

文章编号: 1000-4750(2006)07-0008-05

基于 Galerkin 法弱形式的时间积分法

邢向华,*张 雄,陆明万

(清华大学航天航空学院,北京 100084)

摘 要: 从加权残差法的角度出发,利用 Galerkin 法的弱形式建立了一种高精度的隐式时间积分法。在时间单元上用拉格朗日插值函数构造近似解。给出了使用线性、二次和三次插值函数构造的积分格式,它们的精度依次为二阶、四阶和六阶。求解时首先消去时间单元内部的未知量,有效地提高了计算效率。通过减缩积分,可将条件稳定的格式变为无条件稳定的格式。数值算例表明该方法的精度和效率明显高于 Newmark 法。

关键词: 结构动力学;时间积分法;加权残差法;Galerkin 法;弱形式

中图分类号: O242.2 **文献标识码:** A

A TIME INTEGRATION METHOD BASED ON THE WEAK FORM GALERKIN METHOD

XING Xiang-hua,*ZHANG Xiong, LU Ming-wan

(School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: An implicit high-order accurate time integration method is presented based on the weak form Galerkin method. In each time element, approximate solution is constructed by the Lagrangian interpolation functions. Three formulations, which are two-, four-, six-order of accuracy, are obtained by using linear, quadratic and cubic Lagrangian interpolation functions. When solving the equations, unknown displacements in the time elements are eliminated first to make the method more effective. Stability analysis shows that the formulations are conditionally stable. By using reduced integration, three unconditionally stable formulations are obtained. Numerical examples are included to illustrate the behavior of these algorithms. The results show that their precision and efficiency are remarkably higher than those of the Newmark method.

Key words: structural dynamics; time integration method; weighted residual method; Galerkin method; weak form

在求解结构动力学问题时,时间积分法(或称直接积分法)是最常用的方法。常见的方法有中心差分法、Newmark 法、HHT- α 法等^[1-3],此外,学者们也一直在致力于寻找更加优秀的时间积分法。

建立时间积分法的一条主要途径为变分法。该领域的开拓者有 Fried^[4]、Argyris 和 Scharpf^[5]、Oden^[6]以及 Atluri^[7]等,他们由哈密顿原理(Hamilton's principle)出发,建立了时间积分格式。Bailey^[8-10]

对该领域的发展起到了重要作用。他指出在哈密顿原理中,假设始末时刻的位移为已知,但在实际问题中我们一般只能知道初始时刻的位移。因此哈密顿原理不能准确反映这类问题的本质,应该使用哈密顿定律(Hamilton's law)取而代之。Simikins^[11]、Baruch 和 Riff^[12]进一步发展了 Bailey 的工作。但是,当时得到的各种方法经常会遇到不稳定、易发散等问题,而且通过减小时间单元长度或者增加插值函

收稿日期:2004-10-22;修改日期:2005-01-11

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10172052)

作者简介:邢向华(1977),男,河北人,硕士,从事计算力学研究;

*张 雄(1966),男,宁夏人,教授,博士,从事计算力学研究(E-mail: xzhang@tsinghua.edu.cn);

陆明万(1939),男,江苏人,教授,博士,从事计算力学研究。

数次来加快收敛的做法常常失败^[11,13,14]。Borri^[15]使用哈密顿弱原理(Hamilton's Weak Principle)建立了一种时间积分格式,通过合理地处理边界项,克服了传统方法的缺点。

建立时间积分法的另一途径是加权残差法,由 Zienkiewicz 提出。他利用拉格朗日插值及加权残差法建立了一个统一的框架,在此框架下,选择不同的节点个数及权函数就得到不同的方法,其中既包括已有的传统方法也包括新的方法^[1]。

本文针对结构动力学问题的微分方程,从加权残差法的角度出发,利用 Galerkin 法的弱形式建立了一种时间积分方法。该方法精度高,通过减缩积分,可实现无条件稳定,无数值阻尼,可自动起步。本文的出发点与 Borri^[15]不同,但得到的方法是等价的。与 Borri 的方法相比,本文有以下两点改进:一、Borri 认为三点及四点格式的效率不高而没有给出具体形式。本文给出了三点格式的具体形式,并且把时间单元中间时刻的位移向量消去,得到的求解方程仅包含时间单元始末时刻的位移和速度,这种格式在求解线性问题时具有较高的效率;二、本文详细地给出了三种格式的稳定区间。

1 基本原理

结构动力学问题的微分方程可以写作:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t) \quad (1)$$

用 N 个时间节点将时间域 $[0, t_f]$ 分成 $N-1$ 个单元,且 $0 = t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_{N-1} < t_N = t_f$ 。在单元 $I_n = [t_n, t_{n+1}]$ 上用 $m-1$ 次拉格朗日插值函数来近似表示位移函数,这需要在 I_n 上布置 $m(m \geq 2)$ 个节点 τ_1, \dots, τ_m , 并且规定:

$$\tau_1 = t_n; \tau_m = t_{n+1}; \tau_j = t_n + (j-1)\frac{t_{n+1}-t_n}{m-1}, j = 2, \dots, m-1$$

这样单元 I_n 上的位移可以近似表示为:

$$u^h = N^T d \quad (2)$$

其中 $N = \{N_1, \dots, N_m\}^T$, $d = \{d_1, \dots, d_m\}^T$ 。 N_i 为节点 τ_i 的插值函数; d_i 为节点 τ_i 处的位移,且 $d_1 = u_n$ 、 $d_m = u_{n+1}$ 。将 u^h 代入(1)式后方并不能精确满足,会产生残差。令残差在 I_n 上的加权积分为 0, 得到:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} w_i(\ddot{u}^h + \dot{c}u^h + ku^h - f)dt = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (3)$$

选择不同的权函数 w_i 可以得到不同的方法, Galerkin 法选择插值函数作为权函数, 即:

$$m \int_{t_n}^{t_{n+1}} N\ddot{u}^h dt + c \int_{t_n}^{t_{n+1}} N\dot{u}^h dt + k \int_{t_n}^{t_{n+1}} Nu^h dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} Nf(t) dt \quad (4)$$

对(4)式的第一项进行分部积分

$$m \int_{t_n}^{t_{n+1}} N\ddot{u}^h dt = m[N\dot{u}^h]_{t_n}^{t_{n+1}} - m \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{N}\dot{u}^h dt \quad (5)$$

式(5)中的边界项不用插值函数表示, 而是表示为:

$$m[N\dot{u}^h]_{t_n}^{t_{n+1}} = m[Nv]_{t_n}^{t_{n+1}} \quad (6)$$

v 为速度。将(5)、(6)及(2)代入(4)式, 并采用自然坐标 ζ , 将积分区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 转换为 $[-1, 1]$, 则得到

$$K^e d + \frac{2}{\Delta t} m[N(1)v_{n+1} - N(-1)v_n] = f^e \quad (7)$$

K^e 为等效刚度阵, f^e 为等效载荷向量, 形式如下:

$$K^e = kL^k + \frac{2c}{\Delta t} L^c - \frac{4m}{\Delta t^2} L^m \quad (8)$$

$$f^e = \int_{-1}^1 Nf(\zeta) d\zeta \quad (9)$$

其中

$$L^k = \int_{-1}^1 NN^T d\zeta; \quad L^c = \int_{-1}^1 N\dot{N}^T d\zeta; \quad L^m = \int_{-1}^1 \dot{N}\dot{N}^T d\zeta$$

若将载荷 f 也用插值函数表示, 令 $f = N^T g$, 其中 $g = \{g_1, \dots, g_m\}^T$, g_i 为节点 τ_i 处的载荷值, 且有 $g_1 = f_n$, $g_m = f_{n+1}$, 则等效载荷向量可表示为

$$f^e = L^k g \quad (10)$$

由于该方法是基于 Galerkin 法的弱形式建立的, 故将其称为 GW 法, G 表示 Galerkin, W 表示 Weak form。对于 s 个自由度的系统, 求解方程为:

$$K^e d + \frac{2}{\Delta t} [N(1) \otimes (Mv_{n+1}) - N(-1) \otimes (Mv_n)] = f^e$$

其中 \otimes 表示 Kronecker 积, K^e 和 f^e 的形式如下:

$$K^e = L^k \otimes K + \frac{2}{\Delta t} L^c \otimes C - \frac{4}{\Delta t^2} L^m \otimes M \quad (11)$$

$$f^e = (L^k \otimes I_s) g \quad (12)$$

其中 I_s 为 s 阶单位矩阵, K^e 为 $m \times s$ 阶矩阵。

2 算法实施

2.1 两节点格式(GW2)

在单元 I_n 上布置两个节点: $\tau_1 = t_n$ 、 $\tau_2 = t_{n+1}$, 得到的方法称为 GW2。此时求解方程为:

$$K_{12}^e u_{n+1} = \frac{2}{3} f_n + \frac{1}{3} f_{n+1} + \frac{2}{\Delta t} Mv_n - K_{11}^e u_n \quad (13)$$

$$\frac{2}{\Delta t} Mv_{n+1} = \frac{1}{3} f_n + \frac{2}{3} f_{n+1} - K_{21}^e u_n - K_{22}^e u_{n+1} \quad (14)$$

由于 u_n 和 v_n 已知, 可以先由(13)求出 u_{n+1} , 再

由(14)求出 v_{n+1} 。其中

$$\begin{aligned} K_{11}^e &= \frac{2}{3}K - \frac{1}{\Delta t}C - \frac{2}{\Delta t^2}M \\ K_{12}^e &= \frac{1}{3}K + \frac{1}{\Delta t}C + \frac{2}{\Delta t^2}M \\ K_{21}^e &= \frac{1}{3}K - \frac{1}{\Delta t}C + \frac{2}{\Delta t^2}M \\ K_{22}^e &= \frac{2}{3}K + \frac{1}{\Delta t}C - \frac{2}{\Delta t^2}M \end{aligned}$$

2.2 三节点格式(GW3)

在 I_n 上布置三个节点: $\tau_1 = t_n$ 、 $\tau_2 = t_n + \Delta t/2$ 、 $\tau_3 = t_{n+1}$, 采用二次插值, 则得到 GW3 的求解方程:

$$K_3^e \begin{Bmatrix} u_n \\ d_2 \\ u_{n+1} \end{Bmatrix} + \frac{2}{\Delta t} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Mv_{n+1} \end{Bmatrix} - \frac{2}{\Delta t} \begin{Bmatrix} Mv_n \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = f_3^e \quad (15)$$

式(15)包含 $3s$ 个方程, 直接求解需联立求解前 $2s$ 个方程, 要对 $2s$ 阶矩阵进行三角分解, 运算量大。由于 d_2 并不需要显式求出, 因此可将其消掉, 得到:

$$\begin{aligned} [K_{13}^e - R_1 K_{23}^e] u_{n+1} &= f_1^e - R_1 f_2^e - \\ [K_{11}^e - R_1 K_{21}^e] u_n &+ \frac{2}{\Delta t} Mv_n \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta t} Mv_{n+1} &= f_3^e - R_2 f_2^e - [K_{31}^e - R_2 K_{21}^e] u_n - \\ [K_{33}^e - R_2 K_{23}^e] u_{n+1} \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $R_1 = K_{12}^e (K_{22}^e)^{-1}$, $R_2 = K_{32}^e (K_{22}^e)^{-1}$, K_{ij}^e 为 K_3^e 中第 i 行 j 列的子阵, K_3^e 由(11)求出, 系数矩阵为:

$$\begin{aligned} L_3^k &= \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad L_3^c = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}; \\ L_3^m &= \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

方程(16)和方程(17)中仅包含两个时刻的位移和速度, 相当于三点格式的两点求解公式, 能够有效地降低运算时的存储量及计算量。

2.3 四节点格式(GW4)

在 I_n 上布置四个节点, 使用三次插值, 即得到 GW4 方法, 其构造过程与 GW2、GW3 相同, 并且可以按照 GW3 的思想, 消去单元内部时刻的位移向量 d_2 和 d_3 , 得到仅包含单元始末时刻位移和速度的求解方程。其具体形式参见文献[16]。

3 稳定性分析

以单自由度微分方程 $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$ 来考察以上三

种格式的稳定性。GW2 方法的递推公式为:

$$\begin{Bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$A = \frac{1}{\Omega^2 + 6} \begin{bmatrix} 6 - 2\Omega^2 & 6\Delta t \\ (\Omega^4 - 12\Omega^2)/2\Delta t & 6 - 2\Omega^2 \end{bmatrix}$$

其中 $\Omega = \omega\Delta t$ 。要保证 GW2 格式是稳定的, 要求谱半径 $\rho(A) = \max(|\lambda(A)|) \leq 1$, $\lambda(A)$ 为矩阵 A 的特征值, 其表达式为:

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 - 2\Omega^2 \pm \Omega\sqrt{3\Omega^2 - 36}}{\Omega^2 + 6}$$

$|\lambda| \leq 1$ 的条件为 $\Omega^2 \leq 12$, 即 $\omega\Delta t \leq 2\sqrt{3}$, 因此 GW2 为条件稳定的算法。对 GW3 和 GW4 进行类似的谱半径分析, 可知这两种方法也是条件稳定的。三种方法的谱半径曲线如图 1 所示。

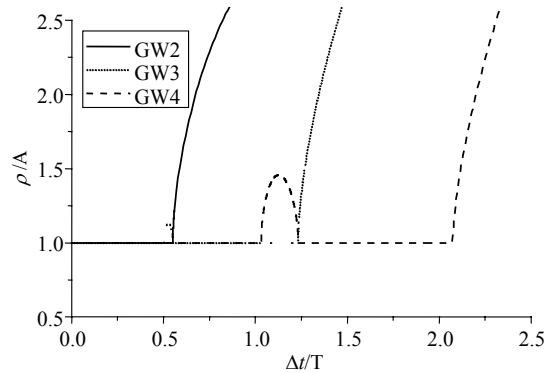


图 1 三种格式的谱半径曲线

Fig.1 Spectral radii of three formulations

三种方法的临界步长为: GW2~0.5513T; GW3~1.2328T; GW4~2.0759T。T 为系统的固有周期, 对于多自由度系统, T 是最高阶模态的周期。

图 1 中 GW3 和 GW4 的谱半径曲线在 $\Delta t/T$ 位于 [0.5033, 0.5513] 和 [1.0314, 1.2328] 区间时分别出现了一个突起, 在突起处方法也是不稳定的。此外, GW4 的谱半径曲线在区间 [0.5001, 0.5033] 内还有一个微小突起, 其峰值约为 1.01, 图中无法显示。

Borri^[15]指出, 如果计算 L^k 时用减缩积分代替精确积分, 那么得到的方法是无条件稳定的。采用高斯积分时三种格式的减缩积分方案如表 1 所示。

表 1 三种格式的减缩积分方案

Table 1 Reduced integration of three formulations

格式	被积函数的最高次数	积分点个数	积分达到的精度
GW2	2	1	1
GW3	4	2	3
GW4	6	3	5

采用减缩积分后, 式(18)中的矩阵 A 为

$$A = \frac{1}{\Omega^2 + 4} \begin{bmatrix} -\Omega^2 + 4 & 4\Delta t \\ -4\Omega^2/\Delta t & -\Omega^2 + 4 \end{bmatrix}$$

其特征值为：

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\Omega^2 + 4} [(-\Omega^2 + 4) \pm i4\Omega]$$

$|\lambda| \equiv 1$ 此时方法为无条件稳定的 称之为 GW2ucs, ucs 表示 unconditionally stable。可以证明, GW2ucs 和 Newmark 法($\gamma = 0.5$ 、 $\beta = 0.25$)是等价的。

类似地, 可以得到 GW3ucs 和 GW4ucs, 它们的谱半径均恒为 1, 为无条件稳定的方法。

4 数值算例

4.1 单自由度自由振动

求解单自由度微分方程 $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$, $u_0 = 1$ 、 $v_0 = 0$, 其精确解为 $u = \cos(\omega t)$ 。取 $\omega = \pi$, 则周期 T 为 2 秒。一个周期结束时方法的误差如表 2 所示。本文采用如下误差：

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^N (u_i^h - u_i^e)^2} / \sqrt{\sum_{i=1}^N (u_i^e)^2} \times 100\%$$

表 2(a) 位移的误差(%)

Table 2(a) Error of the displacement(%)

算法	$\Delta t = 0.2$	$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 0.05$
Newmark	10.31	2.766	0.7124
GW2	5.168	1.384	0.3563
GW2ucs	10.31	2.766	0.7124
GW3	3.442e-2	2.283e-3	1.466e-4
GW3ucs	6.865e-2	4.563e-3	2.932e-4
GW4	9.775e-5	1.612e-6	2.583e-8
GW4ucs	1.952e-4	3.223e-6	5.168e-8

表 2(b) 速度的误差(%)

Table 2(b) Error of the velocity(%)

算法	$\Delta t = 0.2$	$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 0.05$
Newmark	12.87	3.192	0.7832
GW2	6.553	1.605	0.3922
GW2ucs	12.87	3.192	0.7832
GW3	4.716e-2	2.830e-3	1.723e-4
GW3ucs	8.903e-2	5.323e-3	3.232e-4
GW4	1.276e-4	1.884e-6	2.849e-8
GW4ucs	2.532e-4	3.761e-6	5.697e-8

由表 2 可知, Newmark 法与 GW2ucs 的误差完全相等, 从而验证了上一节的结论。GW3 和 GW4 的精度非常高, 并且能在时间步长较大时达到较高的精度。如表 3 所示, 步长为 0.6 秒时, 每个周期内仅有 3 个节点, GW4ucs 的误差仅有 0.38%; 而 Newmark 法达到相同精度需要的步长为 0.021 秒。

表 3 6 秒时位移的误差

Table 3 Error of the displacement after 6 second

算法	步长/秒	误差/%
Newmark	0.021	0.39
GW3ucs	0.23	0.38
GW4ucs	0.6	0.38

图 2 为各种算法的收敛曲线, GW4 的收敛速率可以达到 6 级。

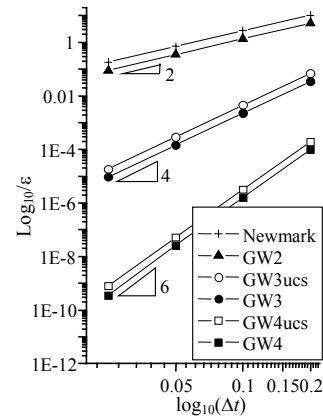


图 2 收敛曲线

Fig.2 Convergence rate

4.2 单自由度受迫振动

求解微分方程 $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = q\sin(\theta t)$, $u_0 = 0$ 、 $v_0 = 0$, 令 $m=1$ 、 $c=0.1$ 、 $k=1$ 、 $q=1$ 、 $\theta=0.5$ 。表 4 给出各种算法在 4π 秒时的误差。

表 4 位移的误差(%)

Table 4 Error of the displacement(%)

算法	$\Delta t = 0.2\pi$	$\Delta t = 0.1\pi$	$\Delta t = 0.05\pi$
Newmark	7.359	1.859	0.4628
GW2	3.857	0.9597	0.2383
GW3	2.410e-2	1.494e-3	9.260e-5
GW3ucs	4.921e-2	3.060e-3	1.898e-4
GW4	1.870e-4	9.819e-6	5.932e-7
GW4ucs	2.305e-4	1.019e-5	5.973e-7

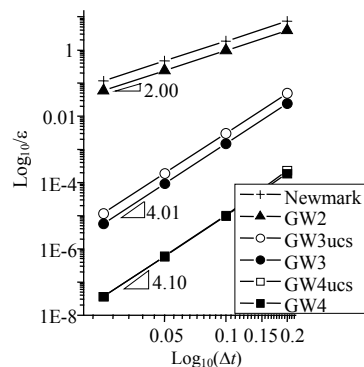


图 3 收敛曲线

Fig.3 Convergence rate

图 3 为该算例中各种算法的收敛曲线,可以看出 GW4 的收敛速率降为 4.1,这是由于采用(10)式计算等效载荷向量对载荷的近似精度较低。如果采用(9)式计算等效载荷,则 GW4 的收敛速率变为 6。

4.3 支梁自由振动

如图 4 所示的简支梁,中点受常力 P 作用而变形,求突然移去 P 后梁的响应。

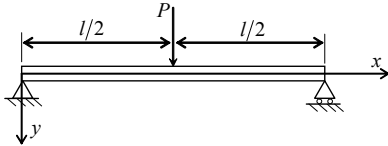


图 4 简支梁模型

Fig.4 Simple-supported beam

梁的物理参数如表 5 所示。首先对梁进行空间离散,将其等分为 16 个伯努利-欧拉梁单元,然后使用 GW3ucs 和 GW4ucs 求解。

表 5 简支梁的参数(国际单位制)

Table 5 Parameter of the simple-supported beam
(international unit)

梁长 l	弹性模量 E	密度	截面惯性矩	截面面积	外力 P
10	2.0e11	5000	1/24	0.5	1000

令求解的时间域为 1 秒,则取不同时间步长时,梁中点挠度的误差及运算时间如表 6 所示。

表 6 梁中点挠度的误差及运算时间

Table 6 Error and CPU time when calculating deflection at the middle span of the beam

Δt /s	Newmark		GW3ucs		GW4ucs	
	时间/s	误差/%	时间/s	误差/%	时间/s	误差/%
0.004	0.52	133	1.09	3.96	1.44	1.73
0.001	1.90	27.5	4.14	1.83	5.01	0.277
0.0001	18.4	1.79	40.6	0.0654	47.6	0.01102

由表 6 可知,当误差约为 1.8%时,三种方法的运算时间比为 12.8:2.9:1,因此 GW3 和 GW4 的效率是远高于 Newmark 法的。

5 结论

本文从加权残差法的角度出发,利用 Galerkin 法的弱形式建立了一种隐式时间积分法。该方法为单步法,在每个时间单元上,用拉格朗日插值函数构造近似位移。通过减缩积分,可以将条件稳定的格式转换为无条件稳定的格式。数值计算表明,该方法具有较高的精度,本文给出的三种格式中,精

度最高可达六阶。通过采用消去内部未知量的技巧,降低了运算过程中的存储量和计算量。在求解线性问题时,本方法的效率远高于 Newmark 法。

参考文献:

- [1] Zienkiewicz O C, Taylor R L. The Finite Element Method [M]. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
- [2] 郑兆昌. 机械振动 [M]. 北京:机械工业出版社, 1986. Zheng Zhaochang. Mechanical Vibration [M]. Beijing: China Machinery Press, 1986.(in Chinese)
- [3] Hughes T J R. The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis [M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1987
- [4] Fried I. Finite-element analysis of time-dependent phenomena [J]. AIAA Journal, 1968, 7: 1170~1172.
- [5] Argyris J H, Scharpf D W. Finite elements in time and space [J]. Nuclear Engineering and Design, 1969, 10: 456~464.
- [6] Oden J T. A general theory of finite element. 2. Application [J]. International Journal for Numerical Method in Engineering, 1969, 1: 247~259.
- [7] Atluri S N. An assumed stress hybrid finite element model for linear elastodynamic analysis [J]. AIAA Journal, 1973, 7: 1028~1031.
- [8] Bailey C D. Application of Hamilton's law of varying action [J]. AIAA Journal, 1975, 13: 1154~1157.
- [9] Bailey C D. The method of Ritz applied to the equation of Hamilton [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1976, 7:235~247.
- [10] Bailey C D. Hamilton, Ritz, and Elastodynamics [J]. Journal of Applied Mechanics, 1976, 43: 684~688.
- [11] Simkins S E. Finite element for initial value problems in dynamics [J]. AIAA Journal, 1981, 19: 1357~1362.
- [12] Baruch M, Riff R. Hamilton's principle, Hamilton's Law-6 correct formulations [J]. AIAA Journal, 1982, 22: 687~692.
- [13] Riff R, Baruch M. Stability of time finite elements [J]. AIAA Journal, 1984, 22: 1171~1173.
- [14] Peters D A, Izadpanah A P. hp-version finite elements for the space-time domain [J]. Computational Mechanics, 1988, 3: 73~88.
- [15] Borri M, Ghiringhelli L, Lanz M, Mantegazza P, Merlini T. Dynamic response of mechanical systems by a weak hamiltonian formulation [J]. Computers & Structures, 1985, 20: 495~508.
- [16] 邢向华. 基于伽辽金法弱形式的时间积分法[D]. 北京:清华大学, 2004. Xing Xianghua. A time integration method based on the weak form galerkin method [D]. Beijing: Tsinghua University, 2004. (in Chinese)