析^[11]
Fig.2 Metal forming analysis

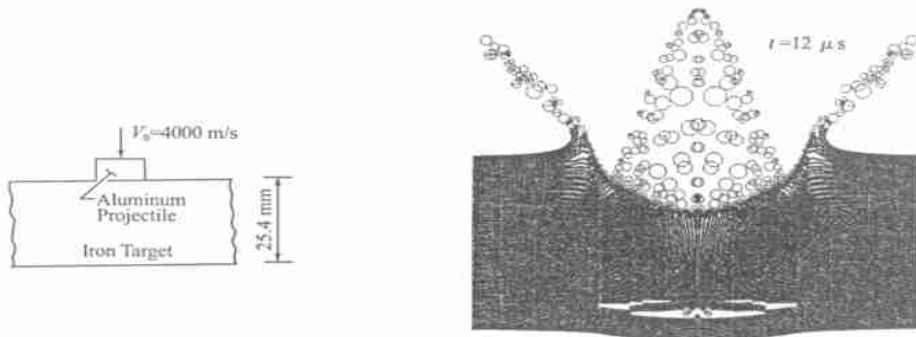


图3 超高速碰撞分析(撞击速度为4000 m/s)^[22]
Fig.3 High velocity impact analysis



图4 薄壁箱形梁在冲击载荷作用下的变形过程^[8]
Fig.4 Large deformation of thin shell structures

参考文献(References):

[1] Liszka T, Orkisz J. *Finite Difference Method for Arbitrary Irregular Meshes in Nonlinear Problems of Applied Mechanics* [M]. North-San Francisco, 1977.

[2] Perrone N, Kao R. A general finite difference method for arbitrary meshes [J]. *Comput Struct*, 1975, 5: 45-58.

[3] Lucy L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis [J]. *The Astron J*, 1977, 8(12): 1013-1024.

[4] Gingold R A, Moraghan J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and applications to non-

- spherical stars[J]. *Mon Not Roy Astron Soc*, 1977, **18**: 375-389.
- [5] Johnson G R, Beissel S R. Normalized smoothing functions for SPH impact computations[J]. *Int J Numer Meth Eng*, 1996, **39**: 2725-2741.
- [6] Swegle J W, Hicks D L, Attaway S W. Smoothed particle hydrodynamics stability analysis [J]. *J Comput Phys*, 1995, **116**: 123-134.
- [7] Dyka C T. Addressing tension instability in SPH methods [R]. Technical Report NRL MR/6384, NRL, 1994.
- [8] Chen J K, Beraun J E, Jih C J. An improvement for tensile instability in smoothed particle hydrodynamics [J]. *Comput Mech*, 1999, **23**: 279-287.
- [9] Vignjevic R, Campbell J, Libersky L. A treatment of zero-energy modes in the smoothed particle hydrodynamics method [J]. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2000, **184**: 67-85.
- [10] Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics [J]. *Annual Review Astronomy and Astrophysics*, 1992, **30**: 543-574.
- [11] Swegle J W, Attaway S W. On the feasibility of using smoothed particle hydrodynamics for underwater explosion calculations [J]. *Comput Mech*, 1995, **17**: 151-168.
- [12] Johnson G R, Stryk R A, Beissel S R. SPH for high velocity impact computations [J]. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1996, **139**: 347-373.
- [13] Libersky L D, Petschek A G, et al. High strain lagrangian hydrodynamics: A three-dimensional SPH code for dynamic material response [J]. *J Comput Phys*, 1993, **109**: 67-75.
- [14] Johnson G R, Beissel S R. Normalized smoothing functions for SPH impact computations [J]. *Int J Numer Methods Eng*, 1996, **39**: 2725-2741.
- [15] 张锁春. 光滑质点流体动力学 (SPH) 方法 (综述) [J]. *计算物理*, 1996, **13** (4): 385-397. (Zhang Suochun. Smoothed particle hydrodynamics (SPH) method (a review) [J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 1996, **13** (4): 385-397. (in Chinese))
- [16] 贝新源, 岳宗五. 三维 SPH 程序及其在斜高速碰撞问题的应用 [J]. *计算物理*, 1997, **14** (2): 155-166. (Bei Xinyuan, Ye Zongwu. A study on three dimensional SPH [J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 1997, **14** (2): 155-166. (in Chinese))
- [17] Lancaster P, Salkauskas K. Surfaces generated by moving least squares methods [J]. *Math Comput*, 1981, **37**(155): 141-158.
- [18] Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements [J]. *Comput Mech*, 1992, **10**: 307-318.
- [19] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element free Galerkin methods [J]. *Int J Numer Methods Eng*, 1994, **37**: 229-256.
- [20] Chung H J, Belytschko T. An error estimate in the EFG method [J]. *Comput Mech*, 1998, **21**: 91-100.
- [21] Dolbow J, Belytschko T. Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods [J]. *Comput Mech*, 1999, **23**: 219-230.
- [22] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Smoothing and accelerated computations in the element free Galerkin method [J]. *J Comput Appl Math*, 1996, **74**: 111-126.
- [23] Krongauz Y, Belytschko T. EFG approximation with discontinuous derivatives [J]. *Int J Numer Methods Eng*, 1998, **41**: 1215-1233.
- [24] Lu Y Y, Belytschko T, Tabbara M. Element-free Galerkin methods for wave propagation and dynamic fracture [J]. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1995, **126**: 131-153.
- [25] Belytschko T, Tabbara M. Dynamic fracture using element-free Galerkin methods [J]. *Int J Numer Methods Eng*, 1996, **39**: 923-938.
- [26] Belytschko T, Organ D, Gerlach C. Element-free Galerkin methods for dynamic fracture in concrete [J]. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2000, **187**: 385-399.
- [27] Belytschko T, Gu L, Lu Y Y. Fracture and crack growth by element free Galerkin methods [J]. *Model Simul Mater Sci Eng*, 1994, **115**: 277-286.
- [28] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Crack propagation by element-free Galerkin methods [J]. *Engng Fract Mech*, 1995, **51**: 295-315.
- [29] Belytschko T, Fleming M. Smoothing, enrichment and contact in the element-free Galerkin method [J]. *Comput Struct*, 1999, **71**: 173-195.
- [30] Xu Y, Saigal S. Element free galerkin study of steady quasi-static crack growth in plane strain tension in elastic-plastic materials [J]. *Comput Mech*, 1998, **22**: 255-265.

- [31] Rao B N, Rahman S. An efficient meshless method for fracture analysis of cracks[J]. *Comput Mech*, 2000, **26**: 398-408
- [32] Fleming M, Belytschko T. Enriched element: free galerkin methods for crack tip fields[J]. *Int J Numer Methods Engng*, 1997, **40**: 1483-1504
- [33] Krysl P, Belytschko T. A analysis of thin shells by element-free Galerkin method[J]. *Comput Mech*, 1995, **17**: 26-35
- [34] Liu G R, Gu Y T. Coupling of element free Galerkin and hybrid boundary element methods using modified variational formulation[J]. *Comput Mech*, 2000, **26**: 166-173
- [35] Belytschko T, Organ D, Krongauz Y. A coupled finite element-element free Galerkin method[J]. *Comput Mech*, 1995, **17**: 186-195
- [36] Hegen D. Element-free Galerkin methods in combination with finite element approaches[J]. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 1996, **135**: 143-166
- [37] Belytschko T, Krysl P, Krongauz Y. A three-dimensional explicit element-free galerkin method[J]. *Int J Numer Meth Fluids*, 1997, **24**: 1253-1270
- [38] Ponthot J P, Belytschko T. A arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation for element-free Galerkin method[J]. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 1998, **152**: 19-46
- [39] Du C. An element-free Galerkin method for simulation of stationary two-dimensional shallow water flows in rivers[J]. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 2000, **182**: 89-107.
- [40] Cordes L W, Moran B. Treatment of material discontinuity in the element-free Galerkin method[J]. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 1996, **139**: 75-89
- [41] Zhang X, Lu M W, Wegner J L. A 2-D meshless model for jointed rock structures[J]. *Int J Numer Methods Engng*, 2000, **47**(10): 1649-1661.
- [42] Beissel S, Belytschko T. Nodal integration of the element-free Galerkin method[J]. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 1996, **139**: 49-74
- [43] Organ D, Fleming M, Terry T. Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency[J]. *Comput Mech*, 1996, **18**: 225-235
- [44] Smolinski P, Palmer T. Procedures for multi-time step integration of element-free Galerkin methods for diffusion problems[J]. *Comput Struct*, 2000, **77**: 171-183
- [45] 周维垣, 寇晓东. 无单元法及其工程应用[J]. *力学学报*, 1998, **30**(2): 193-202 (Zhou Weiyuan, Kou Xiaodong. Element free method and its application in engineering[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1998, **30**(2): 193-202 (in Chinese))
- [46] 寇晓东, 周维垣. 应用无单元法近似计算拱坝开裂[J]. *水利学报*, 2000, (10): 28-35 (Kou Xiaodong, Zhou Weiyuan. The application of element free method to approximate calculation of arch dam crack propagation[J]. *Shuili Xuebao*, 2000(10): 28-35 (in Chinese))
- [47] 张伟星, 庞辉. 弹性地基板计算的无单元法[J]. *工程力学*, 2000, **17**(3): 138-144 (Zhang Weixing, Pang Hui. The element-free method for the bending problem of plates on elastic foundation [J]. *Engineering Mechanics*, 2000, **17**(3): 138-144 (in Chinese))
- [48] 庞作会, 葛修润, 等. 一种新的数值方法——无网格伽辽金法(EFGM)[J]. *计算力学学报* 1999, **16**(3): 320-329. (Pang Zuohui, Ge Xiurun, et al. A new numerical method-element free Galerkin method (EFGM) [J]. *Chinese Journal of Computation Mechanics*, 1999, **20**(1): 61-64 (in Chinese))
- [49] 庞作会, 葛修润, 等. 无网格伽辽金法(EFGM)在边坡开挖问题中的应用[J]. *岩土力学*, 1999, **20**(1): 61-64 (Pang Zuohui, Ge Xiurun, et al. Application of element free Galerkin method (EFGN) to the slope excavation [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 1999, **20**(1): 61-64 (in Chinese))
- [50] 陈建, 吴林志, 杜善义. 采用无单元法计算含边沿裂纹功能梯度材料板的应力强度因子[J]. *工程力学*, 2000, **17**(5): 139-144. (Chen Jian, Wu Linzhi, et al. Evaluating SIF of functionally graded plate with an edge crack by element free method [J]. *Engineering Mechanics*, 2000, **17**(5): 139-144 (in Chinese))
- [51] Onate E, Idelsohn S, Zienkiewicz O C, et al. A finite point method in computational mechanics: Applications to convective transport and fluid flow [J]. *Int J Numer Methods Engng*, 1996, **39**: 3839-3866
- [52] Onate E, Idelsohn S. A mesh-free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems [J]. *Comput Mech*, 1998, **21**: 283-

292

- [53] Onate E, Idelsohn S, Zienkiewicz O C, et al A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1996, **139**: 315-346
- [54] Song K Z, Zhang X, Lu W M. Meshless method based on collocation for elastoplastic analysis[A], Proceedings of Internal Conference on Computational Engineering & Science [C]. August 20-25, 2000, Los Angeles, U SA.
- [55] Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing Kernel Particle methods [J]. *Int J Numer Meth Fluids*, 1995, **20**: 1081-1106
- [56] Liu W K, Chen Y, Jun S, et al Overview and applications of the reproducing kernel particle methods[J]. *Archives of Computational Methods in Engineering, State of the Art Review*, 1996, **3**(1): 3-80
- [57] Liu W K, Chen Y, et al Generalized multiple scale reproducing kernel particle methods [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1996, **139**: 91-157.
- [58] Liu W K, Chen Y. Wavelet and multiple scale reproducing kernel method [J]. *Int J Numer Methods Fluids*, 1995, **21**: 901-931.
- [59] Liu W K, Chen Y, Chang C T, et al Advances in multiple scale kernel particle methods[J]. *Comput Mech*, 1996, **18**: 73-111.
- [60] Liu W K, Jun S, Li S F, et al Reproducing kernel particle methods for structural dynamics[J]. *Int J Numer Methods Engrg*, 1995, **38**: 1655-1679.
- [61] Liu W K, Jun S, et al Multiresolution reproducing kernel particle method for computational fluid dynamics[J]. *Int J Numer Methods Fluids*, 1997, **24**: 1391-1415
- [62] Günther F, Liu W K, et al Multi-scale meshfree parallel computations for viscous, compressible flows [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2000, **190**: 279-303
- [63] Wagner G J, Liu W K. Turbulence simulation and multiple scale subgrid models [J]. *Comput Mech*, 2000, **25**: 117-136
- [64] Liu W K, Hao S, et al Multiple scale meshfree methods for damage fracture and localization [J]. *Comput Mater Sci*, 1999, **16**: 197-205
- [65] Jun S, Im S. Multiple-scale meshfree adaptivity for the simulation of adiabatic shear band formation [J]. *Comput Mech*, 2000, **25**: 257-266
- [66] Lee S H, Kim H J, Jun S. Two scale meshfree method for the adaptivity of 3-D stress concentration problems [J]. *Comput Mech*, 2000, **26**: 376-387.
- [67] Chen J S, Pan C, Wu C T, et al Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1996, **139**: 195-227.
- [68] Chen J S, Yoon S, et al An improved reproducing kernel particle method for nearly incompressible finite elasticity [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2000, **181**: 117-145
- [69] Li S, Hao W, Liu W K. Numerical simulations of large deformation of thin shell structures using meshfree methods [J]. *Comput Mech*, 2000, **25**: 102-116
- [70] Chen J S, Wang H P, et al Some recent improvements in meshfree methods for incompressible finite elasticity boundary value problems with contact [J]. *Comput Mech*, 2000, **25**: 137-156
- [71] Chen J S, Pan C, et al A Lagrangian reproducing kernel particle method for metal forming analysis [J]. *Comput Mech*, 1998, **22**: 289-307.
- [72] Chen J S, Roque C M O L, et al Analysis of metal forming process based on meshless method [J]. *Journal of Materials Processing Technology*, 1998, **80-81**: 642-646
- [73] Donning B M, Liu W K. Meshless methods for shear-deformable beams and plates [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1998, **152**: 47-71.
- [74] Auru N R. A reproducing kernel particle method for meshless analysis of microelectromechanical systems [J]. *Comput Mech*, 1999, **23**: 324-338
- [75] Ohs R R, Auru N R. Meshless analysis of piezoelectric devices [J]. *Comput Mech*, 2001, **27**: 23-36
- [76] Duarte C A, Oden J T. Hp clouds: a meshless method to solve boundary-value problems [R]. Technical Report 95-05 Texas Institute for Computational and Applied Mathematics University of Texas at Austin, 1995
- [77] Duarte C A, Oden J T. Hp clouds: a hp meshless method [J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 1996, **12**: 673-705
- [78] Duarte C A, Oden J T. An hp adaptive method using clouds [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1996, **139**: 237-262

- [79] Mendonca P T R, Barcellos C S, Duarte A. Investigations on the hp-cloud method by solving Timoshenko beam problems [J]. *Comput Mech*, 2000, **25**: 286-295
- [80] Garcia O, Fancello E A, et al. hp-clouds in Mindlin's thick plate model [J]. *Int J Numer Methods Engng*, 2000, **47**(8): 1381-1400
- [81] 刘欣, 朱德懋, 陆明万, 张雄. 平面裂纹问题的h, p, hp型自适应无网格方法的研究[J]. *力学学报*, 2000, **32**(3): 308-318 (Liu Xin, Zhu Demao, et al. H, p, Hp adaptive meshless method for plane crack problem [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2000, **32**(3): 308-318 (in Chinese))
- [82] Oden J T, Duarte C A, Zienkiewicz O C. A new cloud-based hp finite element method [J]. *Int J Numer Methods Engng*, 1998, **50**: 160-170
- [83] Liszka T J, Duarte C, Tworzydło W W. Hp-meshless cloud method [J]. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 1996, **139**: 263-288
- [84] Melenk J M, Babuska I. The partition of unity finite element methods: Basic theory and application [J]. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 1996, **139**: 263-288
- [85] Babuska I, Melenk J M. The partition of unity methods [J]. *Int J Numer Methods Engng*, 1997, **40**: 727-758
- [86] Strouboulis T, Babuska I, Coppers K. The design and analysis of the generalized finite element method [J]. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 2000, **181**: 43-69
- [87] Duarte C A, Babuska I, Oden J T. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems [J]. *Comput Struct*, 2000, **77**: 215-232
- [88] Duarte C A, Hamzeh O N, et al. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation [J]. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 2001, **190**: 2227-2262
- [89] Dolbow J, Moes N, Belytschko T. Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2000, **36**(3): 235-260
- [90] Liu X, Lu M W, Zhang X. Numerical analysis of singular problems using the partition of unity method [A]. *European Conference on Computational Mechanics (ECCM '99)* [C]. München, Germany, 1999
- [91] Zhu T, Zhang J, Atluri S N. A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach [J]. *Comput Mech*, 1998, **21**: 223-235
- [92] Zhu T, Zhang J, Atluri S N. A meshless local boundary integral equation (LBIE) method for solving nonlinear problems [J]. *Comput Mech*, 1998, **22**: 174-186
- [93] Atluri S N, Sladek J, et al. The local boundary integral equation (LBIE) and its meshless implementation for linear elasticity [J]. *Comput Mech*, 2000, **25**: 180-198
- [94] Atluri S N, Zhu T. A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics [J]. *Comput Mech*, 1998, **22**: 117-127
- [95] Atluri S N, Zhu T. The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics [J]. *Comput Mech*, 2000, **25**: 169-179
- [96] Atluri S N, Cho J Y, Kim H G. Analysis of thin beams, using the meshless local Petrov-Galerkin method, with generalized moving least squares interpolations [J]. *Comput Mech*, 1999, **24**: 334-347
- [97] Atluri S N, Kim H G, et al. A critical assessment of the truly Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG), and Local Boundary Integral Equation (LBIE) methods [J]. *Comput Mech*, 1999, **24**: 348-372
- [98] Liu G R, Gu Y T. Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method in combination with finite element and boundary element approaches [J]. *Comput Mech*, 2000, **26**: 536-546
- [99] Zhang J M, Yao Z H. A new regular meshless hybrid boundary method [A]. *Proceedings of the First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics* [C]. Elsevier, 2001
- [100] 张见明, 姚振汉. 一种新型无网格法——杂交边界点法 [A]. *广州: 中国计算力学大会 '2001 会议论文集* [C]. 2001: 339-343 (Zhang Jianming, Yao Zhenhan. A new meshless method-hybrid boundary point method [A]. *Proceedings of Chinese Conference on Computational Mechanics '2001 Guangzhou* [C]. 2001: 339-343 (in Chinese))
- [101] Powell M D J. *The Theory of Radial Basis Function Approximation in 1990* [M]. *Advances in Numerical Analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1992, **2**: 105-210
- [102] Wu Z, Schaback R. Local error estimates for radial basis function interpolation of scattered data [J].

- IMA Journal of Numerical Analysis*, 1993, **13**: 13-27.
- [103] Buhmann M D. Multivariable interpolation using radial basis functions [D]. University of Cambridge, 1989.
- [104] Wu Z M. Compactly supported positive definite radial functions [J]. *Adv Comput Math*, 1995, **4**: 283-292.
- [105] Wu Z M. Compactly supported positive definite radial functions [J]. *Adv Comput Math*, 1995, **4**: 283-292.
- [106] Wendland H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degrees [J]. *Adv Comput Math*, 1995, **4**: 389-396.
- [107] Buhmann M D. Radial functions on compact support [A]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society [C]. 1998, **41**: 3-46.
- [108] Sun X. Conditional positive definite functions and their application to multivariate interpolations [J]. *Journal of Approximation Theory*, 1993, **74**: 159-180.
- [109] Hon Y C, Lu M W, Xue W M, et al. Multiquadric method for the numerical solution of a biphasic model [J]. *Appl Math Comput*, 1997, **88**: 153-175.
- [110] Zhang X, Song K Z, Lu M W. Meshless methods based on collocation with radial basis function [J]. *Comput Math*, 2000, **26**(4): 333-343.
- [111] Zhang X, Song K Z, Lu M W. Hermite type collocation with radial basis functions [A]. Proceedings of Internal Conference on Computational Engineering & Science [C]. Los Angeles, USA, August, 2000: 20-25.
- [112] Song K Z, Zhang X, Lu M W. Collocation with Modified Compactly Supported Radial Basis Functions [A]. Proceedings of International Conference on Computational Engineering & Sciences [C]. Puerto Vallarta, 2001: 19-25.
- [113] Zhang X, Liu X H, Song K Z, et al. Least-square collocation meshless method [J]. *Int J Numer Methods Engng*, 2001, **51**(9): 1089-1100.
- [114] 张 雄, 胡 炜, 潘小飞, 等. 加权最小二乘无网格法 [A]. 广州: 中国计算力学大会 '2001 论文集 [C]. 2001, 333-338 (Zhang Xiong, Hu Wei, Pan Xiaofei, et al. Weighted Least-square meshless methods [A]. Proceedings of Chinese Conference on Computational Mechanics '2001 Guangzhou [C]. 2001: 333-338 (in Chinese)).
- [115] Krongauz Y, Belytschko T. Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements [J]. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 1996, **131**: 133-145.
- [116] Zhu T, Atluri S N. A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method [J]. *Comput Math*, 1998, **21**: 211-222.
- [117] Lu Y Y, Belytschko T, et al. A new implementation of the element free Galerkin method [J]. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 1994, **113**: 397-414.
- [118] Mukherjee Y X, Mukherjee S. On boundary conditions in the element free Galerkin method [J]. *Comput Math*, 1997, **19**: 267-270.
- [119] Gosz J, Liu W K. Admissible approximations for essential boundary conditions in the reproducing kernel particle method [J]. *Comput Math*, 1996, **19**: 120-135.
- [120] Günther F C, Liu W K. Implementation of boundary conditions for meshless methods [J]. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 1998, **163**: 205-230.
- [121] Zhang X, Liu X, Lu M W, et al. Imposition of essential boundary conditions by displacement constraint equations in meshless methods [J]. *Comput Methods Engng*, 2001, **17**(3): 165-178.
- [122] Johnson G R, Beissel S R, Stryker R A. A generalized particle algorithm for high velocity impact computations [J]. *Comput Math*, 2000, **25**: 245-256.
- [123] 宋康祖. 紧支函数无网格方法研究 [D]. 北京: 清华大学, 2000 (Song Kangzu. Compactly Supported Functions and Meshless Method [D]. Beijing: Tsinghua University, 2000).

Research progress and application of meshless method

Zhang Xiong*, Song Kangzu, Lu Mingwan

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The finite element method (FEM) has been the most frequently used and the most powerful numerical method in engineering during the past thirty years. However, the lack of robust and efficient 3D mesh generators makes the solution of 3D problems a difficult task. Furthermore, mesh-based methods are also not well suited to the problems associated with extremely large deformation and problems associated with frequently remeshing. To avoid these drawbacks of the FEM, considerable effort has been devoted during recent years to the development of the meshless method, and more than 10 different meshless methods have been developed. In this paper, the basic formulations of meshless methods are first summarized from the weighted residual method point of view, and then compared with FEM, classical weighted residual method and finite difference to show their characteristics. The research progress in meshless methods is discussed in detail, and their applications to impact, dynamic fracture, metal forming and fluid flow are given.

Key words: meshless method; large deformation; impact; dynamic fracture