无网格法

紧支试函数加权残量法

紧支试函数加权残量法

- 线弹性力学的控制方程
- 加权余量法
- 紧支试函数加权余量法
- 紧支试函数

线弹性力学的控制方程

平衡方程 $\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i = 0$

$i = 1,2,3$

$j = 1,2,3$

应变-位移关系 $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$

应力-应变关系 $\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}$

边界条件 $\sigma_{ij}n_j = \bar{T}_i$ 在S_σ上

$u_i = \bar{u}_i$ 在S_u上



如何求解？

加权余量法

对于复杂问题，只能求近似解

$$R_i = \sigma_{ij,j} + \bar{f}_i \neq 0,\ i = 1,2,3 \quad \text{在} V\text{中}$$

$$\bar{R}_i = \sigma_{ij} n_j - \bar{T}_i \neq 0 \quad \text{在} S_\sigma \text{上}$$

加权余量法不要求余量在各点均为零，而要求余量的加权积分为零 — 平均意义上满足方程

$$\int_V R_i v_i \mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \bar{R}_i \bar{v}_i \mathrm{d}S = 0$$ 等效积分形式

$v_i, \bar{v}_i$：权函数 Test functions

加权余量法的物理意义：选取合适的待定参数强迫余量在某种平均意义下为零

近似解：$u_i = \sum_{I=1}^{N} \phi_I a_{iI} \quad i = 1,2,3$

ϕ_I：试探函数（完备、线性独立）Trial function

a_{iI}：待定参数

加权余量法

$$\int_V R_i v_i \mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \bar{R}_i \bar{v}_i \mathrm{d}S = 0$$ 如何选取权函数？

取：$v_i = \sum_{I=1}^{N} W_I b_{iI}$ $\bar{R}_i = 0$ W_I：Test function

$$\int_V R_i v_i \mathrm{d}V = \int_V R_i \sum_{I=1}^{N} W_I b_{iI} \mathrm{d}V = \sum_{I=1}^{N} b_{iI} \int_V R_i W_I \mathrm{d}V = 0$$

$$\int_V R_i W_I \mathrm{d}V = 0, \quad i = 1,2,3; \quad I = 1,2,\cdots,N$$

选择不同的权函数，得到不同的加权余量法

加权余量法

$$\int_V R_i W_I \mathrm{d}V = 0, \quad i = 1,2,3; \quad I = 1,2,\cdots,N$$

1. 配点法

$$W_I = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I), \quad I = 1,2,\cdots,N$$

$$R_i(\boldsymbol{x}_I) = 0, \quad i = 1,2,3;\ I = 1,2,\cdots,N$$

强迫余量在域内N个离散点上为零!

2. 子域法

$$W_I = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{x} \in V_I \\ 0 & \boldsymbol{x} \notin V_I \end{cases}, \quad I = 1,2,\cdots,N$$

强迫余量在N个子域V_I上的积分为零!

加权余量法

$$\int_V R_i W_I \mathrm{d}V = 0, \quad i = 1,2,3; \quad I = 1,2,\cdots,N$$

3. 最小二乘法

$$\frac{\partial}{\partial a_{iI}} \int_V R_i^2 \mathrm{d}V = 2\int_V R_i \frac{\partial R_i}{\partial a_{iI}} \mathrm{d}V = 0$$

$$W_I = \frac{\partial R_i}{\partial a_{iI}}$$

强迫余量的均方和为最小！

4. 伽辽金法

$$W_I = \phi_I$$

在有限元法中主要采用伽辽金法

$$\int_V R_i \phi_I \mathrm{d}V = 0$$

加权余量法

5. 局部彼得洛夫-伽辽金法

余量在各子域Ω_s上消除，且检验函数和试探函数取自不同的函数空间

$$\int_{\Omega_s} W_I(\sigma_{ij,j}+\bar{f}_i)\mathrm{d}\Omega=0$$

$$\int_{L_s}\sigma_{ij}n_jW_I\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_{su}}\sigma_{ij}n_jW_I\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_{st}}\bar{t}_iW_I\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_s}(\sigma_{ij}W_{I,j}-\bar{f}_iW_I)\mathrm{d}\Omega=0$$

若取 $W_I\big|_{L_s}=0$

$$\Gamma_{su}=\partial\Omega_s\cap\Gamma_u\quad\Gamma_{st}=\partial\Omega_s\cap\Gamma_t$$

$$L_s=\partial\Omega_s-\Gamma_{su}-\Gamma_{st}$$

$$\int_{\Omega_s}\sigma_{ij}W_{I,j}\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_{su}}\sigma_{ij}n_jW_I\mathrm{d}\Gamma=\int_{\Gamma_{st}}\bar{t}_iW_I\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega_s}\bar{f}_iW_I\mathrm{d}\Omega$$

加权余量法

- 子域Ω_s
  - 以各节点为中心：球形、椭球、立方体
  - 在子域中积分，易于实现
- 检验函数
  - MLS权函数
  - Dirac δ函数
  - 误差函数
  - 微分方程的基本解：等价于LBIE
  - 单位阶跃函数：无域内积分，效率高
  - 近似函数：与Galerkin法等价
- 最终得到的求解方程的系数矩阵一般是不对称

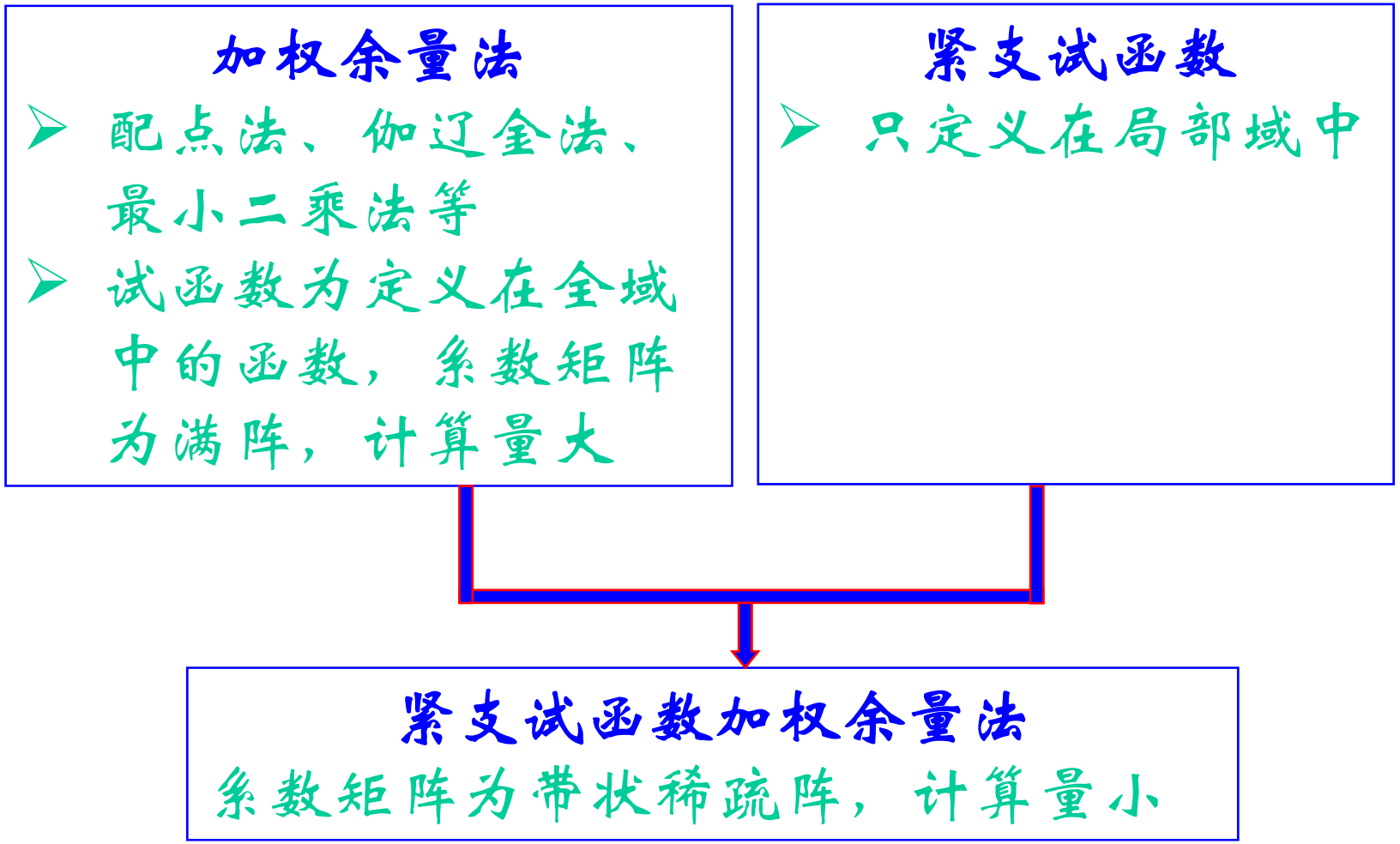
加权余量法

- Galerkin
- Collocation
- Local Petrov Galerkin
- Least Square Collocation
- Weighted Least Square
- Galerkin Least Square
- Galerkin Collocation

紧支试函数加权余量法

- 近似函数定义在全求解域
  - 不易构造
  - 系数矩阵为满阵
- 紧支试函数
  - 里兹法
  - 有限元法
  - 紧支函数

紧支试函数加权余量法


加权余量法
配点法、伽辽金法、最小二乘法等
试函数为定义在全域中的函数，系数矩阵为满阵，计算量大
紧支试函数
只定义在局部域中
紧支试函数加权余量法
系数矩阵为带状稀疏阵，计算量小

紧支试函数

- 移动最小二乘法 (Moving Least Square)
- 核函数近似 (Kernel approximation)
- 重构核近似（Reproducing Kernel approx.）
- 单位分解法 (Partition of Unity)
- 径向基函数（Radial basis functions）
- 点插值法（Point interpolation method）
- 自然邻接点插值
- Kriging插值
- 非均匀有理B样条（NURBS）

紧支试函数

- 函数$u(\boldsymbol{x})$可以近似为：

$$u(\boldsymbol{x}) \approx u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{n} N_I(\boldsymbol{x}) u_I = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{u}$$

大多数无网格法形函数不满足插值特性，即

$$u^h(\boldsymbol{x}_I) \neq u_I, \quad N_I(\boldsymbol{x}_J) \neq \delta_{IJ}$$

移动最小二乘近似

- 近似函数

$$u^h(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})=\sum_{i=1}^{m}p_i(\bar{\boldsymbol{x}})a_i(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$$

$p_i(\bar{\boldsymbol{x}})$ — 基函数（多项式或其它已知函数）

$a_i(\boldsymbol{x})$ — 待定系数

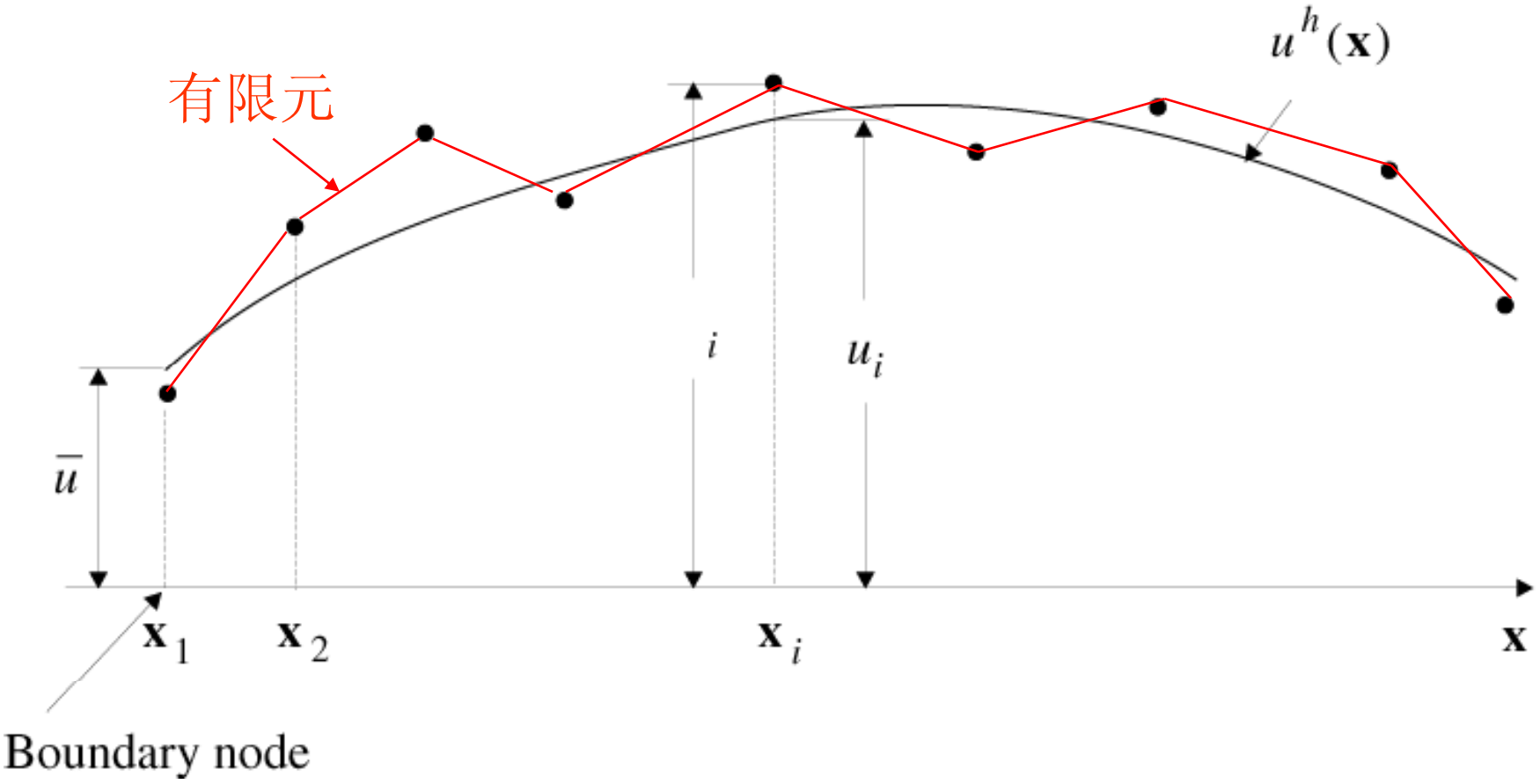
线性基： $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{x}})=[1,x,y,z],\quad m=4$

二次基： $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{x}})=[1,x,y,z,x^2,xy,y^2,yz,z^2,xz],\quad m=10$

移动最小二乘近似 — 待定系数的确定

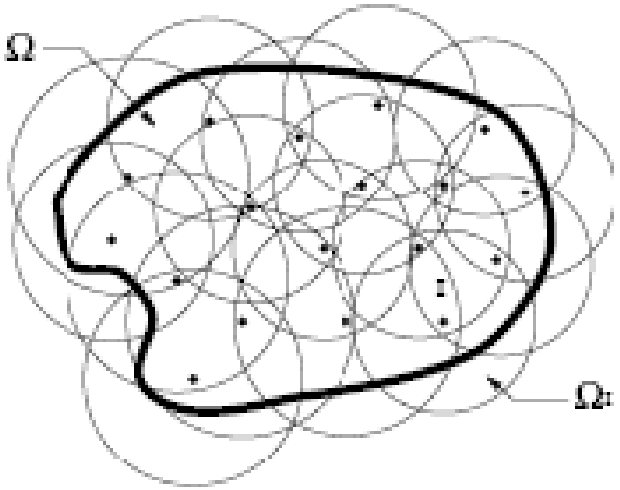
- 有限元法 — 令$u^h(\boldsymbol{x})$在单元节点i处等于函数$u(\boldsymbol{x})$在该节点处的函数值u_i
  - 待定系数的个数必须等于单元自由度
  - $u^h(x_i) = u(x_i)$ — 具有插值特性
  - 依赖于网格
- **MLS** — 使$u^h(x)$在节点处的误差在加权最小二乘意义下取极小值
  - 精度高，并且可具有高阶连续性
  - 能够精确重构基中的任何函数
  - 计算量大
  - $u^h(x_i) \neq u(x_i)$ — 不具有插值特性 (拟合)

移动最小二乘近似

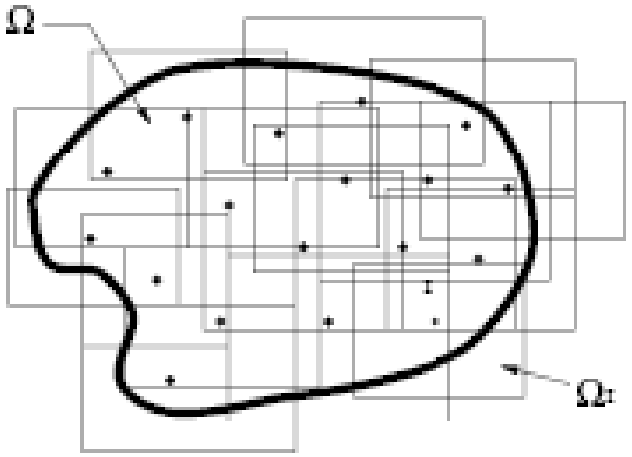

$u^h(\mathbf{x})$
有限元
i
u_i
$\bar{u}$
$\mathbf{x}_1$
$\mathbf{x}_2$
$\mathbf{x}_i$
$\mathbf{x}$
Boundary node

移动最小二乘近似

$$J=\sum_{I=1}^{N} w_I(\boldsymbol{x})\left[u^h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_I)-u(\boldsymbol{x}_I)\right]^2=\sum_{I=1}^{N} w_I(\boldsymbol{x})\left[\sum_{i=1}^{m} p_i(\boldsymbol{x}_I)\cdot a_i(\boldsymbol{x})-u_I\right]^2$$



(a)



(b)

$$\frac{\partial J}{\partial a_j(\boldsymbol{x})}=2\sum_{I=1}^{N} w_I(\boldsymbol{x})\left[\sum_{i=1}^{m} p_i(\boldsymbol{x}_I)\cdot a_i(\boldsymbol{x})-u_I\right]p_j(\boldsymbol{x}_I)=0$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{I=1}^{N} w_I(\boldsymbol{x})p_i(\boldsymbol{x}_I)p_j(\boldsymbol{x}_I)\right]a_i(\boldsymbol{x})=\sum_{I=1}^{N} w_I(\boldsymbol{x})p_j(\boldsymbol{x}_I)u_I$$

移动最小二乘近似

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{I=1}^{N} w_I(\boldsymbol{x})\, p_i(\boldsymbol{x}_I)\, p_j(\boldsymbol{x}_I)\right] a_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{N} w_I(\boldsymbol{x})\, p_j(\boldsymbol{x}_I) u_I$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{N} w_I(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I)\, \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_I)$$

$$\boldsymbol{B} = [w_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_1) \quad w_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_2) \quad \cdots \quad w_N(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_N)]$$

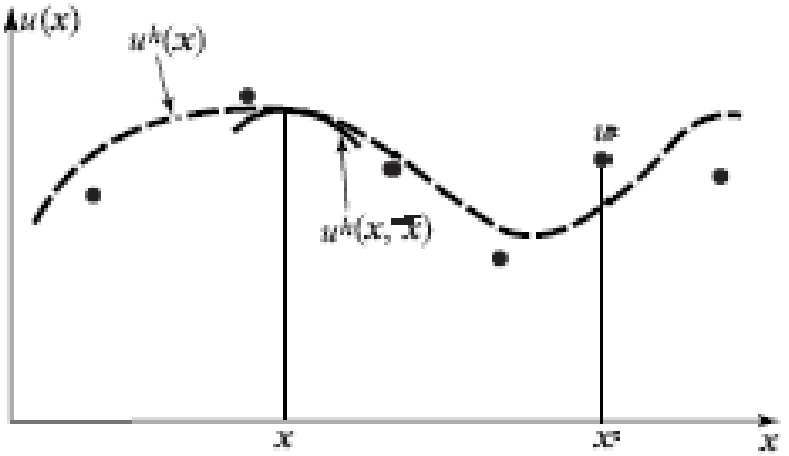
$$u^h(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$$

$$u(\boldsymbol{x}) \approx u^h(\boldsymbol{x}) = u^h(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\big|_{\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})\big|_{\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}}$$

$$= \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$$



移动最小二乘近似

- 当基函数中最高阶完备多项式的阶数$k=0$时，MLS形函数退化为为Shepard函数

$$N_I(\boldsymbol{x})=\frac{w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_I)}{\sum_{I=1}^{N} w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_I)}$$

- 如果在MLS近似中将权函数在域内取为1，在域外取为0，则MLS近似退化为标准的最小二乘近似

移动最小二乘近似

- MLS近似可以精确地重构包含在基底中的任何函数$p_i(x)$，即

$$\sum_{I=1}^{n} N_I(\boldsymbol{x}) p_i(\boldsymbol{x}_I) = p_i(\boldsymbol{x})$$

对于裂纹扩展问题，基函数可以取为

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) = [1, x, y, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta]$$

对于声场，基函数可以取为

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) = [1, \cos(kx), \sin(kx)]$$

广义移动最小二乘近似

- MLS要求近似函数在各节点处误差的平方和为最小，但对近似函数导数的误差没有任何约束
- Atluri等人在分析欧拉梁时，要求近似函数及其导数在各点处误差的平方和最小

$$J=\sum_{I=1}^{N}\left\{w_I^{(0)}(\boldsymbol{x})\left[\sum_{i=1}^{m}p_i(\boldsymbol{x}_I)a_i(\boldsymbol{x})-u_I\right]^2+\right.$$

$$\left.\sum_{\alpha=1}^{n_d}w_I^{(\alpha)}(\boldsymbol{x})\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial p_i(\boldsymbol{x}_I)}{\partial x^{\alpha}}a_i(\boldsymbol{x})-\theta_{\alpha I}\right]^2\right\}$$

可只将函数在面力边界各节点处的导数作为自变量，要求近似函数在所有节点处误差的平方和与近似函数导数在面力边界各点处误差的平方和之和最小

核函数近似

- 函数 $u(\mathbf{x})$ 用积分核变换近似

$$u(\boldsymbol{x})=\int_{\Omega}u(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}\Omega_{\bar{x}}$$

$$u^{h}(\boldsymbol{x})=\int_{\Omega}w(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}},h)u(\bar{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}\Omega_{\bar{x}}$$

$u^{h}(\boldsymbol{x})$ —— 近似函数

$w(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}},h)$ —— 核函数或权函数；紧支性

- 向量函数散度的核近似为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})&\approx\int_{\Omega}\bar{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}(\bar{\boldsymbol{x}})w(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}\Omega_{\bar{x}}\\&=\int_{\Omega}\bar{\nabla}\cdot[\boldsymbol{u}(\bar{\boldsymbol{x}})w(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})]d\Omega_{\bar{x}}-\int_{\Omega}u(\bar{\boldsymbol{x}})\cdot\bar{\nabla}w(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}\Omega_{\bar{x}}\\&=\int_{\Gamma}u(\bar{\boldsymbol{x}})w(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\cdot\bar{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\Gamma_{\bar{x}}-\int_{\Omega}\boldsymbol{u}(\bar{\boldsymbol{x}})\cdot\bar{\nabla}w(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}\Omega_{\bar{x}}\end{aligned}$$

核函数近似

- 如果核函数的支撑域完全位于域Ω内

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \approx \int_{\Gamma} u(\bar{\boldsymbol{x}})w(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\cdot\bar{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\Gamma_{\bar{\boldsymbol{x}}} - \int_{\Omega}\boldsymbol{u}(\bar{\boldsymbol{x}})\cdot\bar{\nabla}w(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}\Omega_{\bar{\boldsymbol{x}}}$$

$$= -\int_{\Omega}\boldsymbol{u}(\bar{\boldsymbol{x}})\cdot\bar{\nabla}w(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}\Omega_{\bar{\boldsymbol{x}}}$$

$$= \int_{\Omega}\boldsymbol{u}(\bar{\boldsymbol{x}})\cdot\nabla w(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}\Omega_{\bar{\boldsymbol{x}}}$$

- 近似函数的离散形式

$$u^h(x) = \sum_{J=1}^{N} w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_J)u_J\Delta V_J = \sum_{J=1}^{N} N_J(\boldsymbol{x})u_J \qquad \Delta V = \frac{m_J}{\rho_J}$$

$$= \sum_{J=1}^{N} w_J(\mathbf{x})\frac{m_J}{\rho_J}u_J \qquad \text{Shepard函数}$$

$$\rho^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{J=1}^{N} w_J(\mathbf{x})m_J$$

核函数近似

- 向量函数散度的离散形式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{u}(\bar{\boldsymbol{x}}) \cdot \nabla w(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}) \mathrm{d}\Omega_{\bar{\boldsymbol{x}}}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \approx \sum_{J=1}^{N} \frac{m_J}{\rho_J} \nabla w_J(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}_J$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_I) = -\frac{1}{\rho_I} \sum_{J=1}^{N} m_J [\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_I) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_J)] \cdot \nabla w_{IJ}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_I) = \rho_I \sum_{J=1}^{N} m_J \left(\frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_I)}{\rho_I^2} + \frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_J)}{\rho_J^2} \right) \cdot \nabla w_{IJ}$$

核函数近似

- 一致性

$$u^h(\mathbf{x}) = \int_\Omega w(\mathbf{x}-\mathbf{y},h)u(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\Omega_\mathbf{y}$$

$$\int_\Omega x w(x-\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x} = x$$

零阶： $\int_\Omega w(x-\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x} = 1$ — 权函数的归一性要求

一阶： $\int_\Omega w(x-\bar{x})\bar{x}\,\mathrm{d}\bar{x} = x$

$$\int_\Omega (x-\bar{x})w(x-\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x} = 0$$ — 在边界附近不满足

离散形式 $\sum_{I=1}^{N} N_I(x) = 1$ — 对非均匀布点不能满足

$$\sum_{I=1}^{N} (x-x_I)N_I(x) = 0$$ 不能保证收敛！

重构核函数近似

- 近似函数 $u(\mathbf{x})$为

$$u^h(\mathbf{x}) = \int_\Omega C(\mathbf{x},\bar{\mathbf{x}}) w\left(\frac{\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}}{a_0}\right) u(\bar{\mathbf{x}}) \mathrm{d}\Omega_{\bar{x}}$$

$C(\mathbf{x},\bar{\mathbf{x}})$ — 边界校正函数

$w\left(\frac{\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}}{a_0}\right)$ — 含伸缩系数的紧支核函数

❑ 近似函数的离散形式

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N} \left[C(\mathbf{x},\mathbf{x}_I) w\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_I}{a_0}\right) \Delta\Omega_I \right] u(\mathbf{x}_I)$$

重构核函数近似

- 如何确定校正函数？

$$C(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})$$

- 重构条件

$$m_1(\boldsymbol{x})=1$$

$$m_i(\boldsymbol{x})=0\quad i=2,3,\cdots,m$$

$$m_i(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\left[\int_{\Omega}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\,p_i(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})w(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}\Omega_{\bar{x}}\right]$$

  - 如果在RK和MLS中选取相同的权函数，并强迫RK满足k阶一致性条件，则RK和MLS等价；
  - 通过在校正函数中引入非多项式基函数，可以使RK具有重构任何非多项式函数的能力。

单位分解近似

- 单位分解条件 $\sum_I \phi_I(\boldsymbol{x}) = 1$

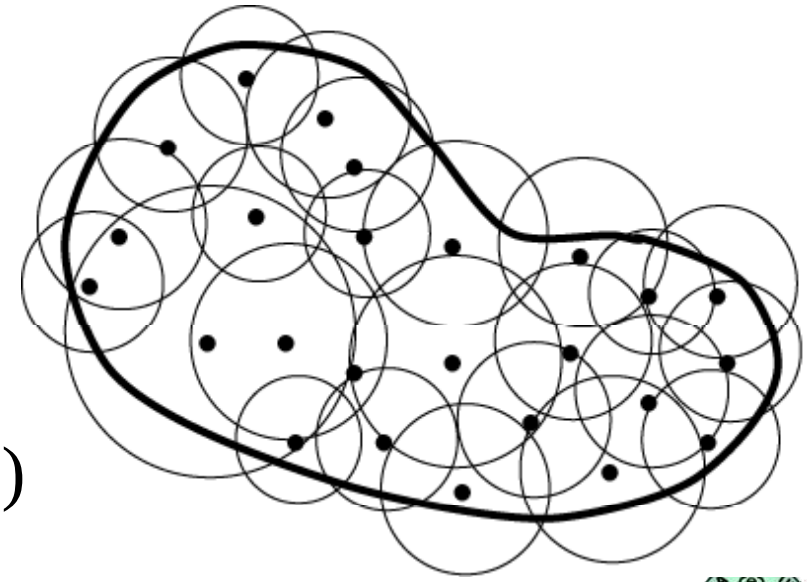
$\phi_I(\boldsymbol{x})$ — 定义在子域Ω_I上的非零函数

若函数$V_I(x)$为函数$u(\boldsymbol{x})$在子域Ω_I内的局部近似，则函数$u(\boldsymbol{x})$在求解域Ω的全局近似取为

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{N} \phi_I(\boldsymbol{x}) V_I(\boldsymbol{x})$$

$$V_I(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} b_{iI} \cdot q_i(\boldsymbol{x})$$

$$V_I(\boldsymbol{x}) = u_I + \sum_{i=1}^{m} b_{iI} \cdot q_i(\boldsymbol{x})$$



单位分解近似

- GEEM、PUFEM
  - 将有限元形函数取为单位分解函数
  - 单元积分
  - 本质边界条件易施加
- XFEM
  - 采用带符号的距离函数来描述不连续面

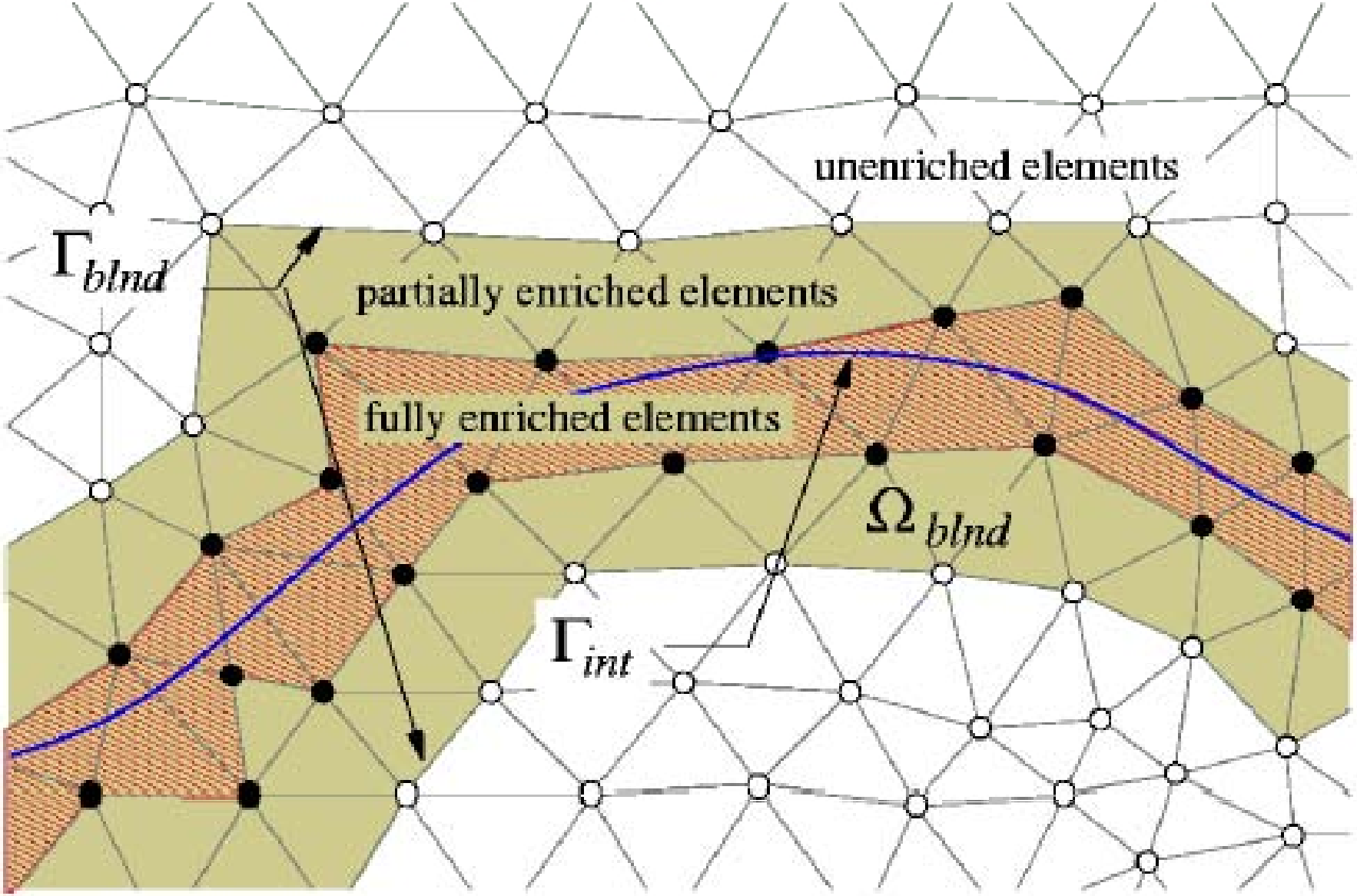
贯穿裂纹：$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_I N_I(\boldsymbol{x})(u_I + a_I\phi_I(\boldsymbol{x}))$

$$\phi_I(\boldsymbol{x}) = H(f_\alpha(\boldsymbol{x}))$$

$$f_\alpha(\boldsymbol{x}) = \min_{\bar{\boldsymbol{x}}\in\Gamma_\alpha} \| \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}} \| \text{sign}(\boldsymbol{n}^+ \cdot (\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}))$$

非贯穿裂纹：$\phi_I(\boldsymbol{x}) = \sum_\beta a_{I\beta} b_\beta(\boldsymbol{x})$

单位分解近似


unenriched elements
Γ_{blnd}
partially enriched elements
fully enriched elements
Ω_{blnd}
Γ_{int}

径向基函数

- 一类以点$\boldsymbol{x}$到节点$\boldsymbol{x}_I$的距离d_I为自变量的函数，也称为距离函数

$\phi(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_I\|)$ —— 中心位于节点$\boldsymbol{x}_I$的距离基函数

MQ： $\phi_I(\boldsymbol{x})=(c^2+d_I^2)^{1/2}$

RMQ： $\phi_I(\boldsymbol{x})=(c^2+d_I^2)^{-1/2}$

TPS： $\phi_I(\boldsymbol{x})=d_I^{2\beta}\log d_I$

Gaussians： $\phi_I(\boldsymbol{x})=e^{-cd_I^2}$

径向基函数

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{J=1}^{N} a_J \phi_J(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}$$

$$= \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{-1}$$

$$u^h(\boldsymbol{x}_I) = u_I$$

$$\sum_{J=1}^{N} a_J \phi_J(\boldsymbol{x}_I) = u_I \quad (I = 1, 2, \cdots, N)$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} \Longrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_1) \\ \boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(\boldsymbol{x}_1) & \phi_2(\boldsymbol{x}_1) & \cdots & \phi_N(\boldsymbol{x}_1) \\ \phi_1(\boldsymbol{x}_2) & \phi_2(\boldsymbol{x}_2) & \cdots & \phi_N(\boldsymbol{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(\boldsymbol{x}_N) & \phi_2(\boldsymbol{x}_N) & \cdots & \phi_N(\boldsymbol{x}_N) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u} = \left[u_1, u_2, \cdots, u_N\right]^{\mathrm{T}}$$

径向基函数

- 增加多项式基后，MQ插值正定

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{J=1}^{N} a_J \phi_J(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} b_i p_i(\boldsymbol{x})$$

$$= \boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a} + \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}$$

$$\sum_{J=1}^{N} a_J \phi_J(\boldsymbol{x}_I) + \sum_{i=1}^{m} b_i p_i(\boldsymbol{x}_I) = u_I \quad I = 1, 2, \cdots, N$$

$$\sum_{J=1}^{N} a_J p_i(\boldsymbol{x}_J) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

  - 如果$\boldsymbol{p}$中包含常数基和线性基，则插值具有一阶一致性；
  - Wang等采用局部形式 — 径向基点插值法

径向基函数

- Hermite型径向基函数插值

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_k(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{N_b} b_k \frac{\partial \phi_k(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}$$

点插值法

$$u^h(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})=\sum_{i=1}^{m}p_i(\bar{\boldsymbol{x}})a_i(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$$

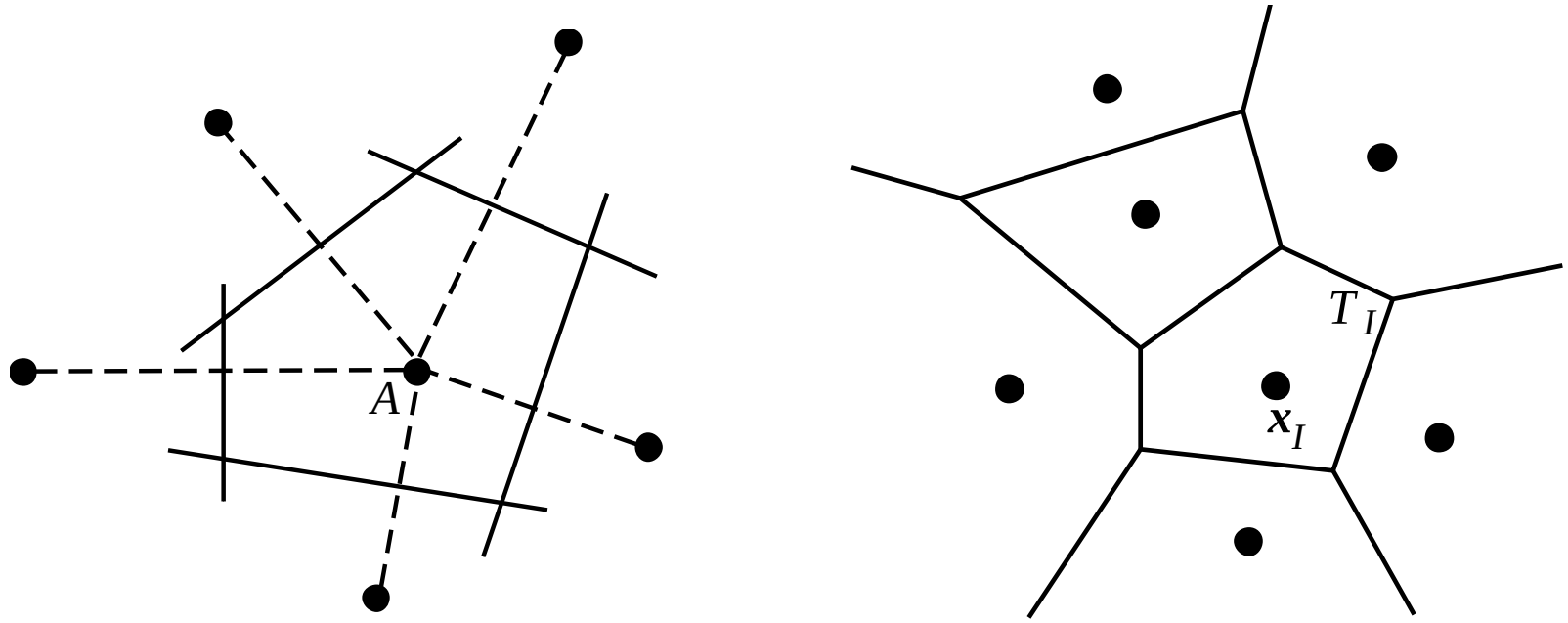
$$\Downarrow u^h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_I)=u_I$$

$$u^h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_I)=\sum_{i=1}^{m}p_i(\boldsymbol{x}_I)a_i(\boldsymbol{x})=u_I \quad I=1,2,\cdots,n$$

MLS：$n>m$，拟合

点插值：$n=m$，插值

自然邻接点插值



节点$\boldsymbol{x}_I$的Voronoi多边形： $T_I = \{\boldsymbol{x} \in R^2 : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I\| < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_J\|, \forall J \neq I\}$

节点集x_I的Voronoi 图：多边形T_I (I = 1, 2, …, N)的集合

自然邻接点插值

点x的自然邻接点： 与点x的Voronoi多边形$T_x(ABCD)$相邻的多边形所包含的节点

Sibson插值

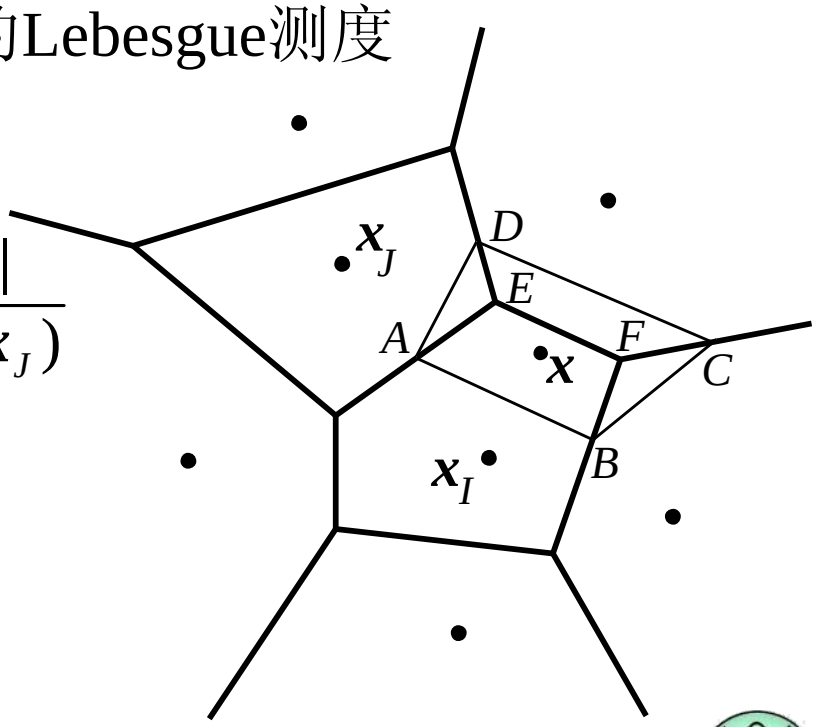
$$N_I(\boldsymbol{x}) = \frac{\kappa_I(\boldsymbol{x})}{\kappa(\boldsymbol{x})}$$

$\kappa(x)$ — T_x的Lebesgue测度

$\kappa_I(x)$ — T_{xI}的Lebesgue测度

非Sibson插值

$$N_I(\boldsymbol{x}) = \frac{\alpha_I(\boldsymbol{x})}{\sum_{J=1}^{n}\alpha_J(\boldsymbol{x})},\ \alpha_J(\boldsymbol{x}) = \frac{|t_{xJ}|}{d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_J)}$$



$|t_{xI}|$ — t_{xI}的Lebesgue测度

$$t_{xI} = (T_x \cup \partial T_x) \cap (T_I \cup \partial T_I)$$

自然邻接点插值

- Sibson插值
  - 形函数除了在节点上是C^0连续的，在其他点上都是C^∞连续的
  - 对于一维问题，与线性有限元等价
  - 只可以重构线性基
  - 对非凸边界，因内部节点形函数在边界上不为零，在施加本质边界条件时会造成一定的误差
- 非Sibson插值
  - 采用空间维数低一维的测度建立近似函数，计算量更小
  - 在边界上严格线性，适用于凸边界和凹边界