

板壳问题的三维无网格伽辽金直接分析法

张伟, 张雄*, 陆明万

(清华大学 工程力学系, 北京 100084)

摘要: 对于板壳问题, 共有三种数值模拟方案: 线性或非线性的板壳理论、退化连续体方案和直接三维连续体方案。无网格法近似函数可具有 C_1 甚至更高的连续性, 便于在 Kirchhoff-Love 理论中应用。但当各种无网格法用于 Mindlin-Reissner 板理论时, 会遇到数值锁死的困扰。对比之下, 三维连续体方案是最简单、最精确但并不常用的一种方案。无网格法近似函数具有高度光滑性, 在板壳的厚度方向仅布置 2~5 层点就可以很好地捕捉此方向场的梯度, 同时还可以在一定的参数范围内避免剪切和体积锁死, 在处理复杂本构关系、非线性板壳等问题中更是有很大优势。本文采用无网格伽辽金法 (EFG) 和三维连续体方案分析了线性板壳问题, 与有限单元法做了对比, 并讨论了数值锁死等问题。

关键词: 无网格法; 无网格伽辽金法; 板壳; 三维连续体方案; 数值锁死

中图分类号: O34 **文献标识码:** A

1 引言

近年来, 对建立大型、轻重量的板壳及空间结构的需求逐渐增大, 例如汽车中的金属薄板, 飞机的机舱、机翼和风向舵, 能量池, 展览厅的圆形屋顶, 充气膨胀的空间结构等。梁、板壳结构的数值模拟主要有三种方案: 线性或非线性的板壳理论、退化连续体或者称作基于连续体的方案和直接三维连续体方案。这三种方案在有限单元法中都得到了很大的发展, 各有优缺点。

广泛应用的梁、板壳理论有两种: Euler-Bernoulli 梁理论 (Kirchhoff-Love 壳理论) 和 Timoshenko 梁理论 (Mindlin-Reissner 壳理论)。Euler-Bernoulli 梁理论假设中性线的法平面在变形后保持为平面且仍垂直于中性线, 这要求在单元交界面上必须保持 w 及其一阶导数的连续性, 即要求插值函数具有 C_1 连续性。因为在多维空间中 C_1 近似是很难构造的, 所以这种要求是 Euler-Bernoulli 和 Kirchhoff-Love 理论的最大缺陷。由于无网格法近似函数具有高度光滑的特点^[1], 很容易实现 C_1 甚至更高的连续性, 所以迅速成为很理想的解决 Kirchhoff 板壳问题的方法, 已有大量学者把各种无网格法用于此理论中。

Timoshenko 梁 (板壳) 理论假设法平面在变

形后仍保持平面, 并且在平面内没有变形。在有限元方法中, 位移和转动是独立的场函数, 即板壳单元是 C_0 型单元。表达格式相当简单, 基本和平面应力单元表达格式类似。但在梁、板壳变得很薄时, 可能会出现剪切锁死; 对于曲梁和壳问题则还有薄膜锁死的问题。有限元法中往往借助于假设应变、杂交元、选择或者减缩积分等手段来解决锁死问题。然而这些方法在较为粗糙的网格上往往精度很差, 而且十分繁琐。无网格法在求解 Mindlin 板壳问题时也会遇到类似困难, 却是通过提高基函数的阶次或者加大影响域大小来缓解甚至完全消除锁死, 例如为了消除锁死, 在 MLS 近似中一般可以选择四次完全基^[2,3], 或者双三次基^[3], 但这样往往会使得计算费用大幅度增加。另一种消除锁死的方法是 Donning^[4] 提出的, 称作匹配近似函数。它不像以前那样转角与横向挠度是相互独立地构造近似函数, 而是改为转角基于挠度的梯度构造近似场函数。

基于连续体 (CB) 方法又称退化连续体方案, 在 Belytschko 的著作“连续体和结构的非线性有限元”^[5]中做了详尽的总结和细致的讨论。处理非线性问题时, 相对于普通的板壳理论, 它直观和简单的多, 而且能得到很好的解答。然而对于非弹性壳的非线性大变形问题, CB 法也很繁琐。它的不足的根本原因在于剪切锁死和薄膜锁死的缺陷。同时, 在 CB 法中引入复杂的本构关系也是相当麻烦的事情。

在这三种方案中, 直接 3D 连续体方案是最简

收稿日期: 2004-04-26; 修改稿收到日期: 2004-09-15.

基金项目: 国家自然科学基金 (10172052) 资助项目.

作者简介: 张伟 (1980-), 男, 硕士;

张雄* (1966-), 男, 博士, 教授.

单也最精确的。尽管如此,它同时也是最不常用的一种。因为在有限元方法中,对于薄板壳结构采用低阶单元则必须在厚度方向布置多层点才能获得合理的梯度场,这使得离散系统过于僵硬,降低了离散系统的条件数,从而降低了求解场的精度。直接 3D 方法的另外一个问题是费时相对较高,比板壳理论或者退化连续体方案需要更多的单元(大约 3~5 倍)。而 Li 等^[6]利用无网格法近似函数的高度光滑性,发现在板壳的厚度方向仅布置 2~5 层点就可以很好地捕捉此方向场的梯度,而且同时还可以在一定的参数范围内避免剪切和体积锁死,他成功地用 RKPM 法和直接三维连续体方案处理了薄板壳问题的非线性大变形问题。

第三种方案是一种很有前途的处理板壳问题的思路。它很好地利用了无网格法近似函数光滑度好的特点,形式简单,精度高。而且由于光滑性好,可以较少的点获得足够的精度,部分消除了有限单元法三维连续体方案求解板壳问题计算费用高的缺点。本文采用 EFG 方法和直接三维连续体方案对板壳问题进行了一些研究和对比,并得出了一些有用的结论。

2 无网格伽辽金法(EFG)

无网格伽辽金法(EFG)是由 Belytschko^[7]于 1994 年提出的一种无网格方法,从此掀起了无网格法的研究热潮。它的近似函数建立在一系列离散点上,不需要背景网格,克服了有限单元法对于网格的依赖性。

EFG 方法与有限元不同之处在于它采用了移动最小二乘近似(MLS)构造近似函数,即函数 $u(x)$ 在求解区域 Ω 内的近似函数 $u^h(x)$ 为

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) \cdot a_i(x) = p^T(x) a(x) \quad (1)$$

其中 $p_i(x)$ 是基函数, m 是基函数的个数, $a_i(x)$ 是相应的系数。基函数通常使用单项式,也可以使用其他函数。对于三维二次基 $p = [1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz]^T$ 。

式(1)中的系数可根据加权最小二乘法来确定,即要求对函数 $u(x)$ 的近似在各点的误差的加权平方和

$$J = \sum_{l=1}^N w_l(x) [u^h(x_l) - u(x_l)]^2 = \sum_{l=1}^N w_l(x) \cdot \left[\sum_{i=1}^m p_i(x) \cdot a_i(x) - u_l \right]^2$$

取最小值。其中 $u_l = u(x_l)$ 是函数 $u(x)$ 在节点 x_l 对应的权函数,并且它是以 x_l 为中心的紧支函数。权函数有很多种取法,本文采用了四次样条函数,即:

$$w(s) = \begin{cases} 1 - 6s^2 + 8s^3 - 3s^4 & |s| \leq 1 \\ 0 & |s| > 1 \end{cases} \quad (2)$$

很容易验证,四次样条形式简洁且在边界具有 C_2 的连续性,本文后面的算例都采用了四次样条函数作为权函数。

由 J 的极值条件可得到系数 $a_i(x)$ 为

$$a(x) = A^{-1}(x) B(x) u \quad (3)$$

其中 $A = P^T W(x) P, B = P^T W(x)$

将式(3)代入式(1)中,可得近似函数为

$$u^h(x) = \sum_{l=1}^N \phi_l(x) u_l \quad (4)$$

式中 ϕ 为形函数。从函数的表达式可以看出,形函数的连续阶次 n 由基函数和权函数决定。如基函数的完备阶次为 k , 权函数的连续阶次为 l , 则 $n = \min(k, l)$ 。例如采用完全二次基和四次样条函数, $m = 10, l = 2, n = 2$, 则形函数 ϕ 就是 C_2 连续的,可见 MLS 近似构造具有高度连续性的形函数非常直观,不需要有限元构造具有完备性的高阶单元形函数那样繁琐。

在弹性的范围内,相对于板壳理论,直接连续体方案的优势在于:

- (1) 不需要任何运动学假设,原理简单,精度高,可以用同一个程序求解薄板壳和厚板壳。
- (2) 相对于 Mindlin 板壳,在一定参数内避免了数值锁死。
- (3) 可以很方便地引入复杂本构关系。

无网格法相对于有限单元法在采用直接连续体方案时,优势在于:

- (1) 不需要划分网格,这对于三维问题尤其具有优势。
- (2) 精度高,只需要在厚度方向布置 2 层 ~ 5 层点足以捕捉场梯度,部分消除了三维连续体方案处理板壳问题需要划分单元多、布点多、计算费用高的缺陷。
- (3) 对体积锁死,剪切锁死,薄膜锁死免疫力更强。

对于无网格法为什么会具有如此好的性质,至今尚无定论。一种较为被大家认可的解释为MLS近似(或其它无网格近似函数)是一种“高阶”近似,这种高连续性对于数值计算是有益的^[6]。下面几节就本文方法的这些特点用算例逐一对比讨论。

3 厚板壳和薄板壳分析

三维连续体方案不需要任何运动学假设,使用方便而且精度高,可不做任何处理而同时求解厚板壳和薄板壳问题。布点时在厚度方向只需要布置2层~5层点,所以对比板壳理论计算费用不会显著增加。

3.1 受集中荷载作用的固支厚曲梁(壳)

结构如图1所示,壳体外径 $R = 5$,内径 $r = 3$,宽 $B = 2$,端部受集中荷载 $P = -100$ 作用,材料参数 $E = 10^4$, $\nu = 1/3$ (若无特别说明,以下算例材料参数与本算例相同)。本文方法采用315个结点的布点方案($5 \times 21 \times 3$),如图2所示。MLS近似采用三维二次基函数,球形支撑域,选离节点最近的27个有影响的节点组成影响域,采用 $3 \times 3 \times 3$ 的高斯积分(若无特别说明,以下算例EFG参数设置与本算例相同)。

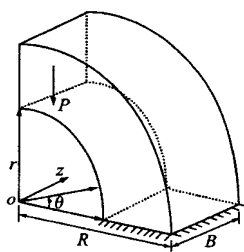


图1 端部受荷载作用的固支壳
Fig. 1 Clamped shell under central load

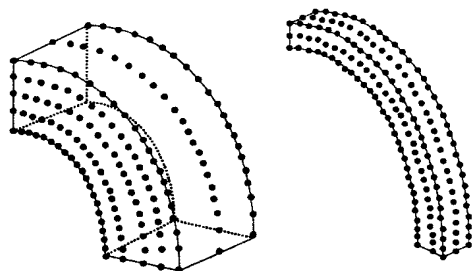


图2 厚壳(左)和薄壳(右)布点方案
Fig. 2 Node distribution of thick shell (left) and thin shell (right)

图3给出 $r = 4.0, z = -1, \theta = 0 \sim 90^\circ$ 的竖向位移 u_y 的计算结果。可见本文方法的精度是相当

高的。

3.2 受集中荷载作用的固支薄曲梁(壳)

将3.1节中的计算参数改为 $R = 10, r = 9, B = 1, P = -1$ 。采用279个结点($3 \times 31 \times 3$),如图2所示。图4给出了 $r = 9.5, z = -1, \theta = 0 \sim 90^\circ$ 的竖向位移 u_y 计算结果。本文方法计算得到 y 方向挠度的最大值为 -0.809 ,由ANSYS用60个4结点壳元计算得到的结果为 -0.80245 ,两者仅相差0.81%。

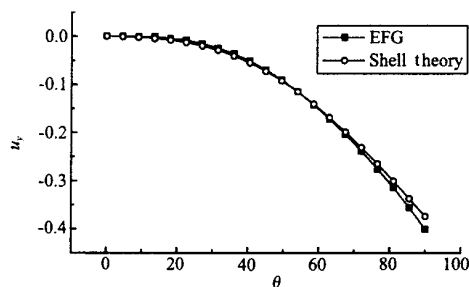


图3 厚曲梁EFG法和板壳理论竖向位移 u_y 比较
Fig. 3 Vertical displacement u_y of thick shell in EFG method and shell theory

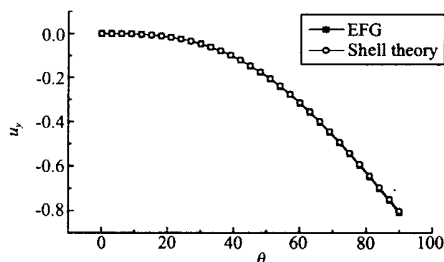


图4 薄曲梁EFG法和板壳理论竖向位移 u_y 比较
Fig. 4 Vertical displacement u_y of thin shell in EFG method and shell theory

4 具有复杂形状的板壳

对于形状规则的板壳结构,差分法可以给出很好的结果,并且效率很高,但对于不规则的边界则遇到了困难。因此本节给出一个本文方法求解复杂形状的板壳的例子。

如图5所示,尺寸为 $20 \times 20 \times 1$ 的固支方板,

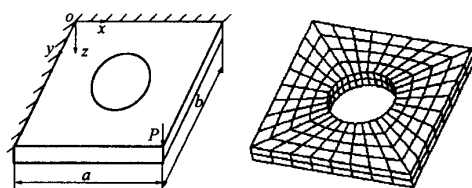


图5 带四个孔的方板(1/4)及其布点和背景网格
Fig. 5 Square plate with a hole, its node distribution and its integration element

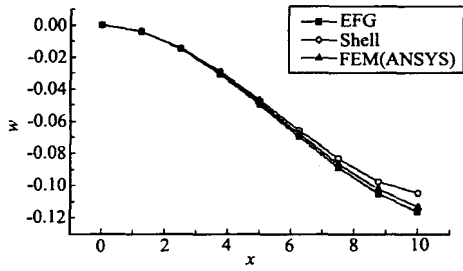


图 6 带孔方板的挠度曲线

Fig 6 Displacement curve of square plate with a hole

荷载 $P = -40$, 取 $1/4$ 进行分析。采用长方体支撑域, 半径为 2 倍布点间距。沿 $y = 10, z = 0.5$ (中面), $x = [0, 10]$ 路径的挠度曲线如图 6 所示, 其中有限单元法结果为相同布点方案下 ANSYS SOLID45 单元求得的结果作为参照结果。可以看出 EFG 的精度是可以的。

5 三维 EFG 直接分析法和有限单元法的对比

通过下面的算例可以清楚地看到三维 EFG 直接分析法是计算板壳问题的一种有前途的方法。相比之下, 有限单元法因为其前述固有的缺陷而不能在三维连续体方案中广泛的应用。

如图 7 所示, 尺寸为 $20 \times 20 \times 1$ 的四周固支

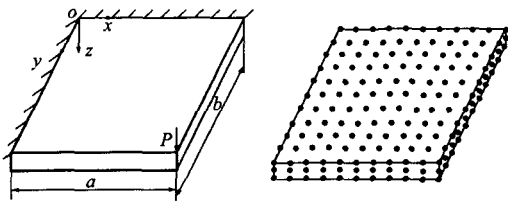


图 7 承受中央集中荷载的板及其布点方案

Fig 7 Square plate under central load and its node distribution

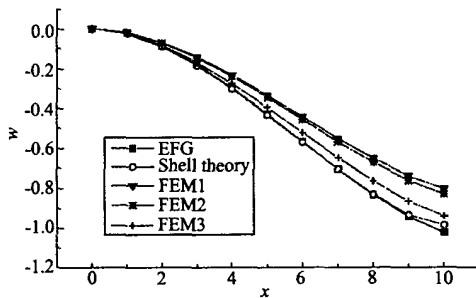


图 8 承受集中荷载方板的挠度变化曲线

Fig 8 Displacement of square plate under central load

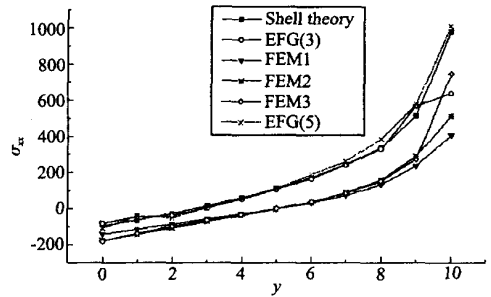


图 9 承受集中荷载方板的应力变化曲线

Fig 9 Stress of square plate under central load

的平板, 荷载 $P = -400$, 材料参数 $E = 10^4, \nu = 0.3$ 。取 $1/4$ 进行分析, 采用 $11 \times 11 \times 3$ 节点离散, 共有 363 个点相当于有限单元法的 $200(10 \times 10 \times 2)$ 个实体单元。图 8 给出了挠度的计算结果, 其中三维 EFG 直接分析中采用长方体影响域, 半径大小为 2 倍布点间距。板壳理论的计算结果由 ANSYS 采用 100 个 4 结点壳元求得。图 8 中 FEM 1 是用有限元法 (FEAP 程序) 采用与 EFG 相同的布点方案求得结果, FEM 2 是在厚度方向上单元再加密一倍 ($10 \times 10 \times 4$) 求得的结果, FEM 3 是在面内两个方向单元各加密一倍 ($20 \times 20 \times 2$) 求得的结果。

Timoshenko^[8] 给出的中面挠度最大值的精确解为 -0.978432 , 由 ANSYS 壳单元得到的结果为 -0.98545 , 三维 EFG 直接分析法得到的结果为 -1.02343 , FEM 1 为 -0.805 , FEM 2 为 -0.831 , FEM 3 为 -0.940 。对比之下, 有限单元法采用三维连续体方案处理板壳问题的弱点可以很明显地看出来。由 ANSYS 用 1600 个实体单元 ($20 \times 20 \times 4$) 分析得到的结果作为对比, 其中面挠度最大值为 -1.0517 , 而本文方法比板壳理论更接近这个结果。

图 9 给出了沿 $x = 10, z = 0, y = [0, 10]$ 路径上的正应力 σ_{xx} 的变化曲线。这里多加了一条 EFG (5) 是与 FEM 2 布点相同 (厚度方向布 5 层点), 其余参数与上面 EFG 法设置相同的计算结果。端部应力的误差应该这是由于固端约束过紧的缘故, 按有限元法中对固端本质条件的方法做一点修正应可消除。可以看出无论应力还是位移, EFG 方法的精度都远高于有限单元法。

6 数值锁死问题

6.1 不可压缩材料的固支板受压计算

采用图7的结构模型,将材料改为近似不可压缩材料,即将泊松比改为 $\nu = 0.4999$,其他参数不变。图10比较了板壳理论(由ANSYS用板壳单元求解)、三维EFG直接分析法和三维实体有限单元(采用与EFG相同的布点方案,FEA P计算)求得的挠度结果。通过本算例可以看出,对于此几乎不可压缩材料的问题,有限单元法已经锁死,而EFG直接分析法则基本不受影响。

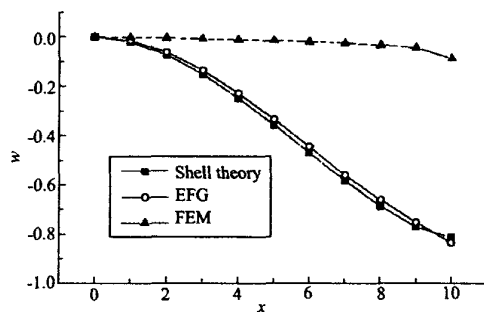


图10 不可压缩材料的方板受压的挠度曲线
Fig. 10 Displacement of incompressible square plate

6.2 端部受集中荷载P作用的悬臂超薄梁

悬臂梁尺寸 $2000 \times 2 \times 2$,端部受集中荷载作用 $P = -1$,材料参数 $E = 10^9$, $\nu = 1/3$ 。由于在z方向无荷载,因此可以视为平面应力问题。三维EFG直接分析中采用 $51 \times 51 \times 3$ 的布点方案,共459个结点,相当于有限元200个单元($50 \times 2 \times 2$),布点方案如图11所示。采用矩形支撑域,支撑域半径为2倍的布点间距。此时“单元”长宽比为40:1,这对有限元法是不可想象的。但本文方案仍然给出了相当高的精度,如图12所示。

值得注意的是,梁的主要变形只是一个方向的,布点间距的长宽比达到40:1的情况下仍然能得到很满意的结果,此时有限单元法三维实体单元基本完全锁死。对于复杂一些的板壳问题,三维EFG直接分析法在布点间距的长宽比小于8:1的情况下可以给出足够精确的结果。但如果进一步增大布点间距的长宽比则可能会出现或多或少的锁死现象。由此可见,三维EFG直接分析法是在一定参数范围内上消除了剪切和薄膜锁死现象。

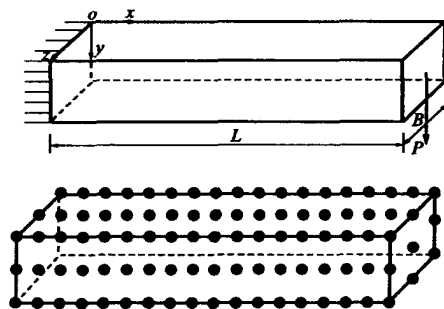


图11 悬臂梁结构示意图和布点方案
Fig. 11 Cantilever and its node distribution

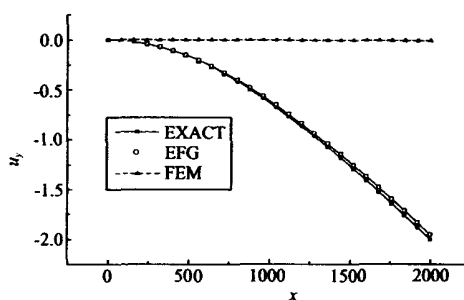


图12 超薄悬臂梁的垂向挠度曲线
Fig. 12 Vertical displacement of cantilever

7 结语

对于壳体和空间结构的分析,不仅要具有强健性,还应能用于厚结构和薄结构的分析并且能避免各种锁死问题和极薄结构的不稳定性问题。

本文采用无网格伽辽金法和直接三维连续体方案求解板壳问题,原理简单,精度高,不用任何运动学假设,可以同时处理薄、厚板壳问题。无网格的近似函数具有高度光滑性,因此克服了有限元法在求解此类问题时的缺陷。无网格法只需要在厚度方向上布置2层~5层点就可以捕捉场函数在厚度方向的梯度,因此计算费用比板壳理论并无显著增加。三维EFG直接分析法很容易分析非线性问题,而此时基于板壳理论的分析方法将变得非常复杂和繁琐。另外,三维EFG直接分析法在一定参数的范围内可以消除数值锁死问题。由此可见,三维无网格法直接分析法是处理板壳问题的一种很有前途的方法。

参考文献(References):

- [1] 张雄,宋康祖,陆明万. 无网格法研究进展及其应用[J]. 计算力学学报, 2003, 20(6): 730-742. (ZHANG

- Xiong, SONG Kang-zu, LU Ming-wan Development and application of meshfree method [J] *Journals of Computational Mechanics*, 2003, **20** (6): 730-742 (in Chinese)
- [2] KRYSL P, BEL YTSCHKO T. A nalysis of thin shells by the element-free Galerkin method [J] *Int J Solids Struct*, 1966, **33**: 3057-3080
- [3] NOGU CH IH, KAWASH MA T, M IYAMURA T. Element free analysis of shell and spatial structures [J] *Int Numer Methods Eng*, 2000, **47**: 1215-1240
- [4] DONN NG B M, L U W K. Meshless methods for shear-defomable beams and plates [J] *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1998, **152**: 47-71.
- [5] BEL YTSCHKO T, L U W K, MORAN B. 连续体和结构的非线性有限元[M] 庄茁, 译 北京: 清华大学出版社, 2002 (BEL YTSCHKO T, L U W K, MORAN B. *Nonlinear Finite Element for Continua and Structures* [M] ZHUANG Zhuo, Translated Beijing: Tsinghua University Press, 2000
- [6] L I S, HAO H, L U W K. Numerical simulation of large deformation of thin shell structures using meshless methods [J] *Comput Mech*, 2000, **25**: 102-116
- [7] BEL YTSCHKO T, LU Y Y, GU LL. Element free Galerkin method [J] *Int J Numer Methods Engng*, 1994, **37**: 229-256
- [8] T M OSHEN KO S. *Theory of Plates and Shells* [M] McGraw-Hill Book Company, Inc, 1959

Direct analysis for plate and shell by three-dimensional element free Galerkin method

ZHANG Wei, ZHANG Xiong*, LU Ming-wan

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: There are three approaches in numerical simulation of plate and shell structures: plate and shell theory approach, degenerated continuum approach, direct three-dimensional (3D) continuum approach. Because meshfree methods can easily establish approximation functions with C_1 or higher order of continuity, they are widely used in Kirchhoff-Love shell theory. When applying in Mindlin-Reissner shell theory, meshfree methods fall into the dilemma of numerical locking. Among these three approaches, direct 3D continuum approach is the simplest and most accurate one in principle. However, it is the least popular one in practice because of innate drawbacks of FEM. Because of the high order of continuity of approximation functions, meshfree method could deploy only 2 layers~ 5 layers of particles to capture the field gradient in the thickness direction, and at the same time, it also could alleviate locking in some ranges of factors. This approach shows great advantages when treating with materials with complicated constitutive law, and nonlinear shell. In this paper, element free Galerkin method and direct 3D continuum approach are employed to analyze the problems of linear plate and shell, and numerical results are compared with those obtained by finite element method. Finally, numerical locking is investigated.

Key words: meshfree method; element free Galerkin method; plate and shell; direct three-dimensional continuum approach; numerical locking