

无网格法的理论及其应用

张 雄

清华大学航天航空学院

参考文献

- 张雄，刘岩. 无网格法，清华大学出版社/ Springer，2004
- 张雄，宋康祖，陆明万. 无网格法的研究进展及其应用. 计算力学学报，20(6):730-742，2003
- http://www.dynamics.tsinghua.edu.cn/xzhang 程序下载：MATLAB、OMLL
- 计算力学专业委员会会刊 http://www.dynamics.tsinghua.edu.cn/commec

无网格法的理论及其应用

- 有限元法存在的某些困难
- 无网格法的研究历史
- 紧支试函数加权残量法
  - 紧支试函数
  - 加权残量法
- 无网格法总结
- 无网格法的应用

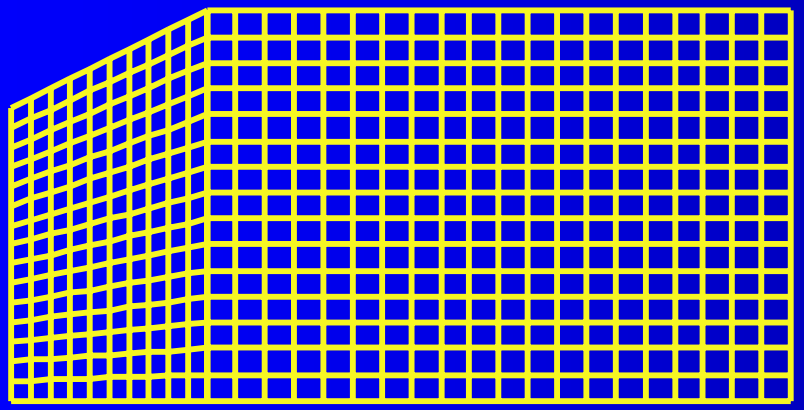


有限元法存在的某些困难

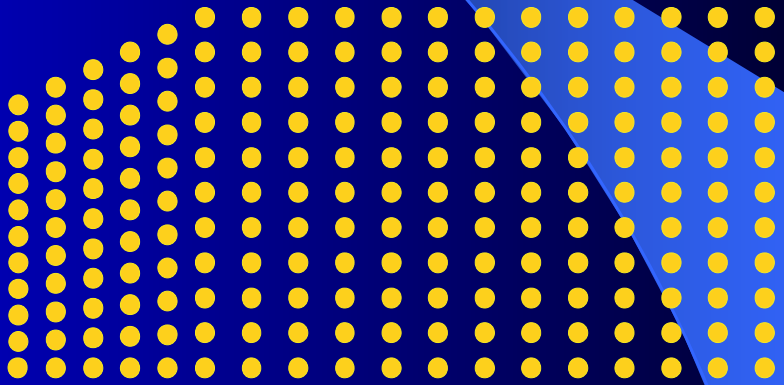
- 冲压成型：网格畸变
- 裂纹动态扩展：网格重分
- 高速碰撞：网格畸变
- 奇异性问题：解析函数
- 自适应问题：网格重分(h)、近似函数(p)
- 应变局部化：网格重分
- 薄壳问题：近似函数高阶连续性问题
- 复杂三维结构有限元网格的生成

有限元法存在的某些困难

- 无网格法是直接利用分布在求解域中的离散点来构造近似函数的一种求解偏微分方程的数值方法。不需要借助于网格。



有限元法



无网格法

对某些特殊问题，无网格法很有效。

无网格法的理论及其应用

- 有限元法存在的某些困难
- **无网格法的研究历史**
- 紧支试函数加权残量法
  - 紧支试函数
  - 加权残量法
- 无网格法总结
- 无网格法的应用



无网格法的研究历史

- 七十年代：非规则网格有限差分法
- 1977年：光滑质点流体动力学方法 SPH
  - 归一化光滑函数算法 —— 分片试验
  - 不稳定的起因及稳定化方案
  - 克服零能模态的具体方案
  - MLSPH
  - 水下爆炸仿真模拟、高速碰撞等



无网格法的研究历史

- 1992年：散射元法 (Nayroles等)
- 1994年：无单元Galerkin法（Belytschko）
  - 动态裂纹扩展数值模拟
  - 三维撞击、流体晃动分析
  - 板壳分析
  - EFG和有限元、边界元法耦合
  - 相变问题；扩散问题
  - 边界条件处理
  - 节理岩体的分析

无网格法的研究历史

- 1995年：重构核点法（Liu等、RKPM）
  - 多尺度分析、自适应分析
  - 结构动力学
  - 流体动力学
  - 动态断裂和局部化
  - 金属加工成形
  - 中厚梁板
  - 微电子机械系统
  - 纳米管起皱

某些情况下与EFG等价！



无网格法的研究历史

- 1996年：有限点法（Onate等，FPM）
  - 流体动力学
  - 弹塑性分析 固体力学学报英文版
- 1996年：Hp 云团法 (Oden等、Hp Clouds)
  - 铁摩辛柯梁问题
  - 厚板的弯曲问题
  - 平面裂纹问题的自适应分析
  - 基于云团法的新型hp有限元
  - Hp无网格云团法

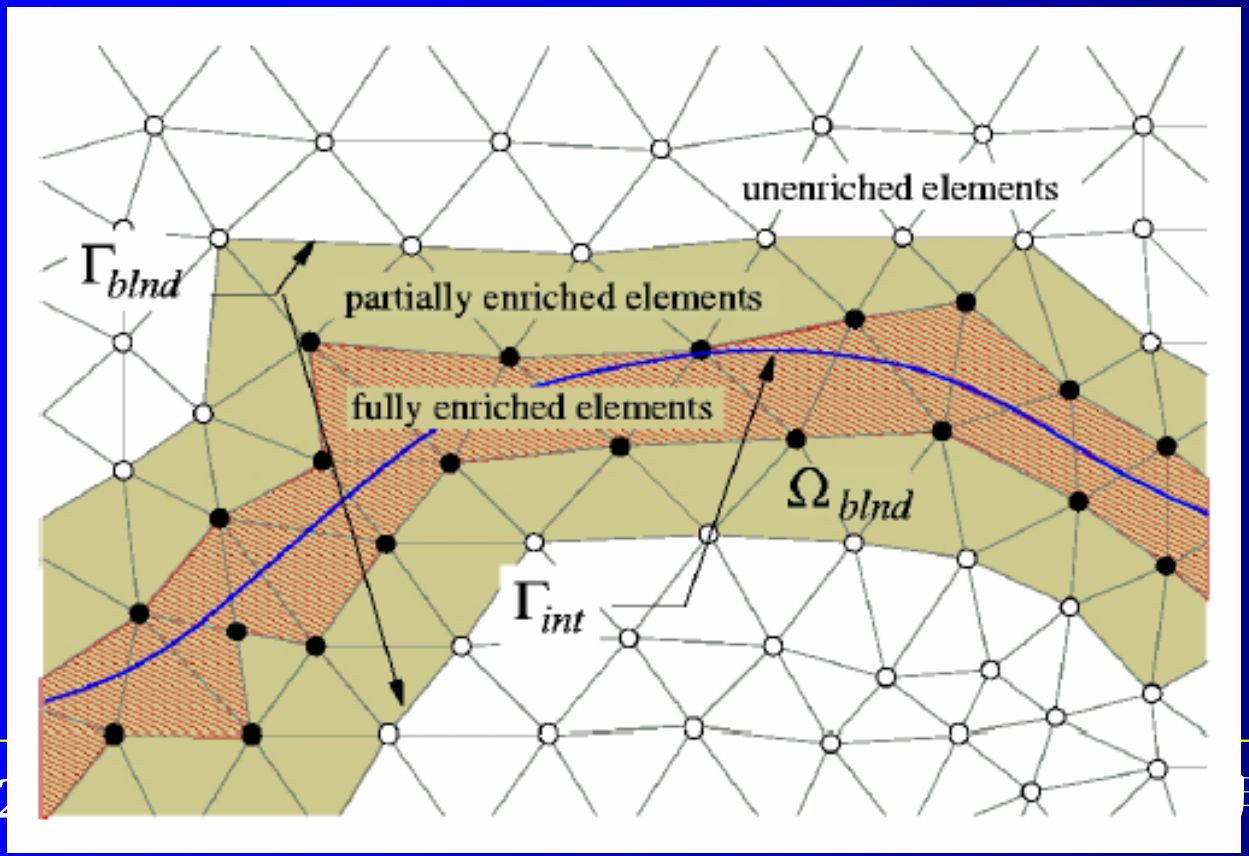
无网格法的研究历史

- 1996年：单位分解有限元法和广义有限元法（Babuska等）
  - 动态裂纹扩展问题
  - 奇异问题
- 1998年：局部边界积分方程法(Atluri等、LBIE)和无网格局部Petrov-Galerkin法(MLPG)

无网格法的研究历史

- 将无网格法的思想引入有限元法中
  - PUFEM — Babuska，1996
  - GFEM — Duarte
  - XFEM — Belytschko

动态裂纹扩展
节理岩体
应变局部化



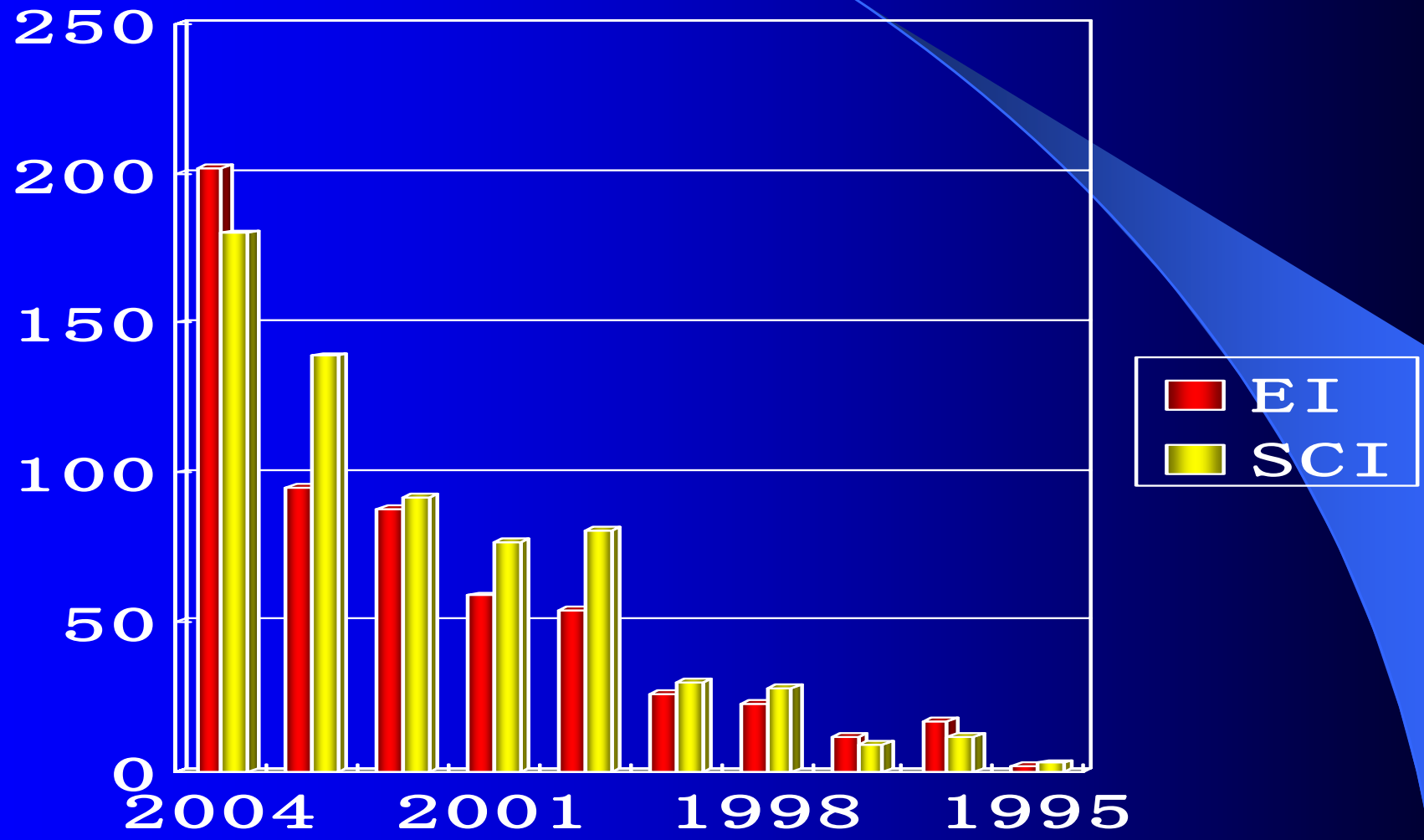
网格连续
近似函数不连续

无网格法的研究历史

- 2000年：紧支径向基函数配点法
- 2001年：最小二乘配点无网格法
- 2001年：加权最小二乘无网格法
- 2003年：伽辽金最小二乘无网格法
- 2003年：伽辽金配点无网格法
- 2004年：边界弱形式配点法
- 2005年：物质点有限元法



无网格法的研究历史



无网格法的研究历史

- 1996年 **Computer Methods in Engineering Mechanics and Engineering** 出版了无网格法专辑（139卷）
- 2000年 **Computational Mechanics** 出版了无网格法专辑（25卷，2-3期）
- 近年来许多著名数值方法国际会议都设置了无网格法的主题会。
- 许多著名有限元专家，如Zienkiewicz、Belytscho、Atluri、WK Liu、KJ Bathe等都对无网格法进行了深入研究。

无网格法的理论及其应用

- 有限元法存在的某些困难
- 无网格法的研究历史
- **紧支试函数加权残量法**
  - **紧支试函数**
  - **加权残量法**
- 无网格法总结
- 无网格法的应用



紧支试函数加权残量法

加权残量法

- 配点法、伽辽金法、最小二乘法等
- 试函数为定义在全域中的函数，系数矩阵为满阵，计算量大

紧支试函数

- 只定义在局部域中

紧支试函数加权残量法

系数矩阵为带状稀疏阵，计算量小

无网格法的理论及其应用

- 有限元法存在的某些困难
- 无网格法的研究历史
- 紧支试函数加权残量法
  - **紧支试函数**
  - 加权残量法
- 无网格法总结
- 无网格法的应用



紧支试函数

- 核函数近似 (Kernel approximation)
- 重构核近似（Reproducing Kernel approx.）
- 移动最小二乘法 (Moving Least Square)
- 单位分解法 (Partition of Unity)
- 距离函数（Radial basis functions）
- 点插值法（Point interpolation method）

核函数近似

- 函数 $u(\mathbf{x})$ 用积分核变换近似

$$u^h(\mathbf{x}) = \int_\Omega w(\mathbf{x}-\mathbf{y}, h) u(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Omega_\mathrm{y}$$

$u^h(\mathbf{x})$ —— 近似函数

$w(\mathbf{x}-\mathbf{y}, h)$ —— 核函数或权函数；紧支性

- 近似函数的离散形式

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{N} w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \cdot u_i \cdot \Delta V_i = \sum_{i=1}^{N} \phi_i \cdot u_i$$

核函数近似

- 一致性

$$\int_\Omega x w(x-\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x} = x$$

零阶：$\int_\Omega w(x-\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x} = 1$ — 权函数的归一性要求

一阶：$\int_\Omega w(x-\bar{x})\bar{x}\,\mathrm{d}\bar{x} = x$

$$\int_\Omega (x-\bar{x}) w(x-\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x} = 0$$ — 在边界附近不满足

离散形式 $\sum_{I=1}^{N} N_I(x) = 1$

— 对非均匀布点不能满足

$$\sum_{I=1}^{N} (x-x_I) N_I(x) = 0$$

重构核函数近似

- 近似函数 $u(\mathbf{x})$ 为

$$u^h(\mathbf{x}) = \int_\Omega C(a_0, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \phi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{a_0}\right) \cdot u(\mathbf{y}) \mathrm{d}\Omega_y$$

$C(a_0, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ — 边界校正函数

$\phi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{a_0}\right)$ — 含伸缩系数的紧支核函数

- 近似函数的离散形式

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \left[C(a_0, \mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \cdot \phi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_i}{a_0}\right) \cdot \Delta\Omega_i \right] u(\mathbf{x}_i)$$

移动最小二乘近似

- 近似函数

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} P_i(\mathbf{x}) \cdot a_i(\mathbf{x}) = \boldsymbol{P}(\mathbf{x})\boldsymbol{a}(\mathbf{x})$$

$P_i(\mathbf{x})$ —— 基函数（多项式或其它已知函数）

$a_i(\mathbf{x})$ —— 待定系数

移动最小二乘近似

- 待定系数的确定
  - 有限元法 —— 令$u^h(\mathbf{x})$在单元节点i处等于函数$u(\mathbf{x})$在该节点处的函数值u_i
  - 特点
    - ✓待定系数的个数必须等于单元自由度
    - ✓$u^h(\mathbf{x}_i) = u(\mathbf{x}_i)$ —— 具有插值特性
    - ✓依赖于网格

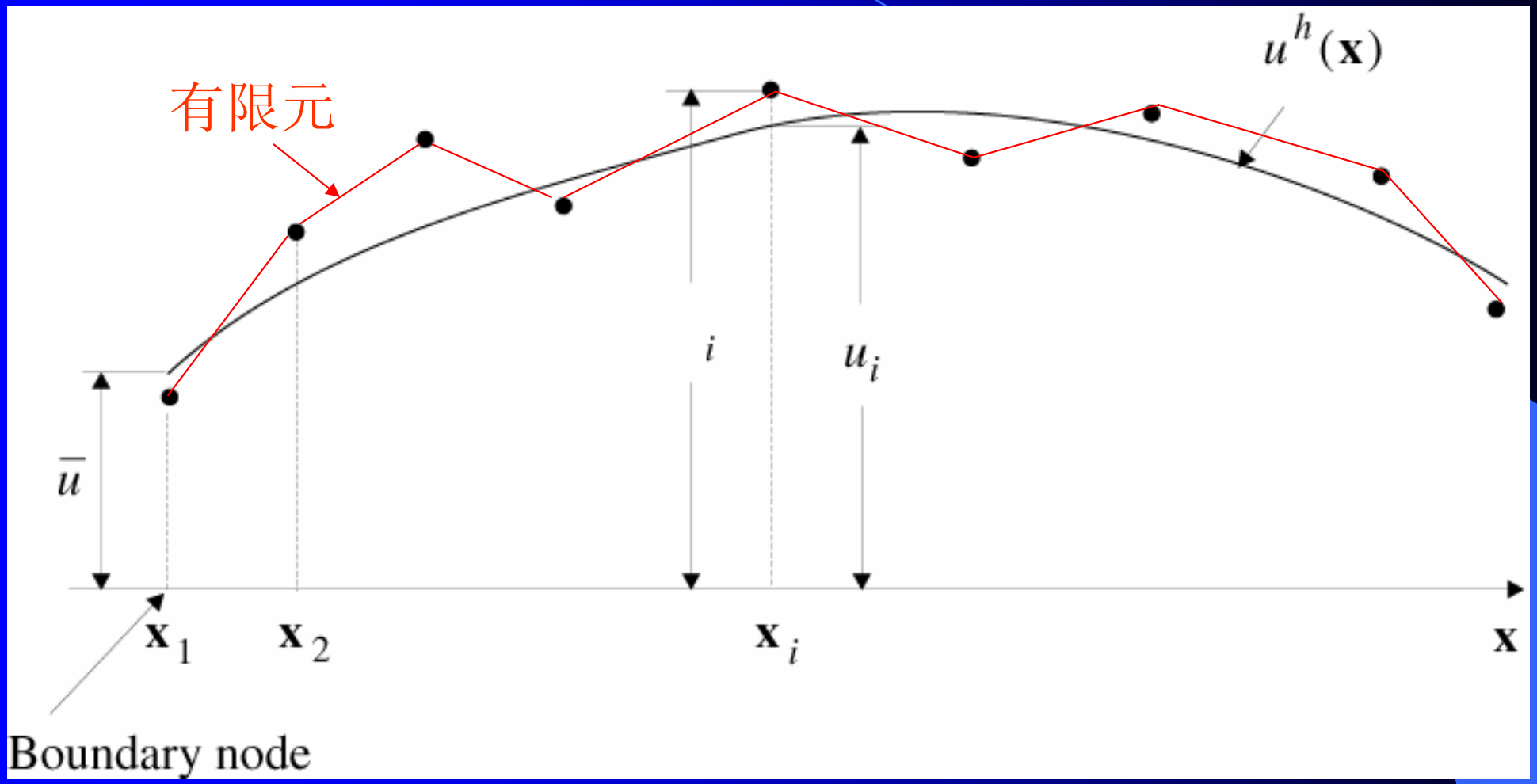


移动最小二乘近似

- 待定系数的确定
  - MLS — 使$u^h(\mathbf{x})$在节点处的误差在加权最小二乘意义下取极小值
  - 特点
    - ✓ 精度高，并且可具有高阶连续性
    - ✓ 能够精确重构基中的任何函数
    - ✓ 计算量大，需解决矩阵的奇异性问题
    - ✓ $u^h(\mathbf{x}_i) \neq u(\mathbf{x}_i)$ — 不具有插值特性（拟合）



移动最小二乘近似


$u^h(\mathbf{x})$
有限元
i
u_i
$\bar{u}$
$\mathbf{x}_1$
$\mathbf{x}_2$
$\mathbf{x}_i$
$\mathbf{x}$
Boundary node

移动最小二乘近似

- MLS和RK的等价性
  - 在MLS中将原点移到点x处

$$p(x_I) \Rightarrow p(x - x_I)$$

$$p(x) \Rightarrow p(0)$$

  - 在RK中取$\Delta V_I = 1$
  - RK和MLS中选取相同的权函数，并强迫RK满足k阶一致性条件

单位分解近似

- 单位分解条件 $\sum_I \phi_I(\mathbf{x}) = 1$

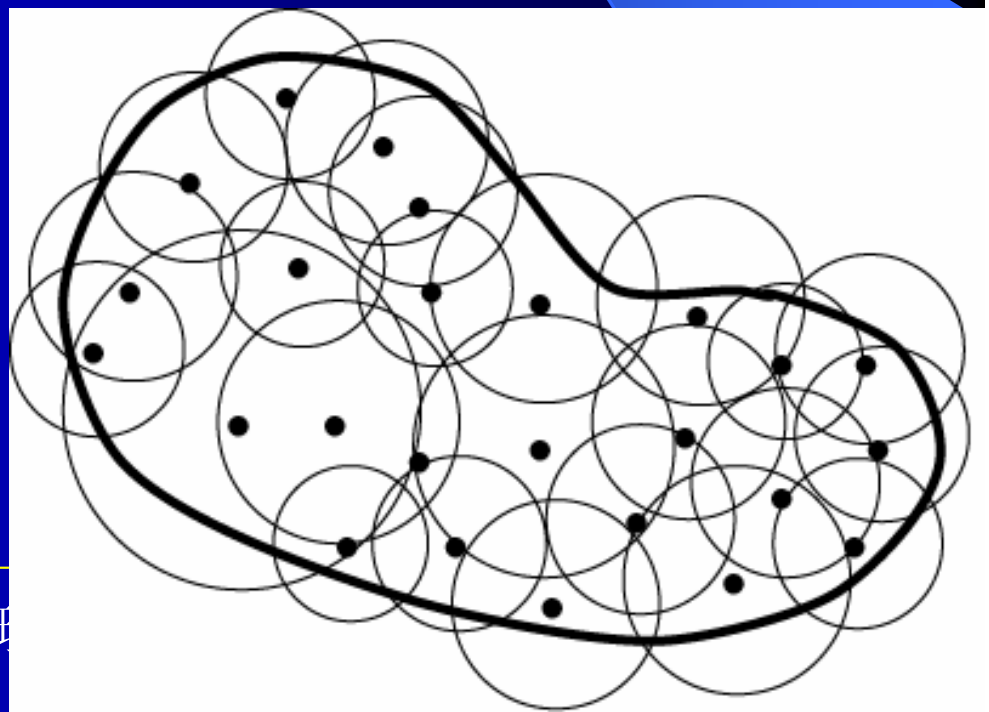
$\phi_I(\mathbf{x})$ —— 定义在子域上Ω_I的非零函数

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_I \phi_I^k(\mathbf{x}) \cdot (u_I + \sum_{i=1}^{m} b_{iI} \cdot q_i(\mathbf{x}))$$ hp云团法

$q_i(\mathbf{x})$ —— 基函数

$u_I = u(\mathbf{x}_I)$

b_{iI} —— 待定系数



距离函数

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N} c_k \cdot \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|)$$

$$\Downarrow \quad g(\mathbf{x}_i) = f_i$$

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \cdot \phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\|) = f_i \quad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

$\phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|)$ —— 中心位于节点$\mathbf{x}_k$的距离基函数

TPS，MQ，指数，紧支径向基函数

距离函数

MQ是条件正定的：

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N} c_k \cdot \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|) + \sum_{i=1}^{m} b_i p_i(\mathbf{x})$$

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \cdot \phi(\|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_k\|) + \sum_{i=1}^{m} b_i p_i(\mathbf{x}_I) = u_I, \quad I = 1, 2, \cdots, N$$

$$\sum_{k=1}^{N} c_k p_i(\mathbf{x}_k) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

具有一阶一致性

点插值法

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} P_i(\mathbf{x}) \cdot a_i(\mathbf{x}) = \boldsymbol{P}(\mathbf{x})\boldsymbol{a}(\mathbf{x})$$

与MLS类似，但取$n = m$

- 是一种插值
- 系数矩阵的奇异性问题

基于径向基函数的点插值法

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N} c_k \cdot \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|) + \sum_{i=1}^{m} b_i p_i(\mathbf{x})$$

无网格法的理论及其应用

- 有限元法存在的某些困难
- 无网格法的研究历史
- 紧支试函数加权残量法
  - 紧支试函数
  - **加权残量法**
- 无网格法总结
- 无网格法的应用



加权残量法

❑ 控制方程

$$A(u(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{In } \Omega$$

$$B(u(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{On } \Gamma$$

$$\int_{\Omega} WA(u^h(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}B(u^h(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\Gamma = 0$$

加权残量法

- Galerkin
- Collocation
- Local Petrov Galerkin
- Least Square Collocation
- Weighted Least Square
- Galerkin Least Square
- Galerkin Collocation

Collocation

- 微分方程在域内节点处满足，边界条件在边界节点处满足

$$A(u^h(\mathbf{x}_I)) = 0 \quad \forall \mathbf{x}_I \in \Omega$$

$$B(u^h(\mathbf{x}_I)) = 0 \quad \forall \mathbf{x}_I \in \Gamma$$

  - 计算效率高，方法简单
  - 精度差，稳定性差
  - 系数矩阵不对称

Galerkin

- 在域内取$W=\phi_J$，在边界上取 $\overline{W}=-\phi_J$

$$\int_\Omega \phi_J[A(u^h(\mathrm{x}))]d\Omega-\int_\Gamma \phi_J[B(u^h(\mathrm{x}))]d\Gamma=0$$

  - 计算量大
  - 精度高，稳定性好
  - 系数矩阵对称



Galerkin

- 积分
  - 背景网格积分
  - 有限元网格积分
  - 节点积分（稳定化方案）
  - 单位分解积分
- 本质边界条件的处理
  - 拉格朗日乘子法
  - 修正变分原理
  - 罚函数法
  - 位移约束方程法
  - 变换法

Local Petrov-Galerkin

- 残差在各个节点的子域中消除，且 $W \neq \phi_J$

$$\int_{\Omega_I} WA(u^h(\mathrm{x}))\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_I} \bar{W}B(u^h(\mathrm{x}))\mathrm{d}\Gamma = 0$$

  - 不需要背景网格
  - 需使用特殊的积分方案
  - 系数矩阵不对称

Least square collocation

- 除节点外，在域内设置一些辅助点。边界条件在边界上严格满足，微分方程在节点和辅助点上在最小二乘意义下满足。

$$n = n_\Omega + n_b$$

$$A(u^h(\mathbf{x}_I)) = 0 \qquad I = 1, 2, \cdots, n + n_a$$
$$B(u^h(\mathbf{x}_I)) = 0 \qquad I = 1, 2, \cdots, n_b$$

$$\text{NDOF} = n \qquad \text{NEQS} = n + n_a + n_b$$

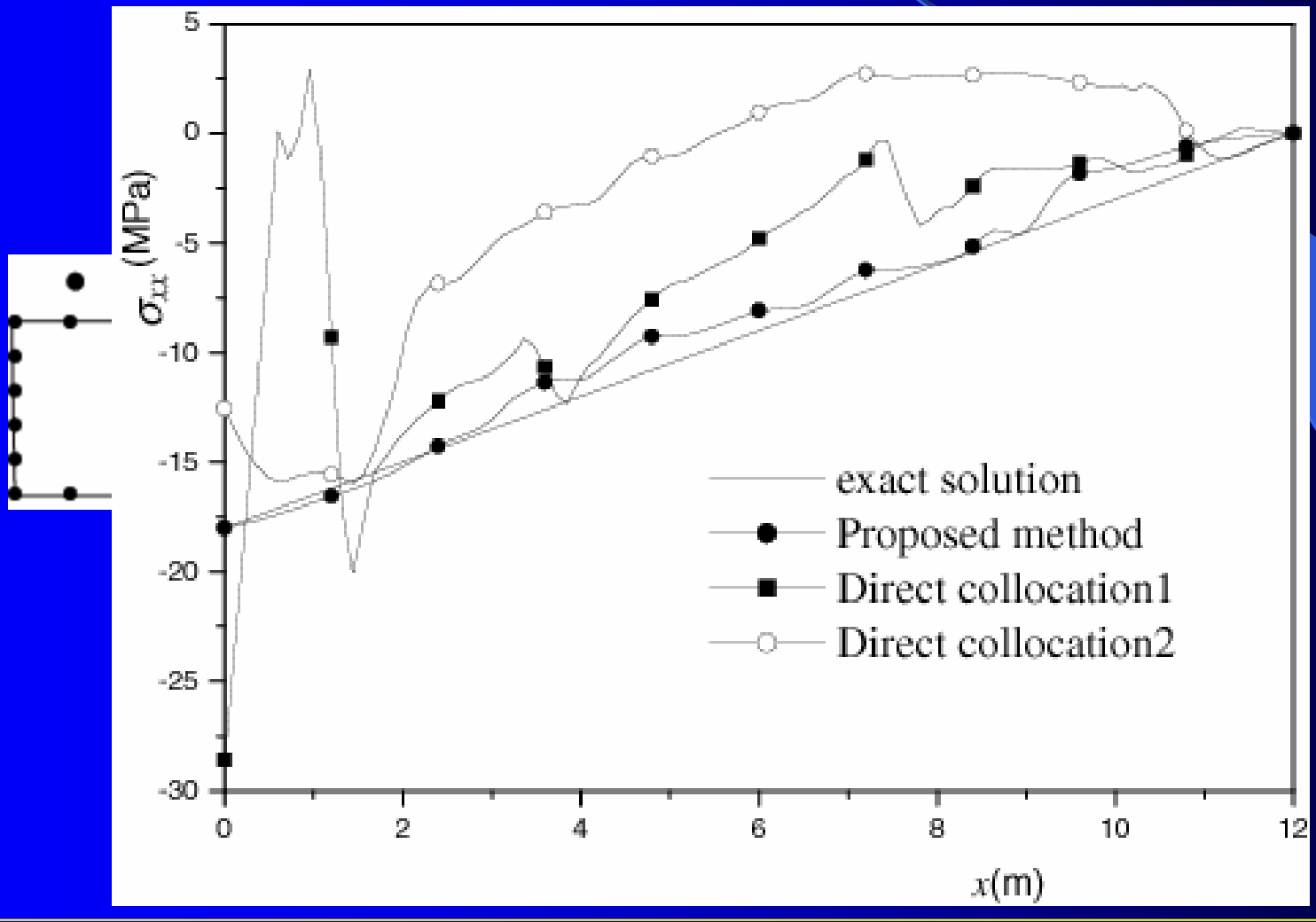
Least square collocation

- 特点
  - 效率高
  - 精度高
  - 稳定性好
  - 系数矩阵不对称



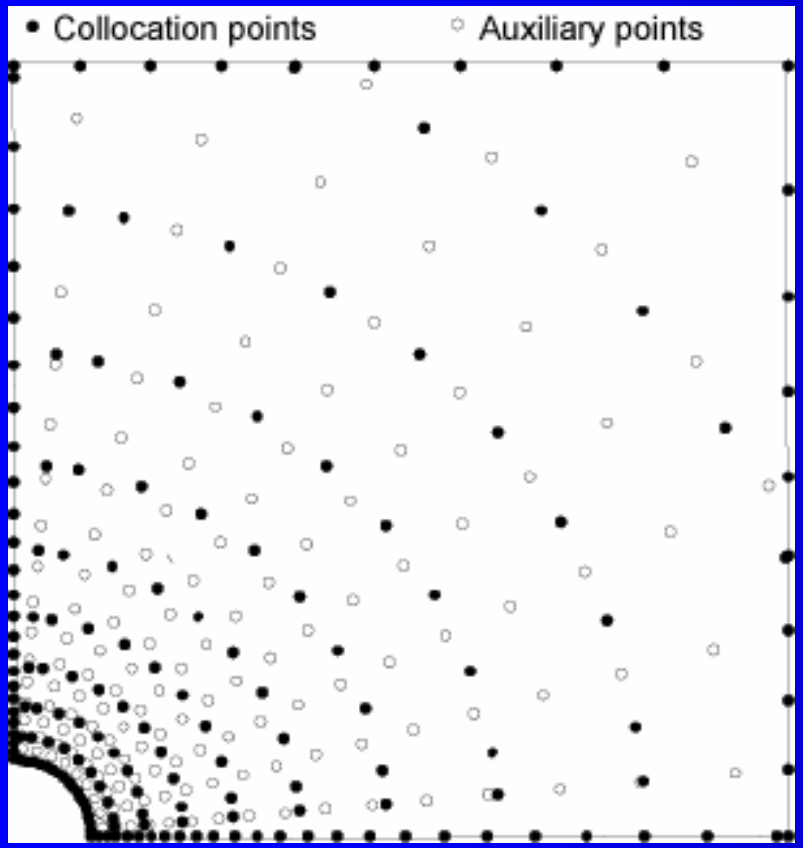
Least square collocation

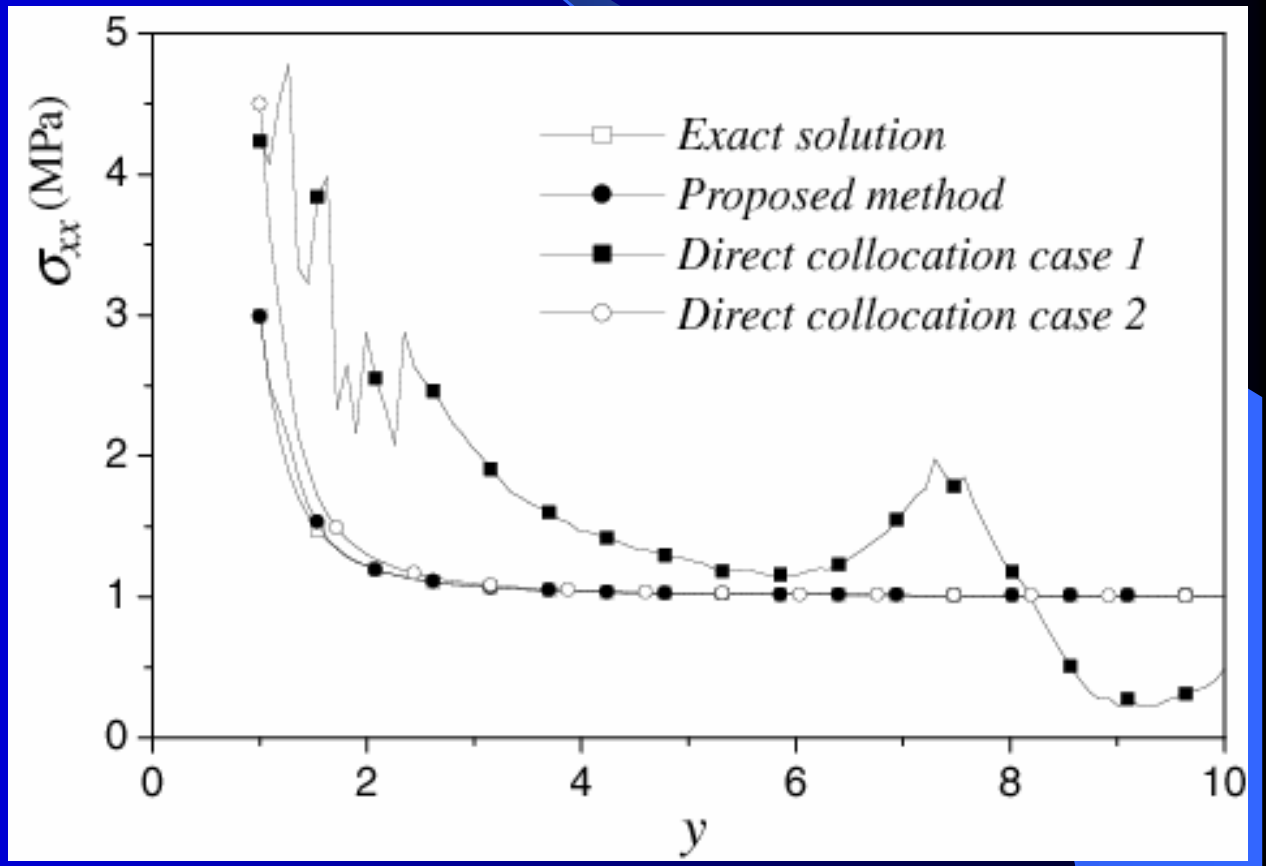
- 数值算例 —— 悬臂梁



Least square collocation

□ 数值算例 — 单向拉伸开孔方板





Weighted Least Square

$$\Pi = \int_{\Omega} A(u^h(\mathrm{x}))^2 \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_u} \alpha B(u^h(\mathrm{x}))^2 \,\mathrm{d}\Gamma$$

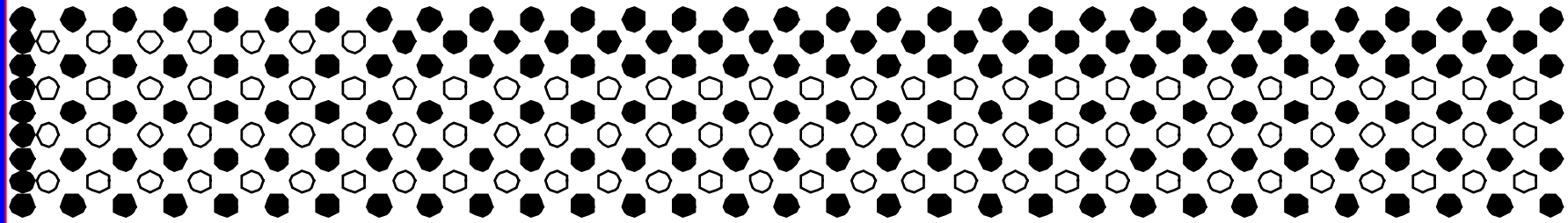
$$\Pi = \sum_{i=1}^{n+n_a} A(u^h(\mathrm{x}_i))^2 + \sum_{j=1}^{n_b} \alpha B(u^h(\mathrm{x}_i))^2$$

- 系数矩阵对称
- 稳定性好，精度高
- 欧拉方程不是原问题的微分方程，而是其高阶导数—可能给出虚假结果

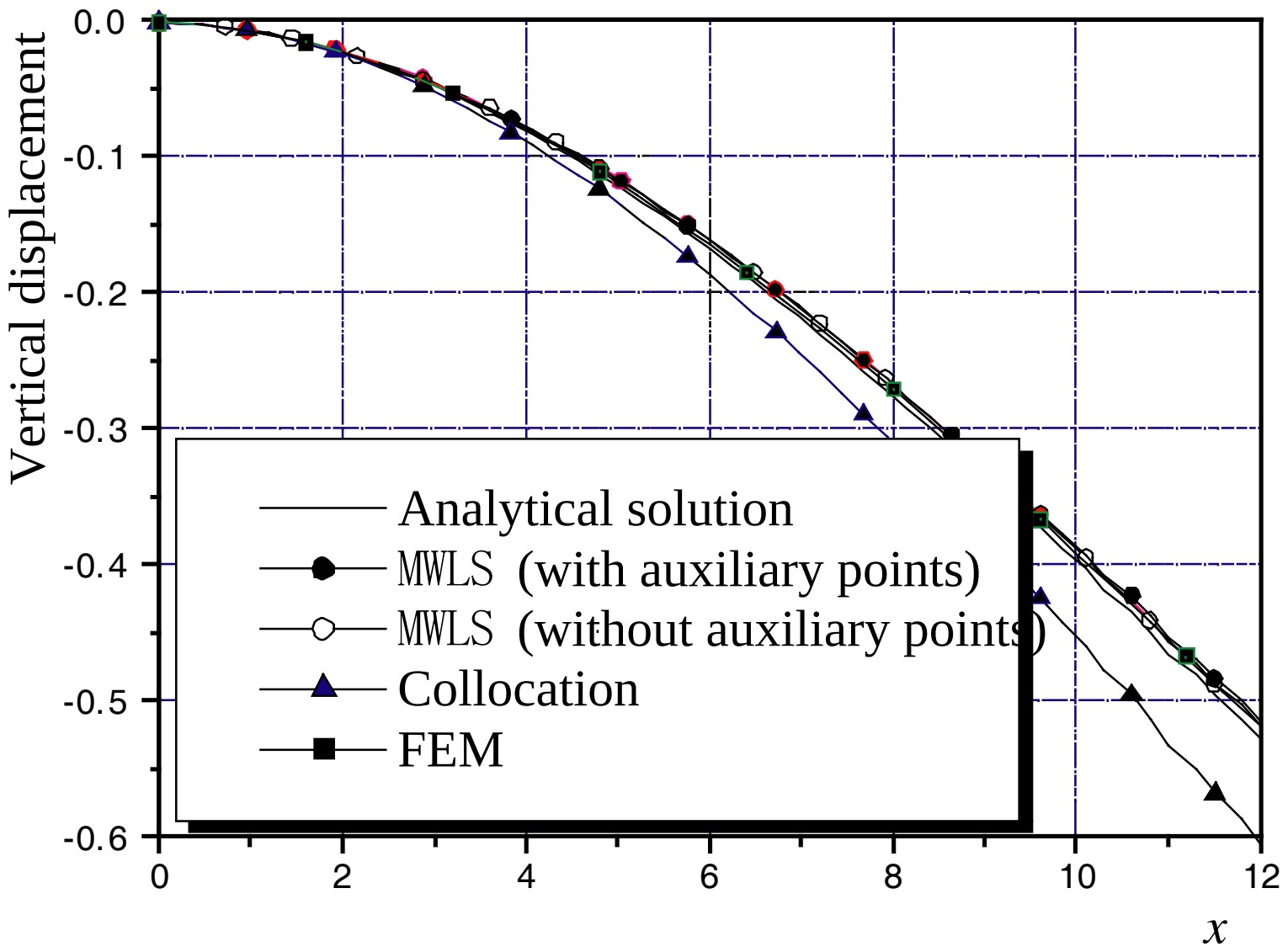


Weighted Least Square

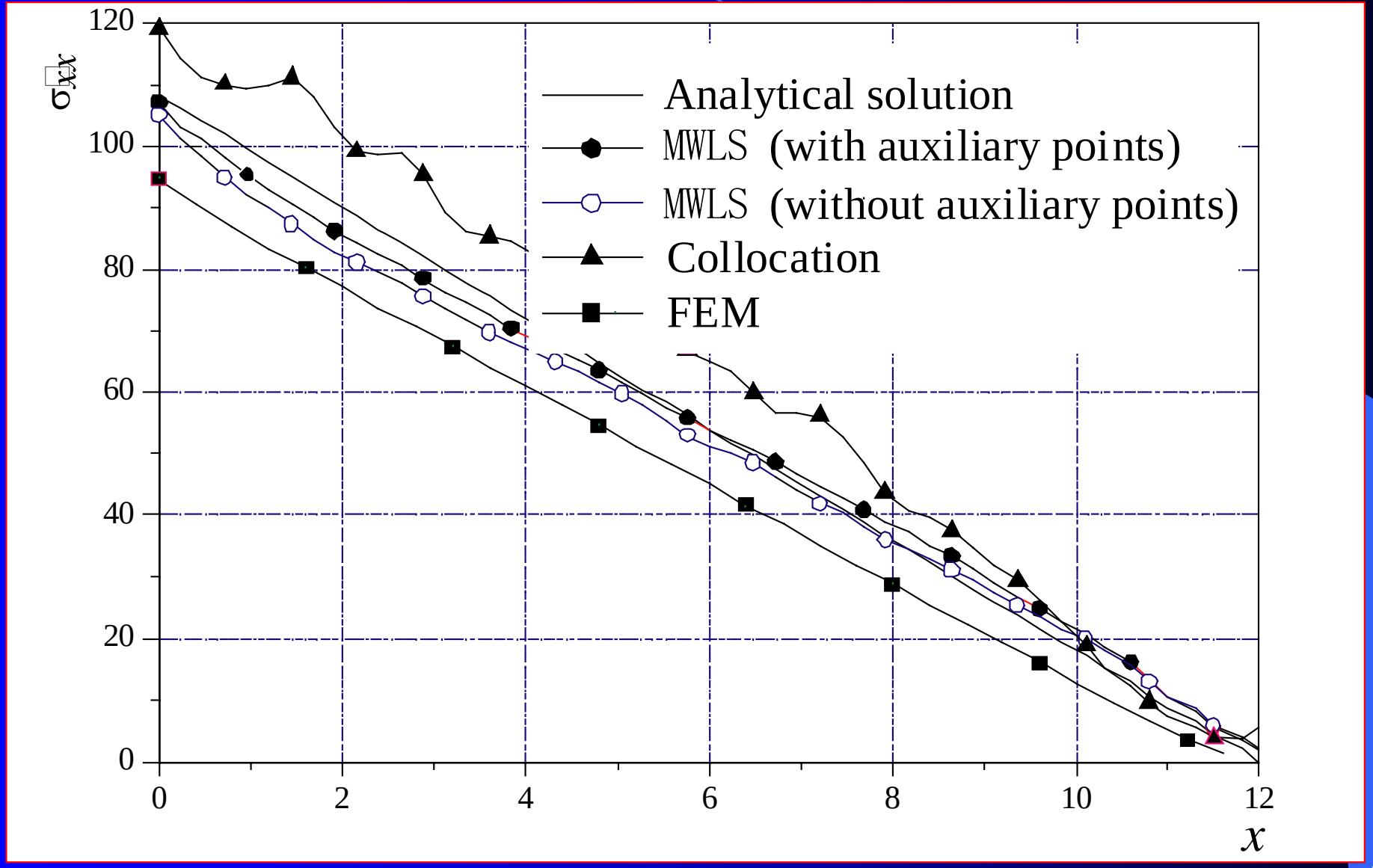
● nodes ○ auxiliary points



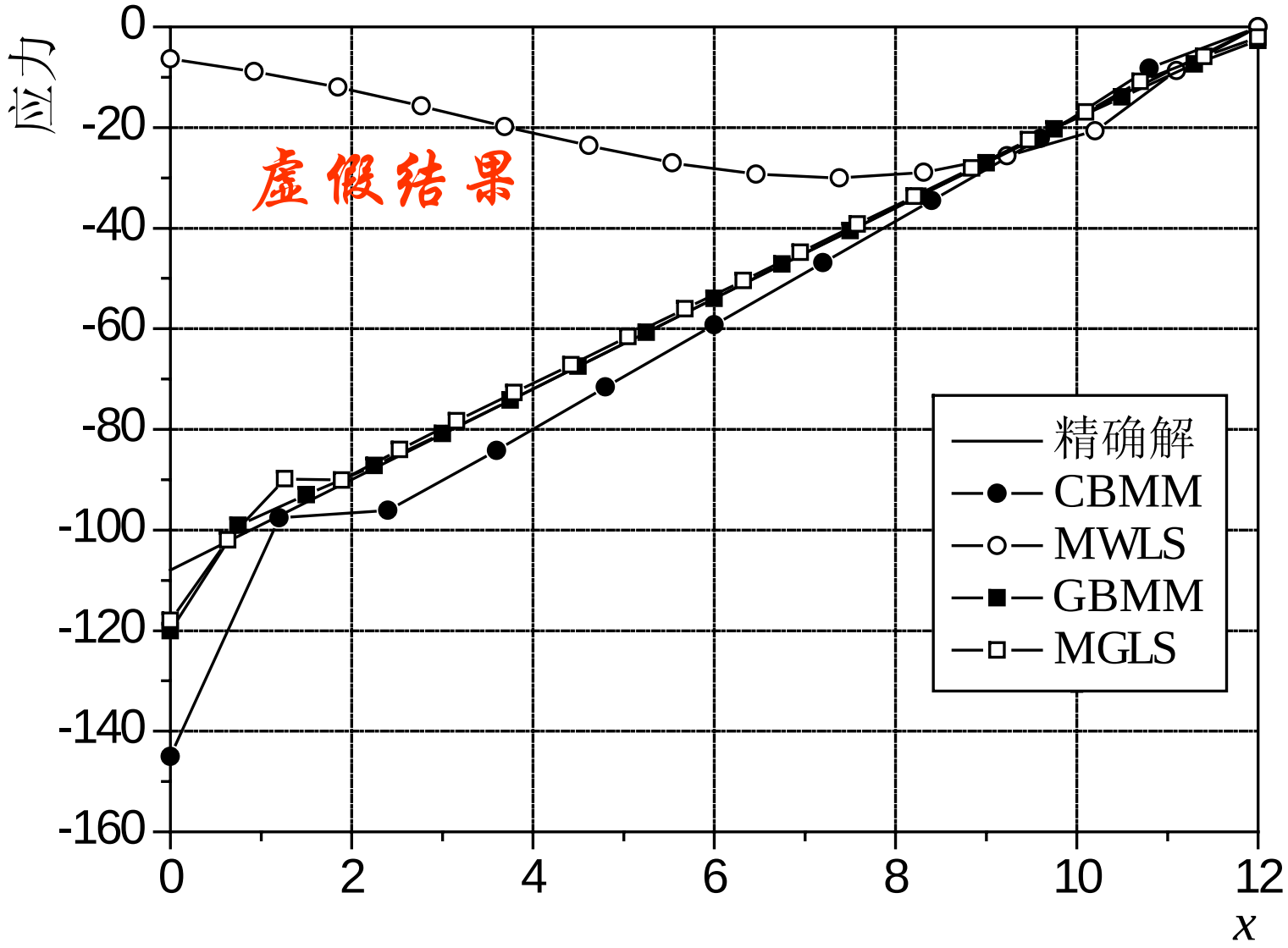
Weighted Least Square



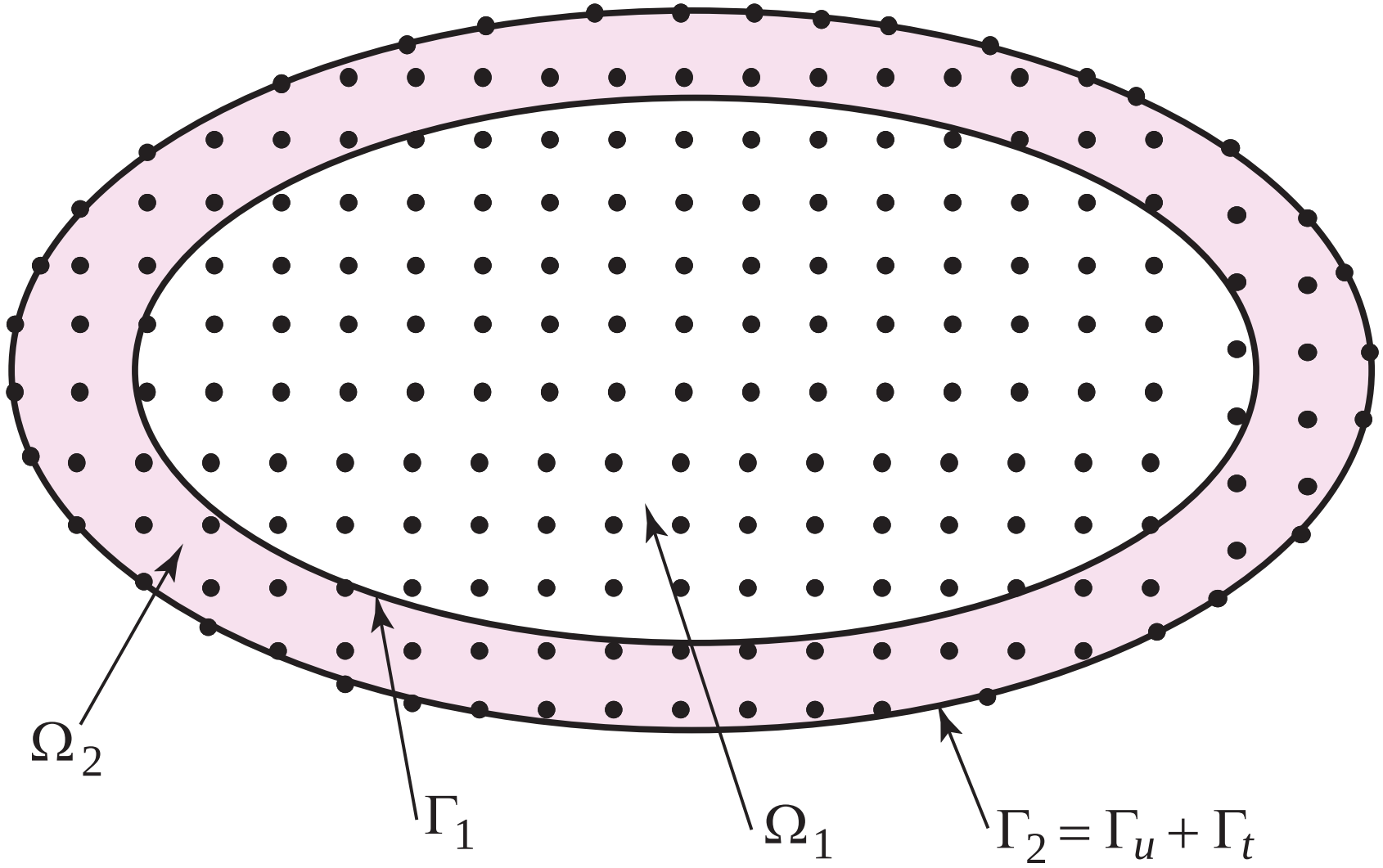
Weighted Least Square



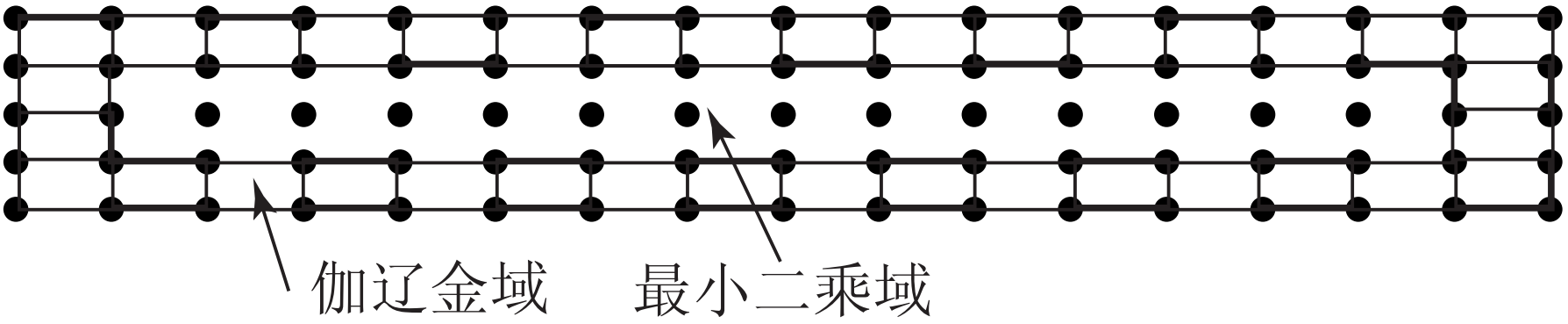
Weighted Least Square



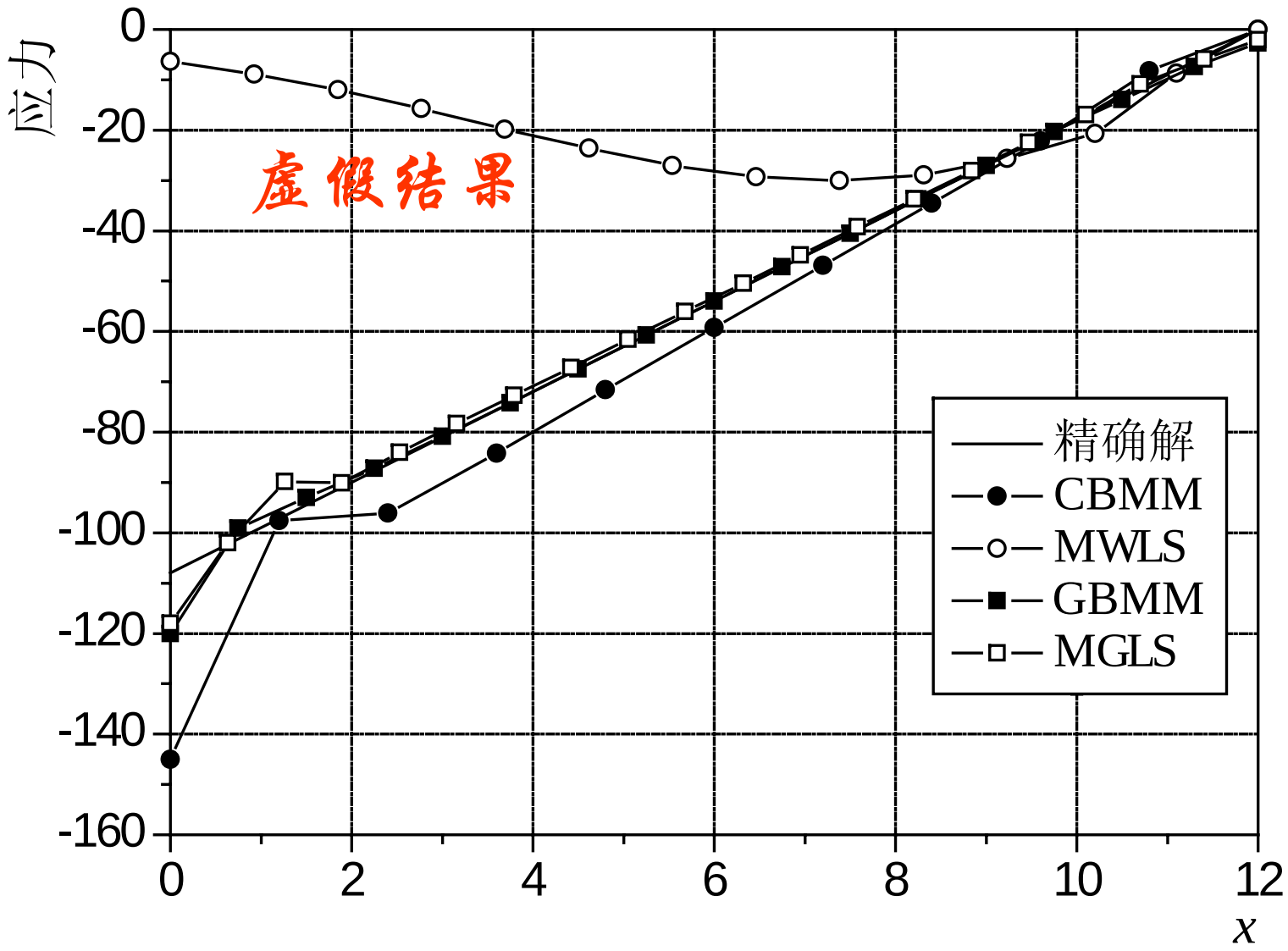
Galerkin Least Square



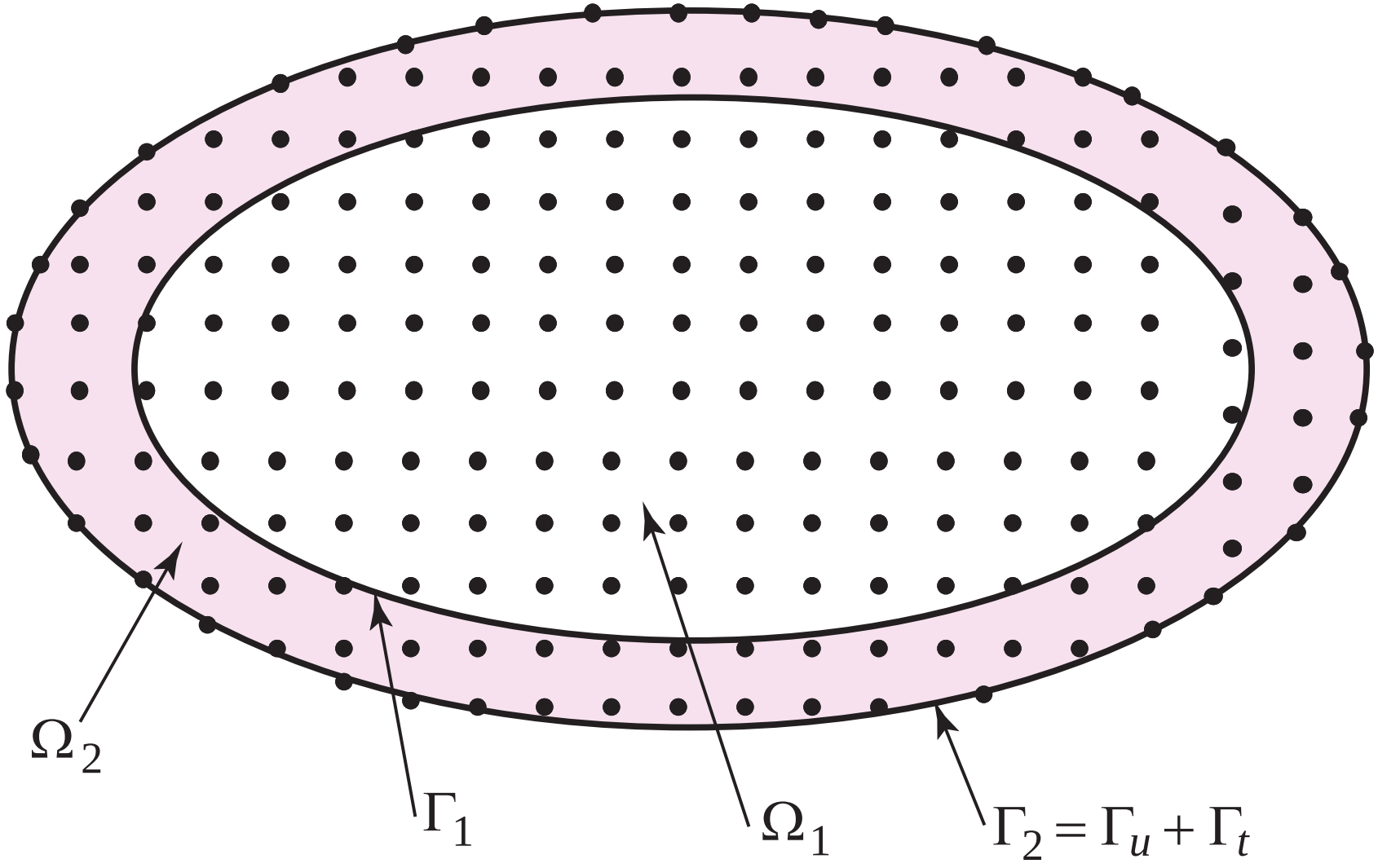
Galerkin Least Square



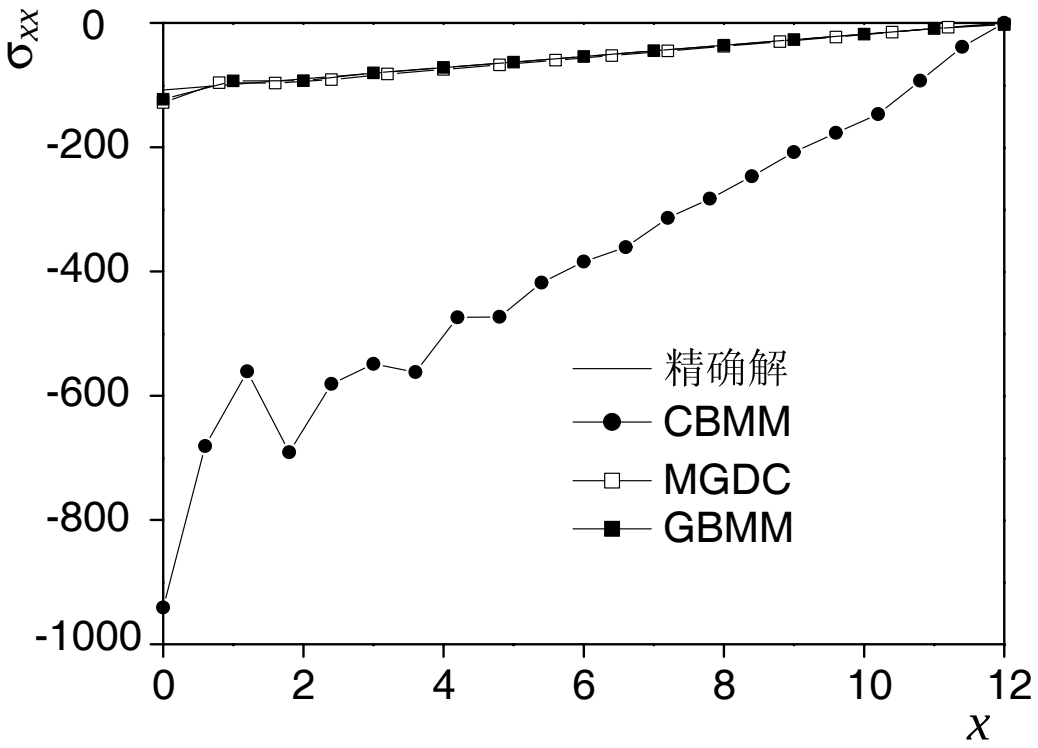
Galerkin Least Square



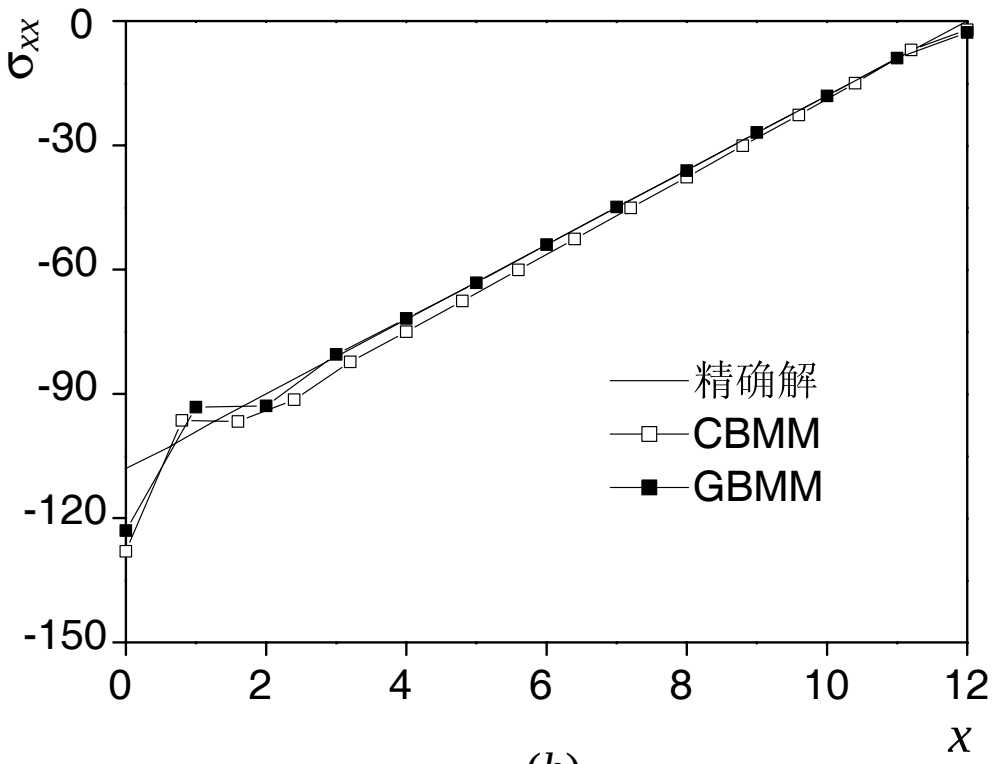
Galerkin Collocation



Galerkin Collocation



(a)



(b)

无网格法的理论及其应用

- 有限元法存在的某些困难
- 无网格法的研究历史
- 紧支试函数加权残量法
  - 紧支试函数
  - 加权残量法
- **无网格法总结**
- 无网格法的应用



无网格法总结

编号	名　称	代表学者	近似函数	残差消除	背景网格
1	Smoothed Particle Hydrodynamics	Lucy 1977	核函数	Collocation	否
2	Diffuse Element Method	Nayroles 1992	MLS	Galerkin	是
3	Element Free Galerkin	Belytschko 1994	MLS	Galerkin	是
4	Reproducing Kernel Particle Method	W. K. Liu 1995	核函数	Galerkin	是

无网格法总结(cont.)

编号	名　称	代表学者	近似函数	残差消除	背景网格
5	Hp Clouds	Oden 1995	hp cloud	Galerkin	是
6	Hp-meshless Cloud	Liszka 1996	hp cloud	Collocation	否
7	Partion of Unity Method	Babuska等 1996	PUM	Galerkin	是
8	Finte Point Method	Onate 1996	MLS	Collocation	否

无网格法总结(cont.)

编号	名　称	代表学者	近似函数	残差消除	背景网格
9	Local Boundary Integral Equation	S.N. Atluri 1998	MLS	LPG	否
10	Meshless Local Petrov-Galerkin	S.N. Atluri 1998	MLS	LPG	否
11	Meshless Least-Squre Collocation		MLS	LSC	否
12	Collocation with RBF		RBF	Collocation	否
13	Meshless weighted least square method		MLS	Collocation	否

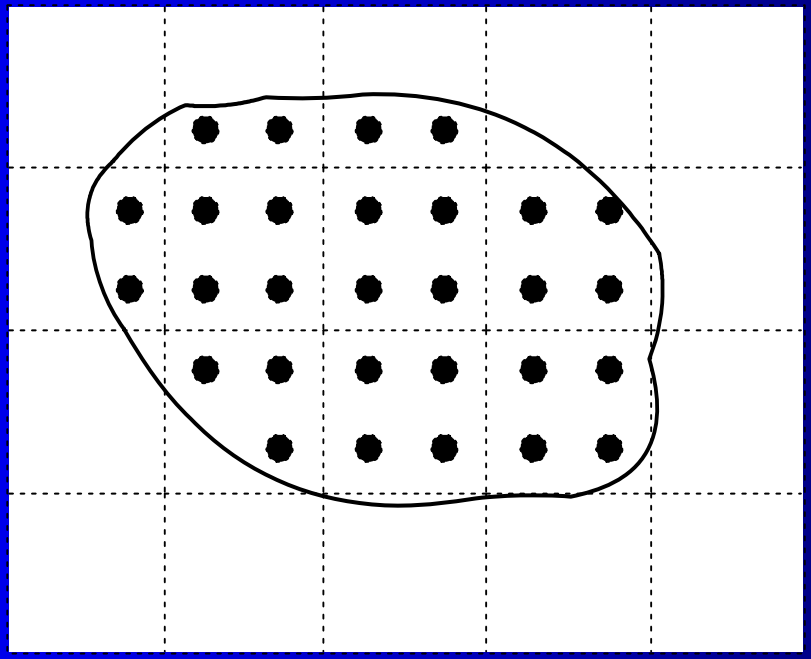
无网格法总结(cont.)

编号	名　称	代表学者	近似函数	残差消除	背景网格
14	meshless Galerkin least square method		MLS	GLS	否
15	Meshless Galerkin collocation method		MLS	GCM	否
16	PUFEM；XFEM；GFEM；EPM		POU + Polynomials	Galerkin	否
17	PIM	刘桂荣	PIM	Galerkin	是
18	MPM	Sulsky	FEM	Galerkin	否

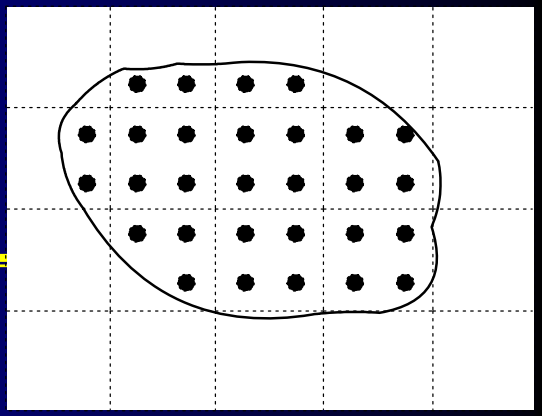
物质点法(MPM)

- Particle in Cell (PIC)，1955
- Material Point Method (MPM)，Sulsky, 1994

连续体离散成一组带有质量的质点，质点携带了所有物质信息，其运动代表物质的变形。



物质点法(MPM)

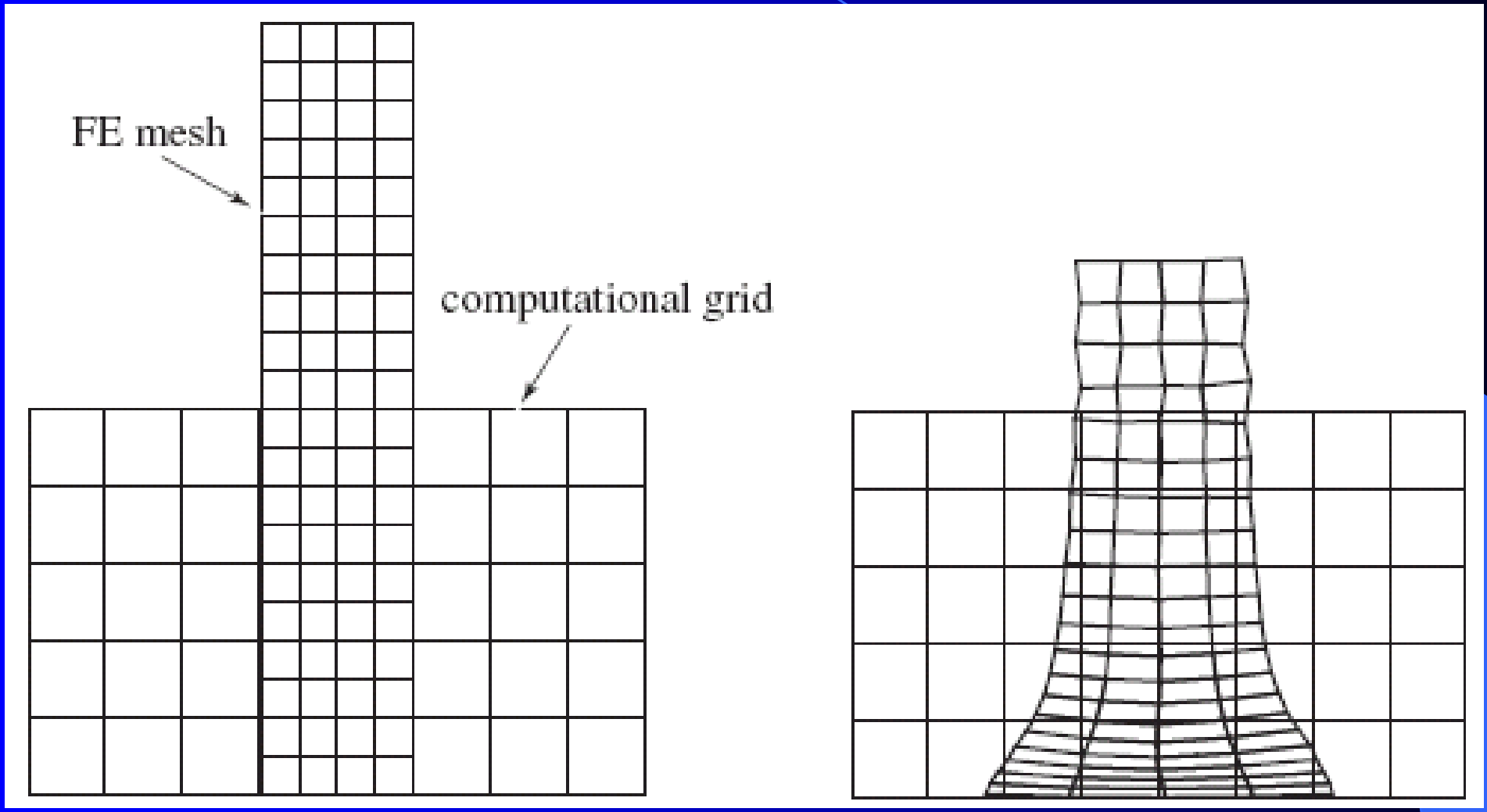


- 每一时间步：
  - 将物质信息映射到背景网格结点处，并在背景网格上建立并求解动量方程
  - 求得的结果再映射回物质点，得到下一时刻物质点所携带的物质信息
  - 丢弃变形后的背景网格，重新构造背景网格
- 物质点固连在背景网格上 —— 更新拉格朗日格式
- 结合Lagrange方法和Euler方法的优点

物质点有限元法(MPFEM)

- 物体用有限元离散（结点+单元）
- 在大变形区域引入背景网格（固定、移动）
- 动量方程的求解：显式积分
  - 大变形区 — 在背景网格上（类似MPM法）
    - ✓ 有限元结点携带物质信息 — 物质点
    - ✓ 将结点和背景网格固连 — 更新拉格朗日
    - ✓ 丢弃变形后的背景网格 — 避免了网格扭曲
  - 其它区域 — 在有限元网格上
    - ✓ 单元携带物质信息
    - ✓ 网格变形

物质点有限元法(MPFEM)



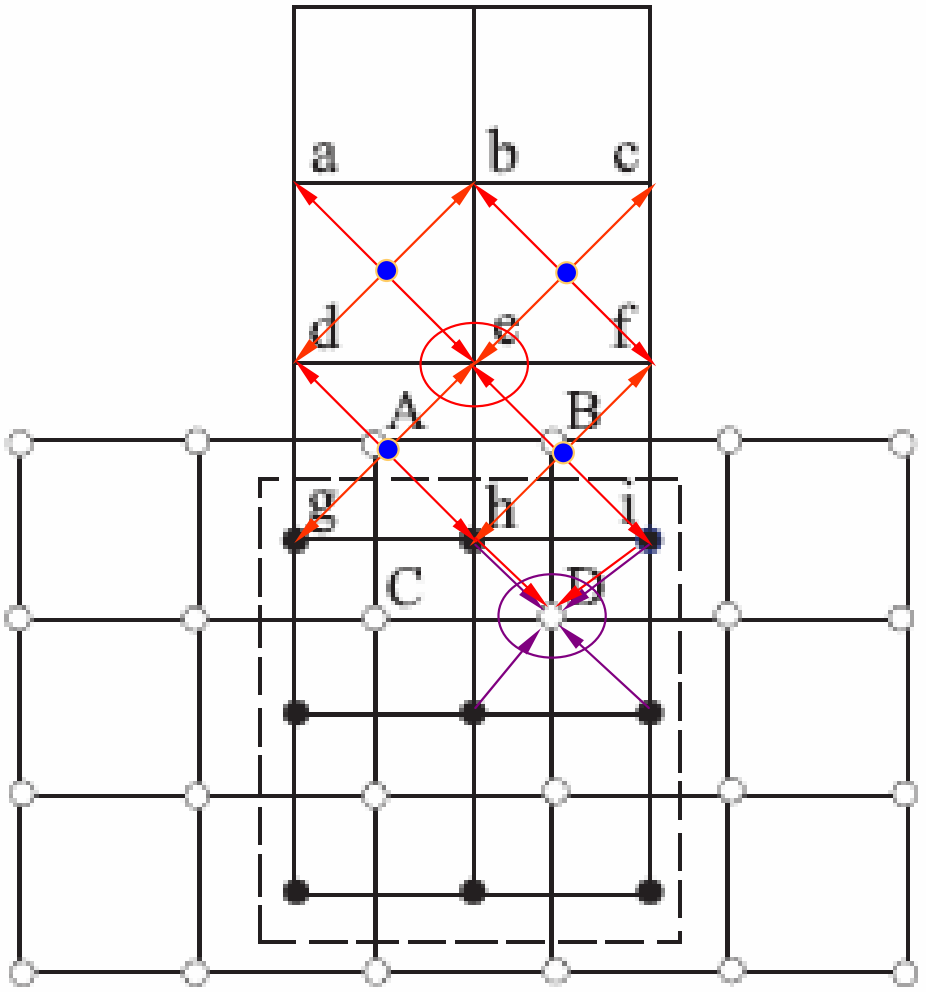
物质点有限元法(MPFEM)

- 大变形区：
  在背景网格上求解

$$\dot{p}_{hi} \qquad f_{hi}^{\text{int}} \qquad f_{hi}^{\text{ext}}$$

- 其它区域：
  在有限元网格上求解

$$M_p \ddot{x}_{pi} \qquad f_{pi}^{\text{int}} \qquad f_{pi}^{\text{ext}}$$



- 不设定大变形区→FEM
- 全部为大变形区→MPM

无网格法的理论及其应用

- 有限元法存在的某些困难
- 无网格法的研究历史
- 紧支试函数加权残量法
  - 紧支试函数
  - 加权残量法
- 无网格法总结
- **无网格法的应用**



无网格法的应用

- 天体物理
- 水下爆炸
- 高速碰撞
- 动态裂纹扩展
- 板壳分析
- 流体力学
- 大变形

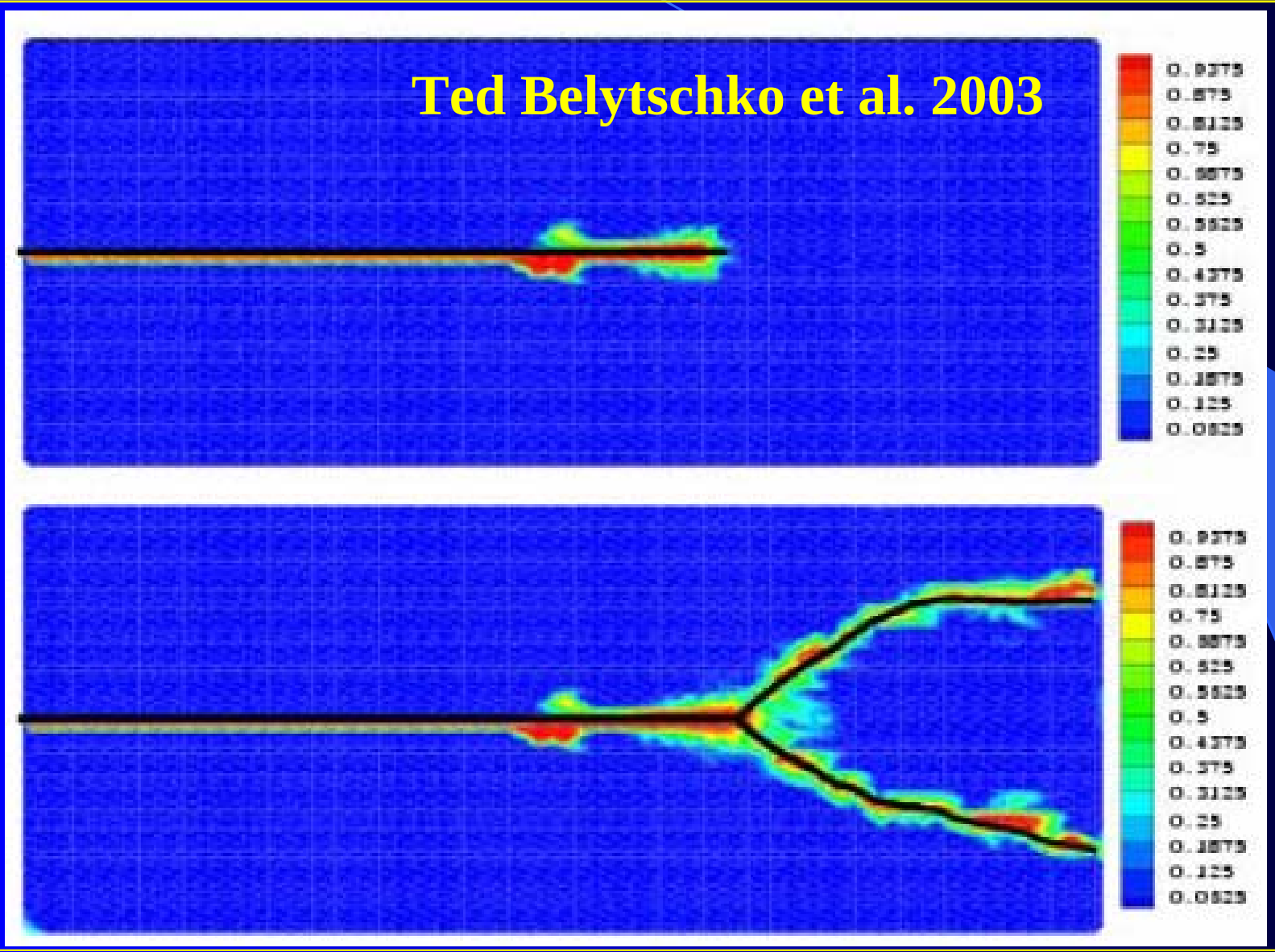


无网格法的应用

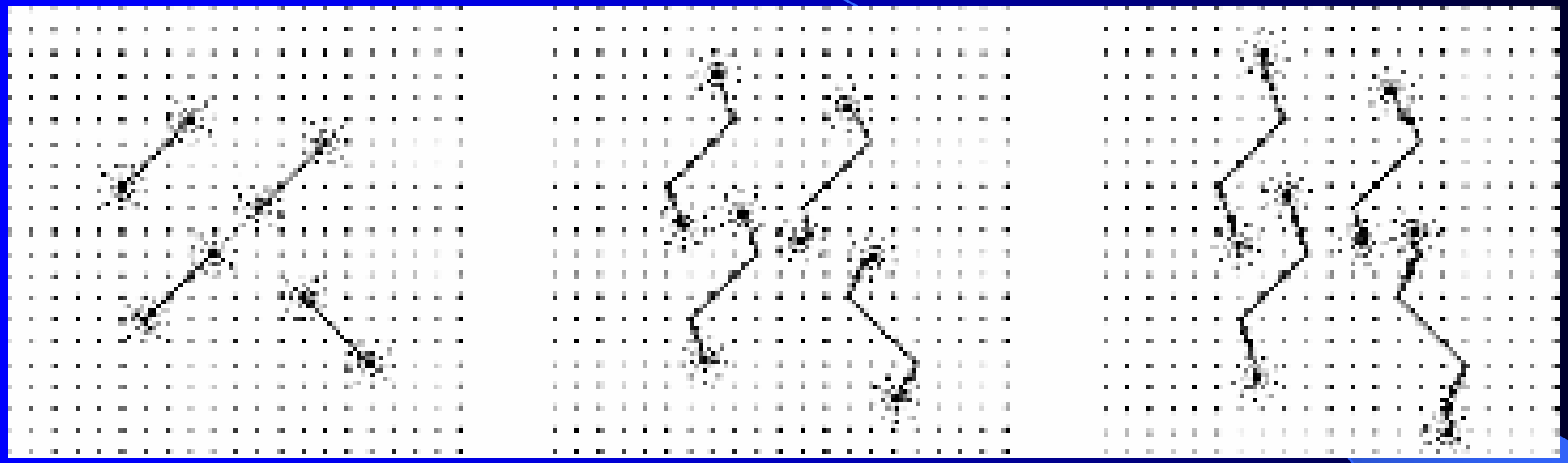
- 自适应
- 金属加工成型
- 塑性变形局部化
- 纳米管起皱

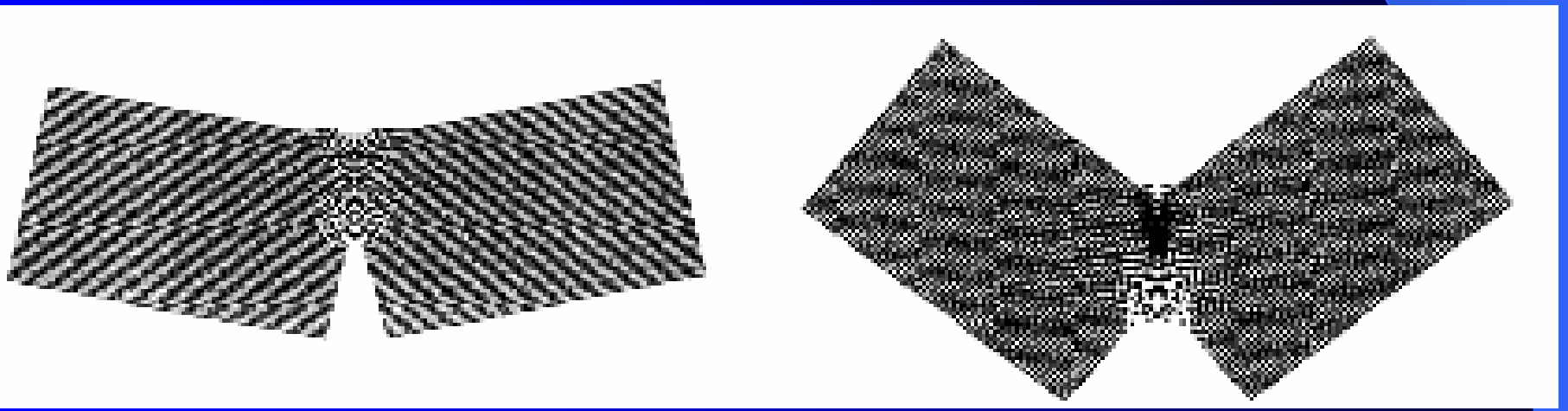


无网格法的应用

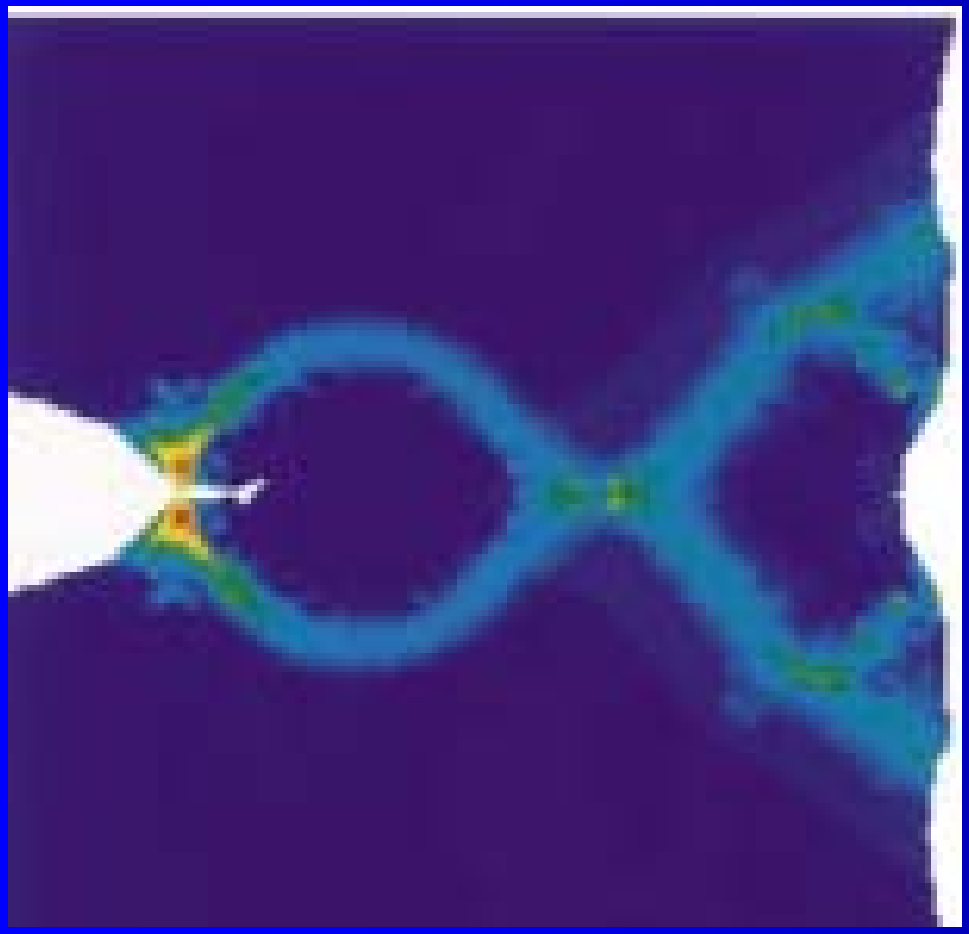


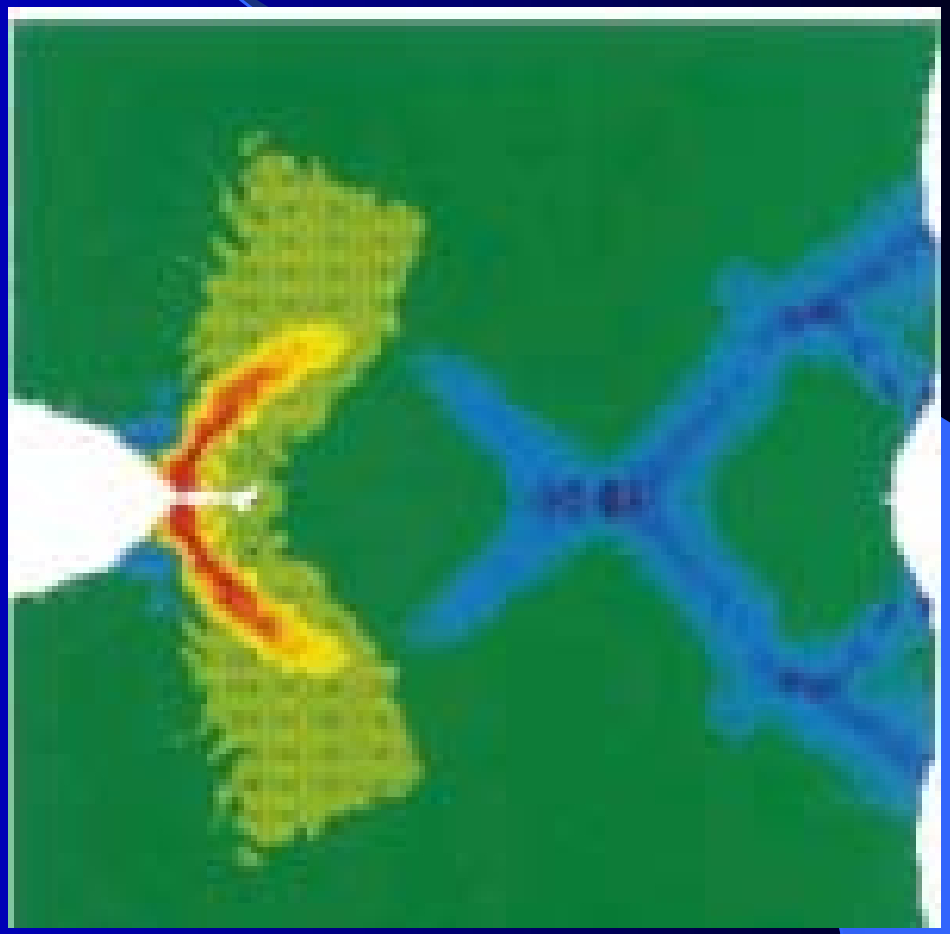
无网格法的应用



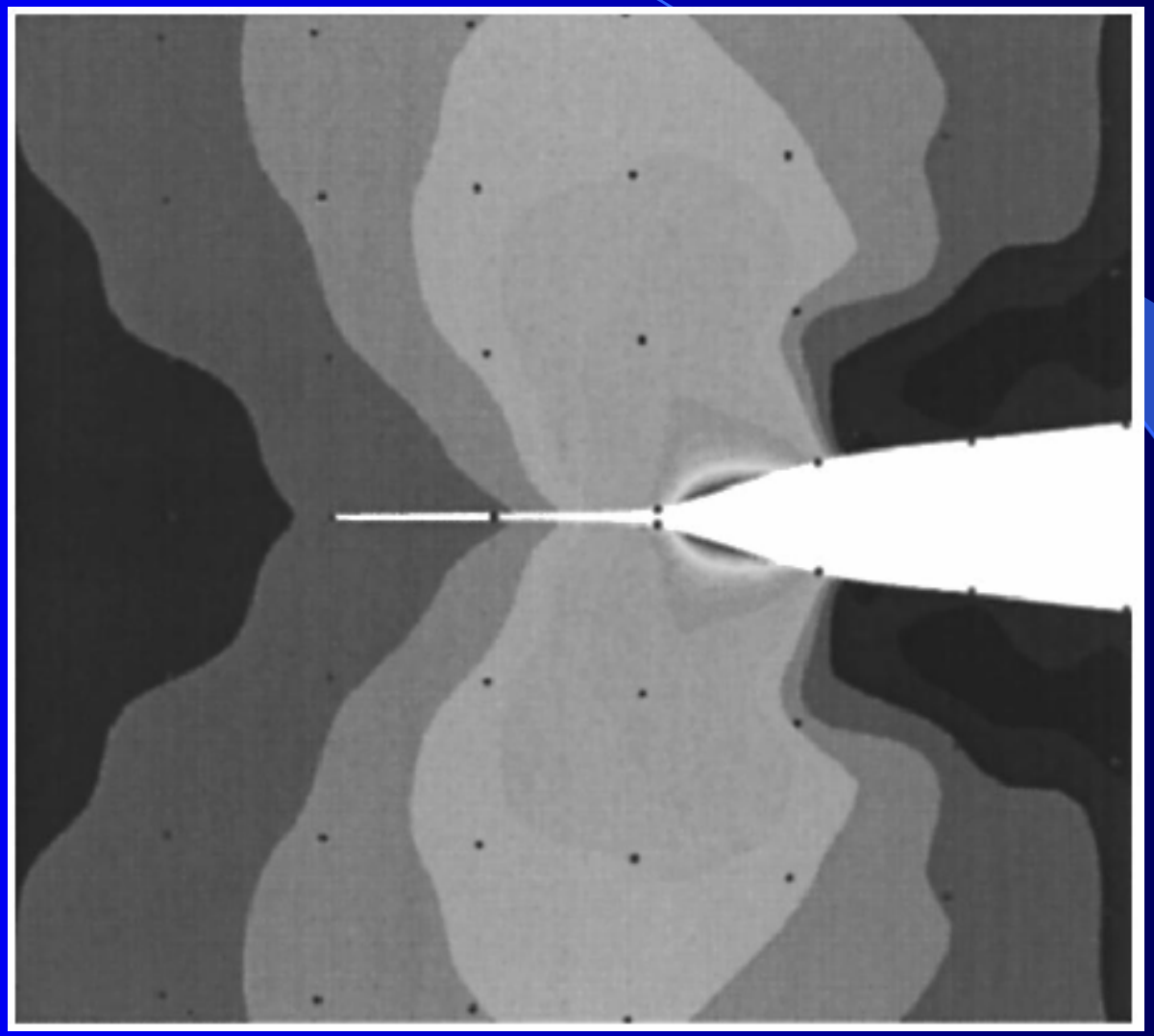


无网格法的应用

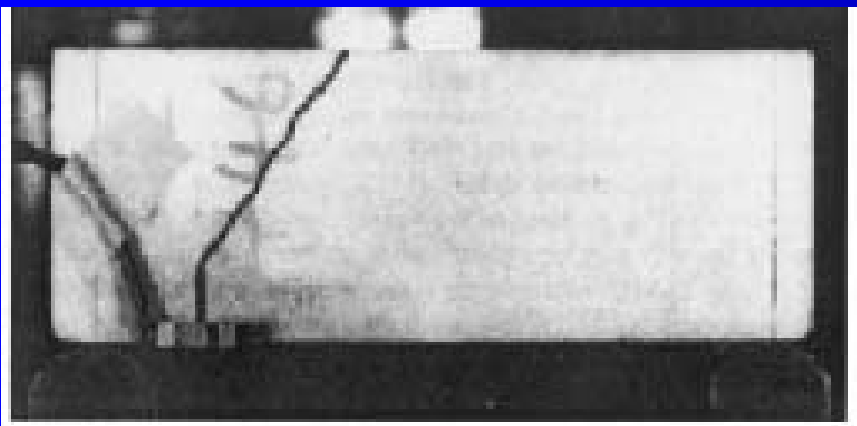


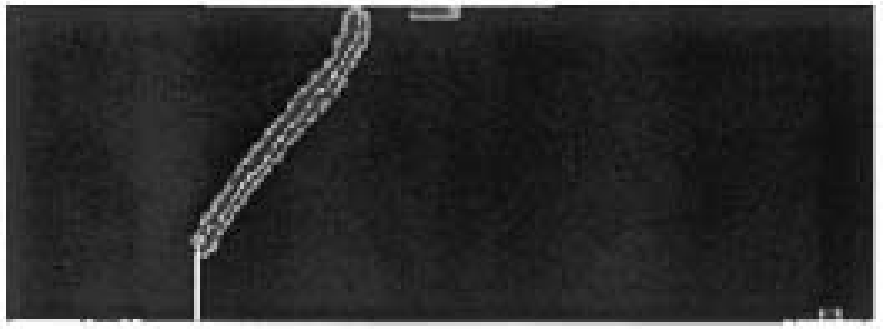


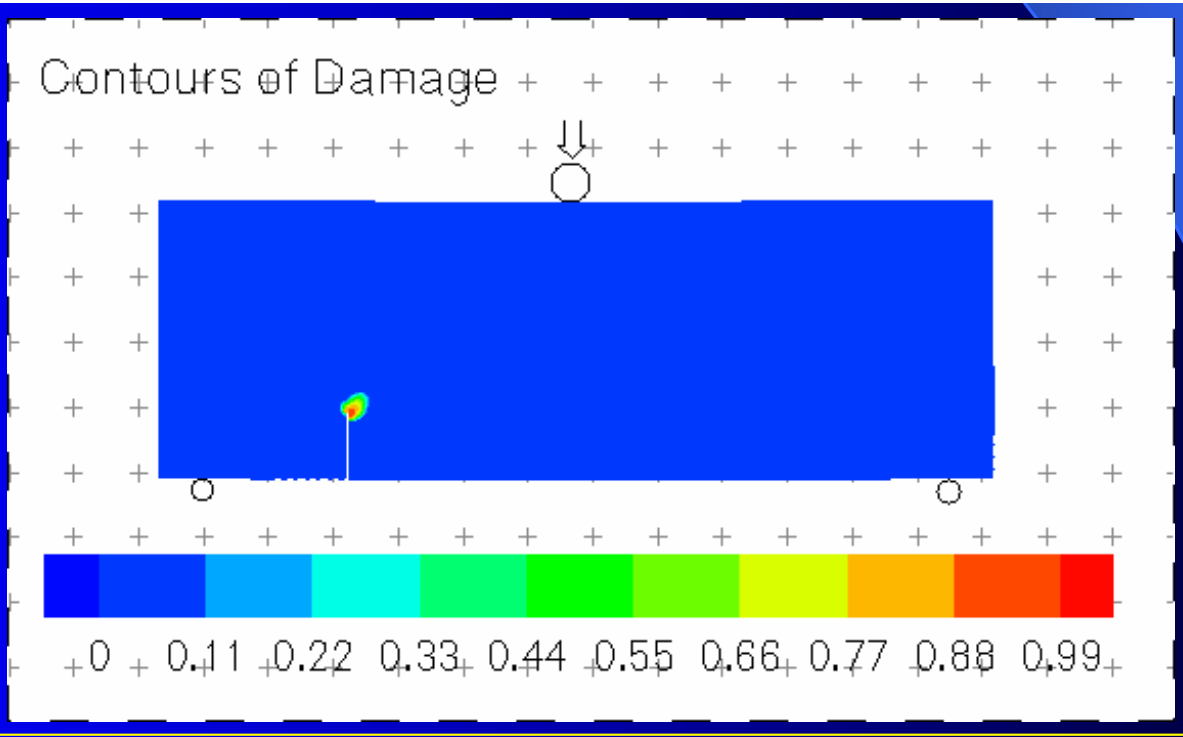
无网格法的应用



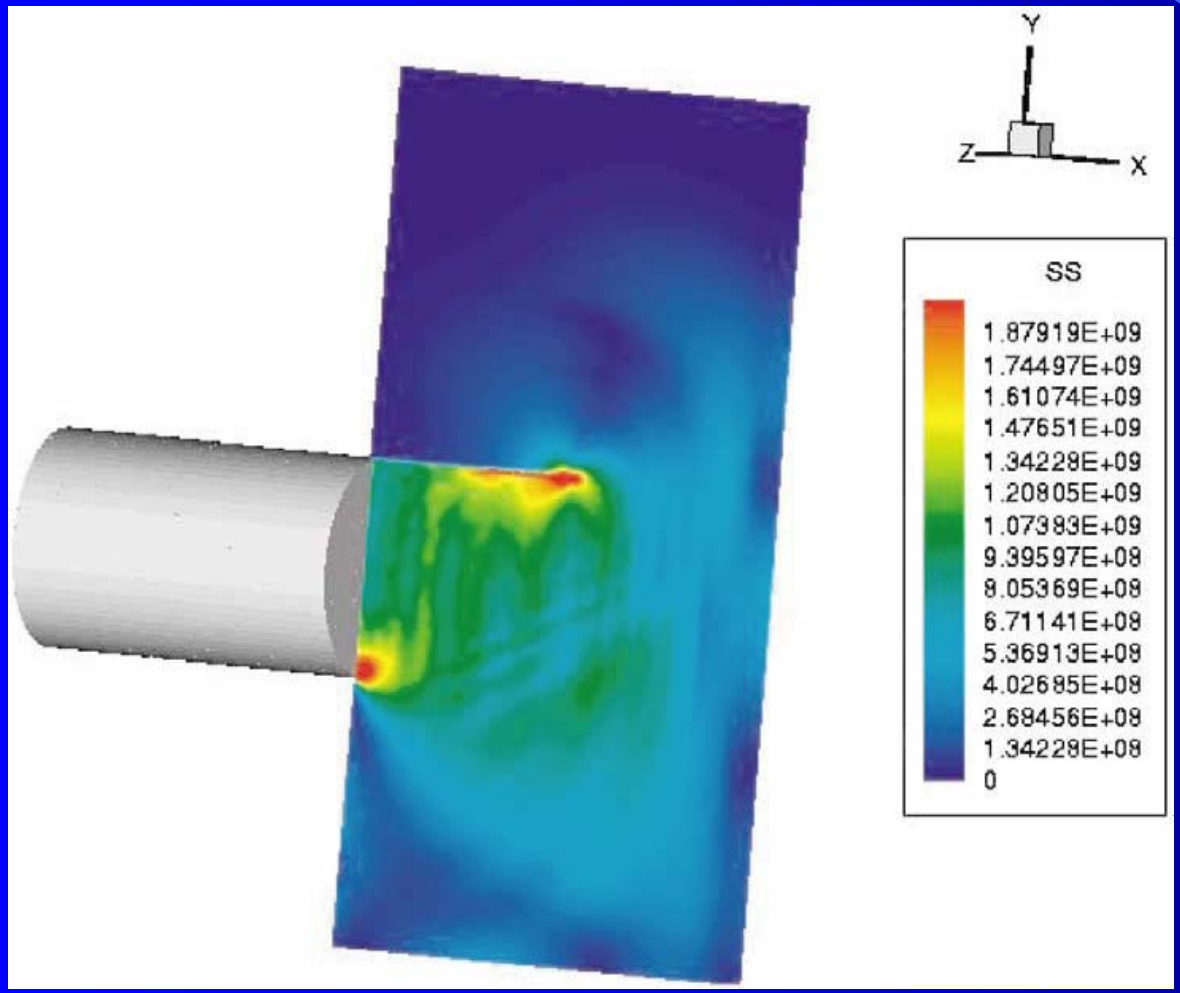
无网格法的应用

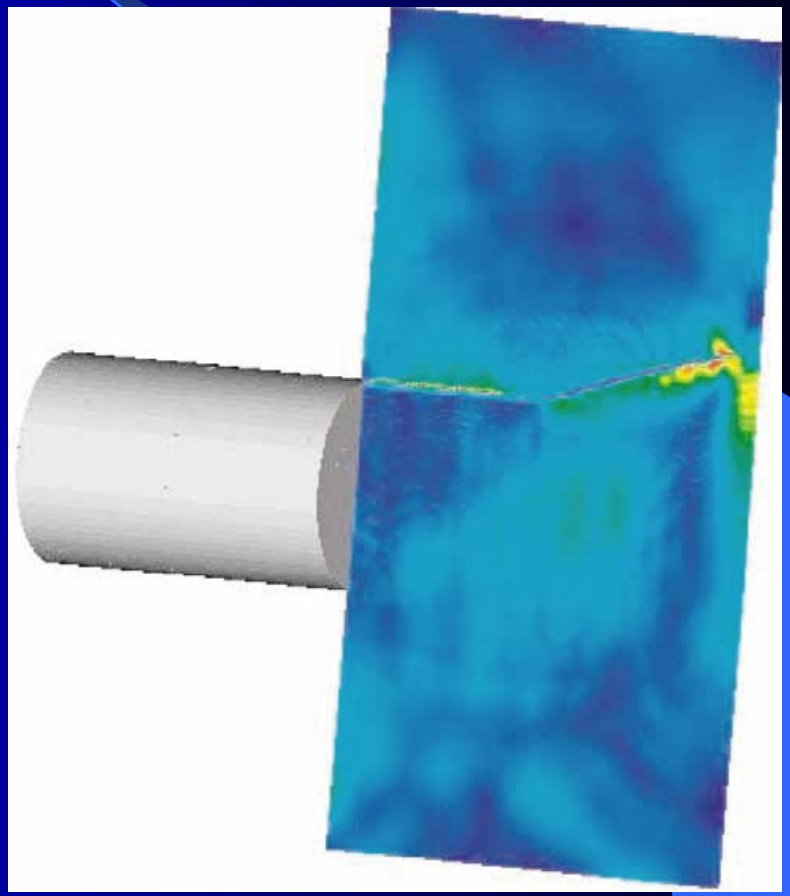




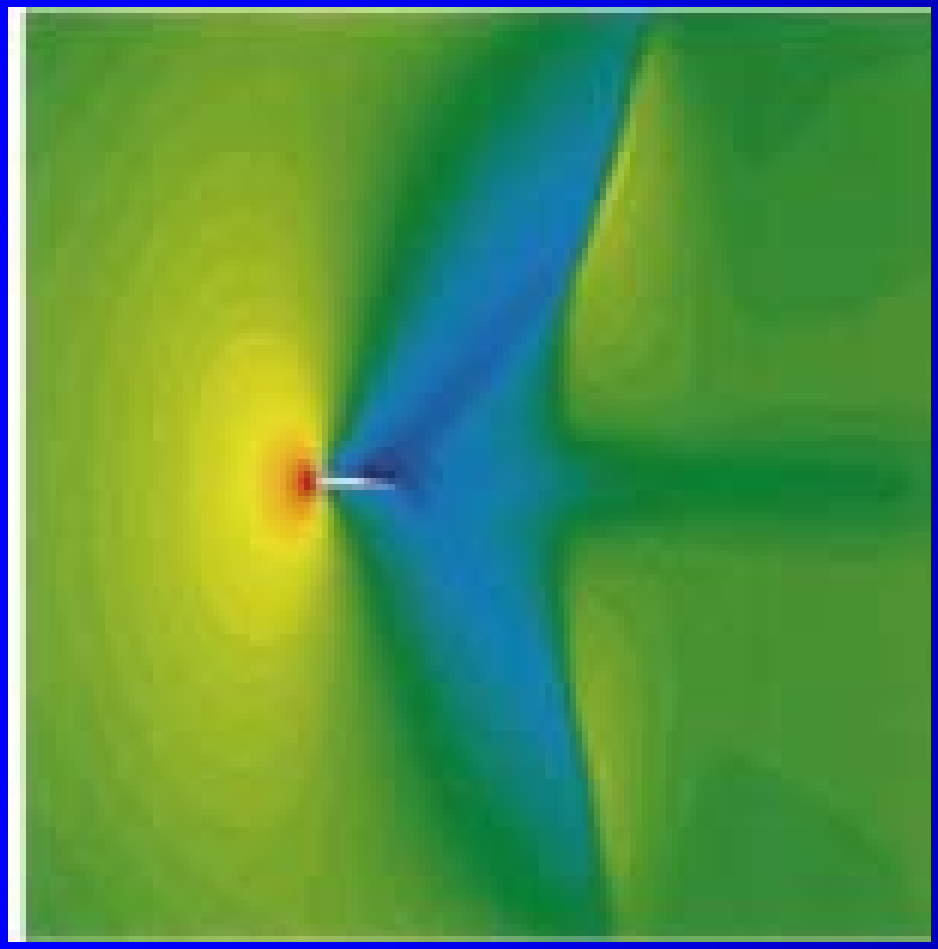


无网格法的应用


Y
Z
X
SS
1.87919E+09
1.74497E+09
1.61074E+09
1.47651E+09
1.34228E+09
1.20805E+09
1.07383E+09
9.39597E+08
8.05369E+08
6.71141E+08
5.36913E+08
4.02685E+08
2.68456E+08
1.34228E+08
0

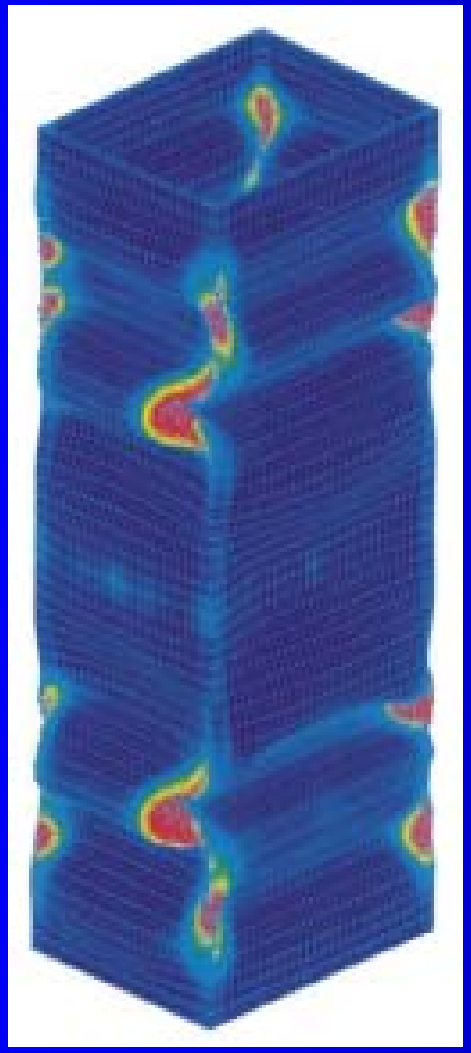


无网格法的应用



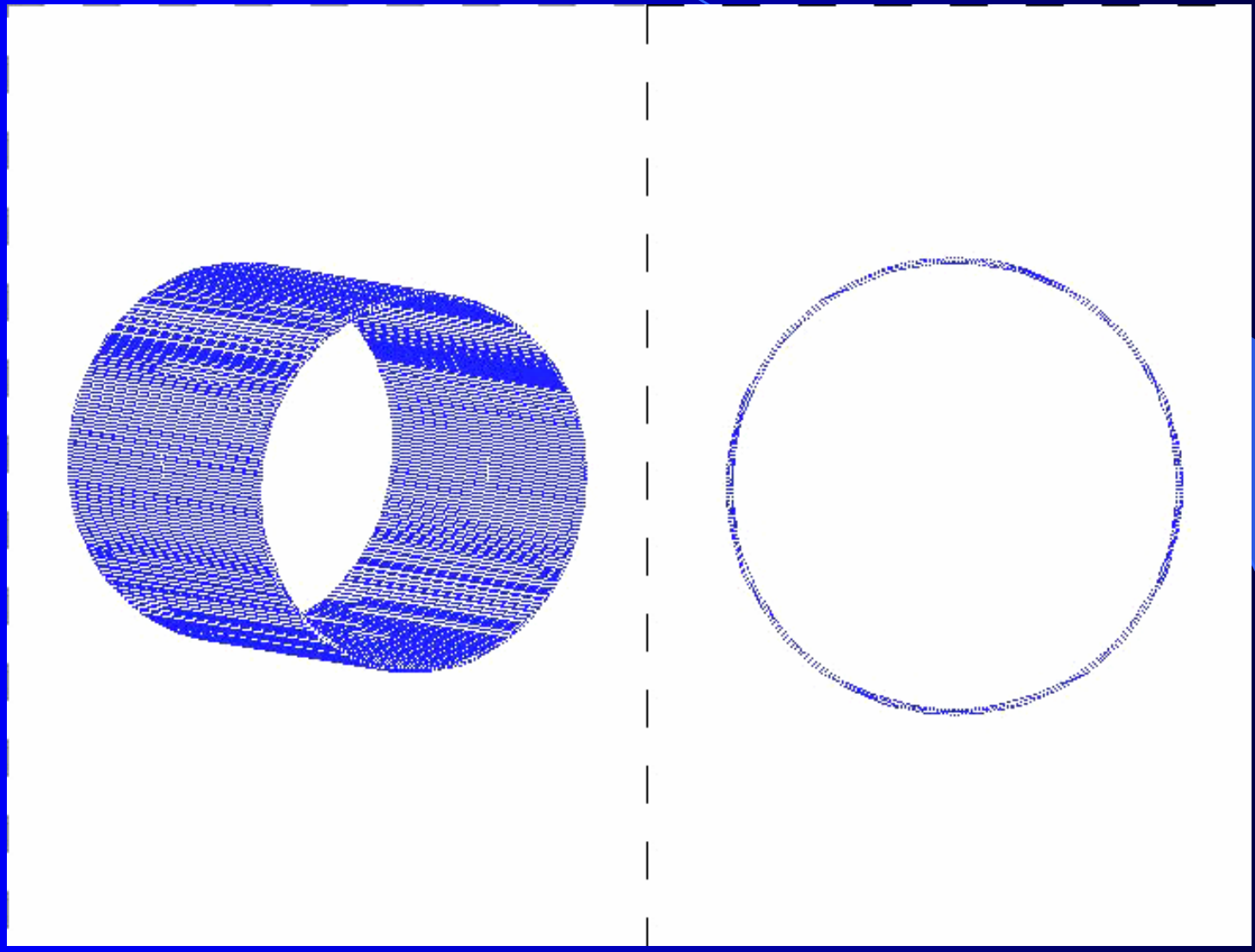


无网格法的应用



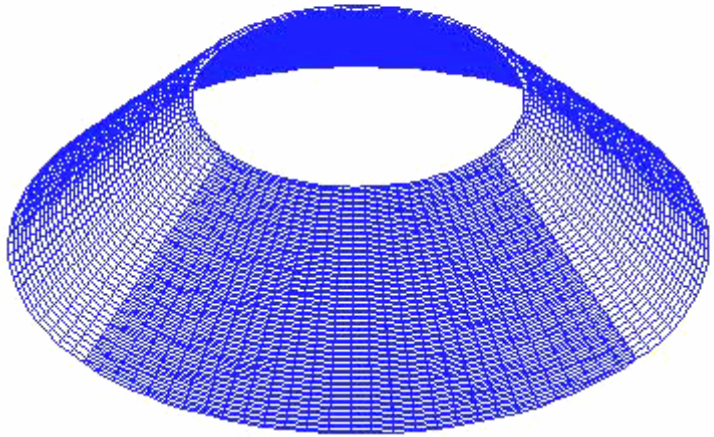


无网格法的应用



RKPM

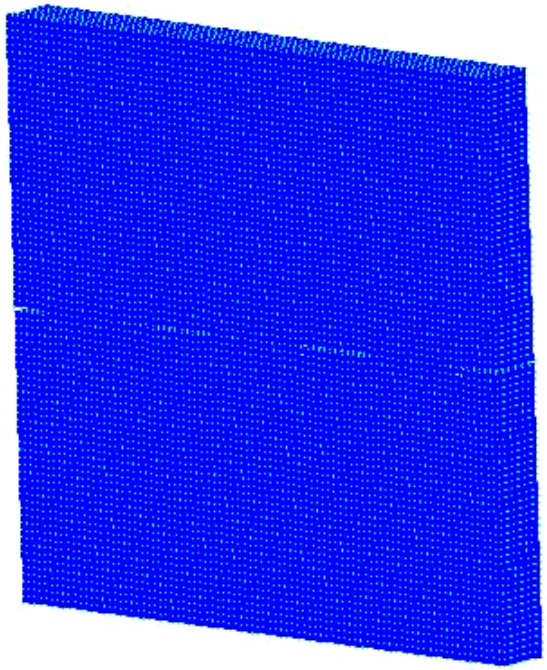
无网格法的应用

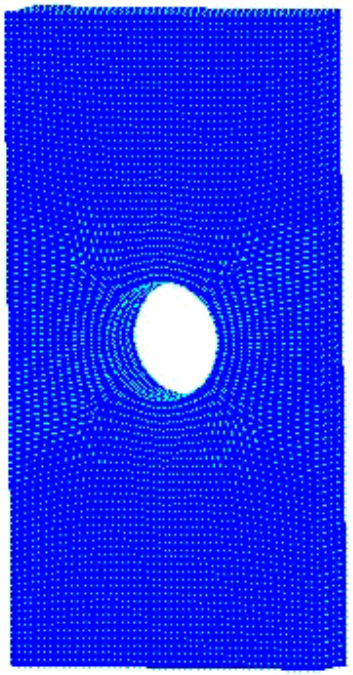


RKPM

无网格法的应用

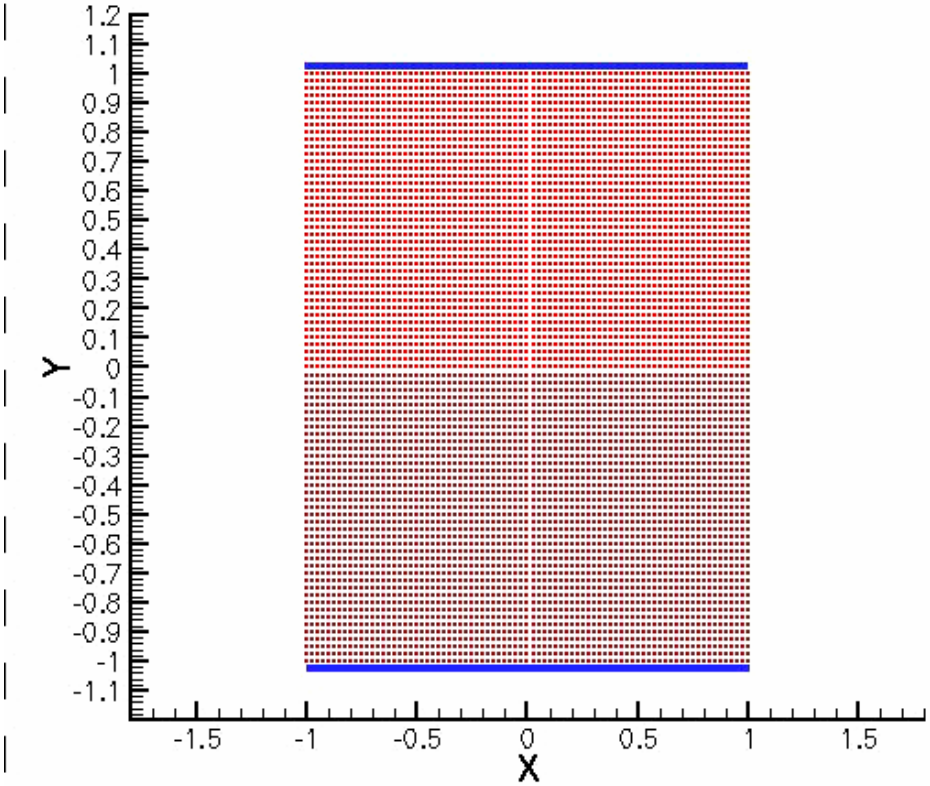
RKPM

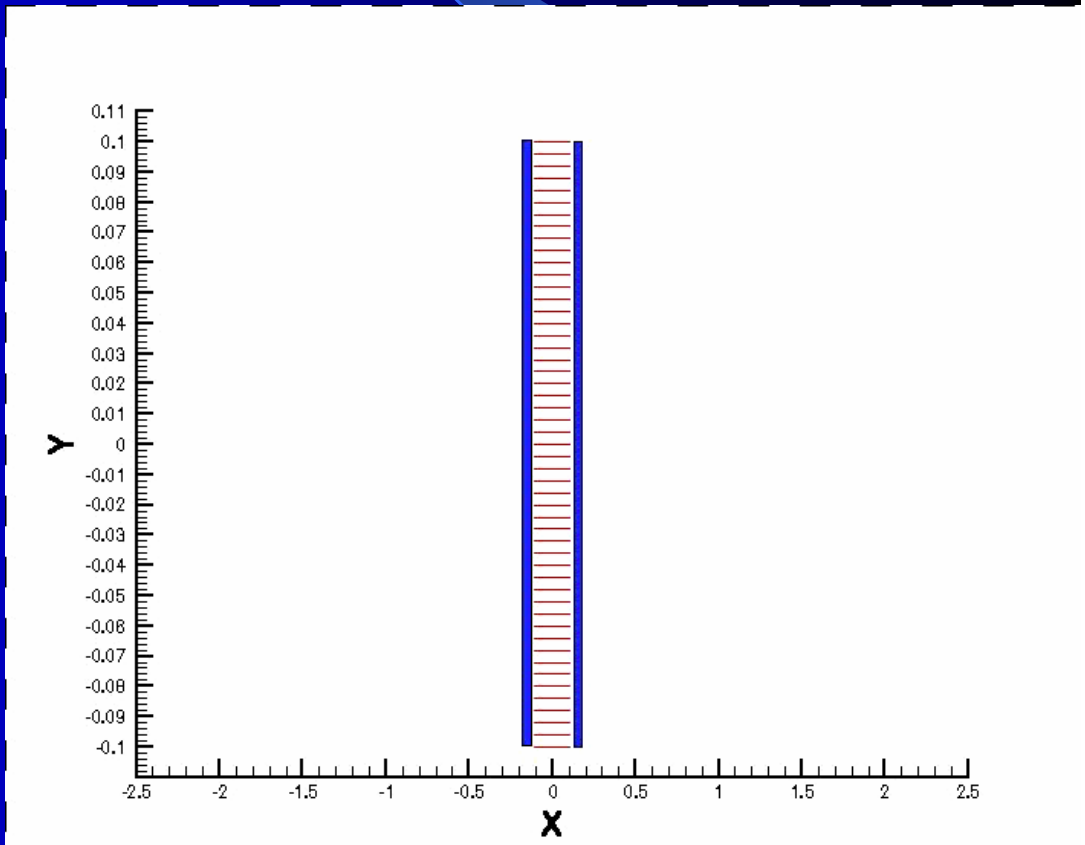




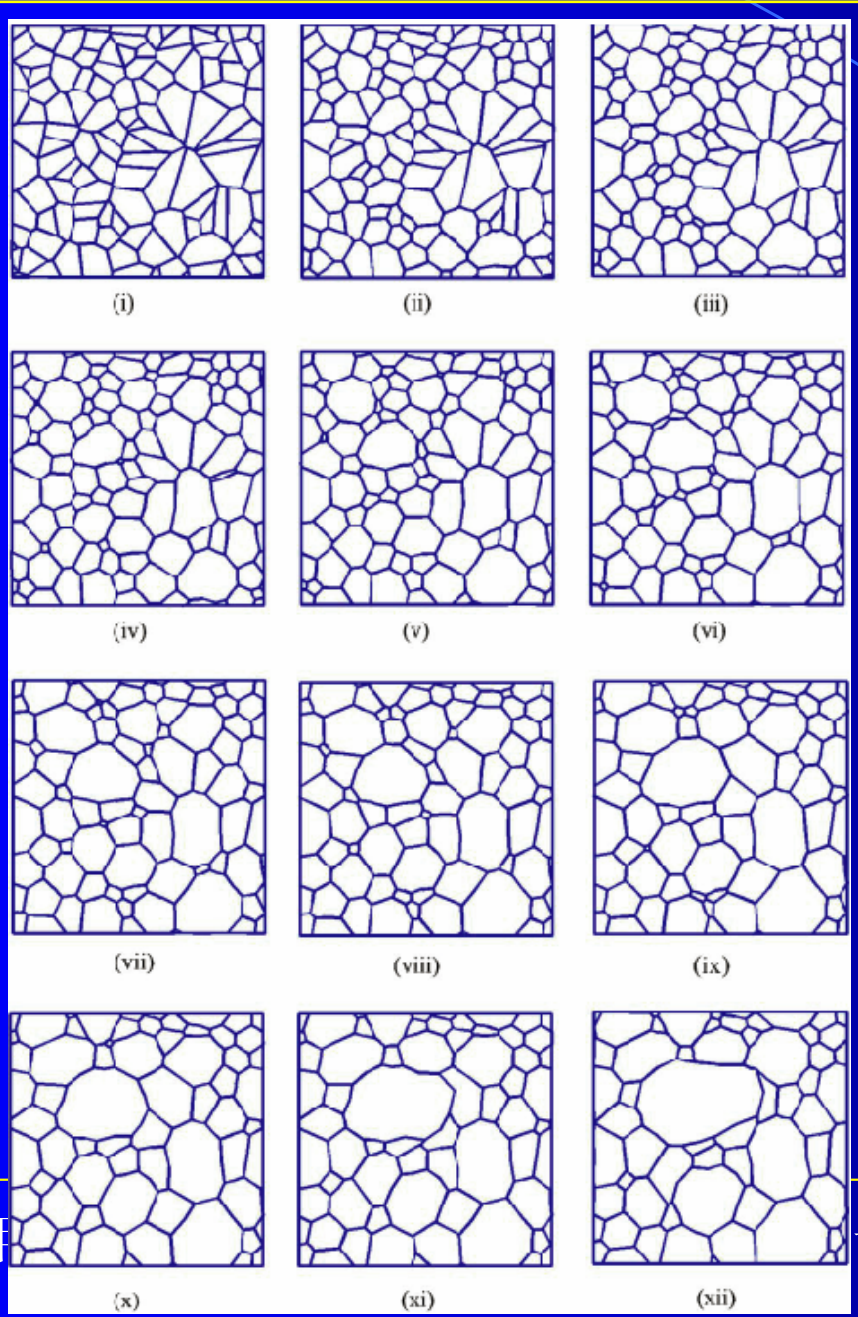
无网格法的应用

RKPM





无网格法的应用



RKPM/FEM联合求解多晶材料中晶粒的生长过程

JS Chen

无网格法的应用

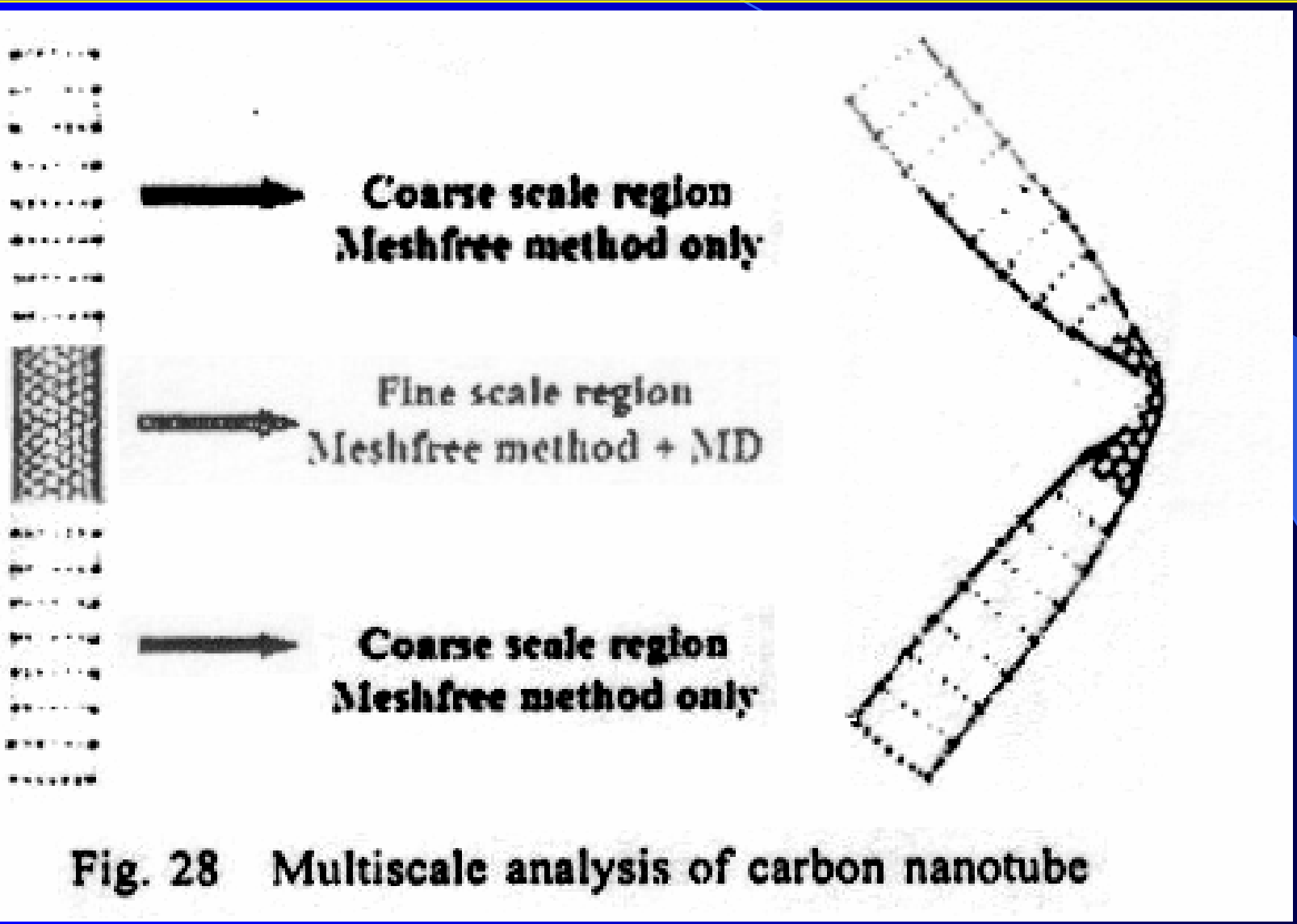
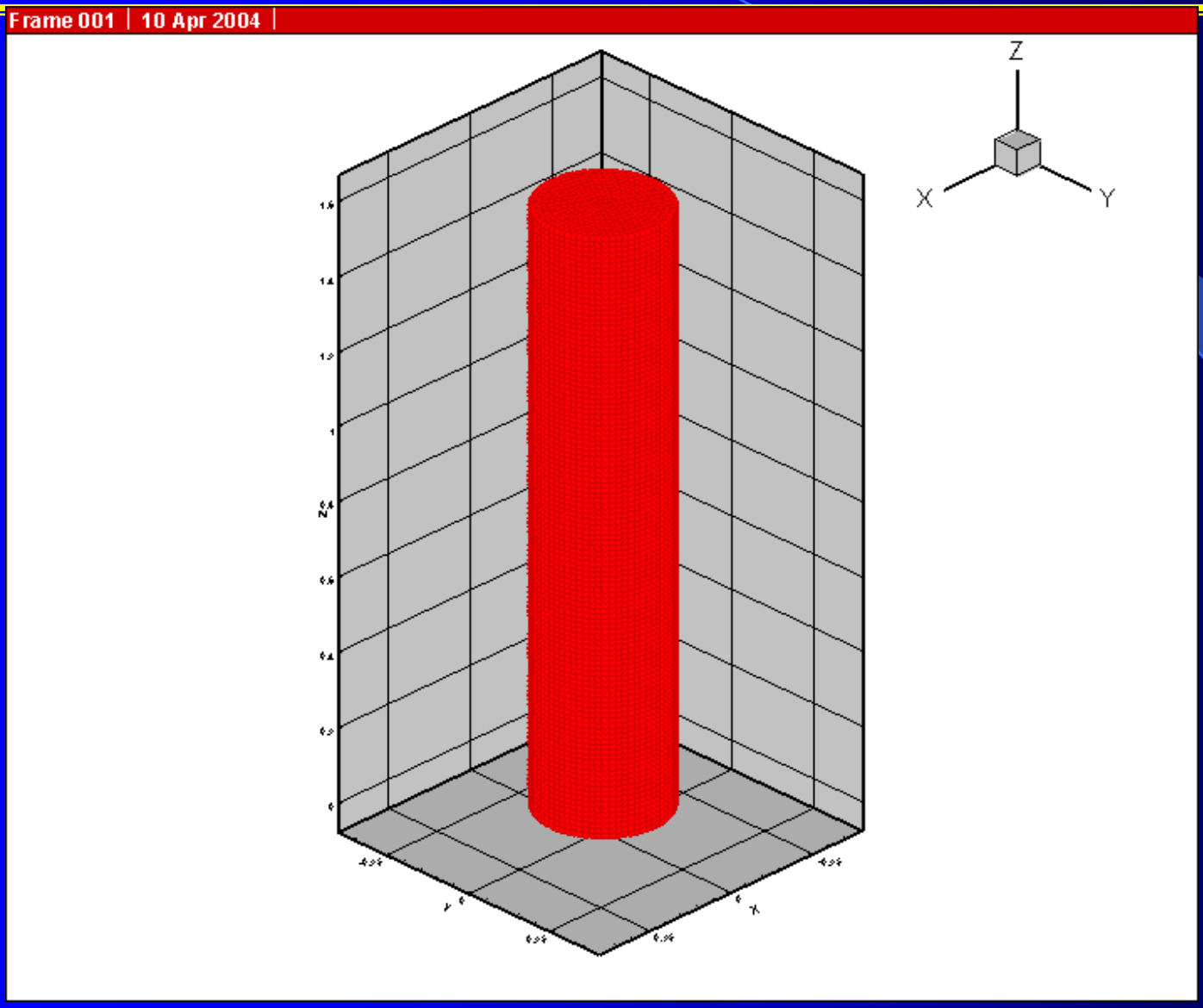


Fig. 28 Multiscale analysis of carbon nanotube

RKPM
+ MD

无网格法的应用



Taylor杆

王裴等

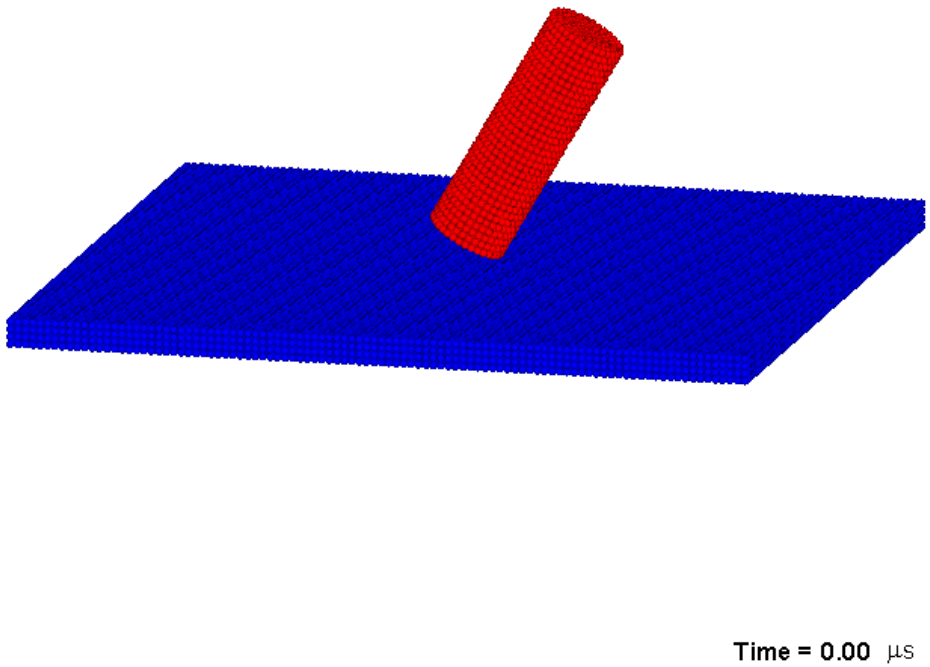
撞击速度227m/s
SG本构模型
总粒子数50310

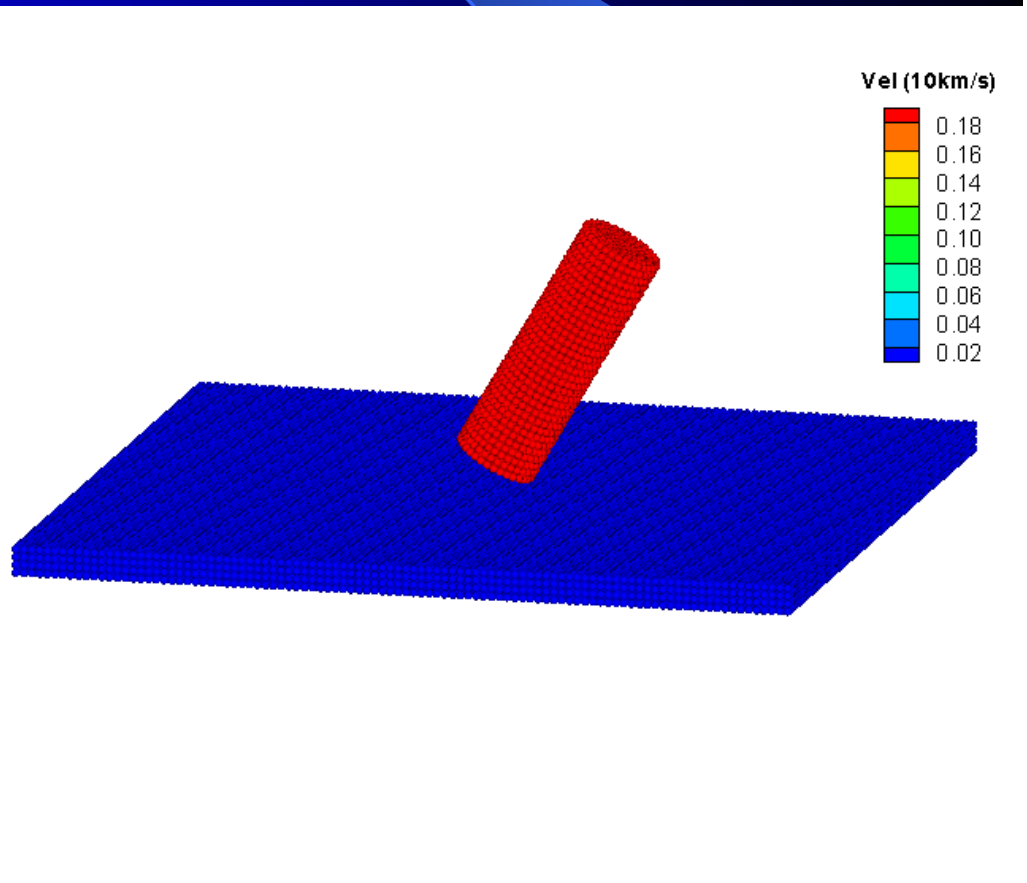
Numerical fracture

无网格法的应用

圆柱体弹斜侵彻

王裴等
总粒子数43498
弹：钢，直径1.1cm，高度6.6cm
攻角30°，速度2km/s
靶：铝，10cm×10cm×0.8cm

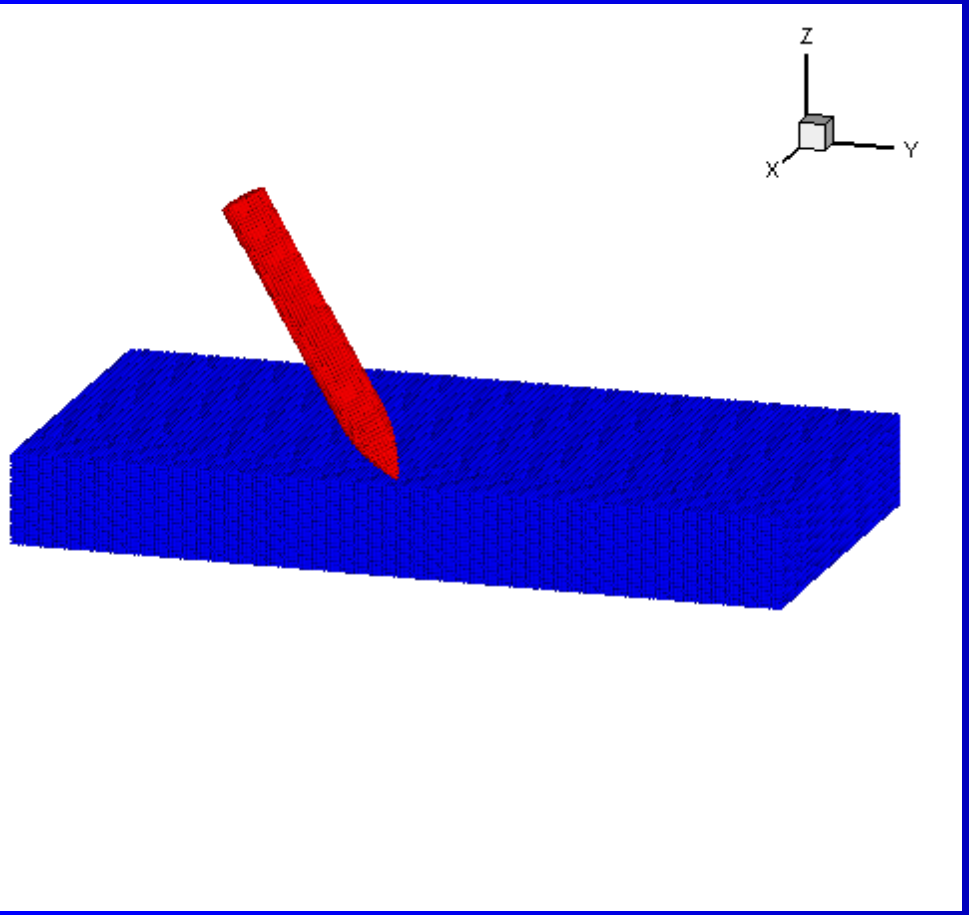




SPH计算量比FEM大一个数量级？
并行计算

无网格法的应用

尖头弹斜侵彻

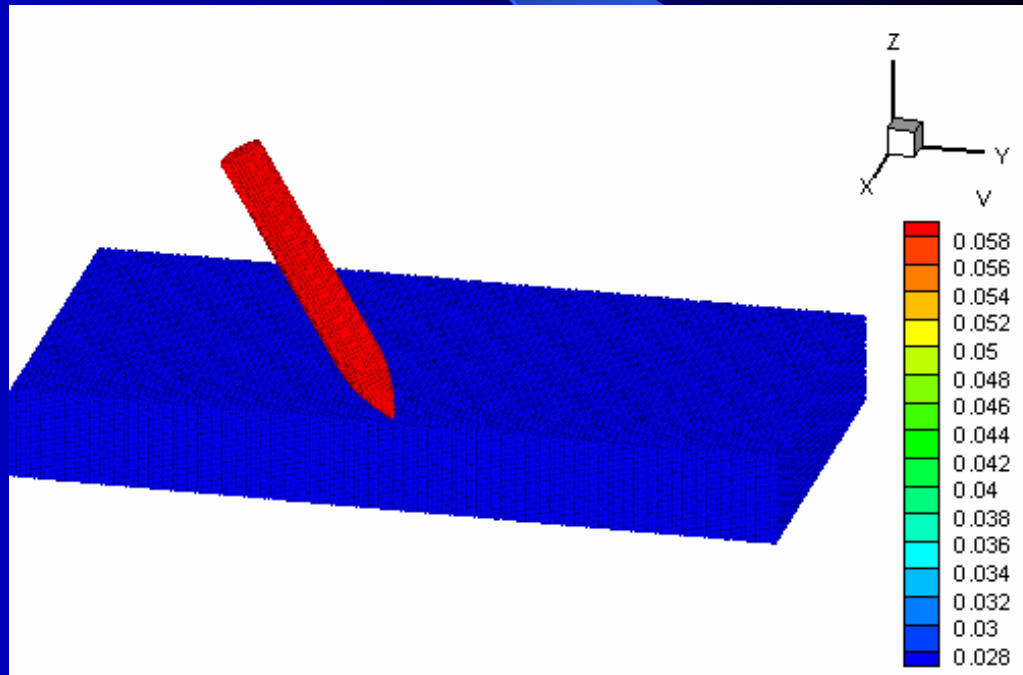


王裴等

总粒子数1,454,255

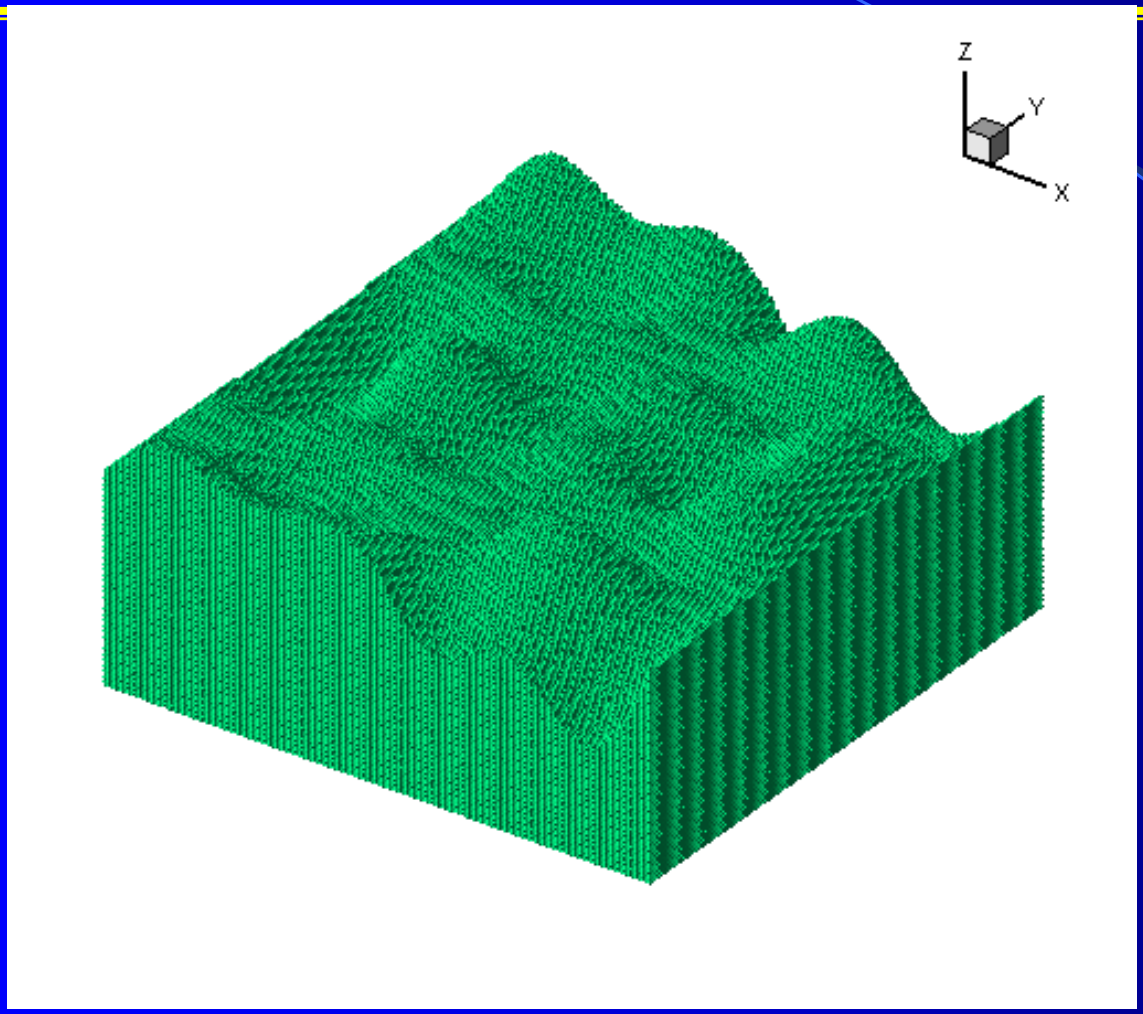
钢弹：攻角30°，初始速度600m/s，
剩余速度440m/s，实验值460m/s

铝靶：23.6cm×23.6cm×2.6cm



无网格法的应用

三维微射流

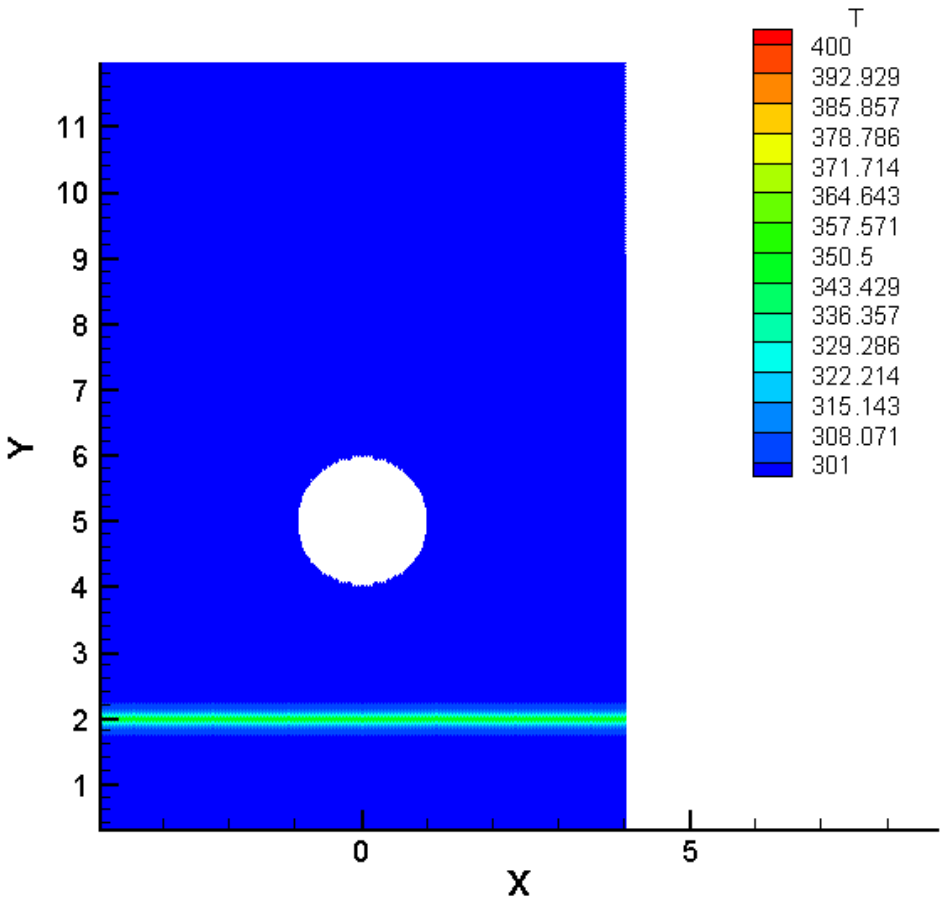


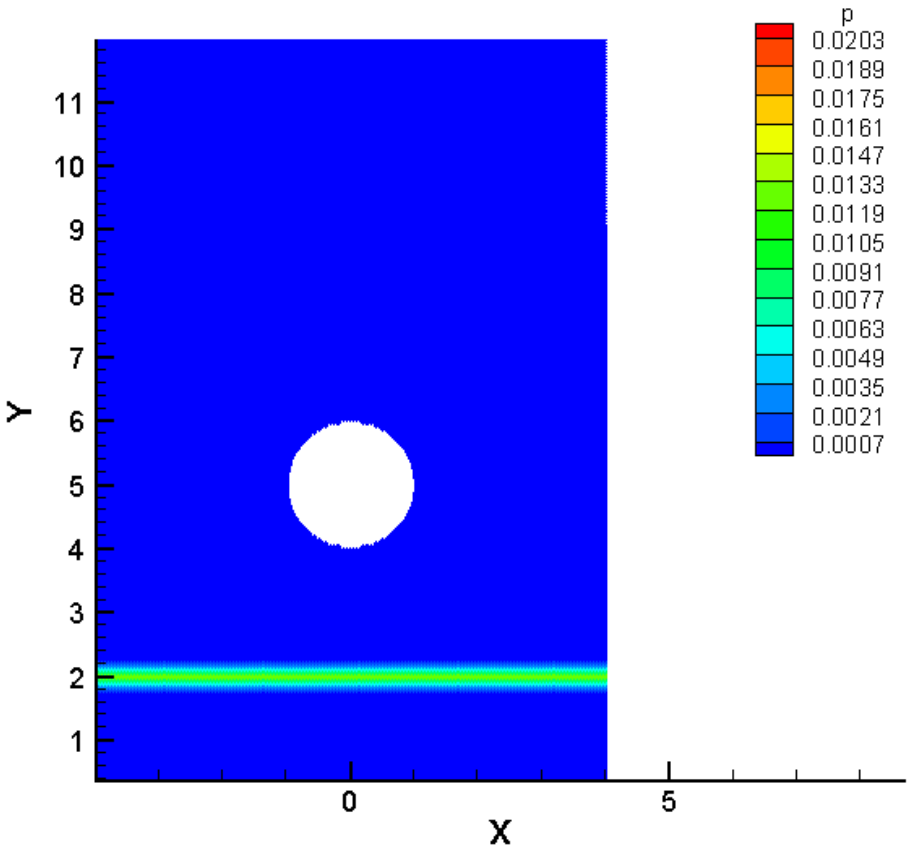
王裴等

总粒子数1,527,402

无网格法的应用

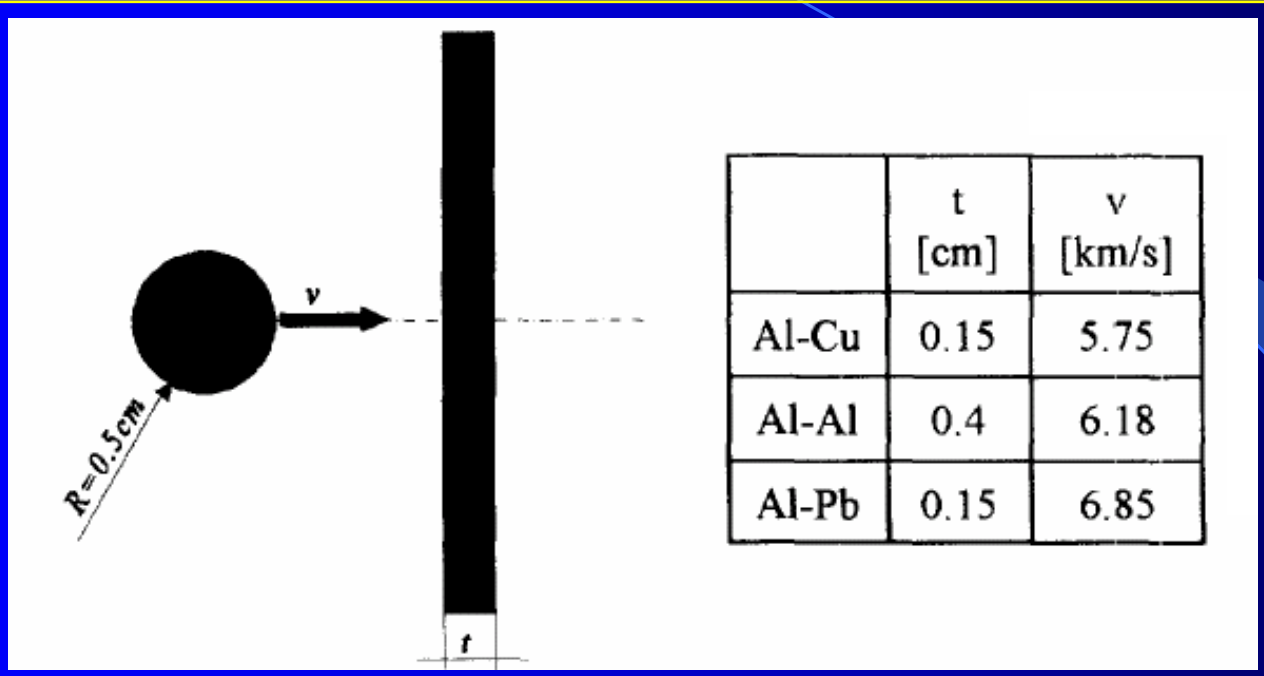
炸药“热点”问题





无网格法的应用

铝球对不同材料的碰撞



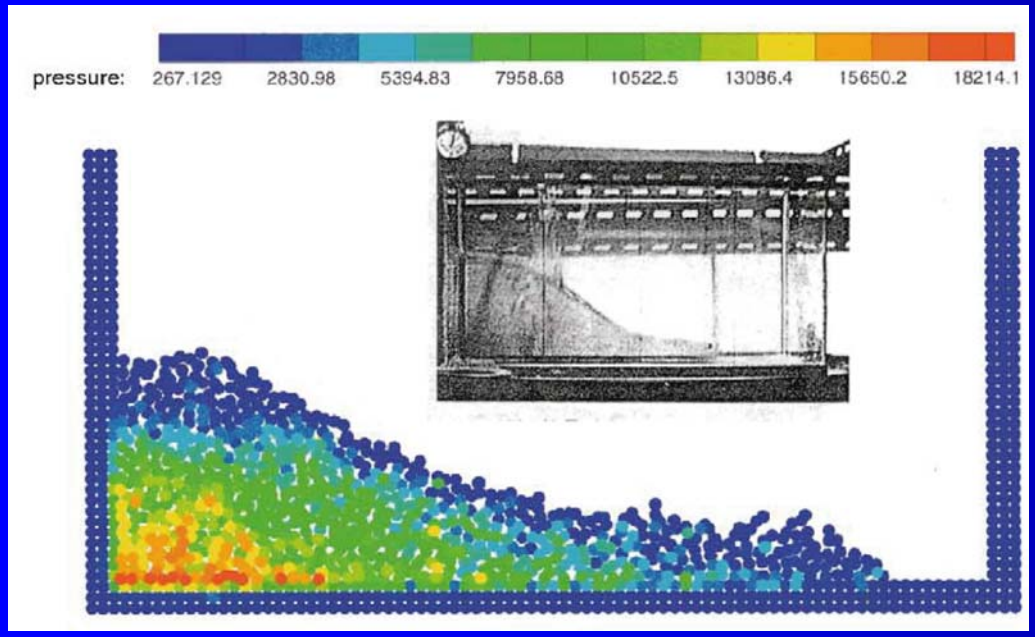
	t [cm]	v [km/s]
Al-Cu	0.15	5.75
Al-Al	0.4	6.18
Al-Pb	0.15	6.85

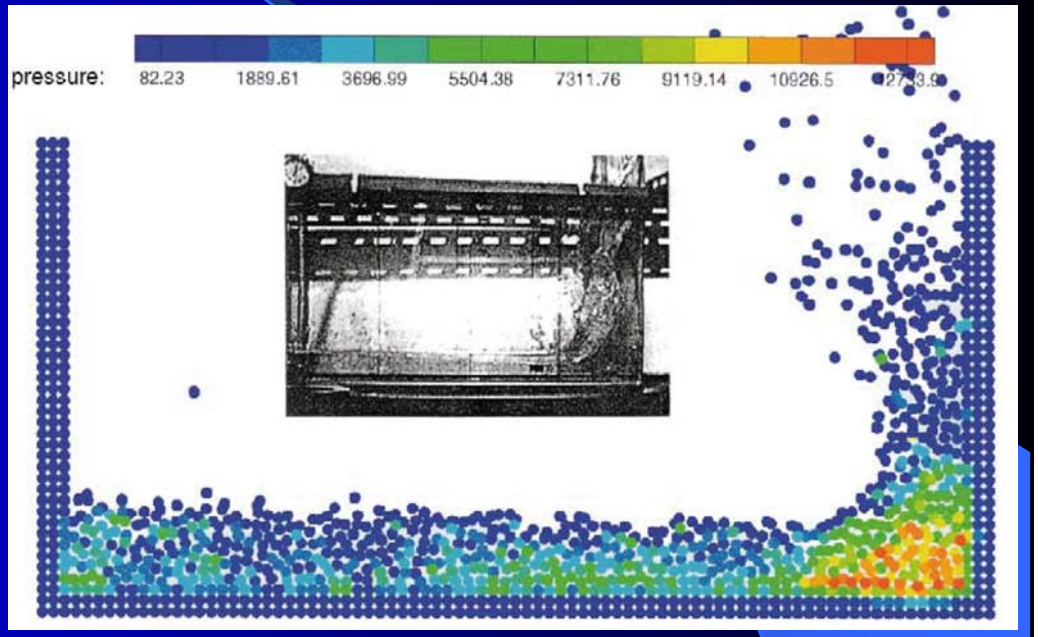
S. HIERMAIER等

SPH

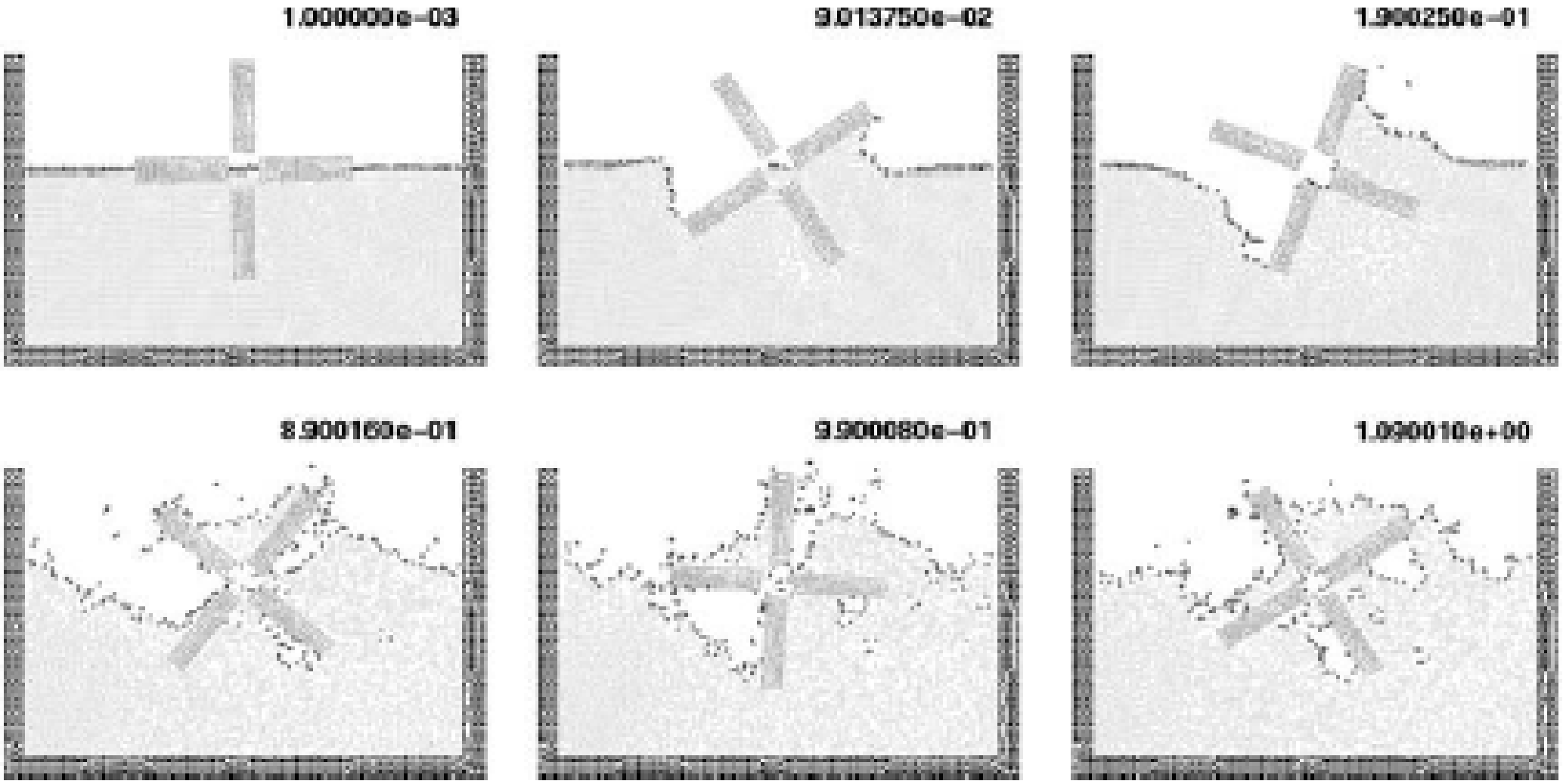
$D_c(L/W)$	实验	模拟
Al-Cu	2.12(1.39)	2.3(1.33)
Al-Al	2.75-3.45(1.39)	3.5(1.11)
Al-Pb	2.6(1.56)	3.0(1.16)

无网格法的应用

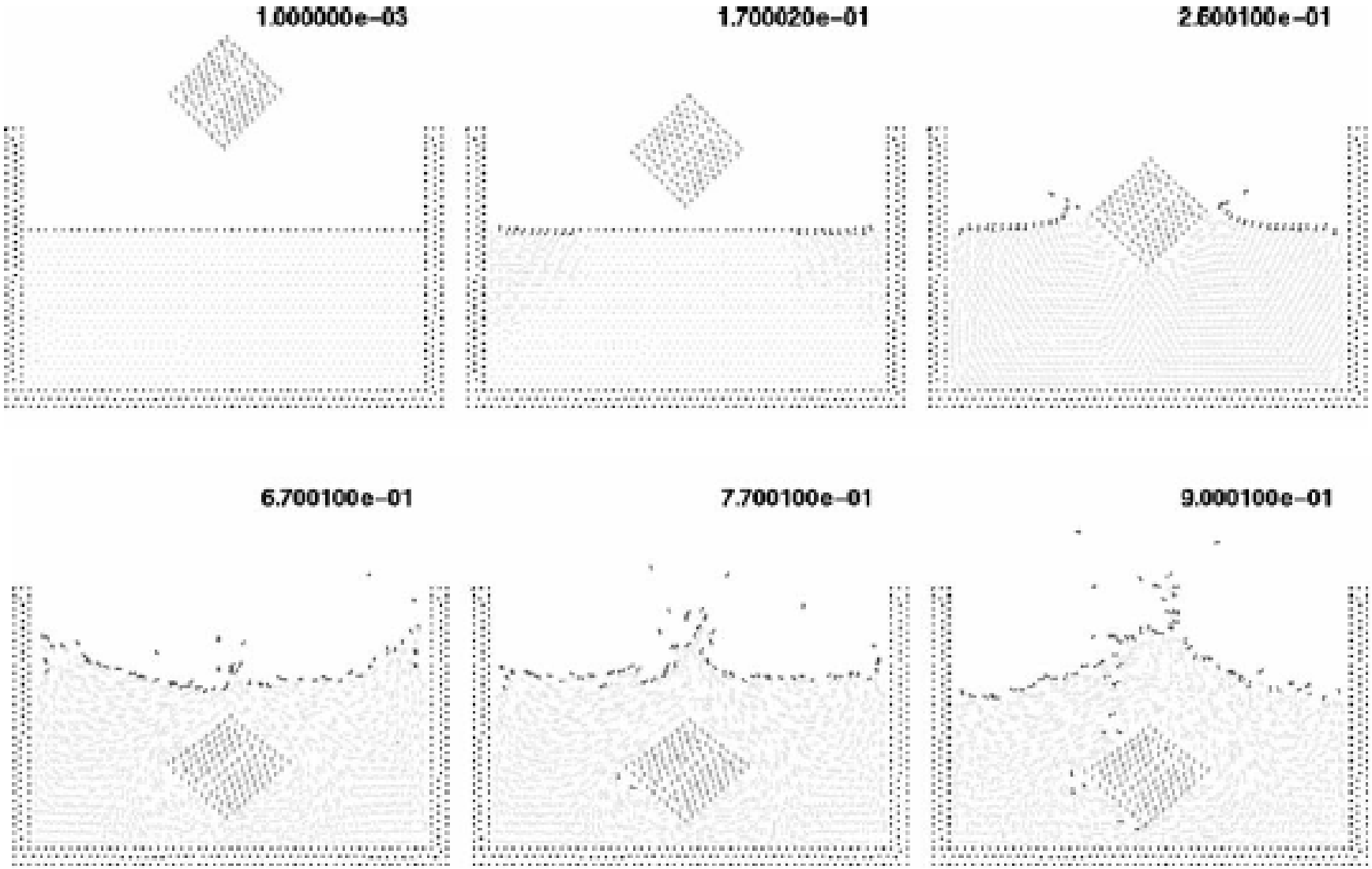

pressure: 267.129 2830.98 5394.83 7958.68 10522.5 13086.4 15650.2 18214.1


pressure: 82.23 1889.61 3696.99 5504.38 7311.76 9119.14 10926.5

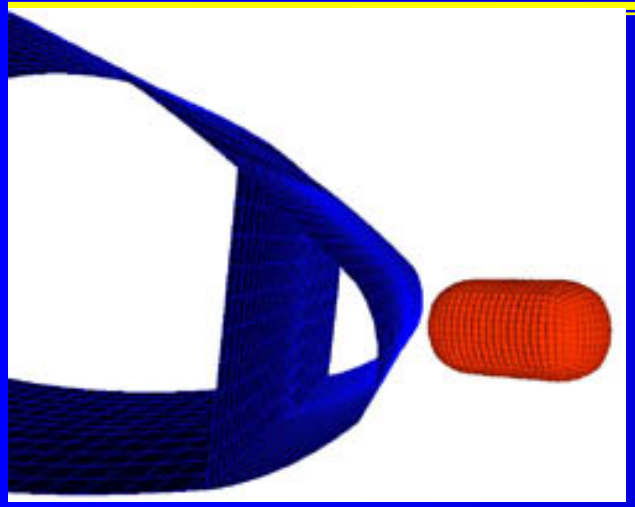
无网格法的应用

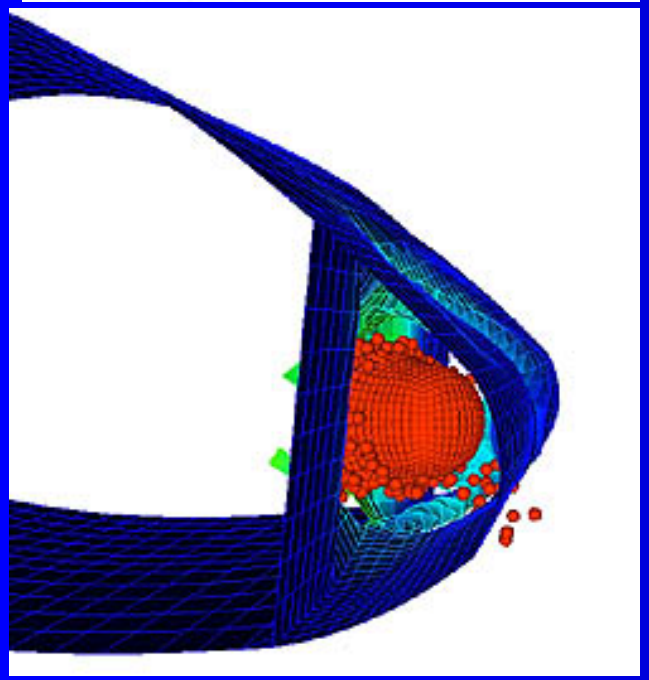

1.000000e-03
9.013750e-02
1.900250e-01
8.900160e-01
9.900080e-01
1.090010e+00

无网格法的应用

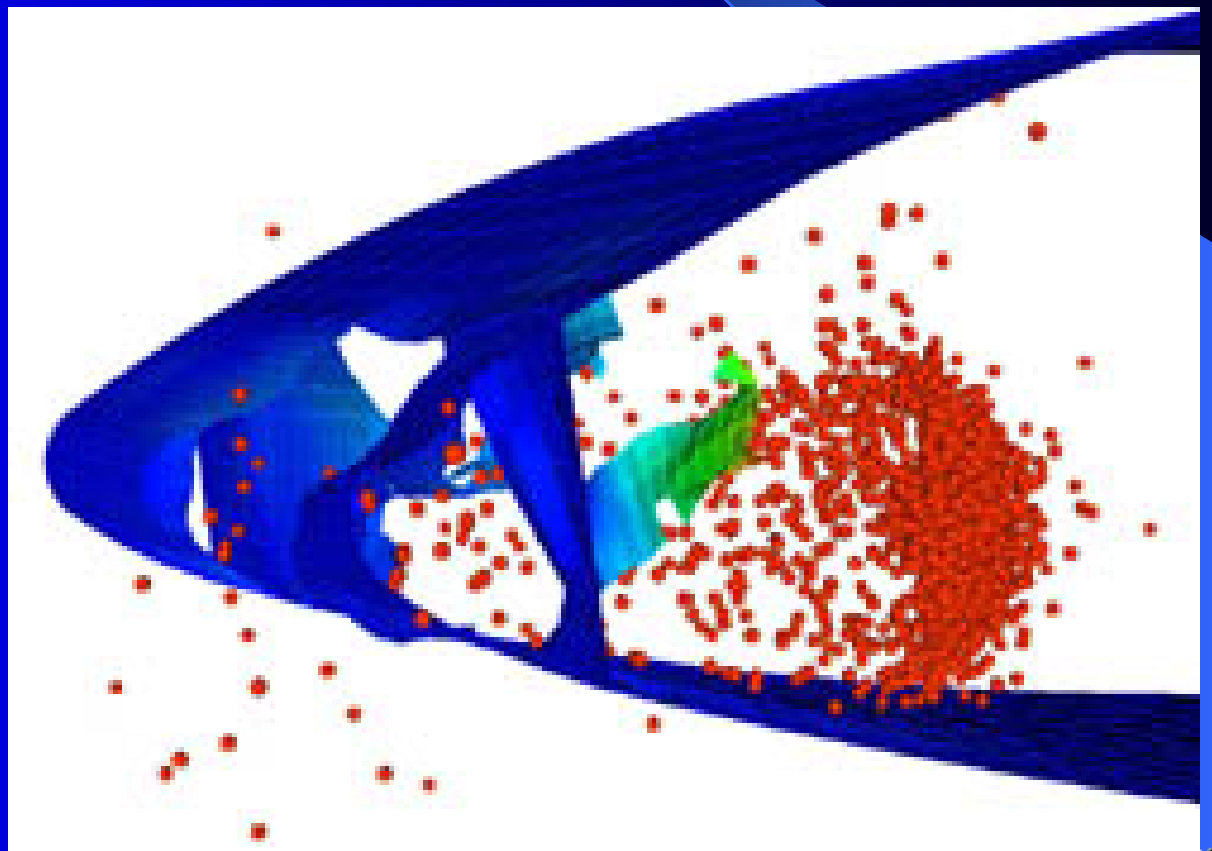

1.000000e-03
1.700020e-01
2.600100e-01
6.700100e-01
7.700100e-01
9.000100e-01

无网格法的应用

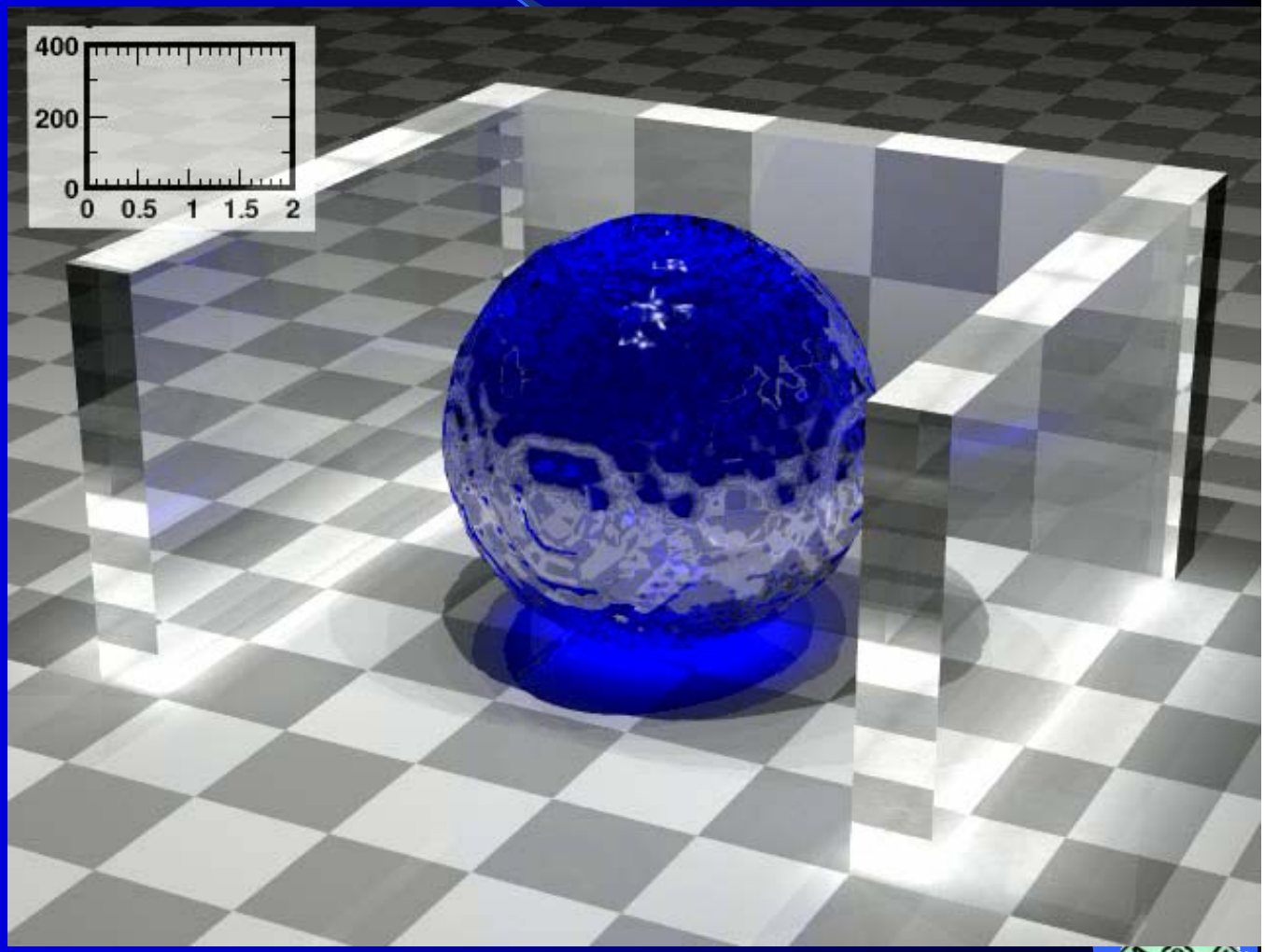




DYNA3D-SPH



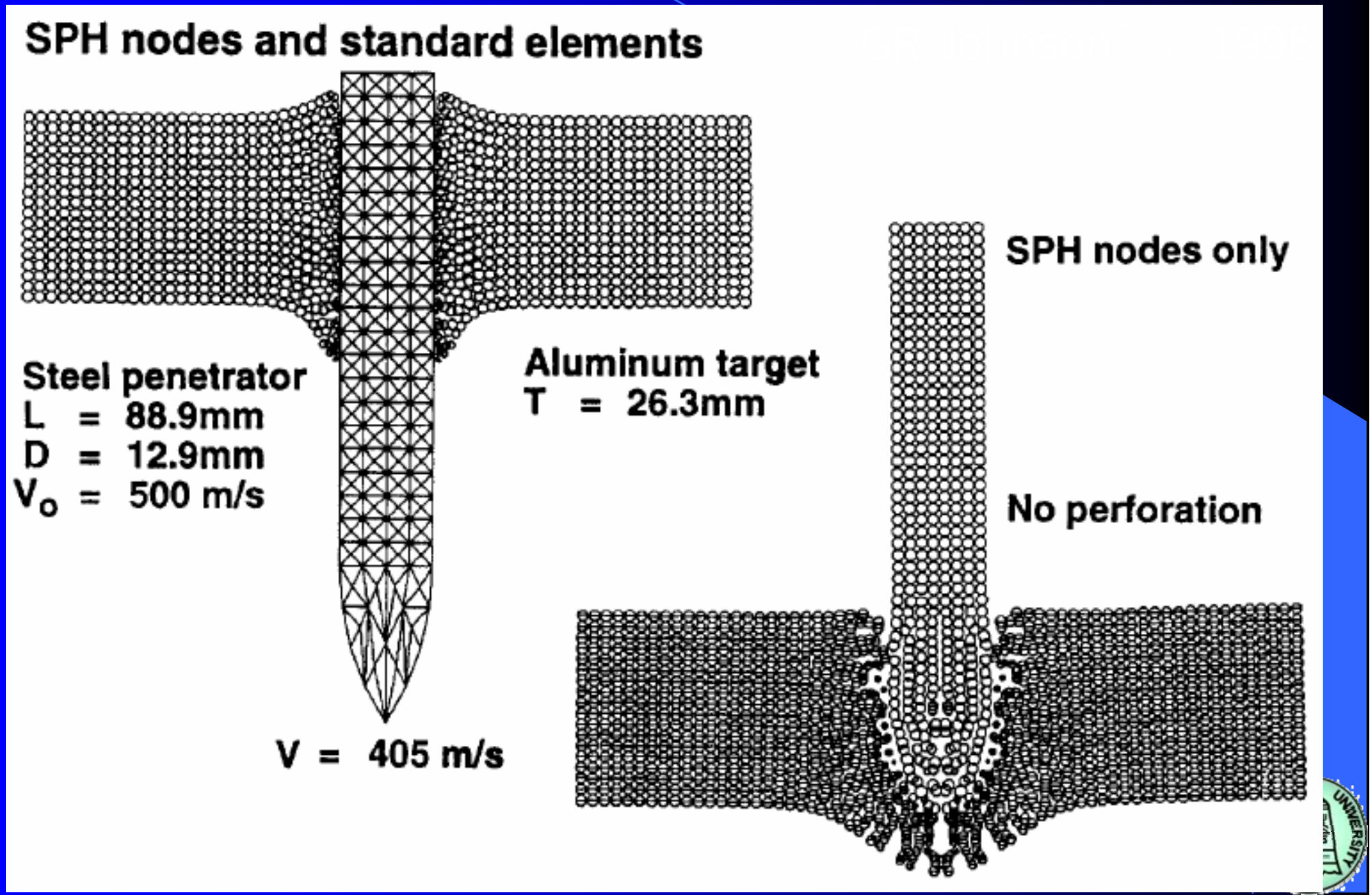
无网格法的应用



SPH模拟

无网格法的应用

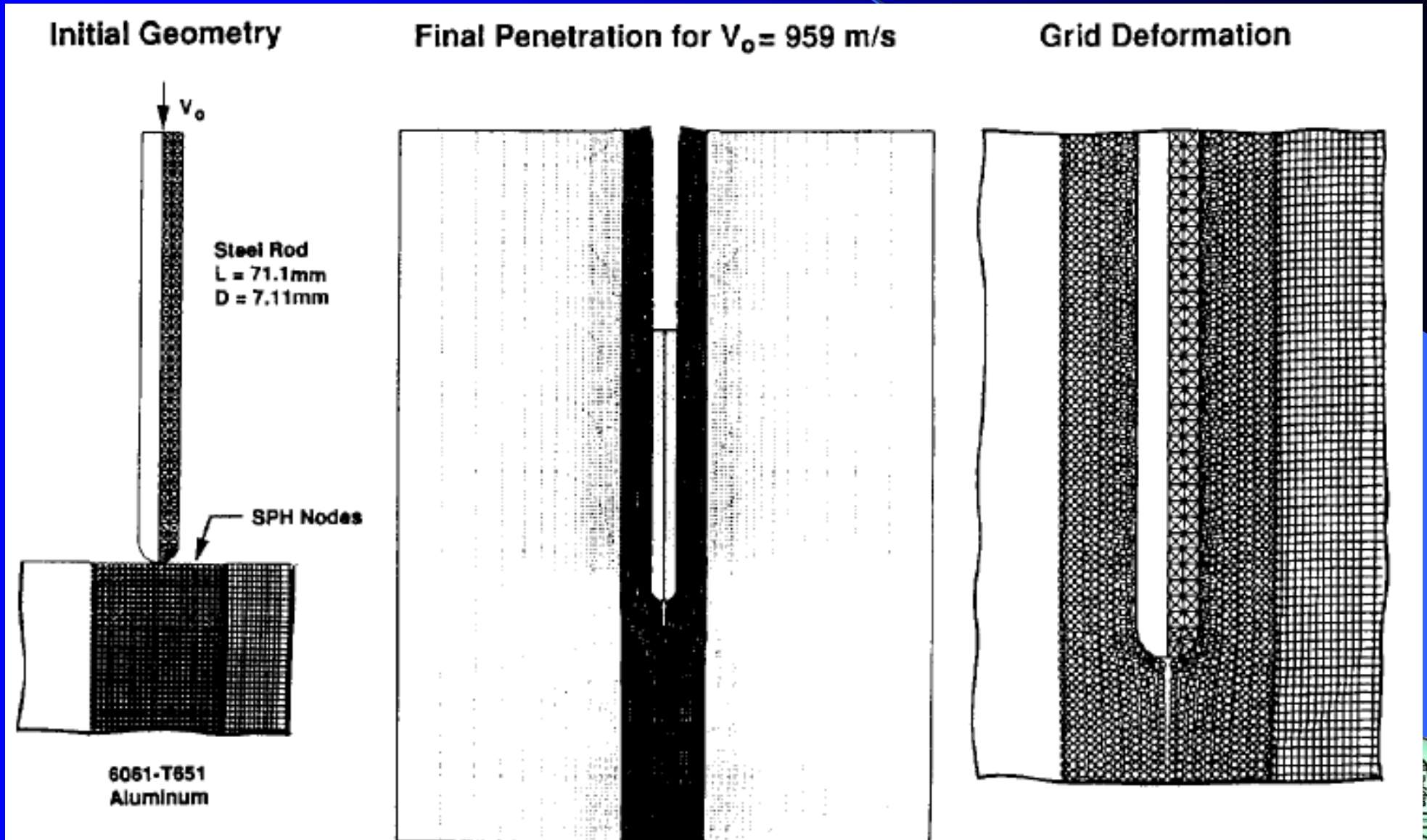
SPH-FEM



无网格法的应用

SPH-FEM

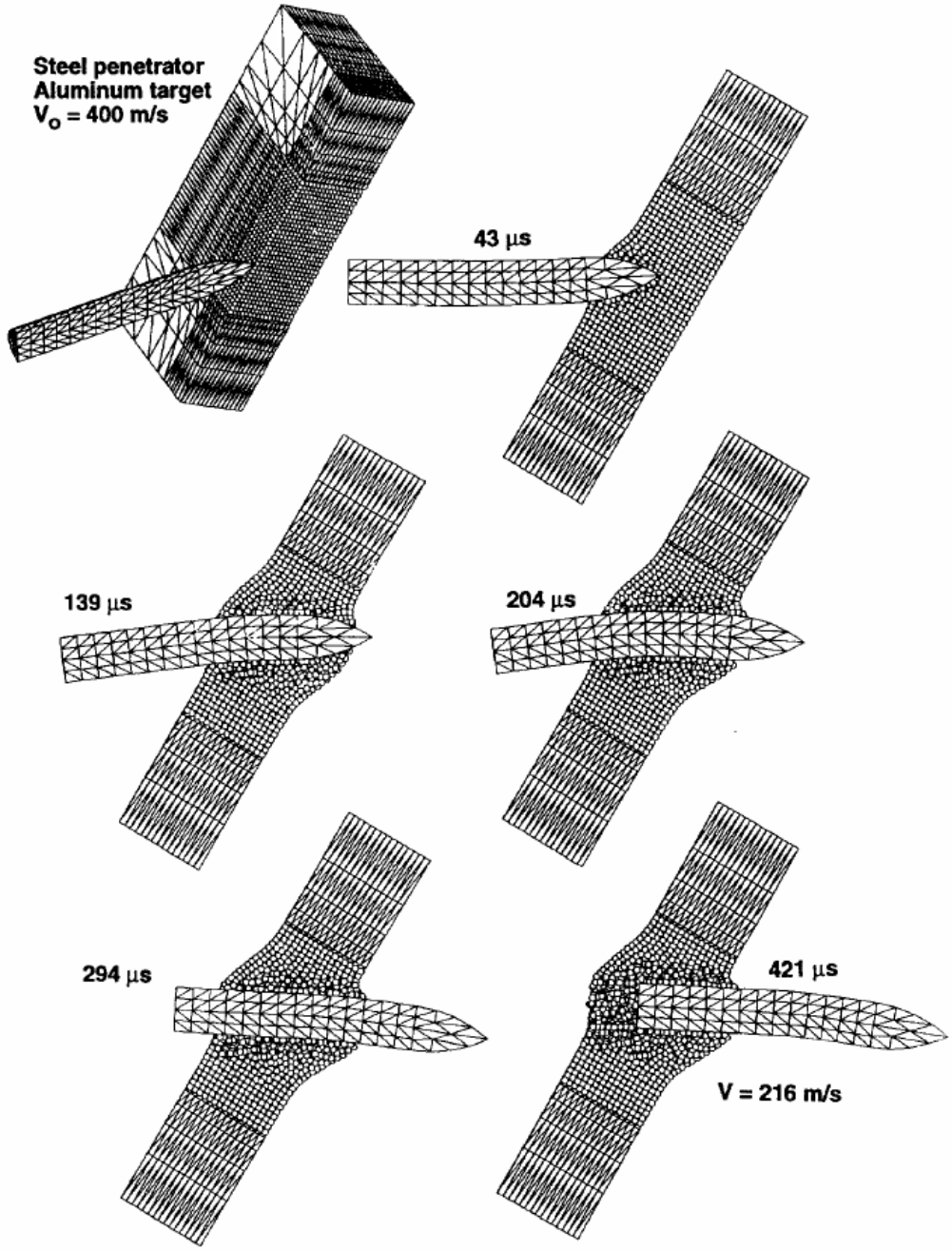
GR Johnson等，1996



无网格法的应用

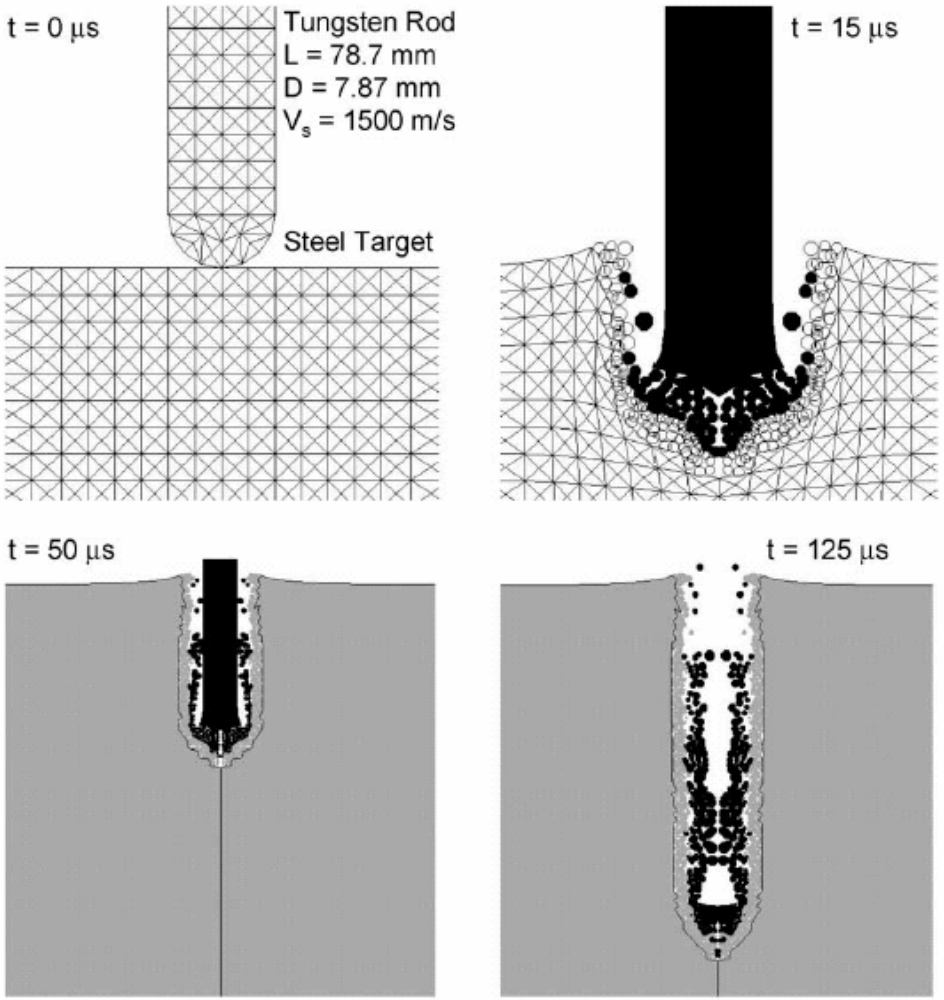
SPH-FEM

GR Johnson等，1996

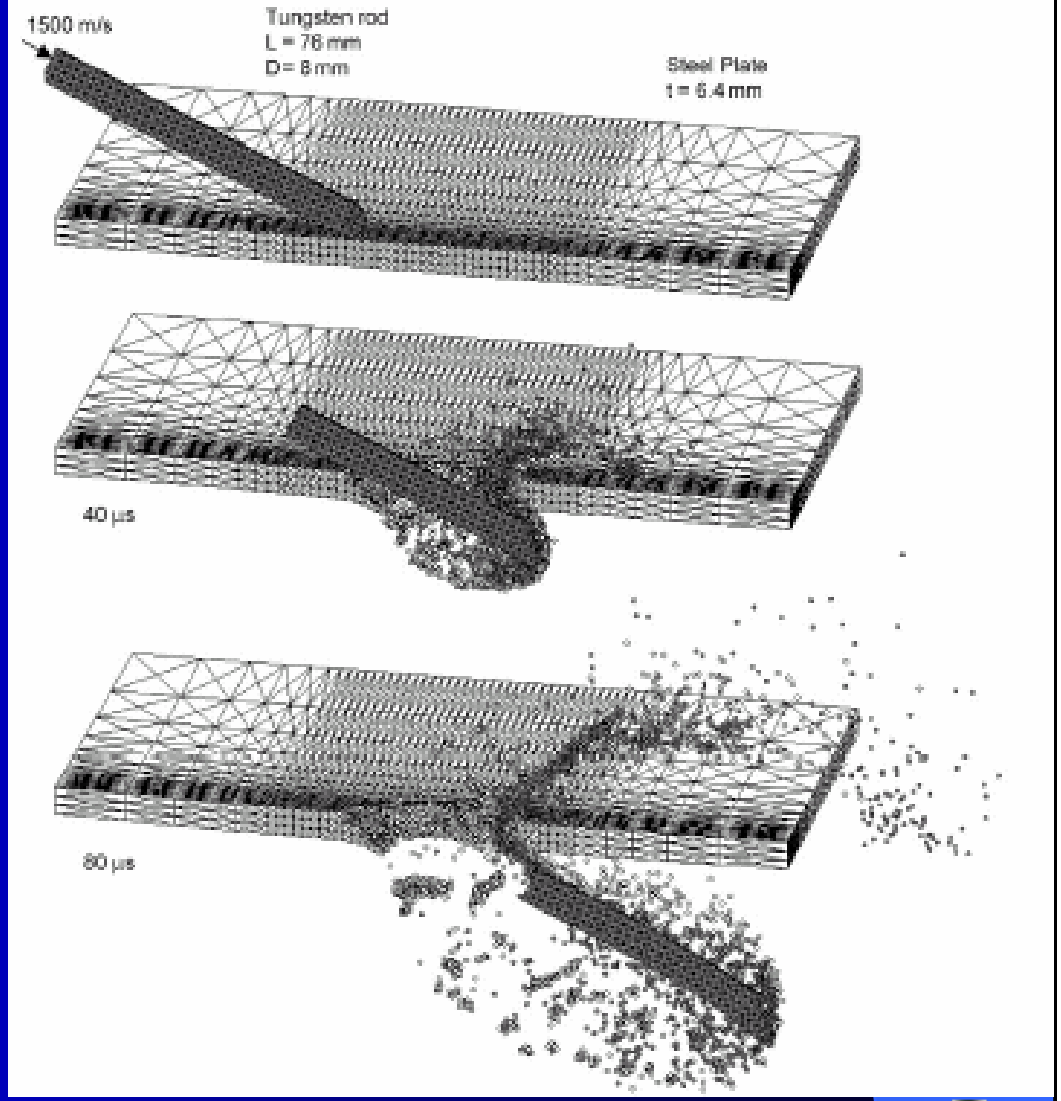


无网格法的应用

Generalized particle algorithm

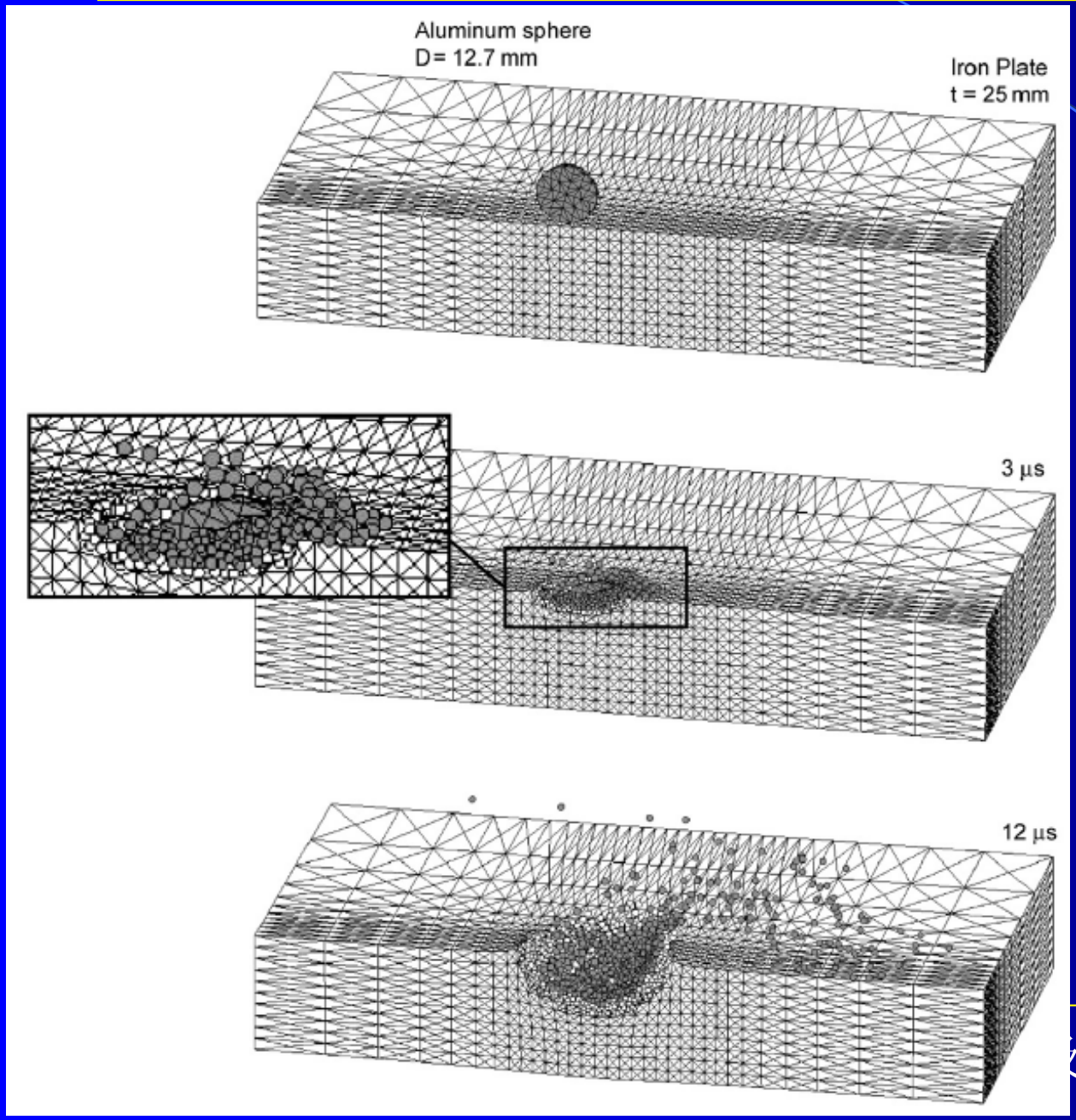


Johnson等



无网格法的应用

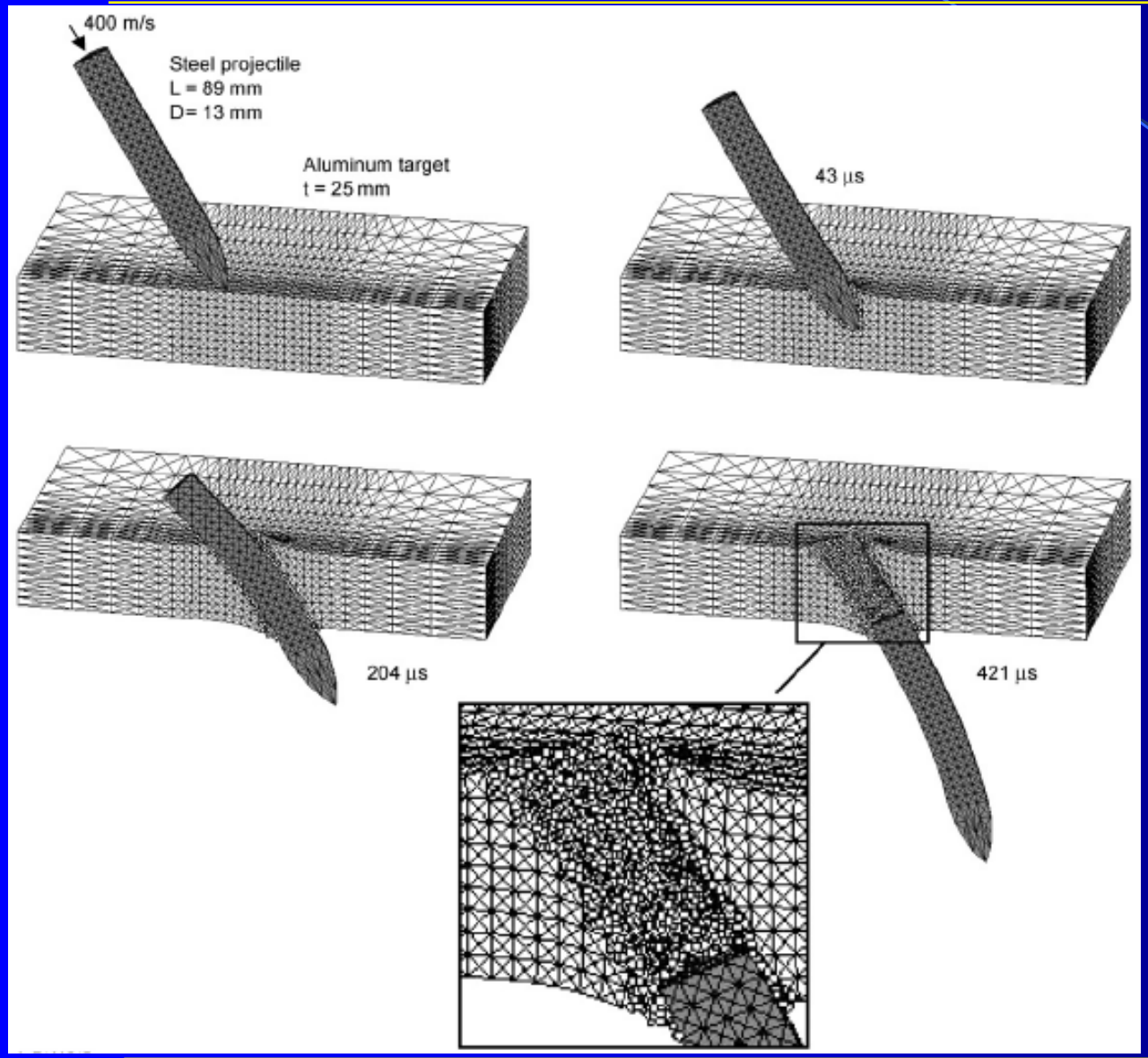
Generalized particle algorithm



Impact at 4km/s, with an obliquity of 30° from normal

无网格法的应用

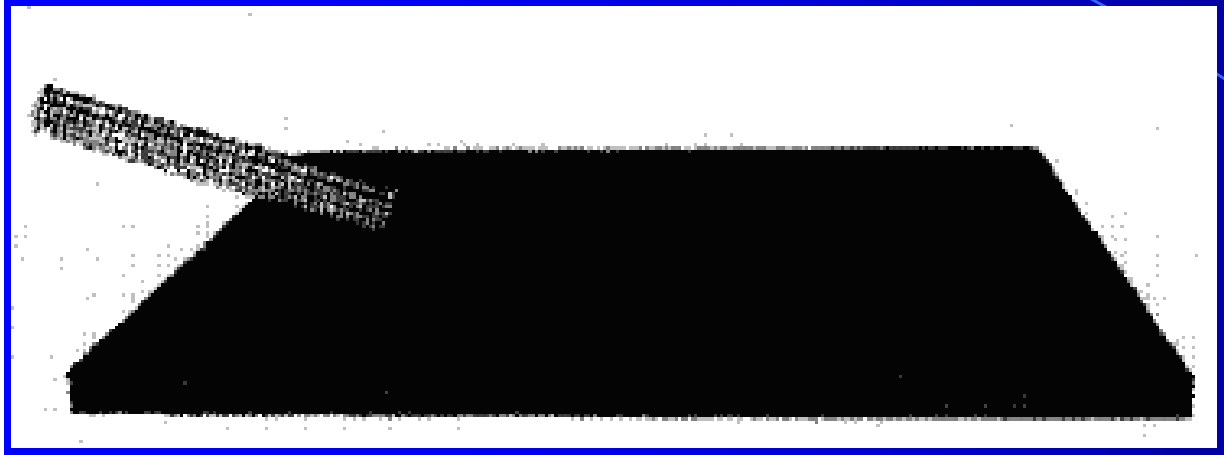
Generalized particle algorithm



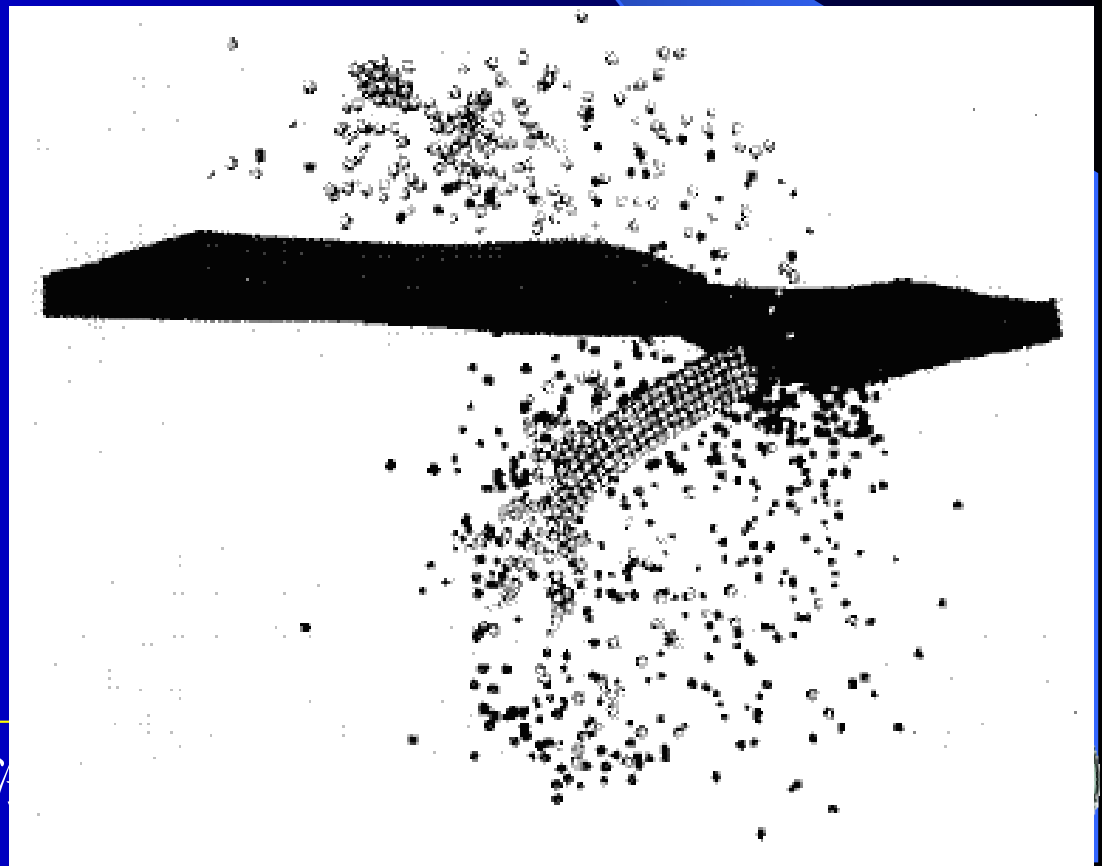
Impact at 400m/s, with an obliquity of 30° from normal

无网格法的应用

Particle-finite element method



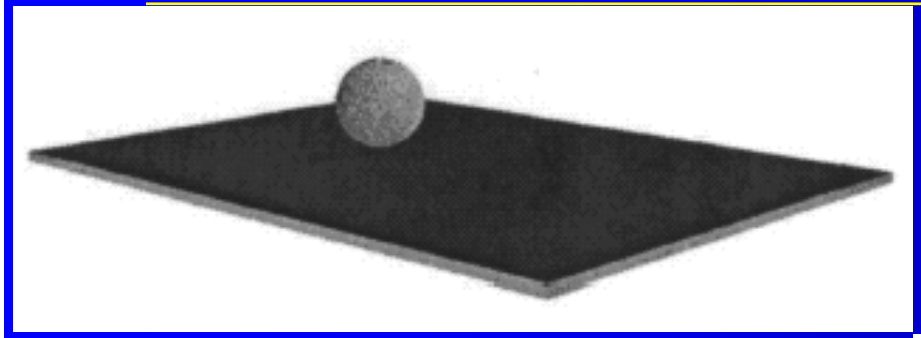
Deforming spherical particles, interacting in both the mechanical and thermal domains



E. P. Fahrenthold等,1997, 1999
University of Texas, Austin

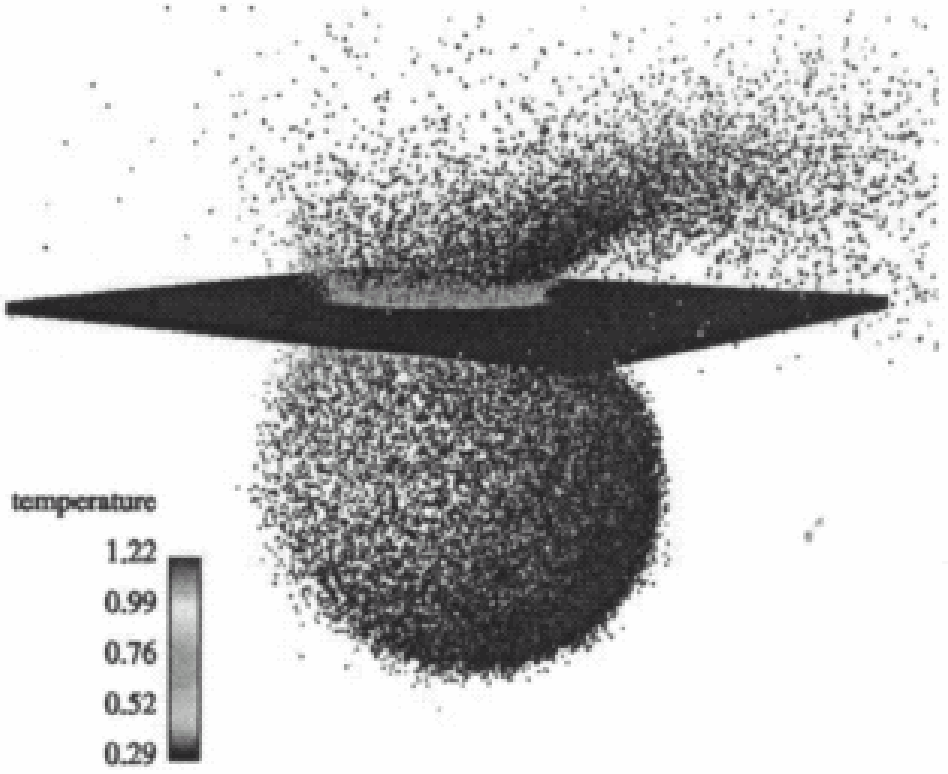
无网格法的应用

Particle-finite element method



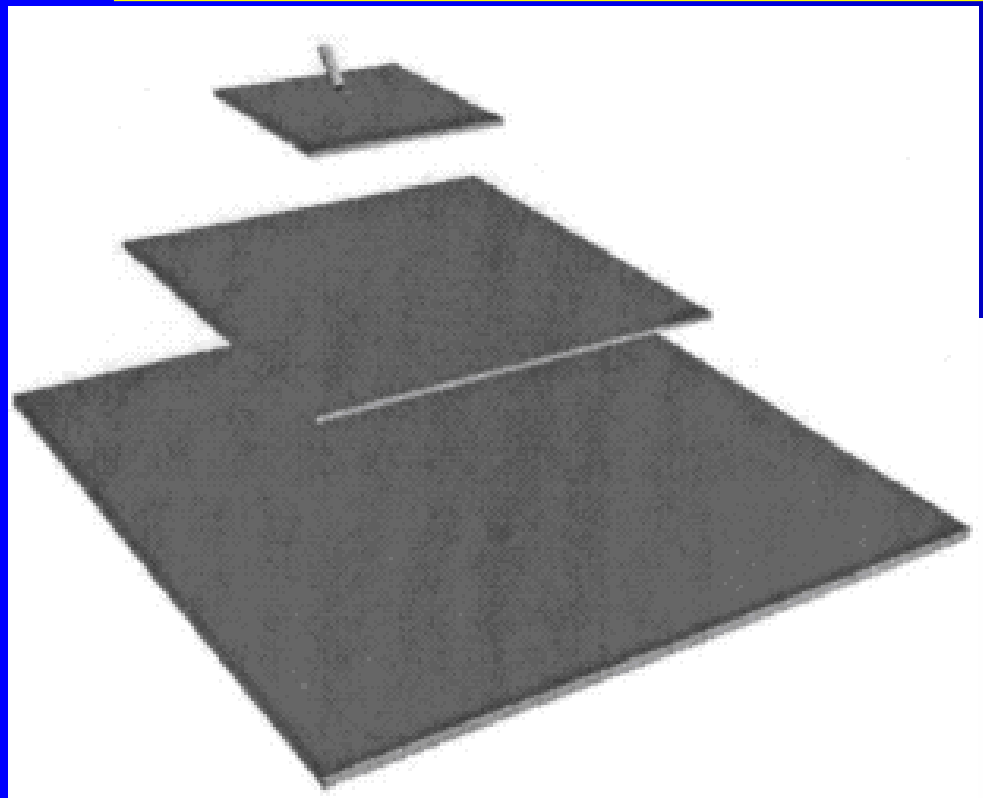
E. P. Fahrenthold等

铝球对铝板冲击

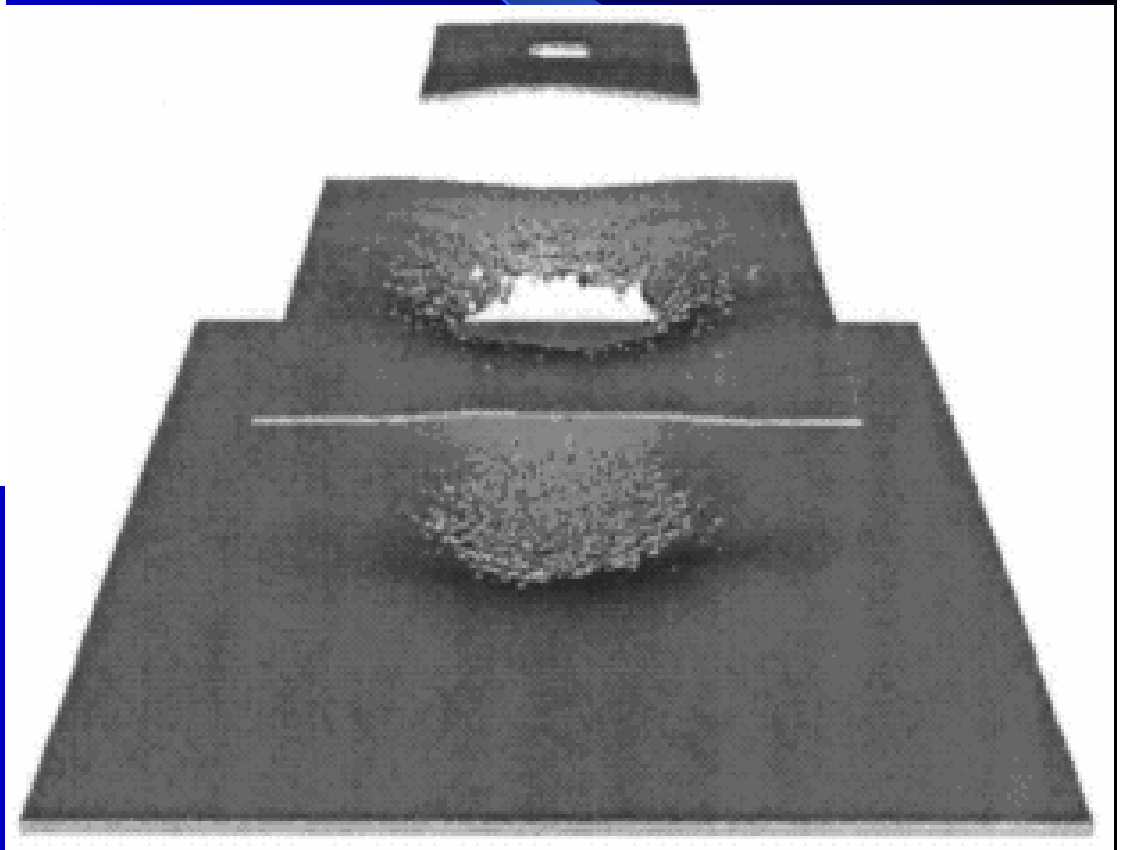


无网格法的应用

Particle-finite element method

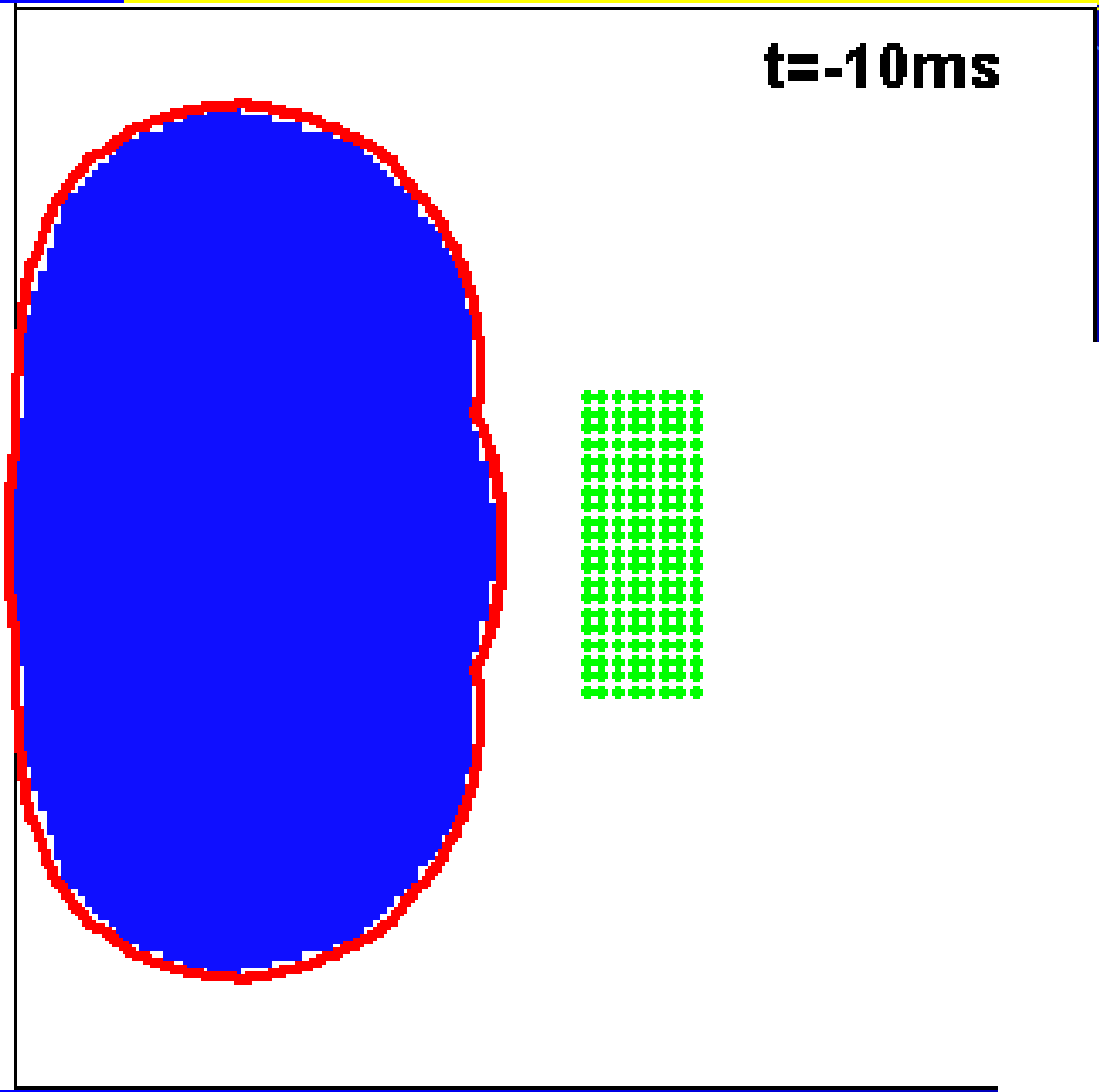


E. P. Fahrenthold等

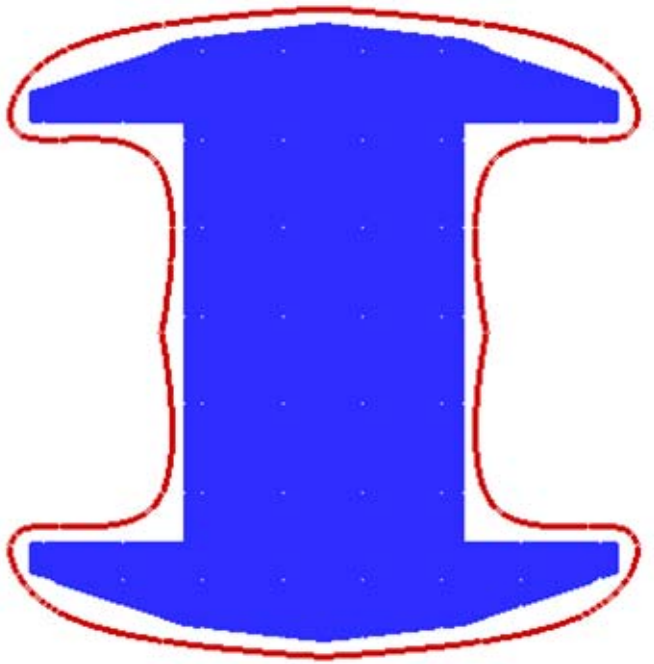


钨合金棒对钢板冲击

无网格法的应用

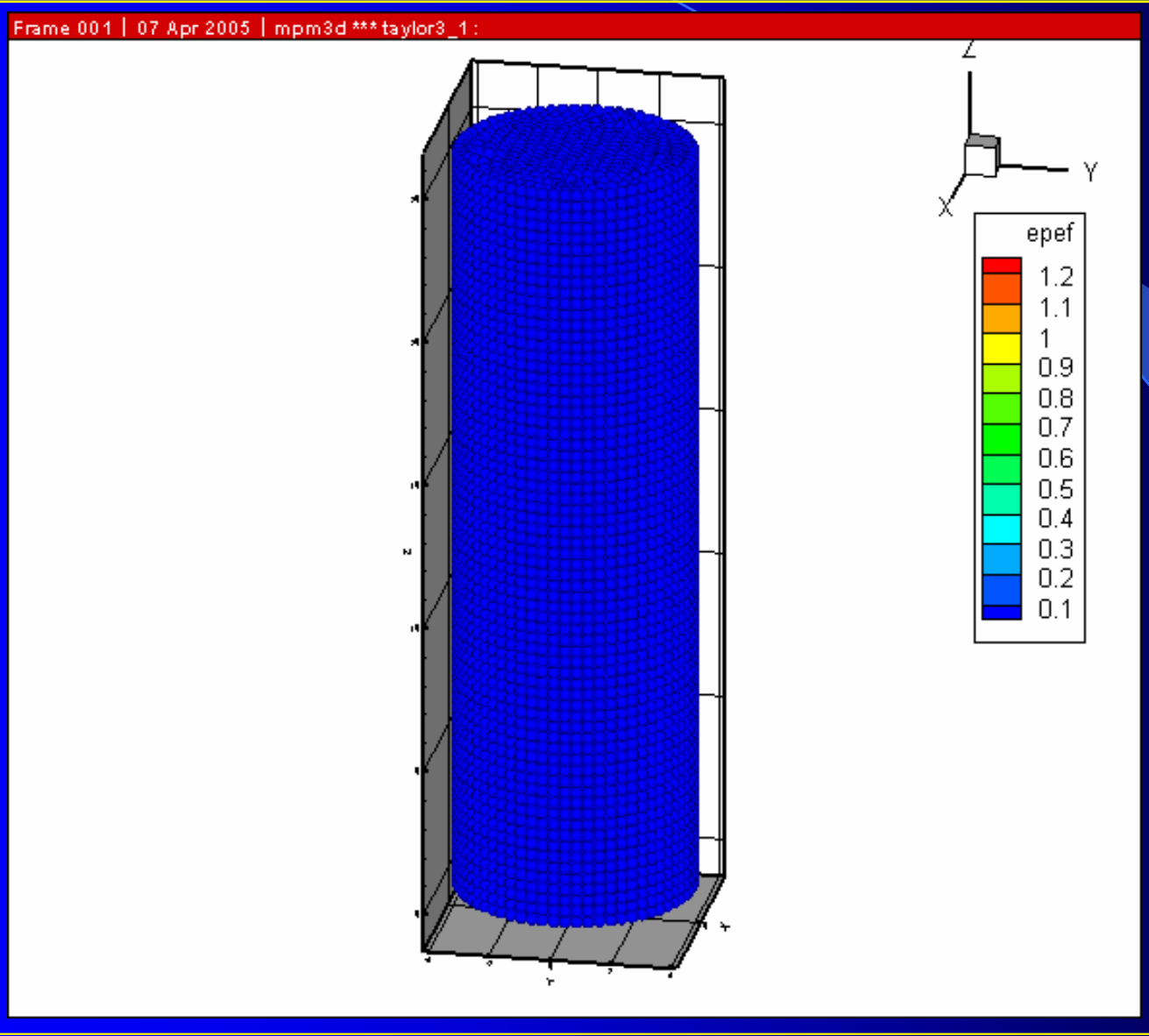


MPM



无网格法的应用

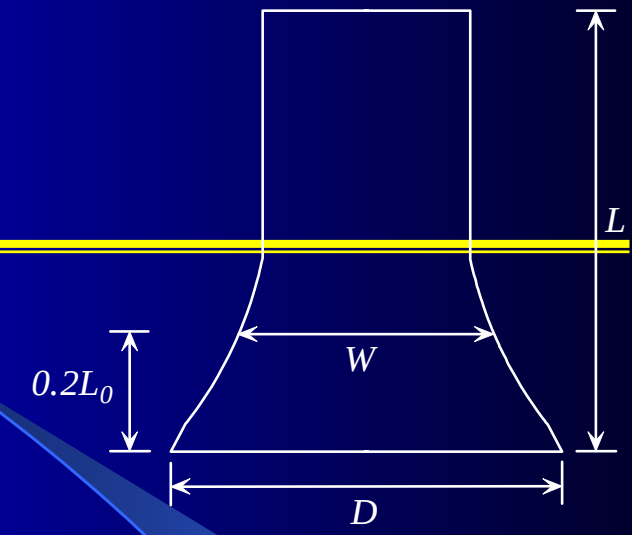
Taylor杆



MPM

无网格法的应用

误差定义：$\frac{1}{3}\left(\frac{|L|}{L_t}\ \frac{|D|}{D_t}\ \frac{|W|}{W_t}\right)$



	L (mm)	D (mm)	W (mm)	—
Test*	16.2	13.5	10.1	-
FEM	16.3	13.4	10.0	0.008
MPM	16.4	13.6	9.9	0.011

	最大时间步长（ms）	最小时间步长（ms）	时间步	相对耗时
FEM	7.37E-5	1.45E-5	4657	13.4
MPM	1.96E-4	1.96E-4	408	1

*: Johnson et al. 1988 Journal of Applied Physics 64:3901-3910

无网格法的应用

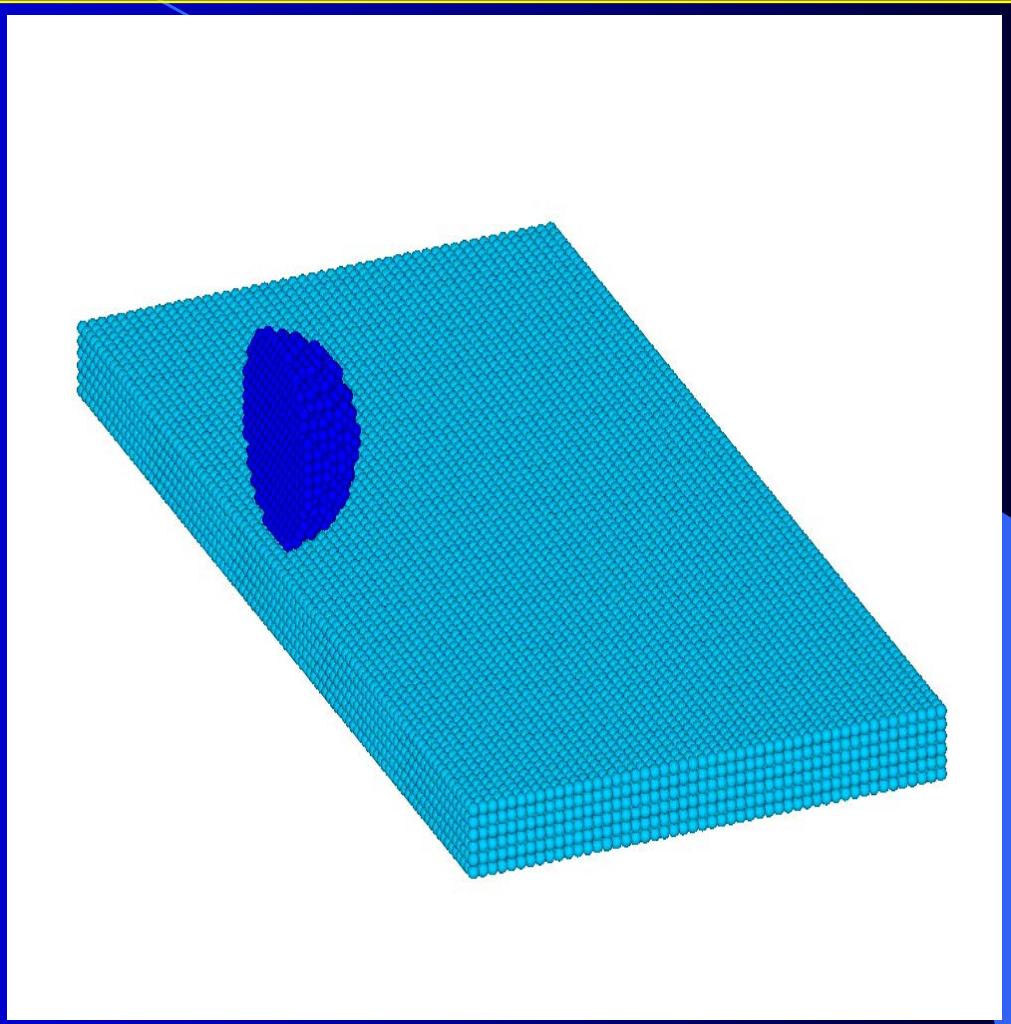
弹丸超高速碰撞薄板

弹丸直径: 8 mm

靶板厚度: 3 mm

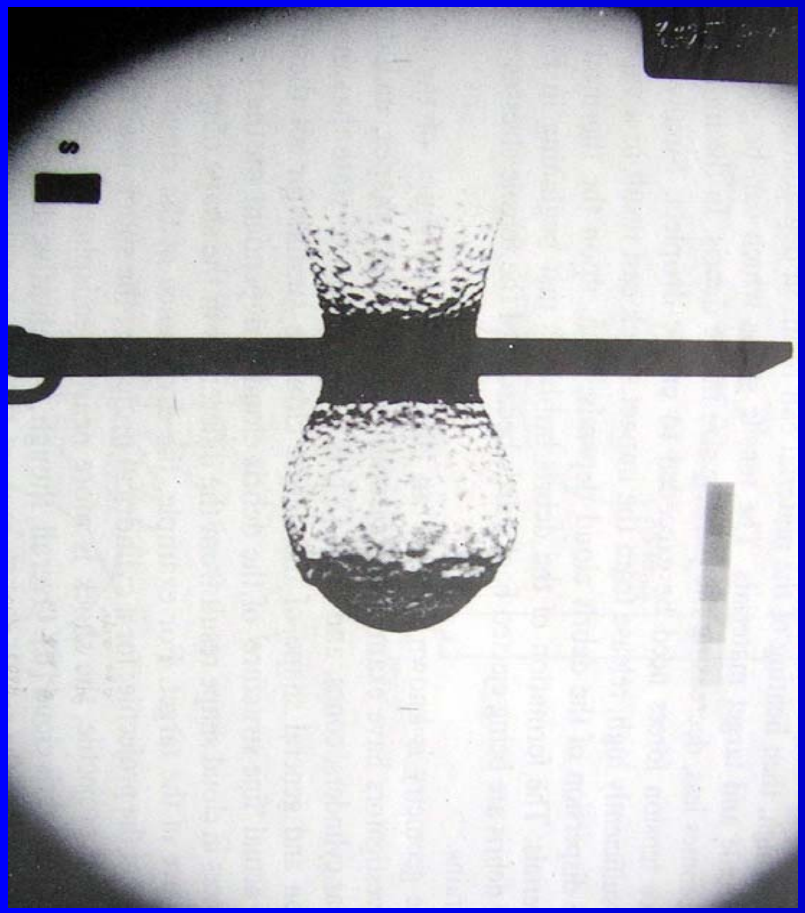
初速度: 6.6 km/s

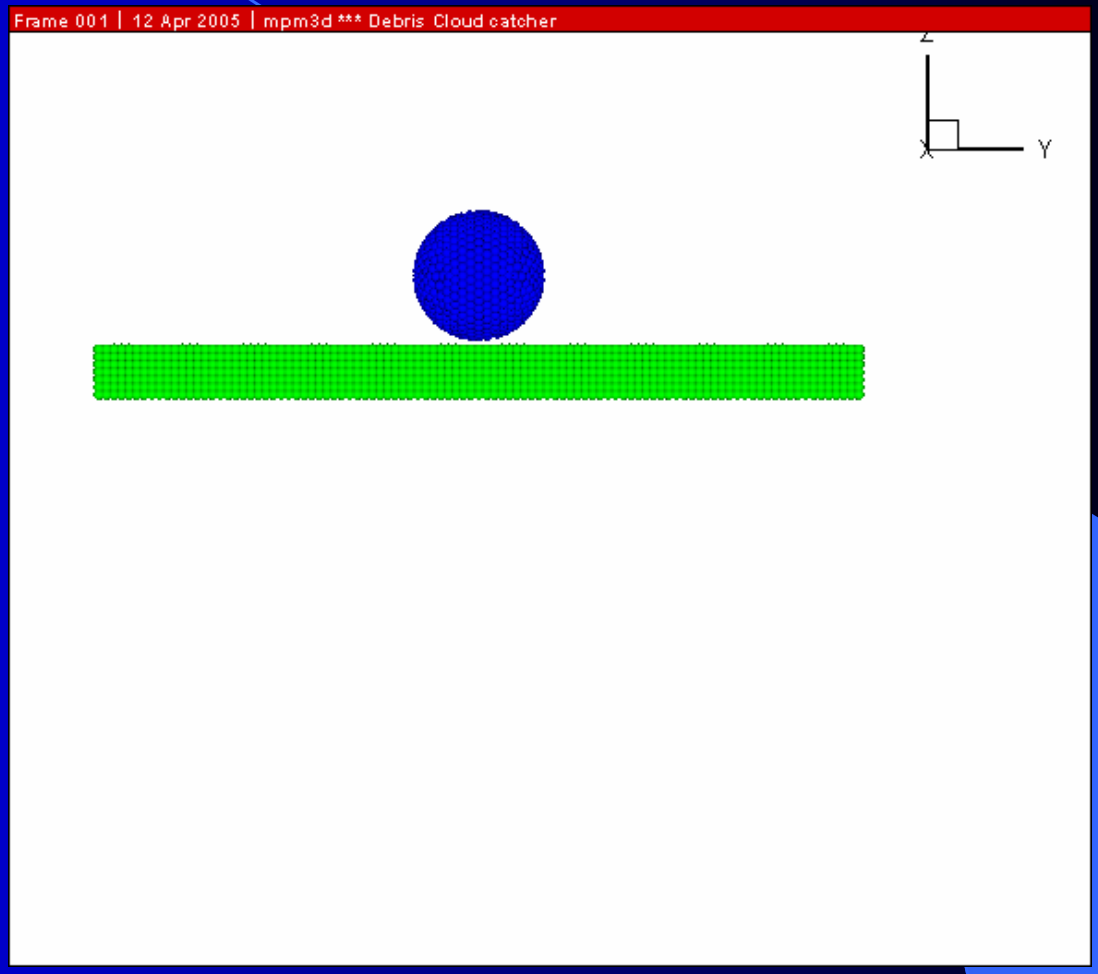
37,142 物质点



无网格法的应用

弹丸超高速碰撞薄板



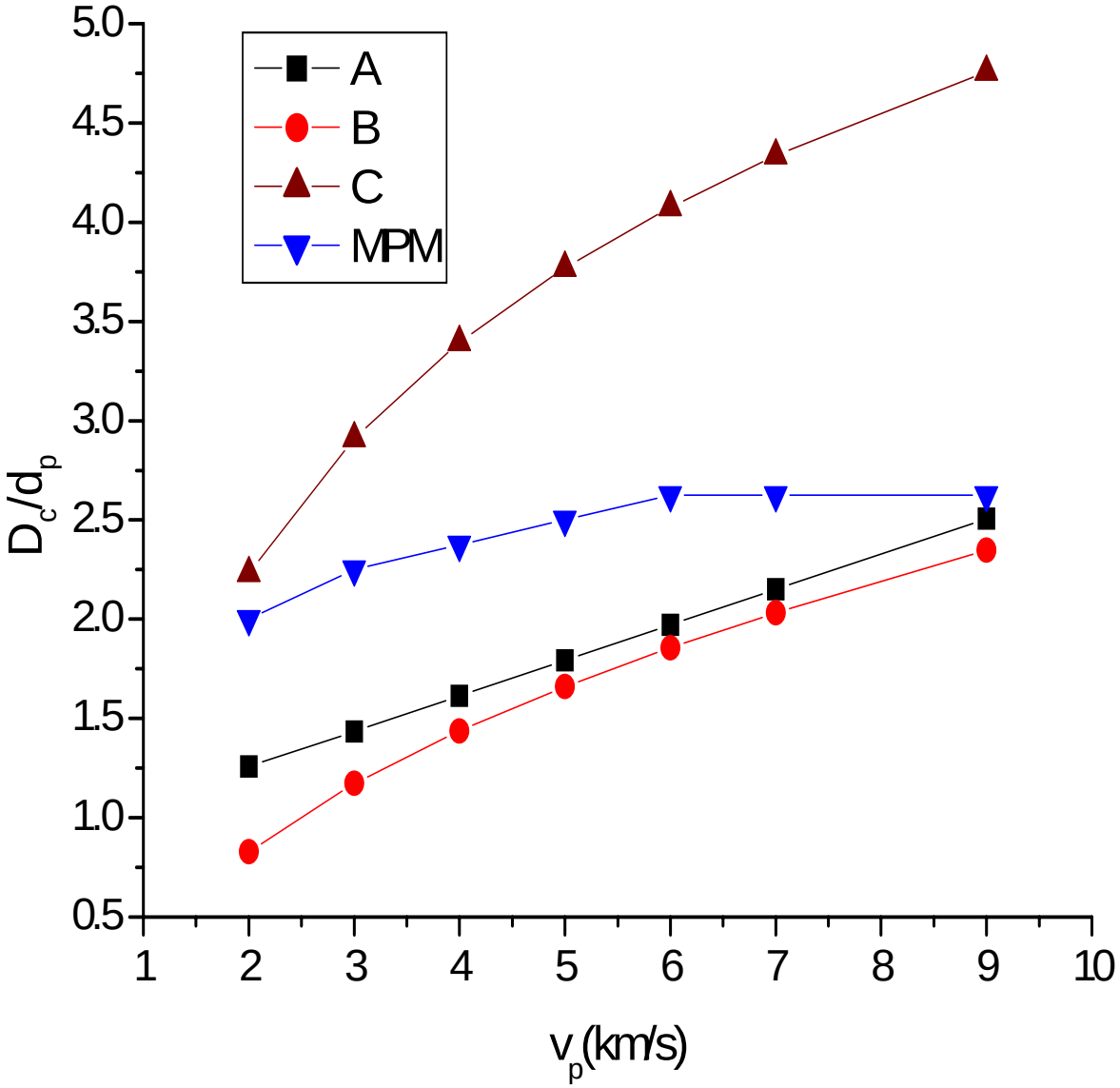


Anderson et al. 1990, Int. J. Impact Engng 9(1):89-113

时间： 9 微秒

无网格法的应用

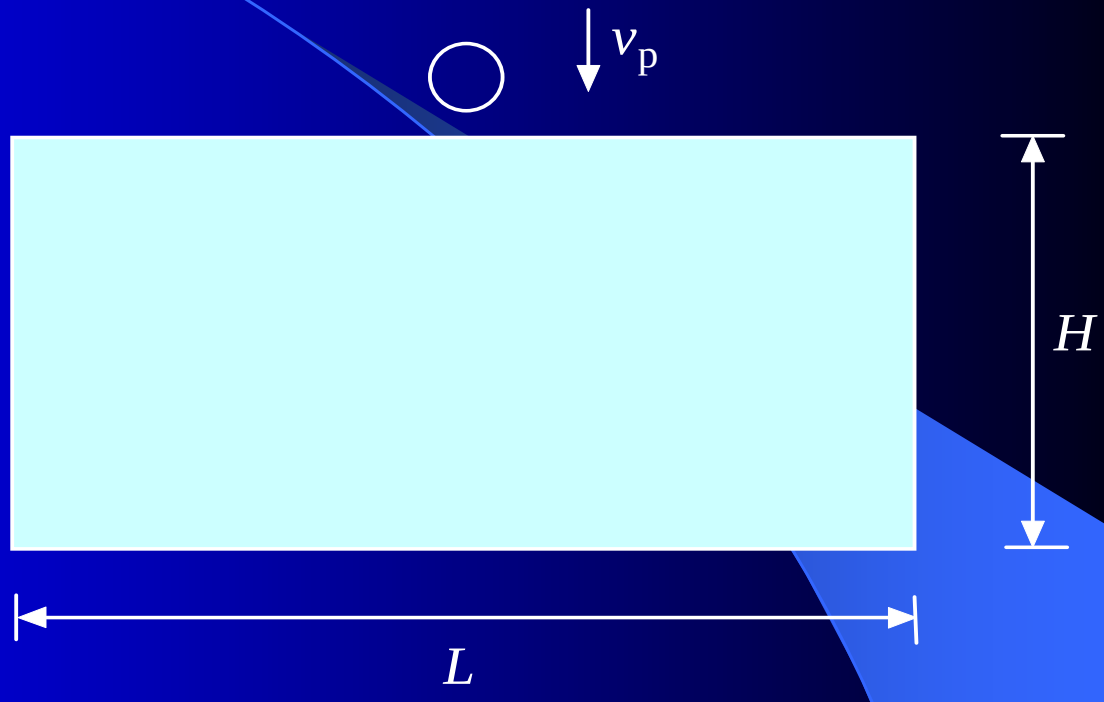
不同弹速下的穿孔特征



无网格法的应用

弹丸超高速碰撞厚板

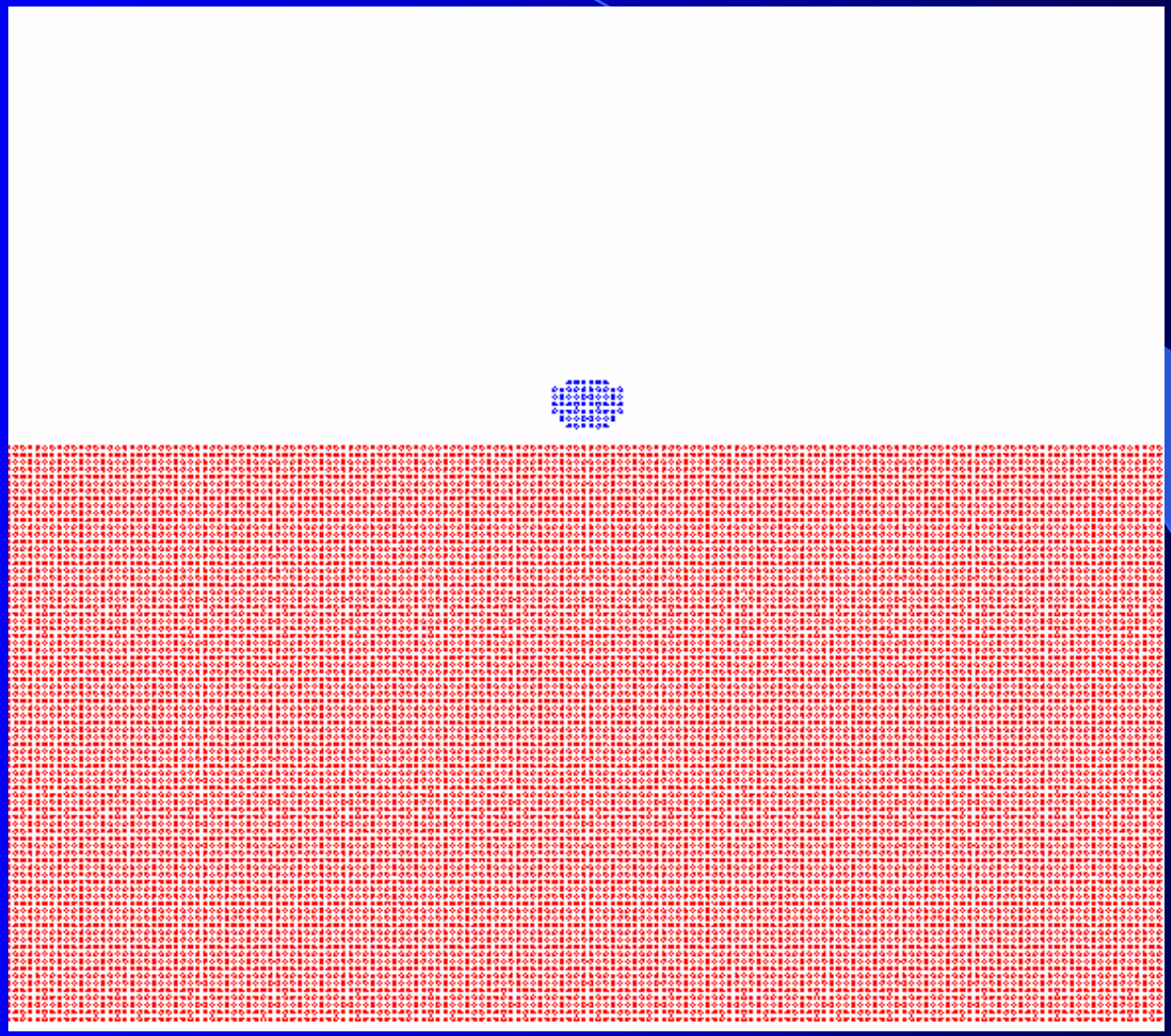
铜 - 铜碰撞
碰撞速度：6.0 km/s
球形弹丸质量：0.5 g
靶板为长方体
长宽均为 80 mm，厚 40 mm
取1/2模型进行计算
共1,024,224 个物质点
P4 2.6g, 耗时4-5小时



C.A. Wingate et. al.
International journal of impact engineering, 1993. 14: 819-830

无网格法的应用

弹丸超高速碰撞厚板



36 微秒

无网格法的应用

弹坑参数与实验结果的比较

时刻：32微秒

	弹坑深度(mm)	弹坑直径(mm)	坑深/坑径
实验*	14	25.4	0.55
EPIC	18	24	0.75
MESA	15.9	28	0.57
SPH	17.3	26	0.67
CALE	15.1	24.4	0.62
MPM3D	14	25	0.56

* Wingate, 1993

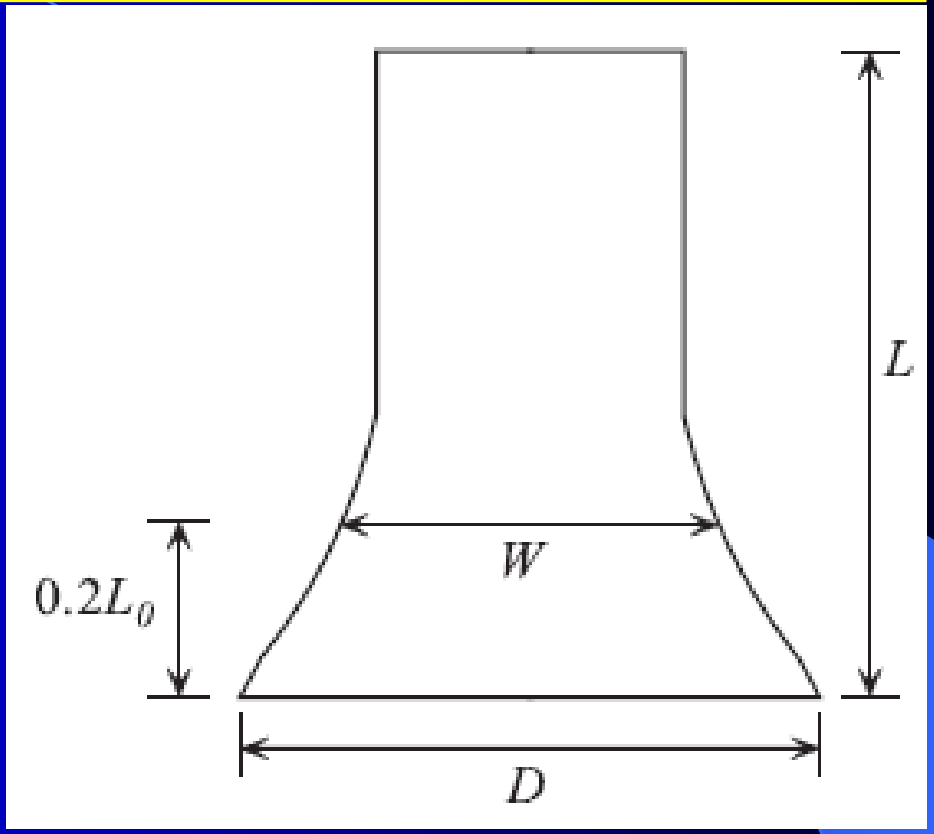
无网格法的应用

Taylor杆

L_0 25.4mm

D_0 13.5mm

v_0 190m/s



材料：铜

ρ (kg/m^3)	E (MPa)	ν	A (MPa)	B (MPa)	n	C
8930	117×10^3	0.35	157	425	1.0	0.0

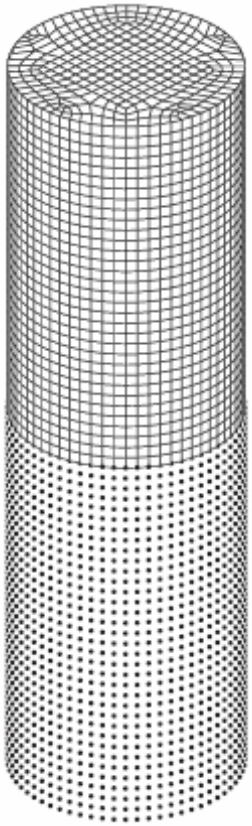
无网格法的应用

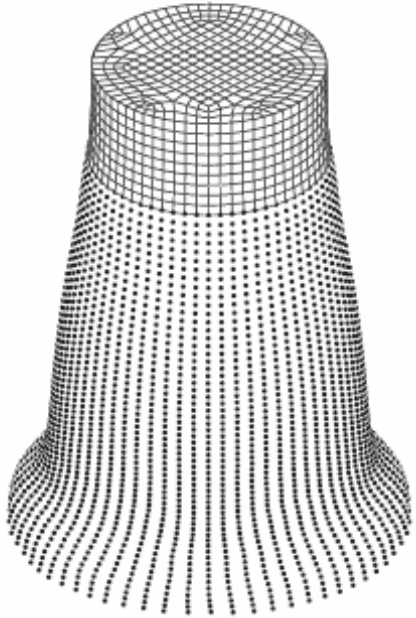
Taylor杆

	$L(\mathrm{mm})$	$D(\mathrm{mm})$	$W(\mathrm{mm})$	$\overline{\Delta}$
Test data	16.2	13.5	10.1	-
FEM	16.27	13.33	10.18	0.008
MPM	16.35	13.4	9.9	0.012
MPFE	16.38	13.4	9.9	0.013

22576 nodes

$$\overline{\Delta} = \frac{1}{3}\left(\frac{|\Delta L|}{L} + \frac{|\Delta D|}{D} + \frac{|\Delta W|}{W}\right)$$



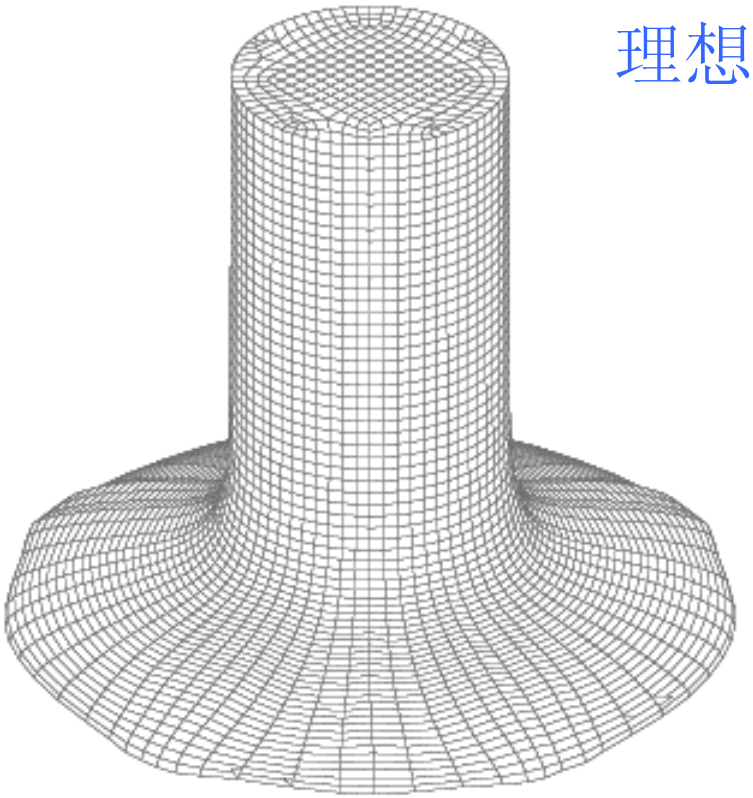


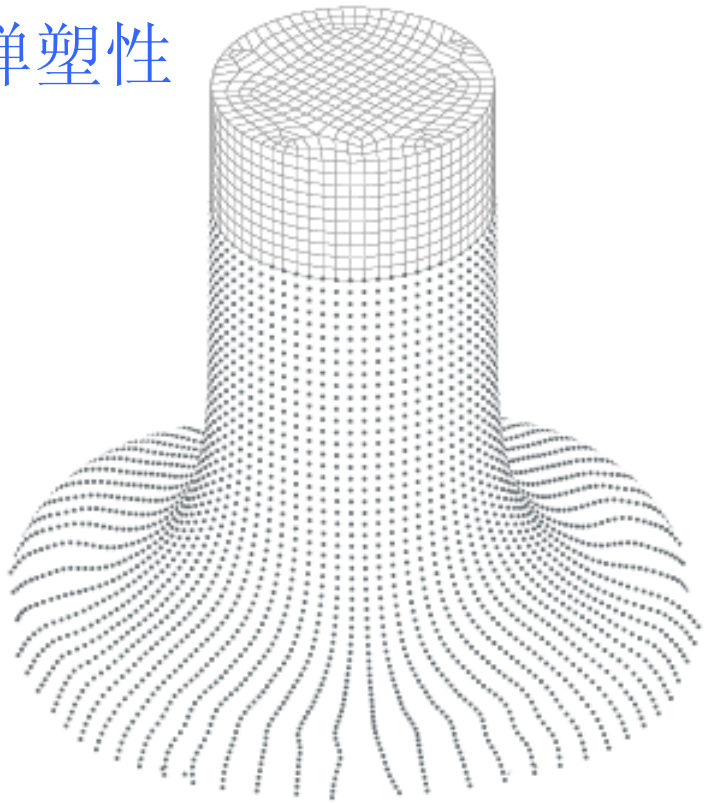
无网格法的应用

处理网格畸变的效果

	χ_{max}	χ_{min}	$\Delta t_{max}(ms)$	$\Delta t_{min}(ms)$	Time steps	CPU time(s)
FEM	7.849×10^{-2}	8.298×10^{-6}	9.264×10^{-6}	7.893×10^{-7}	17987	5969
MPFE	7.849×10^{-2}	7.573×10^{-2}	9.264×10^{-6}	9.242×10^{-6}	5443	1744

理想弹塑性





MPFEM


The end