

双重点最小二乘配点无网格法

肖大舟, 张雄*, 陆明万

(清华大学 航天航空学院, 北京 100084)

摘要: 配点类无网格法需要计算近似函数的二阶导数, 因而在移动最小二乘(MLS)近似中至少要采用二次基函数。本文利用 Voronoi 图对双重点移动最小二乘近似法进行了改进, 建立了基于 Voronoi 图的双重点移动最小二乘近似(VDG), 并利用加权最小二乘法离散微分方程, 导出了双重点最小二乘配点无网格法(MDGLS)。该方法将求解域用节点离散, 并以节点为生成点建立 Voronoi 图, 取 Voronoi 多边形的顶点为辅助点。近似函数及其二阶导数的计算过程可分解为两个步骤: 首先用场函数节点值拟合辅助点处近似函数的一阶导数, 再以辅助点处近似函数的一阶导数值拟合节点处近似函数的二阶导数。由于在每一步中只需计算 MLS 形函数及其一阶导数, 这种近似方法需要较少的影响点和较小的影响域。同时借助于 Voronoi 结构的优良几何性质, 可以快速地搜索影响点。研究表明, 与基于 MLS 的加权最小二乘无网格法(MWLS)相比, 这种方法可以显著提高计算效率, 并且在精度和收敛性方面也有所改善。

关键词: 无网格法; Voronoi 图; 双重点; 移动最小二乘近似; 最小二乘法
中图分类号: O3 **文献标识码:** A

1 引言

无网格法^[1-3]是近年来迅速发展的一种微分方程数值解法。与有限元法不同, 无网格法基于离散点来构造近似函数, 不需要进行网格生成和重建, 在处理大变形、裂纹动态扩展、动态界面、高速碰撞和自适应计算等领域中有自己固有的优势。

从紧支试函数加权残值法出发, 可以建立各种无网格格式^[4]。文献[5]使用最小二乘法建立系统泛函, 建立了加权最小二乘无网格法(MWLS)。该方法计算量远小于伽辽金型无网格法, 精度和稳定性远高于配点型无网格法, 且系数矩阵对称。

无论是配点型还是最小二乘型无网格格式, 都要计算形函数的二阶导数, 因此在移动最小二乘近似(MLS)中至少要采用二次基函数。MLS近似函数的光滑性好, 但其形式复杂, 计算形函数特别是其二阶导数时涉及到大量矩阵运算, 计算量较大。文献[6]提出了双重点移动最小二乘近似, 并将之用于配点法。其思想是在求解域中布置两类点(节点和辅

助点), 并将近似函数及其二阶导数的计算过程分解为两步: 首先以场函数节点值拟合辅助点处近似函数的一阶导数, 再以辅助点处近似函数的一阶导数值来拟合节点处近似函数的二阶导数。由于在每一步中只需计算 MLS 形函数及其一阶导数, 该近似方法需要较少的影响点和较小的影响域, 因而计算量较小。但在该方法中, 辅助点的设置具有很大的随意性, 且搜索影响点的工作量也很大。

本文利用 Voronoi 图对双重点移动最小二乘近似进行了改进, 将求解域用节点离散, 以节点为生成点建立 Voronoi 图, 把 Voronoi 多边形的顶点取为辅助点, 建立了基于 Voronoi 图的双重点移动最小二乘近似(VDG); 采用加权最小二乘法离散微分方程, 建立了双重点最小二乘配点无网格法(MDGLS)。该方法可以快速搜索影响点, 并且各计算点所需影响域较小。与基于 MLS 近似的加权最小二乘无网格法(MWLS)相比, 该方法显著地提高了计算效率, 精度和收敛性也有一定的改善。

2 Voronoi 图

Voronoi 图是计算几何中最基本、最重要的概念之一, 其思想源于 Dirichlet 和 Voronoi 的研究^[7]。设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset R^2$ 是欧氏平面上任意分布

收稿日期: 2004-10-29; 修改稿收到日期: 2005-04-29。
基金项目: 国家自然科学基金(10172052)资助项目。
作者简介: 肖大舟(1978-), 男, 硕士;
张雄*(1966-), 男, 教授, 博士生导师。

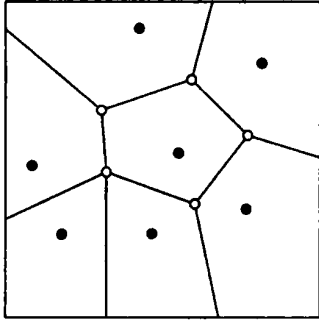


图 1 平面 Voronoi 图
Fig. 1 A planar Voronoi diagram

的有限点集,且 X 中没有重复的点,即当 $i \neq j$ 时 $x_i \neq x_j$ 。称满足

$$V(x_i) = \{x \mid |x - x_i| \leq |x - x_j| \quad (i \neq j)\} \quad (1)$$

的区域为点 x_i 对应的 Voronoi 多边形, x_i 为 Voronoi 生成点。该多边形的顶点和边分别称作 Voronoi 顶点和 Voronoi 边,并且称集合 $\text{Vor}(X) = \{V(x_1), V(x_2), \dots, V(x_n)\}$ 为由点集 X 生成的 Voronoi 图。上述定义很容易推广到高维空间中。

图 1 所示是一个简单的平面 Voronoi 图,图中实心点为 Voronoi 生成点,空心点为 Voronoi 顶点。由 Voronoi 多边形的定义可知,节点 x_i 的 Voronoi 多边形中的各点距节点 x_i 比距其他节点更近。

建立 Voronoi 图的过程,就是根据给定点集,将 Euclid 空间剖分为凸子空间集合的过程,而且这种剖分是唯一的。在某种意义上, Voronoi 图记录了空间中所有点对给定离散点集的邻近信息。由于具有优良的性质, Voronoi 图在很多学科中得到应用,如计算机图形学,生态学,晶体学等。

实际应用中,求解域通常是平面中的有界闭域。每个 Voronoi 多边形至少有 3 个顶点,每一个顶点至少是三条边的交点,而且由 Voronoi 图的最近邻近性质和最大空圆性质,找到的顶点一定是距相应生成点最近的顶点,顶点周围的生成点也一定是距该顶点最近的生成点。这对于在双重点近似中利用 Voronoi 图来搜索影响点无疑是十分便利的。

目前已有多种构造平面 Voronoi 图的算法,如分治法、增量法和平面扫描法等。增量法简单直观而且效率较高,如采用基于二叉树的 buckets 技术,增量法的平均时间复杂度可达到 $O(n)$,这是理

论上构造 Voronoi 图所需的最小平均时间复杂度;另外,增量法是逐一增加生成点的,因此适用于无网格法中处理动态增加布点的情况。

3 双重点移动最小二乘近似

移动最小二乘近似 (MLS)^[1] 是无网格法中常用的近似函数构造方法。MLS 近似函数的光滑性好,但形式复杂,计算形函数特别是高阶导数^[3] 时涉及到大量矩阵运算,计算量较大。

在配点型无网格法和加权最小二乘无网格法中,需要计算形函数及其二阶导数。本文在 MLS 的基础上,采用双重点法构造近似函数。所谓双重点,是指在求解域 Ω 内,布置两个离散点集:节点集 $x_i^a (i = 1, \dots, N^n)$ 和辅助点集 $x_j^g (j = 1, \dots, N^g)$ 。辅助点是利用 Voronoi 图由节点自动生成的,即以节点为 Voronoi 生成点,在求解域内建立 Voronoi 图,取所有 Voronoi 顶点为辅助点。引入双重点后,计算近似函数二阶导数的过程可以分解为两个步骤:

第 1 步:如图 2 所示,近似函数在某一辅助点 x_j^g 处的一阶导数可由场函数 $u(x)$ 在节点 $x_i^a (i = 1, \dots, n^n)$ 处的函数值拟合,即以辅助点 x_j^g 为计算点,附近节点为影响点,进行一次 MLS 近似:

$$u(x_j^g) = \sum_{i=1}^{n^n} Q_i(x_j^g) u(x_i^a) = Q^T \cdot u^n \quad (2)$$

MLS 近似函数的一阶导数为

$$u_{,i}(x_j^g) = \sum_{i=1}^{n^n} Q_{i,i}(x_j^g) u(x_i^a) = Q_{,i}^T \cdot u^n \quad (3)$$

式中 Q 是由 MLS 近似函数确定的形函数, n^n 是当前计算点 x_j^g 的影响点个数,上标 n 表示影响点类型为节点。

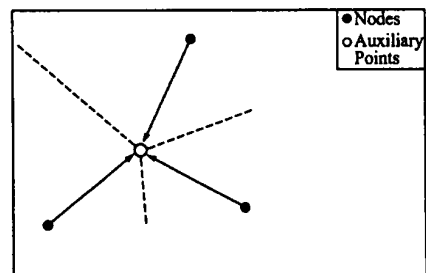


图 2 以节点函数值拟合辅助点处近似函数的一阶导数
Fig. 2 The first order derivatives at auxiliary points are computed from the nodal value of the function at nodes

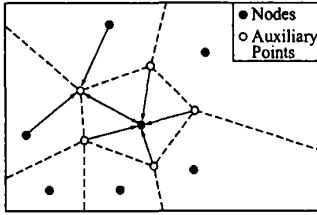


图 3 以辅助点一阶导数拟合节点二阶导数
 Fig. 3 The second order derivatives are obtained at the nodes from first order derivatives at the auxiliary points

第 2 步:如图 3 所示,近似函数在某一节点 x^n 处的二阶导数可由近似函数在辅助点 x_j^a ($J = 1, \dots, n^a$) 处的一阶导数值拟合,即以节点 x^n 为计算点,附近辅助点为影响点,再做一次 MLS 近似:

$$u(x^n) = \sum_{j=1}^{n^a} P_j(x^n) u(x_j^a) = P^T \cdot u^a \quad (4)$$

MLS 近似函数的一阶导数为

$$u_{,j}(x^n) = \sum_{j=1}^{n^a} P_{j,j}(x^n) u(x_j^a) = P_{,j}^T \cdot u^a \quad (5)$$

式中 P 是由 MLS 近似函数确定的形函数, n^a 是当前计算点 x^n 的影响点个数,上标 a 表示影响点类型为辅助点。

在式(5)中,以 $u_{,j}(x_j^a)$ 替换 $u(x_j^a)$ 相当于以辅助点处一阶导数值拟合节点处二阶导数值。将式(3)代入式(5),便得到双重点移动最小二乘近似函数在该节点处的二阶导数值:

$$u_{,ij}^h(x^n) = \sum_{j=1}^{n^a} P_{j,i}(x^n) u_{,j}(x_j^a) = \sum_{j=1}^{n^a} P_{j,i}(x^n) \left[\sum_{l=1}^{n^n} Q_{l,j}(x_j^a) u(x_l^n) \right] \quad (6)$$

用 \bar{u} 和 \bar{u} 分别表示 Q 和 u 经过集成后的矩阵。 \bar{u} 称为总影响点向量,其元素个数称为总影响点数。上式可写为

$$u_{,ij}^h(x^n) = P_{,i}^T \cdot \bar{u}_{,j} = \phi_{,ij} \cdot \bar{u}^n \quad (7)$$

类似地,可以构造双重点近似函数及其一阶导数:

$$u^h(x^n) = P^T \cdot \bar{u} = \phi \cdot \bar{u}^n \quad (8)$$

$$u_{,i}^h(x^n) = P_{,i}^T \cdot \bar{u} = \phi_{,i} \cdot \bar{u}^n$$

或
$$u_{,i}^h(x^n) = P^T \cdot \bar{u}_{,i} = \phi_{,i} \cdot \bar{u}^n \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi &= P^T \cdot \bar{u} \\ \phi_{,i} &= P_{,i}^T \cdot \bar{u} \quad \text{或} \quad \phi_{,i} = P^T \cdot \bar{u}_{,i} \\ \phi_{,ij} &= P_{,i}^T \cdot \bar{u}_{,j} \end{aligned} \quad (10)$$

式(9)中的第1式先由各节点的函数值拟合辅助点的函数,然后再由辅助点的函数值拟合节点函数的一阶导数。第2式先由各节点函数的值拟合辅助点函数的一阶导数,再由辅助点函数的一阶导数值拟合节点函数的二阶导数。

MLS 近似形函数的二阶导数形式复杂,涉及到大量矩阵运算,需要的计算量和存储量都较大。并且,由一致性条件,需要采用二次基 ($m = 6$),即影响域内至少需要 6 个以上节点,实际计算中,一般需取影响点数 $n = 12$,计算量较大。而采用双重点移动最小二乘近似,每一步中都只需计算 MLS 形函数的一阶导数,因而可采用线性基 ($m = 3$),即在每一步中,影响域内只需 3 个以上影响点。实际计算中,最终得到的总影响点数也少于必须采用二次基的 MLS 近似时所需的影响点数目。

双重点近似可以显著提高计算效率,原因在于:

- (1) 通过 Voronoi 图可以快速搜索影响点。基于翼边(winged edge)数据结构,查找某一生成点对应的 Voronoi 顶点,所需时间与顶点数量成比例,查找某一顶点对应的生成点,所需时间与顶点周围多边形的数量成比例。
- (2) 由于在每一步中都只需采用线性基,所需影响点数少,矩阵 A 、 B 和 P 等的维数下降,相应的矩阵形成、矩阵相乘和求逆计算量减少。
- (3) 总影响点数量下降,即系统矩阵带宽下降,系统方程组装和求解用时将缩短。另外,由于影响域相对缩小,双重点近似的局部特性加强,对精度也有一定的改善。

4 双重点最小二乘配点无网格法

下面以二维弹性静力问题为例,采用加权最小二乘法^[3-5]离散微分方程,给出双重点最小二乘配点无网格法(MDGLS)的具体格式。弹性静力问题的基本方程为

$$\left. \begin{aligned} B u(x) + f(x) &= 0 & x \\ u(x) &= \bar{u}(x) & x \\ T u(x) &= \bar{t}(x) & x \end{aligned} \right\} u \quad (11)$$

式中 \bar{u} 为求解域, u 为位移边界, t 为力边界, $u(x)$ 为待求位移场函数; $f(x)$, $\bar{u}(x)$ 和 $\bar{t}(x)$ 分别为定义在域内、位移边界上和力边界上的已知函数, B 和 T 为微分算子。

式(11)的加权最小二乘离散为^[3-5]:

$$= \sum_{I=1}^N (\mathbf{B}u^h(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}))_{x_I} + \sum_{J=1}^{N_u} (u^h(\mathbf{x}) - \hat{u}(\mathbf{x}))_{x_J} + \sum_{K=1}^{N_t} (\mathbf{T}u^h(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}))_{x_K} \quad (12)$$

式中 N 为节点总数, N_u 为位移边界上节点总数, N_t 为力边界(包含自由边界)上的节点总数。将双重点近似式(7)~(9)代入到式(12)中,并由该泛函的极小值得出双重点最小二乘无网格法格式为

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (13)$$

其中

$$\mathbf{K} = \sum_{I=1}^N \mathbf{H}_I^T \cdot \mathbf{H}_I + \sum_{J=1}^{N_u} \mathbf{N}_J^T \cdot \mathbf{N}_J + \sum_{K=1}^{N_t} \mathbf{Q}_K^T \cdot \mathbf{Q}_K \quad (14)$$

$$\mathbf{P} = - \sum_{I=1}^N \mathbf{H}_I^T \cdot \mathbf{f} + \sum_{J=1}^{N_u} \mathbf{N}_J^T \cdot \hat{\mathbf{u}} + \sum_{K=1}^{N_t} \mathbf{Q}_K^T \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (15)$$

$$\mathbf{N}_J = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \dots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \dots & 0 & \phi_n \end{bmatrix}_{x_J} \quad (16)$$

$$\mathbf{H}_I = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \quad \dots \quad \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \end{bmatrix}_{x_I} \quad (17)$$

$$\mathbf{Q}_K = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} l \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + m \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ m \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + l \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ l \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + m \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \quad \dots \quad l \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + m \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ m \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + l \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \quad \dots \quad m \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + l \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ l \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + m \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \\ m \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + l \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \end{bmatrix}_{x_K} \quad (18)$$

5 数值算例

通过以下算例,本文将双重点最小二乘配点无网格法(MDGLS)与加权最小二乘无网格法(MWLS)进行了对照;前者基于双重点移动最小二乘近似(VDG),后者基于普通移动最小二乘近似(MLS)。

为了对误差进行比较分析,定义位移误差范数 L_u :

$$L_u = \sqrt{\sum_{I=1}^N (u_I^h - u_I)^2} / \sqrt{\sum_{I=1}^N u_I^2} \times 100\% \quad (19)$$

式中 u_I^h 为节点 I 处位移近似值, u_I 为节点 I 处位移精确值。应力误差范数 L 定义类似 L_u 。

5.1 分片试验

在 2×2 的区域上进行分片试验。常应变状态对应的位移场为

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 y, \quad v = b_0 + b_1 x + b_2 y \quad (20)$$

式中 a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 和 b_2 均为常数。区域的所有边界点均按式(20)指定位移。分片试验要求计算得到的所有内部节点的位移与式(20)相一致,并且所得到的应力和应变在区域内为常数。本文分别对规则布点和不规则布点两种情况进行了分析,如图4和图5所示。计算结果表明,本文的方法严格通过了所有分片试验。

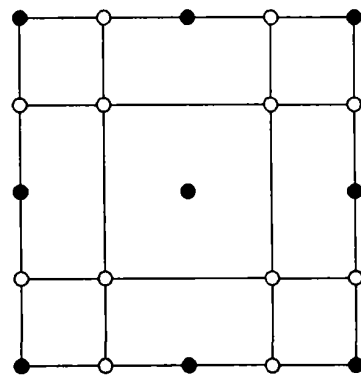


图4 均匀布点
Fig.4 Regular nodes

5.2 悬臂梁

考虑如图6所示的单位厚度悬臂梁,端部受集中载荷 P 作用。该问题解析解见文献[7]。悬臂梁模型取为 $L = 12 \text{ m}$, $D = 2 \text{ m}$, $E = 10000 \text{ Pa}$, $\nu = 0.333333$, $P = 6 \text{ N}$ 。悬臂梁左端为指定精确位移边界,上下表面为自由边界,右端为指定面力边界。

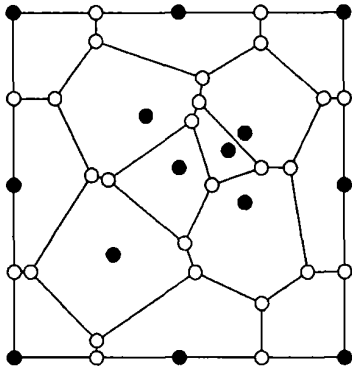


图 5 非均匀布点
Fig. 5 Irregular nodes

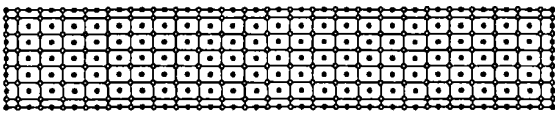


图 7 悬臂梁 25 × 7 布点图
Fig. 7 Nodal arrangements of the cantilever beam

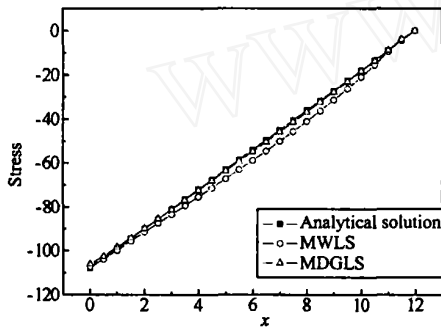


图 9 悬臂梁下表面正应力分布
Fig. 9 Stress σ_{xx} at points along the lower surface of the beam

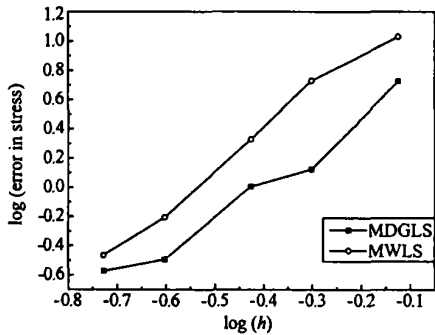


图 11 悬臂梁应力收敛率
Fig. 11 Convergence rates in L_2 norm of error in stresses

采用如图 7 所示 25 × 7 布点方案。图 8 和图 9 分别比较了用不同方法得到的悬臂梁下表面各点的挠度和 x 方向正应力。结果表明,本文方法精度有显著提高。图 10 和图 11 分别给出了逐步加密网格时的位移和应力收敛率曲线。

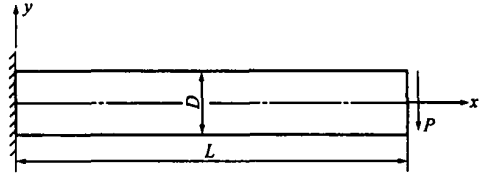


图 6 受端部载荷作用的悬臂梁
Fig. 6 Cantilever beam

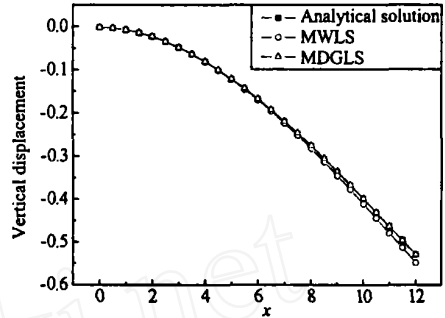


图 8 悬臂梁下表面挠度分布
Fig. 8 Vertical displacements at points along the lower surface of the beam

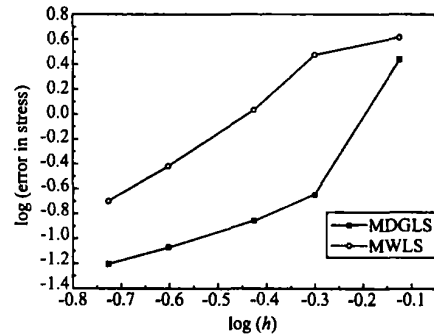


图 10 悬臂梁位移收敛率
Fig. 10 Convergence rates in L_2 norm of error in displacements

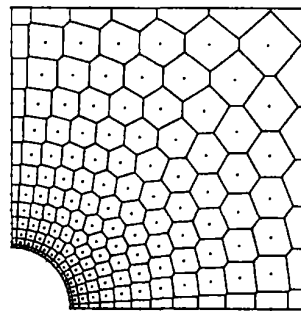


图 12 带孔方板 169 布点图
Fig. 12 Nodal arrangement of infinite plate

为比较计算效率,对 17 × 65 布点方案进行了分析(主频为 1.4 GHz)。加权最小二乘无网格法和双重点最小二乘无网格法所用的 CPU 时间分别为 56.0 秒和 13.2 秒。可见,本文方法显著地提高了计算效率。

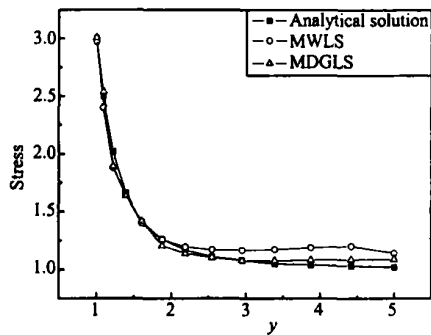


图 13 y 轴上各点的正应力 σ_{xx} 分布
Fig. 13 Stress σ_{xx} at points along y axis

5.3 开孔方板

考虑一个具有中心圆孔的无限大方板,在无穷远处承受水平均匀单位拉力。取圆孔中心为坐标系原点,由于结构和载荷的对称性,可取结构的 $1/4$ 进行分析。分析区域的尺寸为 $5\text{ m} \times 5\text{ m}$,中心圆孔半径 $a = 1\text{ m}$,对称面 ox 和 oy 为指定位移边界,上表面和右表面为指定面力边界。材料参数取为 $E = 1000\text{ Pa}$, $\nu = 0.333333$ 。图 12 所示为采用 169 个节点离散时产生的 Voronoi 图,图 13 给出了对称面 oy 上各点的 x 方向正应力。

6 结束语

本文利用 Voronoi 图对双重点移动最小二乘近似进行了改进,并利用加权最小二乘法离散微分方程,建立了双重点最小二乘配点无网格法。求解域用节点离散,然后将节点作为生成点利用 Voronoi 图自动生成辅助点。Voronoi 图有助于快速搜索影响点。与 MLS 近似相比,基于 Voronoi 图的双重点近似在计算形函数尤其是二阶导数方面,计算效率大为提高,而且由于影响域得以缩小,计算精度和收敛性也有所改善。

实际应用中,先由给定生成点建立无界域中的 Voronoi 图,再根据边界描述进行裁剪,最终得到有界求解域的 Voronoi 剖分。因此,对于开孔、裂缝板等复杂结构体,建立 Voronoi 图的计算量不会大幅增加。

本文方法也可用于裂纹扩展等动态问题。开裂发展时,并不需要重新建立整个 Voronoi 图。借

助于邻近关系,可较快确定位置变动的节点;并相应修改 Voronoi 结构。这对节省计算量是有益的。

如何高效建立三维 Voronoi 图仍是计算几何等领域研究的热点,本文方法也将随之不断发展,更多地应用于三维问题。

参考文献(References):

- [1] BEL YTSCHKO T, KRON GAUZ Y, et al. Meshless methods: An overview and recent developments [J]. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 1996, **139**(1-4): 3-47.
- [2] 张 雄, 宋康祖, 陆明万. 无网格法研究进展及其应用 [J]. 计算力学学报, 2003, **20**(6): 730-742. (ZHANG Xiong, SONG Kang-zu, LU Ming-wan. Research progress and application of meshless method [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2003, **20**(6): 730-742. (in Chinese))
- [3] 张 雄, 刘 岩. 无网格法 [M]. 北京: 清华大学出版社/ Springer 出版社, 2004. (ZHANG Xiong, LIU Yan. *Meshless Methods* [M]. Beijing: Tsinghua University Press/ Springer Press, 2004. (in Chinese))
- [4] 张 雄, 宋康祖, 陆明万. 紧支试函数加权残值法 [J]. 力学学报, 2003, **35**(1): 43-49. (ZHANG Xiong, SONG Kang-zu, LU Ming-wan. Weighted residual method with compactly supported trial functions [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, **35**(1): 43-49. (in Chinese))
- [5] 张 雄, 胡 炜, 潘小飞, 陆明万. 加权最小二乘无网格法 [J]. 力学学报, 2003, **35**(4): 425-431. (ZHANG Xiong, HU Wei, PAN Xiao-fei, LU Ming-wan. Meshless weighted least-square method [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, **35**(4): 425-431. (in Chinese))
- [6] BREITKOPF P, TOUZOT G, VILLON P. Double grid diffuse collocation method [J]. *Comp Mech*, 2000, **25**: 199-206.
- [7] OKABE A, et al. *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams* [M]. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 1999.
- [8] TIMOSHENKO S P, GOODIER J N. *Theory of Elasticity* [M]. New York: McGraw-Hill, 1987.

Meshless double grid least-square collocation method

XIAO Da-zhou, ZHANG Xiong*, LU Ming-wan

(School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: In the point collocation-type meshless methods, evaluating the second order derivatives of the approximation functions is required, which is generally time consuming. In this paper, a Voronoi diagram based double grid diffuse (VDG) approximation is presented for fast evaluating the second order derivatives of the approximation functions. A meshless double grid least-square collocation method (MDGLS) is developed by discretizing PDEs with the weighted least-square method and approximating the trial functions with the proposed VDG approximation. In this method, the Voronoi diagram is constructed in the domain by using nodes as generators, and then the Voronoi vertices are chosen as auxiliary points. The second order derivatives of the approximation functions are constructed in two steps. Firstly, the first order derivatives of the approximation functions at the auxiliary points are evaluated from the nodal value of the unknown functions at the nodes using the moving least square (MLS) approximation. Secondly, the second order derivatives are obtained at the nodes from the first order derivatives at auxiliary points using the MLS approximation. Only the first order derivatives of shape functions are evaluated in every step. As a consequence, the new method requires fewer support nodes and the smaller size of the domain of influence than those from MLS approximation. In addition, benefited from good properties of Voronoi structure, the influence points can be searched efficiently. Compared with the meshless weighted least-square (MWLS) method, the proposed MDGLS method provides substantial improvement in computational efficiency.

Key words: meshless; Voronoi diagram; double grid; moving least square

(上接第 710 页)

Simple analysis of negative shear lag effect in frame-tube structures

WANG Hai-bo^{*1}, CHEN Bo-wang², SHEN Pu-sheng²

(1. College of Civil Architectural Engineering, Central South University, Changsha 410075, China;

2. School of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: On the base of introducing the amendatory contra-flexure point method to analyze the whole shear deformations and forces of frame-tube structures, a simple assumption is put forward that positive and negative shear lag all exist in each storey of frame-tube structures under lateral loads. The assumed distributions of axial strains are given in the web and flange panels, in which the influencing factors of negative shear lag are discussed. Some important conclusions are obtained. The proposed method is much briefer and more applicable than equivalent plane frame method and equivalent continuous system method. Contrasting with space-frame analysis programs, the accuracy of the proposed method is demonstrated through the analysis of framed-tube structures. This method is a simple hand-calculation method and can be used for preliminary design.

Key words: frame-tube structures; amendatory contra-flexure point method; equivalent continuous system; shear lag