复合材料结构损伤问题的逐层理论研究

（申请清华大学工学博士学位论文）

培 养 单 位： 航天航空学院

学　　科： 航空宇航科学与技术

研 究 生： 李 顶 河

指 导 教 师： 张 雄　教 授

二〇一四年十一月

Layerwise theory for damage analysis of composite laminated structures

Dissertation Submitted to

Tsinghua University

in partial fulfillment of the requirement

for the degree of

Doctor of Philosophy

in

Aeronautical and Astronautical Science and Technology

by

Li Dinghe

Dissertation Supervisor : Professor Zhang Xiong

October, 2014

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：

清华大学拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：（1）已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；（2）为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供校内师生阅读，或在校园网上供校内师生浏览部分内容；（3）根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》，向国家图书馆报送可以公开的学位论文。

本人保证遵守上述规定。

（保密的论文在解密后应遵守此规定）

作者签名：_____　　导师签名：_____

日　　期：_____　　日　　期：_____

摘 要

现有的复合材料加筋层合结构和夹芯结构建模与分析方法主要是基于等效思想的，随着复合材料结构设计理念和要求的不断提高，需要有一种既可以得到板壳的精确应力位移结果，又可以在没有任何假设的情况下考虑任意复杂的加强筋结构和夹芯结构的分析方法。本文结合逐层理论应力分析精度高和三维实体元建模能力强的优点，建立了复合材料加筋结构和夹芯结构的逐层/实体元方法(Layerwise/Solid-Element，LW/SE)。对于复合材料加筋结构（夹芯结构），分别利用逐层理论和八节点实体单元建立复合材料板壳结构（上下面板结构）和加强筋结构（芯子结构）的控制方程，然后基于板壳结构（上下面板结构）与加强筋结构（芯子结构）之间的位移协调关系和内力平衡条件得到复合材料加筋层合板壳结构（夹芯结构）逐层/实体元方法的控制方程。

通过数值算例验证了逐层/实体元方法分析复合材料加筋层合板壳和夹芯结构的静动力响应问题的正确性，并建立了复合材料夹芯结构的静动力半解析和有限差分灵敏度分析方法。利用非线性 Hertz 接触律和渐进损伤模型，将逐层/实体元方法应用于复合材料加筋层合板壳和夹芯结构中低速冲击响应的分析和损伤的预测问题中，建立了一种渐进损伤分析方法，该分析方法能够得到加筋复合材料层合板和夹芯结构精确的局部冲击响应和损伤分布。

在复合材料结构的实际损伤问题中，基体裂纹和层间分层损伤往往是同时存在的，而现有扩展有限元方法对复合材料结构的基体裂纹和分层损伤是分开研究的，且只能处理穿透型基体裂纹。本文结合逐层理论和扩展有限元方法的优点，建立了含多层分层和基体裂纹损伤复合材料层合结构的扩展逐层理论 (Extended Layerwise method，XLWM)。将传统逐层理论厚度方向上的插值节点由层间界面处改为数学层中性面处，并在位移模式中分别引入弱不连续和强不连续函数来模拟层间界面的应变不连续和分层区域的位移不连续现象。厚度方向上位移插值点位于层合结构上下表面和各单层的中性面上，所以扩展逐层方法可以很方便地和扩展有限元方法相结合用来模拟层合结构的面内基体裂纹。

利用各向异性材料的相互作用积分和最大周向应力准则，将扩展逐层理论应用于复合材料层合结构的裂纹任意扩展问题上，并重点研究了裂纹尖端应力强度因子在层合板厚度方向上的变化规律。

关键词：复合材料；分层；基体裂纹；逐层理论

Abstract

As the design concept and requirements of composite structures improving, it is necessary to develop an analysis method which not only can obtain the accurate displacements and stresses of composite laminated plates/shells and facesheets but also can consider the arbitrarily complex stiffeners and core without any assumptions and simplifications. Based on the high precision of layerwise theory (LW) and modeling ability of the 3D solid finite element method (FEM), a layerwise/solid-element (LW/SE) method is established for the stiffened composite laminated shells/plates and sandwich structures. In the present LW/SE method, the layerwise theory is used to model the behavior of the composite laminated shells/plates or facesheets, and the eight-node solid element is employed to discrete the stiffeners or core. And then, based on the governing equations of the shells/plates and stiffeners (facesheets and core), the governing equations of the composite stiffened laminated shells/plates (sandwich structures) is assembled by using the compatibility conditions and the internal force equilibrium conditions at the joint interface between shells/plates and stiffeners (facesheets and core).

To demonstrate the excellent predictive capability of this LW/SE method, several numerical examples are carried out to investigate the problem of static analysis and free vibration analysis for the stiffened composite laminated shells/plates and sandwich structures. The semi-analytical and finite difference method of the statics and dynamics sensitivity analysis are developed for the composite sandwich structures. In addition, based on the modified nonlinear Hertz contact low and the progressive failure model, LW/SE method is applied to the low-velocity impact responses analysis and impact-induced damages prediction, and a progressive failure analysis method is established for the stiffened composite laminated shells/plates and sandwich structures. Accurate local impact responses and damages distribution can be obtained by the presented progressive failure analysis method.

In the practical damage problems of composite structures, the in-plane matrix cracks always exist alongside the delaminations under impact loading. Although the shell elements method improved by XFEM are applied to model thick-through cracks or delaminations individually for the composite laminated structures, there is no work has yet

been reported for the typical damage pattern including matrix crack and delamination. In this work, an extended layerwise method (XLWM) is developed to model the composite laminated structures with multiple delaminations and matrix cracks based on the advantages of layerwise method and the extend finite element method (XFEM). In the displacement field, the nodes in the thickness direction are located at the middle surface of each single mathematic layer, the top surface and the bottom surface of the composite laminates. The displacement field contains the linear Lagrange interpolation functions, the one-dimensional weak discontinuous function and strong discontinuous function. The strong and weak discontinuous function are applied to model the displacement discontinuity induced by delaminations and the strain discontinuity induced by the interface between the layers, respectively. Because the nodes in the thickness direction are located at the middle surface of each single layer, the extended layerwise method can be conveniently employed to deal with the in-plane matrix cracks combined with the XFEM.

In addition, by using the interaction integral method and the maximum circumferential tensile criterion of orthotropic materials, XLWM is applied to the prediction of the crack arbitrarily growth for the composite laminated plates. The distribution of the stress intensity factor (SIF) along the thickness direction are investigated.

Key words: Composites; Delamination; Matrix cracks; Layerwise theory

目 录

第 1 章 引言 1
1.1 复合材料层合板壳的分析理论 2
1.1.1 等效单层板壳理论 3
1.1.2 逐层理论 5
1.1.3 Zig-Zag 理论 6
1.1.4 状态空间理论/Hamilton 正则方程 8
1.2 复合材料加筋结构的分析方法 9
1.3 复合材料夹芯结构的分析方法 11
1.4 复合材料层合板壳结构中低速冲击问题研究进展 12
1.5 扩展有限元方法在复合材料结构损伤分析中的应用 15
1.6 本文主要研究内容 17
第 2 章 复合材料加筋层合板壳结构的逐层/实体元方法 19
2.1 复合材料层合板壳的逐层理论 19
2.1.1 Reddy 逐层理论的位移假设模式 19
2.1.2 运动方程和边界条件 20
2.1.3 本构关系 23
2.1.4 有限元列式 25
2.2 加强筋结构的三维实体元有限元列式 26
2.3 复合材料加筋层合板壳的 LW/SE 方法 28
2.4 数值算例 30
2.4.1 圆柱壳的线性静力和自由振动分析 30
2.4.2 加筋圆柱壳的线性静力和自由振动分析 32
2.4.3 开口加筋板结构静力和自由振动分析 33
2.4.4 复合材料加筋层合圆柱壳结构静力和自由振动分析 35
2.4.5 复杂复合材料加筋层合壳结构静力和自由振动分析 37
2.5 本章小结 41

第 3 章 复合材料蜂窝夹芯结构的逐层/实体元方法 44
3.1 复合材料夹芯结构的逐层/实体元方法 44
3.2 蜂窝夹芯结构的建模方法和材料性能等效理论 48
3.2.1 蜂窝夹芯的三种建模方法 48
3.2.2 蜂窝夹芯结构的材料性能等效理论 48
3.3 蜂窝夹芯结构静动力响应灵敏度分析 50
3.3.1 灵敏度系数控制方程 51
3.3.2 解析法和半解析法 53
3.3.3 差分法 55
3.4 数值算例 55
3.4.1 LW/SE 方法正确性验证 55
3.4.2 蜂窝夹芯结构三种建模方法的对比研究 58
3.4.3 灵敏度分析半解析法和有限差分法的精度对比 62
3.4.4 三种芯子结构建模方法的灵敏度分析方面对比 69
3.5 本章小结 76
第 4 章 复合材料加筋层合板壳和夹芯结构中低速冲击的渐进损伤分析 ... 78
4.1 基于 Hertz 接触律的中低速冲击接触力 78
4.2 冲击损伤的渐进损伤分析模型 82
4.2.1 三维连续损伤模型 82
4.2.2 损伤起始准则 82
4.2.3 刚度退化律 83
4.3 数值算例 85
4.3.1 本文方法正确性 85
4.3.2 冲击载荷作用点对冲击响应的影响 88
4.3.3 低速冲击复合材料加筋层合板结构 93
4.3.4 受多次低速冲击复合材料加筋层合板结构 103
4.3.5 低速冲击复合材料蜂窝夹芯结构 106
4.4 本章小结 110
第 5 章 复合材料层合梁结构的扩展逐层理论 114
5.1 位移假设模式 114
5.1.1 复合材料低速冲击损伤 114
5.1.2 厚度方向上的位移假设 115

5.1.3 面内位移离散 118
5.2 Hamilton 原理和 Euler-Lagrange 方程 119
5.3 复合材料层合梁的本构方程 121
5.4 控制方程 122
5.4.1 含多层分层复合材料层合梁的控制方程 122
5.4.2 含多层分层和多处基体裂纹复合材料层合梁的控制方程 122
5.5 数值算例 123
5.5.1 无损伤复合材料层合梁 123
5.5.2 含多层分层复合材料层合梁 125
5.5.3 含多处基体裂纹复合材料层合梁 130
5.5.4 含多层分层和多处基体裂纹复合材料层合梁 134
5.6 本章小结 138
第 6 章 复合材料层合板结构的扩展逐层方法 141
6.1 位移场 141
6.1.1 位移假设模式 141
6.1.2 水平集函数 142
6.1.3 扩充函数 143
6.2 Hamilton 原理和 Euler-Lagrange 方程 145
6.3 本构方程 148
6.4 控制方程 150
6.4.1 含多层分层复合材料层合板的控制方程 150
6.4.2 含多层分层和基体裂纹复合材料层合板的控制方程 151
6.5 数值算例 152
6.5.1 无损伤复合材料层合板 152
6.5.2 含多层分层损伤复合材料层合板 154
6.5.3 含基体裂纹复合材料层合板 158
6.5.4 含多层分层和基体裂纹复合材料层合板 165
6.6 本章小结 167
第 7 章 复合材料层合板结构裂纹的任意扩展预测 169
7.1 应力强度因子的计算 169
7.1.1 相互作用积分 170
7.1.2 各向同性材料的辅助位移和应力场 172
7.1.3 正交各向异性材料的辅助位移和应力场 174

7.2 裂纹扩展准则 175
7.2.1 各向同性材料的最大周应力准则 175
7.2.2 各向异性材料的最大周应力准则 175
7.3 裂纹的任意扩展 177
7.4 数值算例 178
7.4.1 一侧具有贯穿裂纹的各向同性拉伸长方形板 178
7.4.2 一侧具有贯穿裂纹的复合材料拉伸长方形板 181
7.4.3 含椭圆分层损伤拉伸长方形板的裂纹任意扩展 187
7.5 本章小结 192
第 8 章 全文总结与展望 195
8.1 全文总结 195
8.2 展望 196
参考文献 198
致 谢 209
声 明 210
附录 A 附录 211
A.1 Reddy 复合材料层合板壳逐层理论的控制矩阵 211
A.2 扩展逐层理论刚度系数积分结果 214
个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果 229

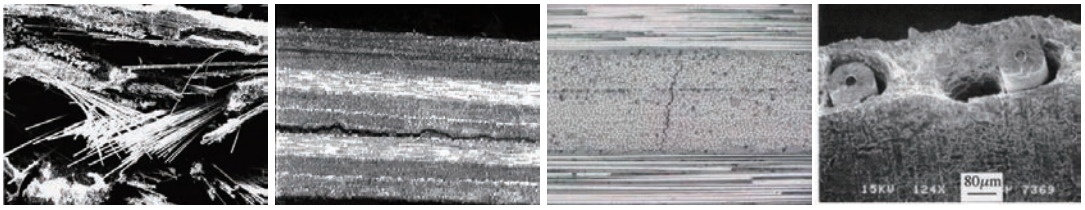
主要符号对照表

LW	逐层理论 (Layerwise Theory)
EST	等效单层板壳理论 (Equivalent single-layer theories)
ZZ	Zig-Zag 理论 (Zig-Zag theory)
CLPT	经典层合板理论 (Classical Lamination Plates Theory)
FSDT	一阶剪切变形理论 (First order Shear Deformation Theory)
HSDT	高阶剪切变形理论 (Higher order Shear Deformation Theory)
SST	状态空间理论（State space theory）
LW/SE	逐层/实体元方法 (Layerwise/Solid-Element)
XLWM	扩展逐层理论 (Extended Layerwise theory)
XFEM	扩展有限元方法 (Extended finite element method)
AM	解析法 (Analytical Method)
SAM	半解析法 (Semi-analytical method)
FDM	有限差分法 (Over Finite Different Method)

第 1 章 引言

复合材料是由高强度、高模量、脆性的单一增强材料和低强度、低模量、高韧性的单一基体材料在宏观尺度上复合而成的且具有新物理和化学性能的新型结构材料。由于单一组成材料的种类和组份、成型工艺以及纤维角度等参数都可以根据应用情况进行优化设计，因此复合材料是一种“可控制设计”的工程材料。通常来说，复合材料的各项物理和化学性能会在很大程度上优于单一常规材料，甚至会复合出一些组分材料没有的新的优异性能。现代先进复合材料以其优异的性能解决了工程结构上采用常规传统材料无法解决的一系列关键问题，特别是在大型飞机结构设计领域，复合材料以其特有的高比刚度（强度）、轻质高效、抗疲劳及非金属性等特点，与钛合金、铝合金、钢一齐成为现代飞机设计的四大主要结构材料，成为现代飞机结构设计先进性的主要标志之一[1]。

由于复合材料层合结构在中低速冲击载荷作用下容易产生内部损伤，如工具跌落和跑道飞石。这些内部损伤将严重影响结构的刚度和强度，而且内部损伤目视不可检，在没有得到及时检查和修理的情况下，随着损伤的积累容易导致结构突然失效的严重后果，所以复合材料层合结构中低速冲击特性是复合材料研究的重点领域之一。



(a) (b) (c) (d)

图 1.1 复合材料层合结构的典型损伤形式：(a) 层间分层；(b) 基体裂纹；(c) 纤维断裂；(d) 纤维与基体之间的脱胶

随着复合材料整体成型技术的快速发展和广泛应用，各种复合材料加筋结构、格栅结构和夹芯结构的形式越来越复杂，对现有分析方法提出了严重挑战。因此，需要有一种分析方法能精细分析复合材料板壳结构、加强筋结构以及夹芯结构在冲击载荷作用下的局部响应，从而提高现代先进复杂复合材料结构的设计和应用水平。

另一方面，由于复合材料自身的复杂性导致了其损伤的复杂性和形式的

多样性，一般来说复合材料的损伤分为四种基本形式：层间分层、基体裂纹、纤维断裂以及纤维与基体之间的脱胶，如图1.1 所示。基体裂纹一般平行于纤维，是由拉伸、压缩或剪切引起的；分层损伤模式表现为具有不同铺层角单层之间的剥离，是由层间应力引起的；纤维损伤模式包括纤维的断裂和屈曲损伤，是由纤维拉伸断裂或压缩失稳引起的。因为纤维的拉伸强度很大，在中低速冲击载荷作用下纤维断裂和屈曲引起的损伤仅出现在冲击接触区域，所以在中低速冲击载荷作用下复合材料层合结构的主要损伤是基体裂纹和层间分层，且两者总是同时出现的。因此，能同时精确描述基体裂纹和层间分层的分析方法是通过数值方法研究复合材料层合结构损伤机理的关键，是准确预测中低速冲击损伤、提高结构抗冲击能力设计水平的前提。

1.1 复合材料层合板壳的分析理论

从 1804 年平板作为数学问题开始被关注并研究以来，至今板壳理论的发展已经经历了二百多年。然而，直到 1850 年，Kirchhoff 才在两个目前被公认的假设基础之上得到了正确的板弯曲变形能，并用虚功原理和变分运算，推导出了著名的平板弯曲微分方程。这两个基本假设就是著名的 Kirchhoff 假设：1）原来垂直于中性面的直线，变形后仍然保持为直线且垂直于弯曲后的中性面，即直法线假设。2）在横向载荷作用下板产生微弯曲变形时，板的中性面并不伸长。对于工程结构中的薄板问题，基于 Kirchhoff 假设建立的近似分析理论能得到非常令人满意的结果。但该近似分析理论没有考虑横向剪切变形的影响，使得薄板的基本方程是一个四阶偏微分方程，每条边上的边界条件为两个。然而，对于厚板，或者需要关注集中载荷作用下薄板载荷作用点附近以及边界周围局部变形的问题，基于 Kirchhoff 假设的近似理论和边界条件不但不能得到满足工程应用的精度要求，甚至会得出严重错误的结果。针对平板弯曲分析中的这一问题，Reissner 在位移模式中引入了平均转角的假设，对 Kirchhoff 的直法线假设进行了修改，假设原来垂直于中性面的直线变形后保持为直线，但相对于中性面存在转角。该理论消除了近似理论中因忽略横向剪切变形所引起的误差，得到的薄板基本微分方程是一个六阶偏微分方程组，每条边上需三个边界条件。

19 世纪 30 年代航空工业的兴起和快速发展推动了各向异性板弯曲理论的产生和发展。随后，19 世纪 60 年代纤维增强复合材料开始应用于航空航天领域，且主要以层合结构的形式应用，利用各向异性板的弯曲理论分析这种新

型材料制成的层合板壳结构的强度和刚度等问题已开始成为板壳理论发展的主要方向。发展初期的复合材料层合板壳分析理论主要还是建立在 Kirchhoff 假设基础之上，被称为经典层合板壳理论（Classic laminated theory, CLT），后来的层合板壳理论日趋精细化，分析中考虑的横向剪切效应也越来越合理。由于复合材料层合结构面内的高度各向异性和厚度方向上弱界面的存在，严重影响了传统板壳分析理论在复合材料结构上的直接应用。随着计算机计算能力以及各种数值方法的发展，出现了大量高精度的层合板壳分析理论，如，等效单层板壳理论（Equivalent single-layer theories, EST）、Zig-Zag 理论、逐层理论（Layerwise Theory）以及状态空间理论（State space theory, SST）等。

1.1.1 等效单层板壳理论

复合材料层合结构的经典分析理论是一种直接由传统板壳分析理论发展而来的、采用等效单层描述的等效单层板壳理论（Equivalent single-layer theories, EST），在厚度方向上利用合适的位移假设将层合板壳结构等效成单层结构。因此，可以根据不同位移假设模式来区分不同的分析理论，几种典型位移假设模式如图1.2 所示。

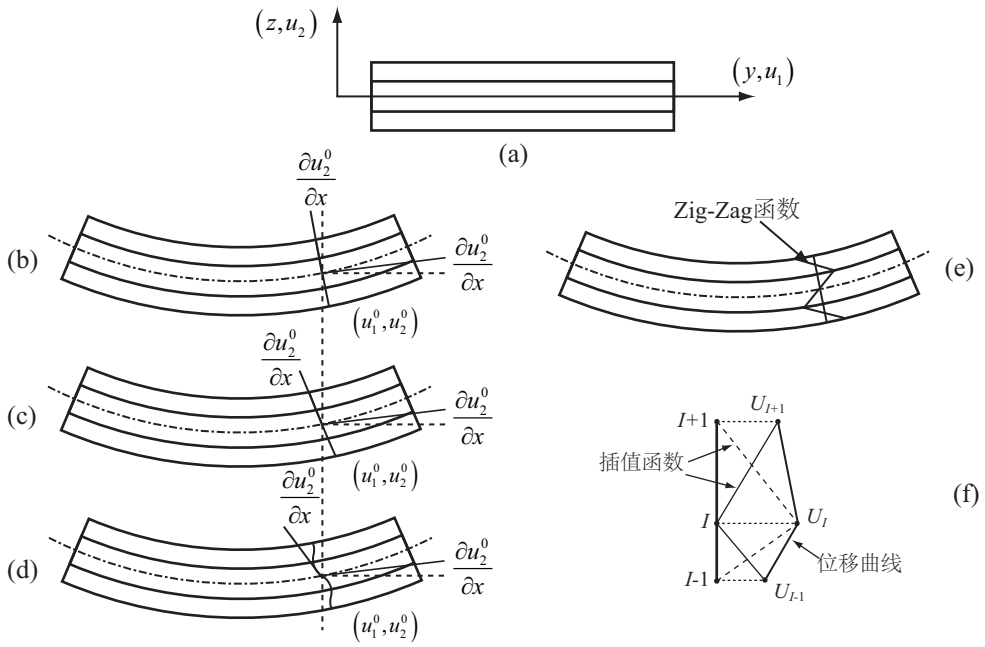


图 1.2 几种典型位移假设模式示意图：(a) 变形前层合板；(b) 经典层合板理论；(c) 一阶剪切变形理论；(d) 高阶剪切变形理论；(e) Zig-Zag 理论；(f) 逐层理论

（1）经典层合板理论 (Classical Lamination Plates Theory, CLPT)

经典层合板理论是是一种工程中应用最为广泛的分析方法，未知量少且

程序实现简单，对于薄板的全局小变形问题分析精度完全满足工程要求。经典层合板理论直接将 Kirchhoff 平面假设推广应用于层合结构问题中，即变形前垂直于中性面的直线段变形后仍垂直于中性面，且保持直线。所以，经典层合板理论的位移假设模式可写成

对于层合板

$$\begin{cases} u_i(x,y,z,t) = u_i^0(x,y,t) - zu_{3,i}(x,y,t) \quad i=1,2 \\ u_3(x,y,z,t) = u_3^0(x,y,t) \end{cases} \tag{1-1}$$

对于层合壳

$$\begin{cases} u_i(\zeta,\eta,z,t) = \dfrac{1}{R_i}u_i^0(\zeta,\eta,t) - zu_{3,i}(\zeta,\eta,t) \quad i=\zeta,\eta \\ u_3(\zeta,\eta,z,t) = u_3^0(\zeta,\eta,t) \end{cases} \tag{1-2}$$

式中，上标 0 表示参考平面上的值，在板壳理论中通常取中性面为参考平面；ζ 和 η 为壳结构的面内坐标；R_i 为第 i 层的半径。

由于层合板和层合壳的位移假设模式在所有的理论中其形式是一致的，所以后面有关层合板壳的位移假设模式中只列出层合板的，层合壳的可以类似地得到。

（2）一阶剪切变形理论 (First order Shear Deformation Theory, FSDT)

一阶剪切变形理论在经典层合板壳理论的基础上进一步考虑了横向剪切变形，又称剪切变形理论，其位移假设模式为

$$\begin{cases} u_i(x,y,z,t) = u_i^0(x,y,t) + z\phi_i(x,y,t) \quad i=1,2 \\ u_3(x,y,z,t) = u_3^0(x,y,t) \end{cases} \tag{1-3}$$

式中，ϕ_i 为层合板厚度方向上的转角。

由于位移沿厚度方向是线性变化的，在剪切变形理论的分析结果中，剪切应变在层合结构整个厚度方向上为常量，而剪切应力在各单层的厚度方向上为常量，所以一阶剪切变形理论分析得出的剪切应力在厚度方向上是不连续的。

（3）Vlasov-Reddy 理论 (Vlasov-Reddy Theory, VRT)

Vlasov[2] 从板壳上下表面横向剪切应力 $\sigma_{i3}=0$ 的角度对剪切变形理论进行了一个简单地改进，与一阶剪切变形理论相比，该理论能更好的描述横向剪切应变，从而显著地提高了剪切变形理论分析厚层合板壳结构静力和动力

响应的精度。由于 Vlasov-Reddy[3] 理论包含了厚度坐标的三次项，所以也称之为三阶剪切变形理论。Vlasov-Reddy 理论的位移假设模式为

$$\begin{cases} u_i(x,y,z,t) = u_i^0(x,y,t) + z\phi_{i3} - \dfrac{4z^3}{3h^2}\left[\phi_{i3} + u_{3,i}(x,y,t)\right] & i = 1,2 \\ u_3(x,y,z,t) = u_3^0(x,y,t) \end{cases} \tag{1-4}$$

考虑到层合结构的内在对称性，该理论中并没有取厚度坐标的二次项。在分析结果中，剪切应变在层合结构整个厚度方向上按二次曲线规律连续变化，而剪切应力在各单层的厚度方向上按二次曲线规律变化，在层合结构整个厚度方向上也是不连续的。

（4）高阶剪切变形理论 (Higher order Shear Deformation Theory, HSDT)

上述三种理论有一个共同点就是没有考虑 u_3 在厚度方向上的变化，即认为面外正应变为零。Koiter[4] 提出在考虑横向剪切应变的同时应该考虑面外应力，因此产生了高阶剪切变形理论，其位移假设模式为[5]

$$\begin{cases} u_i(x,y,z,t) = u_i^0(x,y,t) + z\phi_i & i = 1,2 \\ u_3(x,y,z,t) = u_3^0(x,y,t) + z\phi_i + z^2\phi_3 \end{cases} \tag{1-5}$$

1.1.2 逐层理论

对于上面的四种层合板壳理论，位移模式中的未知量数量是与层合板的层数无关的，这正是将其称为等效单层板壳理论的原因所在。虽然能够描述横向应变和法向应变，高阶剪切变形理论甚至能反映截面的横向翘曲，但等效单层板壳理论对层合结构的单层是不敏感的。如果要求分析单层的详细响应，或单层之间存在很大的位移梯度，则必须提高等效单层理论位移模式中的阶次，从而增加了待求未知量的数量，且使分析过程变得复杂。

若将层合结构的单层看成是独立的，分别利用剪切变形理论来描述，然后基于各层间的位移协调将各单层拼装成一个整体，这个过程就是逐层理论的基本思想。根据 Demasi[6] 的定义，控制方程中未知量随层合板层壳数变化的分析理论称之为逐层理论。与等效单层理论相比，可以认为逐层理论是一种三维分析方法，它能比较精确地给出层合结构的层间应力应变，这是等效单层理论无法做到的。逐层理论位移假设模式中各单层的位移为

$$\begin{aligned} u_i^k(x,y,z,t) = u_i^{k,0} - z_k u_{i1}^k + z_k^2 u_{i2}^k - z_k^3 u_{i3}^k + \cdots + (-1)^k z_k^{N_l} u_{il}^k \\ i = x,y,z, \quad k = 1,2,\cdots,N_l \end{aligned} \tag{1-6}$$

上式中的各单层位移模式必须与各层间界面的协调条件一起使用。Reddy[7]提出将位移在厚度方向上用一维拉格朗日插值函数进行离散，插值节点位于层合板壳的上下表面和各数学层之间的界面上，将位移在面内用二维拉格朗日函数进行离散，其位移假设模式为

$$u_i(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{N+1}u_i^n(x,y,t)\phi^n(z) \tag{1-7}$$

与单层等效理论不同，逐层理论是基于沿厚度方向 C_z^0 连续的函数来假设板壳结构位移模式的，所以该理论的位移在厚度方向连续，而应变在插值节点处不连续，并且有可能保证横向应力在界面处连续，尽管该界面两侧的材料不同。另外，逐层理论的位移模式还能描述面内位移在厚度方向上的 Zig-Zag 特征，尤其是对于厚板变形问题，逐层理论的位移模式相较于单层等效位移模式来说更能准确描述截面的严重扭曲。根据横向位移的假设情况，可以将逐层理论分为部分逐层理论和完整逐层理论两类，在部分逐层理论中只对面内位移进行插值，而横向位移沿厚度不变，也就是说忽略了横向应变 ε_{33}，在完整逐层理论中对面内位移和横向位移两者都进行插值。

另外，在 Reddy 的复合材料层合板壳逐层理论中，有限元控制方程中包含了上下表面的位移自由度，这使得该方法能很方便地通过连接面上的位移协调和内力平衡条件与其它方法耦合，建立复杂复合材料层合结构的分析方法，如加筋结构和夹芯结构。

1.1.3 Zig-Zag 理论

上面提到的四种等效单层板壳理论中，除了 Vlasov-Reddy 理论之外都不能满足 C_z^0 连续性要求。大量研究结果表明，基于高阶剪切变形理论完全可以得到精度足够高的全局位移响应，甚至对于厚板壳结构也是如此，但由位移和 Hook 定律计算得到的横向应力结果却非常差。逐层理论对位移的描述要比剪切变形理论好得多，有研究表明：当逐层理论中单层的位移场取到三阶或四阶时，能得到精确的位移和应力结果，甚至包括横向应力分量。

剪切变形理论和逐层理论的主要目标都是尽量完全或部分满足 C_z^0 连续性要求，后来发展起来的一些更精确的层合板壳理论也是在尽量满足这个条件，如 Zig-Zag 理论。Zig-Zag 理论的基本思想是首先假设层合结构的单层位移或应力模式，然后通过层间的连续性和平衡条件来减少未知量。Zig-Zag 理论的

位移假设模式可写为

$$u_i(x,y,z,t)=u_i^0(x,y,t)+\sum_{k=1}^{N-1}(z-z_{k-1})\,\psi_k H(z-z_{k-1}) \tag{1-8}$$

式中，$\psi_k=u_{3,x}+\alpha^k\gamma_{13}$，$\alpha^k$ 为由层间横向应力定义的单层常数；$H(z-z_{k-1})$ 为 Heaveside 函数

$$H(z-z_{k-1})=\begin{cases}0 & z\le z_k\\ 1 & z\ge z_k\end{cases}$$

从上式可以明显看出，线性或分段线性位移假设会使 α^k 沿厚度连续，且与 z 坐标无关。实际上，上式中的 Zig-Zag 理论并不能满足层合板壳上下表面横向剪切应力 $\sigma_{i3}=0$ 的条件。

在 Zig-Zag 理论方面贡献最大的是 Lekhnitskii[8]、Ambartsumian[9,10] 和 Reissner[11,12] 提出的相关基础性理论，其它相关理论的建立和发展都是基于这三种原创理论进行的。

Lekhnitskii[8] 首先于 19 世纪 30 年代在研究梁问题时，提出了能描述 Zig-Zag 效应和层间横向应力连续的分析理论，由于该理论只在他英语版著作中简要提及，所以在后来的文献中几乎把他的杰出贡献遗忘。直到 1986 年，Ren[13,14] 将 Lekhnitskii 的理论推广应用于正交异性和各向异性板结构上，Ren 先假设了横向剪切应力在厚度方向上的模式，让横向剪切应力在各单层沿抛物线变化，然后对应变位移关系积分，并考虑层间界面的位移协调条件就可得到厚度方向上的假设位移场，所以该理论位移在各单层是沿三次曲线线变化的。

Ambartsumian[9,10] 提出的理论中未知量的数量与一阶剪切变形理论的相同，三个位移分量和两个转角（或剪应变，即假设横向位移为常数），利用一个未知函数 $f(z)$ 来假设横向剪切应力模式，$f(z)$ 可通过上下表面的应力边界条件来确定，且对于对称和非对称层合结构来说 $f(z)$ 具有明显不同的形式。Whitney[15] 将该理论介绍给西方的板壳理论学者，并推广应用于到各向异性板问题上。

Reissner[11,12] 将位移和应力看成是相互独立的变量提出了一种混合变分理论。基于该变分理论，Murakami[16,17] 在位移假设中用 C_z^0 连续的 Zig-Zag 形函数建立了一种新方法，该方法的面内响应非常精确，甚至是在长厚比很小的情况下也能保持很高的精度。Carrera[18,19] 利用 Reissner 的混合变分理论建立了正交双曲层合壳的差分控制方程，该方法的位移模式包含两种独立的基于

Layerwise 描述的假设场，将各层横向应力（剪切和正应力）和位移看成相互独立的变量，位移和横向应力在层间的连续性满足 C_z^0 连续条件。

1.1.4 状态空间理论/Hamilton 正则方程

基于厚度方向上位移假设模式是上述所有方法的共同点，这导致了上述方法得出的控制方程不能完全满足板壳结果应该满足的弹性力学所有基本方程，且层间面外应力的计算结构精度比较低。近年来，将位移和面外应力看成对偶变量，基于弹性力学辛理论发展出来了一种新的复合材料层合板壳分析方法，该方法被称之为 Hamilton 正则方程法或状态空间方法，属于理性的辛体系方法[20]。基于状态空间理论的复合材料层合板壳分析理论无需任何厚度方向上的位移和应力假设，对于各向同性、正交异性或各向异性弹性体，从弹性力学基本方程[21] 或 H-R 变分原理[22,23] 出发可推导出各单层的一阶常微分控制方程，然后利用层间的位移和应力连续条件得到层合结构的整体传递方程。层合板壳结构第 μ 层的状态空间方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}^{\mu}(z) \\ \boldsymbol{Q}^{\mu}(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{11}^{\mu} & \boldsymbol{H}_{12}^{\mu} \\ \boldsymbol{H}_{21}^{\mu} & \boldsymbol{H}_{22}^{\mu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}^{\mu}(z) \\ \boldsymbol{Q}^{\mu}(z) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_1^{\mu}(z) \\ \boldsymbol{F}_2^{\mu}(z) \end{Bmatrix} \tag{1-9}$$

式中，$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{H}_{ij}^{\mu}(i,j=1,2)$ 为第 μ 层传递矩阵的子矩阵；$\boldsymbol{F}_i^{\mu}(z)(i=1,2)$ 为第 μ 层的外载荷向量。

上式的解析解为

$$\boldsymbol{G}^{\mu}(h) = \boldsymbol{K}^{\mu}(h)\boldsymbol{G}^{\mu}(0) + \boldsymbol{F}^{\mu}(z) \tag{1-10}$$

利用层间的传递技术，即层间的位移和横向应力连续，第 μ 层上表面的横向应力 $\hat{\sigma}_{i3}^{\mu}$ 和位移 $\hat{u}_i^{\mu}$ 分别等于第 $\mu+1$ 层下表面的横向应力 $\check{\sigma}_{i3}^{\mu+1}$ 和位移 $\check{u}_i^{\mu+1}$，可以得到层合板壳结构的总体控制方程为[24]

$$\boldsymbol{G}^{\mu}(H) = \left(\left(\prod_{\mu=2}^{N}\boldsymbol{K}^{\mu}\boldsymbol{J}^{\mu-1}\right)\boldsymbol{K}^{1}\right)\boldsymbol{G}^{\mu}(0) + \sum_{i=1}^{N-1}\left(\prod_{\mu=i+1}^{N}\boldsymbol{K}^{\mu}\boldsymbol{J}^{\mu-1}\right)\boldsymbol{F}(h_i) + \boldsymbol{F}(h_n) \tag{1-11}$$

式中，$\boldsymbol{J}^{\mu-1}$ 为考虑第 $\mu-1$ 层和第 μ 层之间弱粘接的传递矩阵；h_{μ} 为第 μ 层的厚度，H 为层合结构的总厚度。

基于状态空间理论的复合材料层合板壳分析理论具有以下有几个突出的优点[23,25–27]：1）考虑了正交异性甚至于各向异性材料剪切变形的影响；2）因为状态空间方程的半解析法在平面内可采用有限元法和无网格法等数值方

法，所以适用于具有复杂侧面边界及复杂外载荷等工程实际问题；3）层间的位移和横向应力的传递矩阵技术能显著地减少层合结构控制方程的未知量数量，使控制方程中只包含上下表面的位移和应力未知量，所以该方法的未知量数量完全与层合结构的层数无关；4）因为厚度方向用传递矩阵技术代替了位移假设，可以认为是解析的，所以能保证层间位移和应力的连续性，结果精度高，尤其是应力分析结果。

然而，基于状态空间理论求解层合板壳问题也存在几个方面的缺点：1）该方法只能应用于弹性小变形问题，很难往弹塑性和大变形等非线性问题中扩展，这限制了它的进一步发展；2）虽然得到了高精度的应力分析结果，但计算量巨大，同时，由于积分后的传递矩阵是满阵，所以在分析相对比较复杂的问题（如加筋结构）时，对内存的要求极其巨大；3）求解动力学问题时计算成本巨大是该理论存在的最大问题，如固有频率的求解只能采用二分法。

1.2 复合材料加筋结构的分析方法

加筋板壳结构被广泛应用于建筑、桥梁和航空航天领域。在航空领域机身和机翼是两种典型的加筋结构，例如飞机机身就是一种在轴向（长桁和梁）和径向（隔框和环）都有加强筋的半硬式壳结构。在分析加筋结构时通常有三种基本思路：1）将加强筋对响应的影响等效弥散到板壳上，然后基于板壳理论分析整体结构的响应；2）将加强筋等效成梁，然后通过加强筋与板壳的位移协调或相互作用力进行耦合分析；3）加强筋和板壳都用板壳理论建模，然后通过加强筋与板壳的位移协调或相互作用力进行耦合分析。第一种思路实现简单且计算量小，但分析精度低，是早期广泛应用的分析方法，且对工程师的分析经验要求很高，很难满足现代工程结构设计所需的精度要求。第三种思路虽然分析精度高，但计算量大且适用范围小，不能处理复杂的加强筋结构形式。第二种思路兼顾了精度和计算量两方面，但仍然不能处理复杂加强筋，且加筋结构的等效会引入较大误差，对分析人员的经验要求也很高。

在过去近 20 年加筋板壳结构被广泛应用的过程中，对于弯曲、屈曲以及振动等问题发展了大量的数值分析方法，如，基于能量原理的方法[28,29]、半解析法[30,31]、微分求积法[32]、有限元方法[22,24,33–39]、无网格方法[40,41]、边界元方法[42–46] 以及有限元和边界元耦合的方法[47]，在上述方法中，有限元方法的应用范围最为广泛。

Kukreti 和 Cheraghi[28,29] 基于能量原理为网格加筋板结构提出了一种分析

方法，在该分析方法中假设加强筋与板完全刚性连接。Mukhopadhyay[31] 扩展了一种板壳半解析方法，用来分析加筋板结构的静力问题，并考虑了对称和非对称两种加强筋结构。Brubak[30] 为任意方向加强筋结构建立了一种半解析屈曲强度分析模型。Siddiqi 和 Kukreti[32] 建立了一种微分求积方法分析横向均匀分布载荷作用下对称加筋板的挠度。Mukhopadhyay 和 Mukherjee[33] 利用非协调有限元方法进行了加筋板结构的屈曲分析，该有限元模型能处理不规则边界并考虑剪切变形，且可以推广应用于复合材料层合板结构。Deb[34] 和 Palani[35] 分别基于 Mindlin 线性有限元模型和两种二次等参有限元模型 (八节点 QS8S1 和九节点 QL9S1) 进行了加筋板壳结构的静力和振动问题分析。另外，还有很多其它的有限元模型被用来分析加筋板壳结构[36–39]。在有限元和半解析解法中，加强筋和板壳结构的网格需要相互协调，加强筋位置的改变将导致整个板壳区域网格的重分。针对该问题，Peng[42,43] 利用 Galerkin 无网格法 (EFG) 建立了同心和非同心加筋板的静力和屈曲分析方法，该方法可有效避免在有限元方法中遇到的网格重分问题。Tamijani 和 Kapania[48] 也基于 EFG 法和一阶剪切变形理论 (FSDT) 分析了加筋板的静力和屈曲问题，该方法可以用来分析具有任意数量曲线加强筋的加筋板结构。近年来，边界元方法 (BEM) 也被用于分析加筋结构的静力和动力学问题[44–47]。而 Ng 和 Cheung[49] 结合 BEM 和 FEM 两者优点建立了一种新的板壳耦合分析方法，并将其推广用来分析更为复杂 slab-on-girder 桥梁结构。

近年复合材料加筋结构得到了广泛应用，已经成为加筋结构研究的主要方向。Wang[50] 提出了均匀内压、常温度和轴向压力载荷联合作用下端部闭合加筋复合材料圆柱壳结构的数值分析方法，首先分别建立了加强筋和壳结构的控制方程，然后通过连接界面上的剪切应力和正应力平衡条件来建立耦合方程。Jaunky[51] 在考虑连接面相互作用的前提下，为加筋复合材料层合板建立了一种改进的弥散分析方法。Kidane[52] 利用单包和弥散的方法建立了复合材料圆柱格栅结构全局屈曲载荷的分析方法。Qing[22] 基于复合材料层合板壳状态空间方程的半解析解法建立了一种新的加筋复合材料层合结构自由振动分析方法，该方法考虑了横向剪切变形、加强筋和板的转动惯量以及加强筋和板之间界面上位移和应力的协调条件。Li[24] 结合层间无厚度线性弹簧元将 Qing 的方法推广应用于含弱粘接复合材料加筋板的静动力及其灵敏度分析问题中。

现在复合材料的整体成型技术已得到广泛应用，各种复合材料加筋结构和格栅结构的形式越来越复杂，对现有分析方法提出了严重挑战。复合材料

自身的复杂性使复合材料结构的分析复杂化，且由于加强筋的存在使加筋复合材料结构的分析更加困难。因此，随着复合材料结构设计水平和要求的不断提高，需要有一种分析方法既可以得到板壳的精确应力位移结果，又可以在没有任何假设的情况下考虑任意复杂的加强筋结构，且能精细分析板壳结构与加强筋结构连接处的局部响应，从而提高复杂复合材料加筋结构的设计和应用水平。

1.3 复合材料夹芯结构的分析方法

近年来，夹芯结构被广泛应用于交通、航海和航空宇航等领域。复合材料夹芯结构由较厚的轻质芯子和复合材料层合面板组成，其受力特性与工字梁类似，大部分面内膜应力和弯矩由上下面板承受，而芯子则主要用来承受剪切载荷。

夹芯结构整体和局部行为的复杂性导致了其分析方法的多样性，Reissner[53]以及一些其他的学者首次研究了不可压缩夹芯结构的计算模型问题，其中最著名的传统建模方法是分裂刚度法[54]。近年来，复合材料夹芯结构的建模分析方法主要还是沿用复合材料层合结构的分析方法，例如等效单层理论[3,55–60]。传统的夹芯结构分析方法的最大问题就是必须对芯子结构进行等效，从而不可避免地引入较大误差。

在实际工程应用中，夹芯结构的芯子相对面板来说很厚，而且复合材料层合面板的材料性能在厚度方向上变化很大，所以横向剪切变形将显著影响复合材料夹芯结构的响应分析结果。因为等效单层理论不能很好地考虑这种由剪切变形带来的影响，所以若想对复合材料夹芯结构进行精确分析必须利用高精度的准三维或三维方法，如逐层理论和三维弹性理论。由于三维弹性解的数量有限[61]，且三维有限元分析的计算量巨大，所以逐层理论也许是一个更好的选择。

Hu[62] 比较研究了各种剪切变形理论和 Zig-Zag 理论在分析静载荷和动载荷作用下夹芯结构弯曲特性时的精度问题，研究结果表明 Zig-Zag 理论的分析精度要高于经典层合理论和剪切变形理论。Ferreira[63,64] 结合逐层理论和径向基点函数研究层合板和夹芯结构的静力和自由振动问题。Roque[65] 提出了一种三角逐层变形理论，用以分析对称铺层层合板和复合材料夹芯结构。Theofanis[66] 为了分析复合材料夹芯梁结构的阻尼特性提出了一种高阶离散逐层理论，计算单层面内位移时位移模式需要添加二次和三次项，且层间剪切

应力在厚度方向上是连续的。另外，还有一些其他的文献[67–70]利用逐层理论研究了复合材料夹芯结构的建模与分析问题。

有两个主要原因导致了上述复合材料夹芯结构建模与分析方法精度较低：一个原因是，芯子结构材料性能参数的等效算法(如三明治理论[71])不能完全反映芯子的力学行为；另一个原因是，芯子结构的厚度通常较大，一般在3到26mm之间[72]，降低了分析方法的精度，因为上述面板和等效夹芯的分析方法都是基于复合材料层合板壳理论建立的，而复合材料层合板壳理论的分析精度随板壳厚度的增加而降低，尤其是等效单层理论。

上述复合材料夹芯结构建模与分析方法主要考虑结构的全局响应问题，然而现代夹芯结构往往采用柔性芯子，在局部分布载荷、点载荷以及点支撑的作用下将出现明显的局部响应现象，甚至出现凹坑，导致夹芯结构的上下面板变形严重不一致。随着现代夹芯结构在防撞和吸能等领域的广泛应用，详细局部损伤形态和破坏过程的模拟变得十分重要。

因此，需要有一种分析方法既能得到精确的全局响应和很好的局部响应，又能在考虑计算量的情况下避免芯子结构厚度对分析精度的影响。

1.4 复合材料层合板壳结构中低速冲击问题研究进展

大量研究证明，因为复合材料纤维的拉伸强度很大，纤维断裂和屈曲引起的损伤仅局限在冲击接触区域附近，所以在中低速冲击载荷作用下复合材料层合结构的主要损伤是基体裂纹和层间分层[73–83]。Choi 等[79]指出中低速冲击载荷作用下复合材料层合结构最先出现的是基体裂纹，一旦基体裂纹扩展到上下具有不同纤维方向的层间，分层损伤就会随之出现，并沿层间扩展。Joshi 和 Sun[84]由实验得到的复合材料层合板中低速冲击作用下的典型损伤形式如图1.3所示。

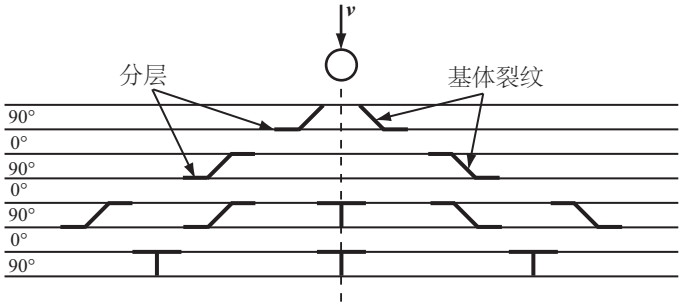


图 1.3 典型基体裂纹和分层损伤形式

对复合材料层合结构分层损伤进行研究的文献很多，难以一一综述，且发展出来了大量的分析方法，这些方法主要归为两大类：基于损伤力学的方法和基于断裂力学的方法。

基于损伤力学的复合材料层合结构分层损伤分析方法就是利用一定的损伤判断准则，通过层间应力直接预测分层损伤，然后根据预测的分层损伤来退化结构的材料性能。通常采用的分层损伤判断准则主要有 Choi/Chang 准则[78,79]、Tang/Chai 准则、Puck 准则和 Hashin 准则[85,86] 等。常用的材料性能退化方法有立刻失效法、常应力法和渐进失效法三种，其中渐进失效法根据不同的退化公式可分为不同类型，如线性退化和指数退化。基于损伤力学的方法在算法实现上很简单，由于损伤的起始和累积都是直接与材料本构相关联的，所以容易与有限元之类的数值方法相结合。然而，基于损伤力学的方法不能预测损伤的真实扩展过程，且对损伤的预测精度不高。近期，德国结构力学研究所宇航中心（DLR）基于该方法研发了一款复合材料结构损伤容限分析软件（Composite Damage Tolerance Analysis Code, CODAC ），该软件利用单点接触算法模拟冲击载荷，利用隐式有限元法求解动态响应问题，可以得到复合材料层合结构在冲击载荷作用下的冲击响应、损伤和层间分层等结果，并已应用到了一些工程实际问题中。

在基于断裂力学的方法中，通常利用线性断裂力学来模拟分层损伤。虽然断裂力学方法在金属材料损伤预测领域中得到广泛应用，但在复合材料损伤预测方面的发展却比较缓慢。在基于断裂力学的分析方法中，首先利用板壳单元或三维实体单元计算出结构的应力应变，然后由应力应变计算分层前缘的能量释放率，进而达到预测分层前缘扩展的目的。该方法计算精度高，但是分层前缘往往需要大密度网格才能得到较为精确的应力场结果，随着分层前缘的扩展甚至需要网格重分技术，所以该方法计算很大。采用断裂力学方法的最大优势是可以使用一些重要的断裂力学概念来精确地模拟分层损伤的扩展过程，如临界能量释放率等。虽然基于断裂力学的分析方法在模拟各向同性材料的裂纹问题上已经广泛应用，并取得了很好的效果。然而，对于复合材料层合结构，分层前缘的基体裂纹对尖端应力场影响很大，裂纹的方向同时受应力分布和铺层方向影响，且一般认为分层产生于损伤或缺陷，使得分层的分析对损伤和断裂的敏感性很强。所以，对于各向异性且包含界面的复合材料层合结构来说，利用基于断裂力学的分析方法进行分层损伤分析仍然存在很多的困难。至今线性断裂力学只是适用于粘接复合材料结构，在这种复合材料结构中存在真实的粘接缺陷容易被描述，且缺陷区域是均匀的线

性应变区域。凝聚断裂模型在有些方面弥补了线性断裂力学的缺点，如裂纹尖端出现材料软化的情况。

大量的复合材料基体裂纹分析方法同样可分为基于损伤力学的方法和基于断裂力学的方法两大类，但由于基体裂纹的复杂性和随机性，分析方法仍然以前者为主。Highsmith 和 Reifshider[87] 是首先利用剪滞模型研究复合材料结构基体裂纹问题的，这种模型虽然相对简单但预测的结果却与实验吻合较好。Laws 和 Dvorak[88,89] 提出了一种用 self-consistent 方法用以分析含随机分布基体裂纹单层复合材料的刚度退化问题，然后将退化后的刚度系数分量代入层合板模型中计算层合板的整体刚度退化。Wang 等[90] 为静载荷和疲劳载荷作用下复合材料层合结构的广布基体裂纹扩展问题发展了一个随机模型，并提出了有效缺陷的概念，代替了传统的常厚度强度准则。Hashin[91,92] 基于最小余能原理提出了一种显式方法来计算含基体裂纹层合板单层的应力和刚度退化，该方法对于铺层方式为 $[0_p/90_q]_s$ 的层合板具有很高的分析精度。Aboudi[93] 利用单胞表示含平行基体裂纹的层合板，在单胞里位移向量被表示为到中心线距离的二次函数，从开裂区域的弹性能中推导出刚度退化。Lee[94] 利用内变量概念提出了一种数学模型，该模型可以预测含基体裂纹交叉铺层层合板轴向刚度退化的上限，轴向裂纹张开位移表示为轴向应变和无损伤材料参数的函数。Gudmundson[95] 基于含平行裂纹各向同性体的封闭解，建立了一个能描述含基体裂纹层合板刚度退化的损伤力学模型。

最近 Heaviside 间断函数被引入复合材料层合板壳结构分析理论的厚度方向上位移假设模式中，用以模拟层间分层损伤引起的位移不连续现象。Barbero 和 Reddy[96] 首先基于该思路将 Reddy 的逐层理论扩展到含多层分层损伤复合材料层合结构问题上，利用厚度方向位移假设模式中的跳跃函数模拟分层损伤引起的位移不连续，在分层面上，相邻层的位移相互独立，可以相互分离和滑移。Chattopkdhyay 和 Gu[97] 提出了一种新的高阶板壳理论来分析含分层损伤复合材料层合板的屈曲和后屈曲问题，在位移的低阶和高阶项中，利用分层界面上不连续条件来模拟层间分层，由自由面 (包括分层面) 剪应力为零的条件首先确定位移模式中的高阶项。Williams[98,99] 基于两种尺度的位移模式提出了一种复合材料层合板的广义多尺度分析理论，位移模式的两种尺度分别为整体和局部位移（单层位移），从该广义多尺度分析理论可以退化得到多种现有复合材料层合板分析理论。Cho 和 Kim[100,101] 为含多层分层损伤复合材料层合板结构提出了一种高阶 Zig-Zag 理论，利用上下表面横向剪切应力为零的条件以及层间界面横向应力连续的条件引入分层界面。

虽然已有大量文献研究了分层损伤或基体裂纹损伤问题，但只有少量的研究工作处理了分层损伤和基体裂纹损伤同时存在的问题。O'Brien[102] 建立了一种简单的解析模型用以计算含分层或基体裂纹损伤复合材料层合板的能量率。Dharani 和 Tang[103] 提出了一个微观力学模型分析含横向基体裂纹和纵向分层纤维增强复合材料层合结构的破坏行为，分层损伤位于 0/90 界面上，该方法用一致剪滞理论代替了应力位移关系。Nairn 和 Hu[104] 将 Hashin 的变分法[91,92] 进行推广应用于交叉铺层层合板横向裂纹和分层损伤的起始和扩展问题。Takeda 和 Ogihara[105] 计算了横向裂纹尖端含分层损伤的交叉铺层复合材料层合板的应力分布。Berthelot 和 Corre[106] 提出了一种解析模型，也计算了含横向裂纹和分层损伤交叉铺层复合材料层合板的应力分布，无分层区域该解析模型退化为常用的一维方法，而分层区域该解析模型是基于一种位移方法的，该位移方法的纵向位移取决于单层的纵向和横向条件。Swindeman[107] 针对基体裂纹和分层的耦合问题建立了一种正则化扩展有限元方法 (Regularized Extended Finite Element Method, Rx-FEM)，并用实验加以验证，在该方法中，分层和基体裂纹分别利用凝聚区模型和网格独立裂纹技术 (MIC) 模拟。

在复合材料结构的实际损伤问题中，如中低速冲击损伤，基体裂纹和层间分层损伤往往是同时存在的，单独研究基体裂纹和分层损伤的分析方法离实际应用还有很远。因此，建立能同时精确模拟基体裂纹和层间分层损伤的分析方法，是复合材料结构损伤问题研究的关键技术。

1.5 扩展有限元方法在复合材料结构损伤分析中的应用

近年来，为了处理材料和几何中出现的强不连续和弱不连续问题，在传统有限元方法框架下基于单位分解的概念提出了扩展有限元方法 (extended finite element method, XFEM)[108–112]。在扩展有限元方法中，连续区域采用传统有限元方法，在包含不连续边界的较小区域内，对位移插值函数进行扩充来处理位移不连续和局部的应力畸变问题（如裂纹尖端），另外还需借助水平集方法或快速推进法来描述间断界面。扩展有限元方法的最主要优势是所使用的网格独立于结构内部的几何或材料界面，从而无需在裂纹尖端应力应变集中区域进行高密度网格划分，即使在模拟裂纹扩展的过程中也不需要对网格进行重分。扩展有限元方法与标准有限元方法相比，具有计算精度高、勿需网格重构等特点，且保留了常规有限单元的优点，即刚度矩阵的对称性、稀疏性和带状的特点。

在相对成熟之后，扩展有限元方法被推广应用于板壳结构的面内裂纹分析问题[113–115]。Dolbow[114] 首次基于扩展有限元方法和 Mindlin-Reissner 中厚板理论对板中的穿透型裂纹进行了研究。Areias[113] 利用扩展有限元方法为壳结构和夹芯结构的非线性任意裂纹扩展建立了一种新的分析方法。Zhuang 和 Cheng[115] 将扩充形函数的概念引入连续实体壳单元中，建立了管道裂纹任意扩展的扩展有限元分析方法。

Remmers[116] 和 Nagashima[117] 首先利用扩展有限元方法处理复合材料裂纹问题，经研究表明，适合于各向同性材料的裂尖扩充函数并不能应用于各向异性的复合材料。随着各向异性扩充函数[118–122] 的构造，扩展有限元方法被进一步成功推广应用于复合材料的裂纹分析问题。Sukumar 等[118] 利用基于单位分解的扩充函数研究了两相材料界面上的裂纹问题，两相材料都是各向同性材料。Zhuang 和 Cheng[123] 采用扩展有限元方法和最大轴向应力准则研究了两相材料界面上混合裂纹的扩展问题。Asadpoure 和 Mohammadi[124–126] 基于扩展有限元法和各向异性材料裂尖扩充函数研究了二维各向异性体的裂纹问题，首先用传统有限元模型离散整个二维区域，然后基于单位分解框架利用二维渐进裂尖不连续位移场去扩充原来的连续有限元模型。Motamedi 和 Mohammadi[127–129] 利用静力和动力各向异性扩充函数研究了复合材料结构动态裂纹问题，数值结果表明，静力和动力各向异性扩充函数的分析结果具有明显差别，之后，Esna Ashari 和 Mohammadi[120–122] 将他们的研究成果应用了两相各向异性材料界面裂纹问题。Ayhan 和 Maghaddam[130–132] 将扩展有限元应用于各向同性功能梯度材料，Bayesteh 和 Mohammadi[133] 将扩展有限元应用于各向异性功能梯度材料，Hosseini 等[134] 将扩展有限元应用于各向同性和各向异性功能梯度材料裂纹的热 -力耦合分析问题中。

最近扩展有限元方法同时也被用于复合材料分层损伤的模拟，Hettich 和 Ramm[119] 在没有裂尖扩充函数的情况下研究复合材料分层问题，在此分层只是被模拟成位移跳跃的界面。Nagashima 和 Suemasu[135] 利用扩展有限元法分析含层间分层薄壁复合材料层合板的应力，Curiel Sosa 和 Karapurath[136] 将扩展有限元方法应用于含分层损伤纤维金属双悬臂复合材料梁结构。

现有扩展有限元方法对复合材料结构的基体裂纹和分层损伤是分开独立研究的，且只能处理穿透型基体裂纹，所以，结合扩展有限元方法的优势建立能够能同时精确求解基体裂纹尖端和层间分层损伤前缘位移应力场的分析方法具有十分重要的理论和实际应用价值。

1.6 本文主要研究内容

针对现有复合材料层合加筋结构和夹芯结构分析方法在应用范围和局部响应分析方面的不足，以及扩展有限元方法在分析复合材料层合结构基体裂纹和分层损伤问题方面的缺陷，本文的研究工作主要从两个大的方面进行。

（一）结合逐层理论应力分析精确和三维实体元建模能力强的优点，建立复合材料加筋结构和夹芯结构的建模与分析方法。该方法用于加筋板壳结构分析时，在没有任何有关加强筋假设的情况下，既可以得到板壳的高精度应力应变解，又可以考虑任意复杂的加强筋结构。该方法用于复合材料夹芯结构分析时，能够得到结构在集中载荷作用下的高精度局部应力应变，模拟上下面板变形的不一致性，而且能避免或降低芯子较大厚度带来的分析误差。利用非线性 Heltz 接触律和渐进损伤模型，将复合材料加筋结构和夹芯结构的逐层/实体元方法应用于复合材料中低速冲击问题中，建立复合材料加筋结构和夹芯结构的中低速冲击渐进损伤分析模型。该分析模型能分析得到冲击体和靶体结构的冲击响应，尤其是靶体结构的局部响应，能准确预测纤维断裂/屈曲、基体裂纹和层间分层损伤的起始和累积过程。

（二）结合逐层理论和扩展有限元方法的各自优点，建立含多层分层和基体裂纹损伤复合材料层合结构的精确分析方法。将该方法与扩展有限元方法相结合，能精确地同时模拟复合材料层合结构中的多处分层和基体裂纹损伤，并且能精确分析分层前缘和裂纹尖端的位移场和应力场，能得到裂纹尖端应力强度因子在层合板厚度方向上的变化规律，为复合材料层合结构的冲击损伤模拟提供了一种精确的新方法。利用各向异性材料的相互作用积分和各向异性材料的最大周向应力准则，将复合材料层合结构的扩展逐层理论应用于复合材料裂纹任意扩展问题上，研究裂纹尖端应力强度因子在层合板厚度方向上的变化规律。

基于以上两部分研究内容，论文章节安排如下：

第一章首先介绍了复合材料结构中低速冲击损伤问题研究的重要性，综述了现有的几种重要复合材料层合结构分析理论的基本思想和发展历程，包括等效单层理论、逐层理论、Zig-Zag 理论以及状态空间理论。然后，分析了复合材料加筋结构和夹芯的现有分析方法以及存在的不足之处，提出本文第一部分研究内容的出发点，并总结了复合材料层合板壳结构的中低速冲击问题研究进展情况。最后，介绍了近年扩展有限元方法在复合材料结构损伤分析中的应用情况，提出本文第而部分研究内容的出发点。

第二章首先介绍了 Reddy 的复合材料板壳结构的逐层理论和三维六面体单元的有限元列式，然后建立复合材料加筋板壳结构的逐层/实体元方法，并通过数值算例验证该方法的正确性，以及该方法在分析复杂加筋结构方面的适应性；

第三章将第二章中的方法推广应用于复合材料夹芯结构，建立复合材料夹芯结构的逐层/实体元方法，以及芯子结构的全局模型、局部模型和等效模型三种建模方法，并基于逐层/实体元方法建立了复合材料夹芯结构的静动力灵敏度分析方法的半解析法和有限差分法。通过数值算例验证了复合材料夹芯结构的逐层/实体元方法、三种建模方法以及灵敏度分析方法的正确性；

第四章结合非线性 Heltz 接触律和渐进损伤模型建立复合材料加筋结构和夹芯结构的中低速渐进损伤分析方法，通过数值算例验证该方法的正确性，并基于该方法研究结构参数对冲击响应和损伤分布的影响规律；

第五章和第六章分别建立复合材料层合梁结构和层合板结构的扩展逐层理论，并通过数值算例验证了该方法在分析无损伤、含分层和/或基体裂纹层合梁结构和层合板结构问题上的正确性；

第七章结合各向异性材料的相互作用积分法和最大周向应力准则，将复合材料层合板的扩展逐层理论应用于裂纹任意扩展问题，并重点研究应力强度因子在层合板厚度方向上的变化规律；

第八章全文总结和今后工作展望。

第 2 章 复合材料加筋层合板壳结构的逐层/实体元方法

复合材料加筋结构和格栅结构的形式随着整体成型技术的发展变得越来越复杂，对现有分析方法提出了严重挑战，需要有一种分析方法既可以得到板壳的精确位移和应力结果，又可以在没有任何假设的情况下考虑任意复杂的加强筋结构，且能精细分析板壳结构与加强筋结构连接处的局部响应。本章将基于逐层理论和三维实体有限元建立一种加筋板壳结构的耦合分析方法，逐层/实体元 (Layerwise/Solid-Element，LW/SE) 方法。分别利用逐层理论和八节点实体单元建立复合材料板壳结构和加强筋结构的控制方程，然后基于板壳结构与加强筋结构之间的位移协调关系和内力平衡条件得到复合材料加筋板壳结构的总体控制方程。通过数值算例验证了逐层/实体元方法分析复合材料加筋板壳结构静动力响应的正确性，以及处理复杂复合材料加筋结构方面的优势。

2.1 复合材料层合板壳的逐层理论

2.1.1 Reddy 逐层理论的位移假设模式

在 Reddy 的复合材料层合板壳完整逐层理论中[7]（如图2.1 所示），厚度方向上的位移插值点位于层合板壳的表面和层间界面上，层合板壳结构任意点 $P(x,y,z)$ 的位移模式可假设为以下形式

$$u_\alpha(x,y,z,t)=\sum_{k=1}^{N+1}u_{\alpha k}(x,y,t)\phi_k(z) \tag{2-1}$$

式中，$\alpha=1,2,3$ 表示在x、y 和 z 方向上的位移分量；ϕ_k 为沿板厚方向的一维拉格朗日插值函数；上式的位移假设模式中，层合板壳结构根据铺层情况被分为N 层，N 也被称之为数学层数，在实际建模分析时可将相邻的铺层角度相同的物理单层合并成一个数学层，以减少控制方程中自由度数量，故数学层数要小于或等于物理层数；$u_{\alpha k}$ 为位移函数在厚度方向上的节点值，k 为厚度方向上插值点的编号。从上式中的位移模式可以看出，Reddy 的逐层理论实际上就是将一个三维问题解耦成为一个一维问题 (厚度方向) 和一个二维问题 (面内平面)，本质还是与三维方法等效。

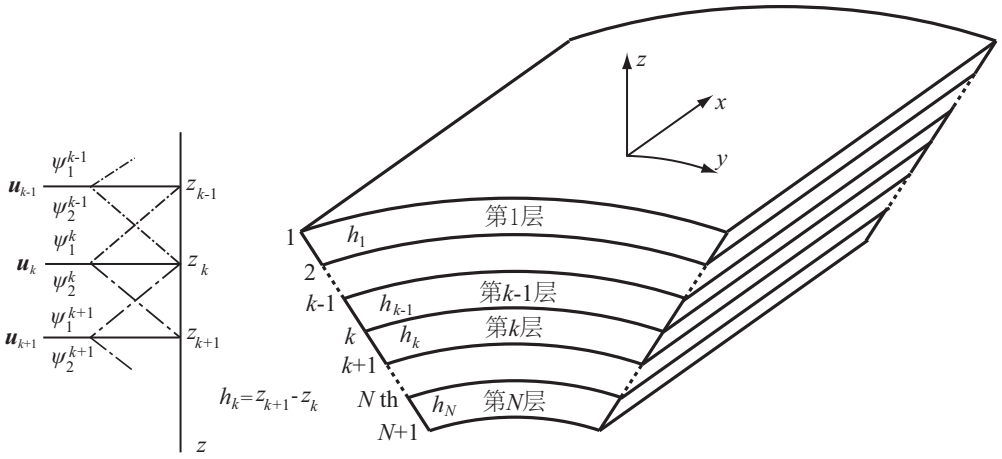


图 2.1　Reddy 的复合材料层合板壳逐层理论的位移模式

将式 (2-1) 中的位移假设模式代入 Von Karman 的圆柱壳非线性几何方程[7]

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= u_{1,x} + \frac{1}{2}u_{3,x}^2 = u_{1k,x}\phi_k + \frac{1}{2}\left(u_{3k,x}\phi_k\right)\left(u_{3e,x}\phi_e\right) \\
\varepsilon_{22} &= u_{2,y} + \frac{u_3}{R} + \frac{1}{2}u_{3,y}^2 = \left(u_{2k,y} + \frac{u_{3k}}{R}\right)\phi_k + \frac{1}{2}\left(u_{3k,y}\phi_k\right)\left(u_{3e,y}\phi_e\right) \\
\varepsilon_{33} &= u_{3,z} = u_{3k}\phi_{k,z} \\
\gamma_{12} &= u_{1,y} + u_{2,x} + u_{3,x}u_{3,y} = \left(u_{1k,y} + u_{2k,x}\right)\phi_k + \left(u_{3k,x}\phi_k\right)\left(u_{3e,y}\phi_e\right) \\
\gamma_{23} &= u_{2,z} + u_{23,y} - \frac{u_2}{R} = u_{2k}\phi_{k,z} + \left(u_{3k,y} - \frac{u_{2k}}{R}\right)\phi_k \\
\gamma_{13} &= u_{1,z} + u_{3,x} = u_{1k}\phi_{k,z} + u_{3k,x}\phi_k
\end{aligned}
\tag{2-2}
$$

式中，R 为圆柱壳的半径，e 为厚度方向上插值点的编号，从式 (2-2) 中去掉含 R 的项就是平板的非线性几何方程，去掉其中的二次项则可以得到板壳结构的线性几何方程。

2.1.2　运动方程和边界条件

逐层理论的运动方程和边界条件可由 Hamilton 原理推导。Hamilton 原理可写为

$$
\int_0^T (\delta U - \delta V - \delta M)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{2-3}
$$

式中，δU、δV 和 δM 分别为结构的虚应变能、虚外力功和虚动能，它们可分

别表示为

$$\delta U = \int_{\Omega}\int_{-H/2}^{H/2} \left(\sigma_{\alpha\beta}\delta\varepsilon_{\alpha\beta}\right) \mathrm{d}z\mathrm{d}A$$

$$\delta V = \int_{\Omega} \left[q_b(x,y,t)\delta u_3(x,y,-H/2,t) + q_t(x,y,t)\delta u_3(x,y,H/2,t)\right] \mathrm{d}A + \int_{\Gamma}\int_{-H/2}^{H/2} \left(\bar{\sigma}_{nn}\delta u_n + \bar{\sigma}_{ns}\delta u_s + \bar{\sigma}_{nz}\delta u_3\right) \mathrm{d}z\mathrm{d}s$$

$$\delta M = \int_{\Omega} \rho_0 \left(\dot{u}_\alpha \delta\dot{u}_\alpha\right) \mathrm{d}A$$

式中，H 为层合壳的厚度；$\bar{\sigma}_{nn}$、$\bar{\sigma}_{ns}$ 和 $\bar{\sigma}_{nz}$ 为边界 Γ 上的应力；δu_s 和 δu_n 为边界上的位移；$\dot{u}_\alpha$ 为速度；ρ_0 为密度。

将位移假设模式 (2-1) 代入结构的虚应变能、虚外力功和虚动能

$$\begin{aligned}\delta U = \int_{\Omega} \Bigg[& N_k^x \delta u_{1k,x} + N_k^y \left(\delta u_{2k,y} + \frac{\delta u_{3k}}{R}\right) + N_k^{xy}\left(\delta u_{1k,y} + \delta u_{2k,x}\right) + \\ & K_k^{yz}\left(\delta u_{3,y} - \frac{\delta u_{2k}}{R}\right) + K_k^{xz}\delta u_{3k,x} + \\ & M_{ke}^x \delta u_{3k,x}\delta u_{3e,x} + M_{ke}^y \delta u_{3k,y}\delta u_{3e,y} + \\ & M_{ke}^{xy}\left(\delta u_{3k,x}\delta u_{3e,y} + \delta u_{3k,x}\delta u_{3e,y}\right) + \\ & Q_k^z \delta u_{3k} + Q_k^{yz}\delta u_{2k} + Q_k^{xz}\delta u_{1k}\Bigg] \mathrm{d}A\end{aligned} \tag{2-4}$$

$$\begin{aligned}\delta V = & \int_{\Omega} \left(q_b \delta u_3^{N+1} + q_t \delta u_3^0\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \\ & \int_{\Gamma} \left(\bar{N}_k^{nn}\delta u_{1k}^n + \bar{N}_k^{ns}\delta u_{1k}^s + \bar{Q}_k^n \delta u_{3k}\right) \mathrm{d}s\end{aligned} \tag{2-5}$$

$$\delta T = \int_{\Omega} \left[I_{ke}\left(\dot{u}_{\alpha k}\delta\dot{u}_{\alpha e}\right)\right] \mathrm{d}A \tag{2-6}$$

式中，N_k^x、N_k^y 和 N_k^{xy} 为面内合内力；K_k^{xz} 和 K_k^{yz} 为面外合内力；Q_k^{xz}、Q_k^{yz} 和 Q_k^z

为横向合剪内力；M_{ke}^{x}、M_{ke}^{y} 和 M_{ke}^{xy} 为合扭矩。合内力和内力矩为

$$\begin{aligned}
\left(N_k^x, N_k^y, N_k^{xy}\right) &= \int_{-H/2}^{H/2} \left(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\right) \phi_k \mathrm{d}z, \\
\left(Q_k^{xz}, Q_k^{yz}, Q_k^{z}\right) &= \int_{-H/2}^{H/2} \left(\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}\right) \phi_{k,z} \mathrm{d}z, \\
\left(K_k^{xz}, K_k^{yz}\right) &= \int_{-H/2}^{H/2} \left(\sigma_{13}, \sigma_{23}\right) \phi_k dz, \\
\left(M_{ke}^{x}, M_{ke}^{y}, M_{ke}^{xy}\right) &= \int_{-H/2}^{H/2} \left(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\right) \phi_k \phi_e \mathrm{d}z, \\
I_{ke} &= \int_{-H/2}^{H/2} \rho_0 \phi_k \phi_e \mathrm{d}z,
\end{aligned} \tag{2-7}$$

边界合力为

$$\begin{aligned}
\bar{N}_k^{nn} &= \int_{-H/2}^{H/2} \bar{\sigma}_{nn} \phi_k \mathrm{d}z, \\
\bar{N}_k^{ns} &= \int_{-H/2}^{H/2} \bar{\sigma}_{ns} \phi_k \mathrm{d}z, \\
\bar{Q}_k^{n} &= \int_{-H/2}^{H/2} \bar{\sigma}_{nz} \phi_k \mathrm{d}z
\end{aligned} \tag{2-8}$$

边界法向和切向位移为

$$\begin{aligned}
u_{1k}^{n} &= u_{1k} n_x + u_{2k} n_y \\
u_{1k}^{s} &= -u_{1k} n_y + u_{2k} n_x
\end{aligned} \tag{2-9}$$

将结构的虚应变能、虚外力功和虚动能代入 Hamilton 原理，并分部积分，按虚位移整理，可得复合材料层合圆柱壳结构逐层理论的运动方程为

$$\begin{aligned}
&\delta u_{1k}: \quad N_{k,x}^{x} + N_{k,y}^{xy} - Q_k^{xz} = I_{ke} \ddot{u}_{1e} \\
&\delta u_{2k}: \quad N_{k,x}^{xy} + N_{k,y}^{y} - Q_k^{yz} + \frac{K_k^{yz}}{R} = I_{ke} \ddot{u}_{23} \\
&\delta u_{3k}: \quad K_{k,x}^{xz} + K_{k,y}^{yz} - \left(\frac{N_k^{y}}{R} + Q_k^{z}\right) + q_b \delta_k^{N+1} + q_t \delta_k^{0} \\
&\qquad + \left(M_{ke}^{x} u_{3e,x} + M_{ke}^{xy} u_{3e,y}\right)_{,x} + \left(M_{ke}^{y} u_{3e,y} + M_{ke}^{xy} u_{3e,x}\right)_{,y} = I_{ke} \ddot{u}_{3e}
\end{aligned} \tag{2-10}$$

式中，δ_k^{N+1} 和 δ_k^{0} 为 Kronecker 符号。

自然边界条件为

$$\begin{aligned}
&\delta u_{1k}: \quad N_k^{nn}-\bar{N}_k^{nn}=0\\
&\delta u_{2k}: \quad N_k^{ns}-\bar{N}_k^{ns}=0\\
&\delta u_{3k}: \quad Q_k^{n}+\Re_k-\bar{Q}_k^{n}=0
\end{aligned} \tag{2-11}$$

式中，

$$\begin{aligned}
N_k^{nn}&=N_k^{x}n_x+N_k^{xy}n_y\\
N_k^{ns}&=N_k^{xy}n_x+N_k^{y}n_y\\
Q_k^{n}&=K_k^{xz}n_x+K_k^{yz}n_y
\end{aligned} \tag{2-12}$$

$$\Re_k=\left(M_{ke}^{x}u_{3e,x}+M_{ke}^{xy}u_{3e,y}\right)n_x+\left(M_{ke}^{y}u_{3e,y}+M_{ke}^{xy}u_{3e,x}\right)n_y \tag{2-13}$$

2.1.3　本构关系

复合材料任意角铺层的第 μ 层的线弹性应力 -应变关系为

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}^{(\mu)}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&0&0&C_{16}\\ C_{12}&C_{22}&C_{11}&0&0&C_{26}\\ C_{13}&C_{23}&C_{33}&0&0&C_{36}\\ 0&0&0&C_{44}&C_{45}&0\\ 0&0&0&C_{45}&C_{55}&0\\ C_{16}&C_{26}&C_{36}&0&0&C_{66}\end{bmatrix}^{(\mu)}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix}^{(\mu)} \tag{2-14}$$

将上式代入式 (2-7) 可得合内力和内力矩为

$$\begin{aligned}\left(N_k^{x},N_k^{y},N_k^{xy}\right)=&\begin{bmatrix}A_{11ke}^{1}&A_{12ke}^{1}&A_{13ke}^{1}&A_{16ke}^{1}\\ A_{12ke}^{1}&A_{22ke}^{1}&A_{23ke}^{1}&A_{26ke}^{1}\\ A_{16ke}^{1}&A_{26ke}^{1}&A_{36ke}^{1}&A_{66ke}^{1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{1e,x}\\ u_{2e,y}+\dfrac{u_{3e}}{R}\\ u_{3e}\\ u_{1e,y}+u_{2e,x}\end{Bmatrix}+\\ &\begin{bmatrix}D_{11kep}^{1}&D_{12kep}^{1}&D_{16kep}^{1}\\ D_{12kep}^{1}&D_{22kep}^{1}&D_{26kep}^{1}\\ D_{16kep}^{1}&D_{26kep}^{1}&D_{66kep}^{1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{2}u_{3e,x}u_{3p,x}\\ \dfrac{1}{2}u_{3e,y}u_{3p,y}\\ u_{3e,y}u_{3p,x}\end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{2-15}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{ke}^{x} \\ M_{ke}^{y} \\ M_{ke}^{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11kep}^{1} & D_{12kep}^{1} & D_{13kep} & D_{16kep}^{1} \\ D_{12kep}^{1} & D_{22kep}^{1} & D_{23kep} & D_{26kep}^{1} \\ D_{16kep}^{1} & D_{26kep}^{1} & D_{36kep} & D_{66kep}^{1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1p,x} \\ u_{2p,y} + \dfrac{u_{3p}}{R} \\ u_{3p} \\ u_{1p,y} + u_{2p,x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11kepq} & F_{12kepq} & F_{16kepq} \\ F_{12kepq} & F_{22kepq} & F_{26kepq} \\ F_{16kepq} & F_{26kepq} & F_{66kepq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{2} u_{3p,x} u_{3q,x} \\ \dfrac{1}{2} u_{3p,y} u_{3q,y} \\ u_{3p,y} u_{3q,x} \end{Bmatrix} \tag{2-16}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{k}^{yz} \\ Q_{k}^{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44ke}^{3} & A_{45ke}^{3} \\ A_{45ke}^{3} & A_{44ke}^{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2e} \\ u_{1e} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{44ke}^{2} & A_{45ke}^{2} \\ A_{45ke}^{2} & A_{44ke}^{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{3e,y} - \dfrac{u_{2e}}{R} \\ u_{3e,x} \end{Bmatrix} \tag{2-17}$$

$$\begin{aligned} Q_{k}^{z} = {} & \left[A_{13ke}^{2} u_{1e,x} + A_{23ke}^{2} \left(u_{2e,y} + \frac{u_{3e}}{R} \right) + A_{33ke}^{3} u_{3e} + A_{36ke}^{2} \left(u_{1e,y} + u_{2e,x} \right) \right] + \\ & \frac{1}{2} \left[D_{13kep}^{2} u_{3e,x} u_{3p,x} + D_{23kep}^{2} u_{3e,y} u_{3p,y} + D_{36kep}^{2} u_{3e,y} u_{3p,x} \right] \end{aligned} \tag{2-18}$$

$$\begin{Bmatrix} K_{k}^{yz} \\ K_{k}^{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44ke}^{2} & A_{45ke}^{2} \\ A_{45ke}^{2} & A_{44ke}^{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2e} \\ u_{1e} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{44ke}^{1} & A_{45ke}^{1} \\ A_{45ke}^{1} & A_{44ke}^{1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{3e,y} - \dfrac{u_{2e}}{R} \\ u_{3e,x} \end{Bmatrix} \tag{2-19}$$

式中，$m,n=1,2,\cdots,6$；p 和 q 为厚度方向上插值点的编号；A_{mnke}^{1}、A_{mnke}^{2}、A_{mnke}^{3}、

D^1_{mnkep}、D^2_{mnkep} 和 F_{mnkepq} 为等效刚度系数，具体表达式为

$$\begin{aligned}
A^1_{mnke} &= \sum_{\mu=1}^{N}\int_{z_b^\mu}^{z_t^\mu} C^{(\mu)}_{mn}\phi_k\phi_e \mathrm{d}z \\
A^2_{mnke} &= \sum_{\mu=1}^{N}\int_{z_b^\mu}^{z_t^\mu} C^{(\mu)}_{mn}\phi_k\phi_{e,z} \mathrm{d}z \\
A^3_{mnke} &= \sum_{\mu=1}^{N}\int_{z_b^\mu}^{z_t^\mu} C^{(\mu)}_{mn}\phi_{k,z}\phi_{e,z} \mathrm{d}z \\
D^1_{mnkep} &= \sum_{\mu=1}^{N}\int_{z_b^\mu}^{z_t^\mu} C^{(\mu)}_{mn}\phi_k\phi_e\phi_p \mathrm{d}z \\
D^2_{mnkep} &= \sum_{\mu=1}^{N}\int_{z_b^\mu}^{z_t^\mu} C^{(\mu)}_{mn}\phi_k\phi_e\phi_{p,z} \mathrm{d}z \\
F_{mnkepq} &= \sum_{\mu=1}^{N}\int_{z_b^\mu}^{z_t^\mu} C^{(\mu)}_{mn}\phi_k\phi_e\phi_p\phi_q \mathrm{d}z
\end{aligned} \tag{2-20}$$

2.1.4　有限元列式

逐层理论运动方程 (2-10) 中的位移在面内还是 x 和 y 的连续函数，所以还需在面内对位移进行数值离散才能对 (2-10) 进行求解。本文采用有限元方法求解逐层方法的运动方程，为了得到逐层方法的有限元列式，厚度方向上的位移节点值 u_{1k}、u_{2k} 和 u_{3k} 在第 k 个平面内可离散为

$$u_{\alpha k}(x,y,t) = u_{\alpha km}(t)\psi_m(x,y) \tag{2-21}$$

式中，$m = 1,2,\cdots,n_{elm}$ 为二维单元的节点数，$\psi_m(x,y)$ 为二维单元的形函数，$u_{\alpha km}$ 为第 m 个平面内节点的位移值。

将式 (2-21) 代入 Hamilton 原理中，经变分并分部积分可得复合材料层合结构逐层理论运动方程的有限元列式

$$M_{\alpha\beta kemn}\ddot{U}_{\beta en} + K_{\alpha\beta kemn}U_{\beta en} = F_{\alpha km} \tag{2-22}$$

式中，$\boldsymbol{M}$ 为质量矩阵；$\boldsymbol{K}$ 为刚度矩阵。

刚度矩阵可以写成以下形式（具体形式见附录 A1）

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} K_{11kemn} & K_{12kemn} & K_{13kemn} \\ K_{21kemn} & K_{22kemn} & K_{23kemn} \\ K_{31kemn} & K_{32kemn} & K_{33kemn} \end{bmatrix} \tag{2-23}$$

质量矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} M_{11kemn} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_{22kemn} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & M_{33kemn} \end{bmatrix} \tag{2-24}$$

式中，$M_{11kemn}=M_{22kemn}=M_{33kemn}=\int_{\Omega}\rho\left(G_{ke}\psi_m\psi_n\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $G_{ke}=\int_{-H/2}^{H/2}\phi_k\phi_e\mathrm{d}z$。

2.2　加强筋结构的三维实体元有限元列式

本文中复合材料加强筋结构是采用三维六面体单元建模的，六面体单元的局部坐标和全局坐标系如图2.2 所示，所以，加强筋结构任意一点的位移可以表示为

$$u_\alpha=\sum_{i=1}^{n_{\mathrm{elm}}}N_i\begin{Bmatrix}\widetilde{u}_{1i}\\ \widetilde{u}_{2i}\\ \widetilde{u}_{3i}\end{Bmatrix}=\sum_{i=1}^{n_{\mathrm{elm}}}N_i\widetilde{u}_{\alpha i} \tag{2-25}$$

式中，$\widetilde{u}_{\alpha i}=[\widetilde{u}_{1i},\widetilde{u}_{2i},\widetilde{u}_{3i}]^{\mathrm{T}}$ 为位移的节点值；N_i 为单元形函数；n_{elm} 为加强筋结构的有限元节点数。

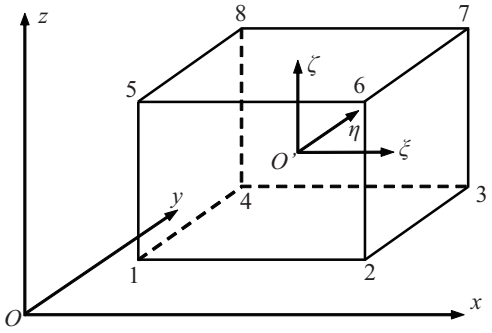


图 2.2　六面体单元的局部坐标和全局坐标

取六面体单元的形函数为

$$N_i=\frac{1}{8}\left(1+\xi_i\xi\right)\left(1+\eta_i\eta\right)\left(1+\zeta_i\zeta\right) \tag{2-26}$$

式中，ξ，η 和 ζ 为六面体单元的三个局部坐标。

则六面体单元形函数对全局坐标的导数为

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{8}\boldsymbol{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \xi_i(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta) \\ \eta_i(1+\xi_i\xi)(1+\zeta_i\zeta) \\ \zeta_i(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta) \end{Bmatrix} \tag{2-27}$$

式中，$\boldsymbol{J}$ 为雅可比矩阵，具体表达式为

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8} \begin{Bmatrix} \xi_j(1+\eta_j\eta)(1+\zeta_j\zeta) \\ \eta_j(1+\xi_j\xi)(1+\zeta_j\zeta) \\ \zeta_j(1+\xi_j\xi)(1+\eta_j\eta) \end{Bmatrix}$$

将式 (2-25) 代入为弹性体的应变位移方程中

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{i=1}^{n_{\text{elm}}} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & \dfrac{\partial N_i}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} \widetilde{u}_{1i} \\ \widetilde{u}_{2i} \\ \widetilde{u}_{3i} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_{\text{elm}}} \boldsymbol{B}_i \widetilde{\boldsymbol{u}}_i \tag{2-28}$$

将上式代入虚功原理可得

$$\sum_e \delta\widetilde{\boldsymbol{u}}_i^{\mathrm{T}} \left[\int_{\Omega^e} \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}} \left[\boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{B}_j\widetilde{\boldsymbol{u}}_j - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \right] \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega^e} N_i\boldsymbol{b}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t^e} N_i\bar{\boldsymbol{t}}\mathrm{d}\Gamma \right] = 0 \tag{2-29}$$

式中，$\boldsymbol{\sigma}_0$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ 分别为结构的初始残余应力和应变；$\boldsymbol{D}$ 为结构的刚度矩阵；$\boldsymbol{b}$ 和 $\bar{\boldsymbol{t}}$ 分别为结构的体积力和表面力；Ω^e 和 Γ_t^e 分别为单元的空间区域和边界。

完成上式中的单元积分和求和（求和的过程即为单元刚度矩阵组装），利用六面体单元离散的加强筋结构的控制方程可写为

$$\boldsymbol{K}_{ij}\widetilde{\boldsymbol{u}}_j = \boldsymbol{f}_i \tag{2-30}$$

式中，

$$\boldsymbol{K}_{ij} = \sum_e \int_{\Omega^e} \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_j\mathrm{d}\Omega$$

为加强筋结构的刚度矩阵

$$\boldsymbol{f}_i = \sum_e \int_{\Gamma_t^e} N_i\bar{\boldsymbol{t}}\mathrm{d}\Gamma - \sum_{i=1}^{n_{\text{elm}}} \int_{\Omega^e} \left[\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{D}\varepsilon_0) - N_i\boldsymbol{b} \right] \mathrm{d}\Omega$$

为加强筋结构的等效载荷向量

2.3　复合材料加筋层合板壳的 LW/SE 方法

本节将基于逐层理论和三维实体有限元建立一种复合材料加筋板壳结构的分析方法，该方法既可以得到板壳的精确应力位移结果，又可以在没有任何假设的情况下考虑任意复杂的加强筋结构。对于加筋板和加筋壳而言，该方法的建立过程是一样的，所以此处仅以加筋层合圆柱壳为例，加筋板的格式可以类似得到。复合材料加筋层合圆柱壳结构的 LW/SE 耦合分析方法如图2.3所示，圆柱壳结构的问题域采用四边形平面单元离散，加强筋结构则采用八节点实体单元离散。另外，为了方便应用位移协调条件和内力平衡条件建立复合材料层合壳结构的总体控制方程，在板壳结构与加强筋结构相互连接区域单元节点应保持一致。

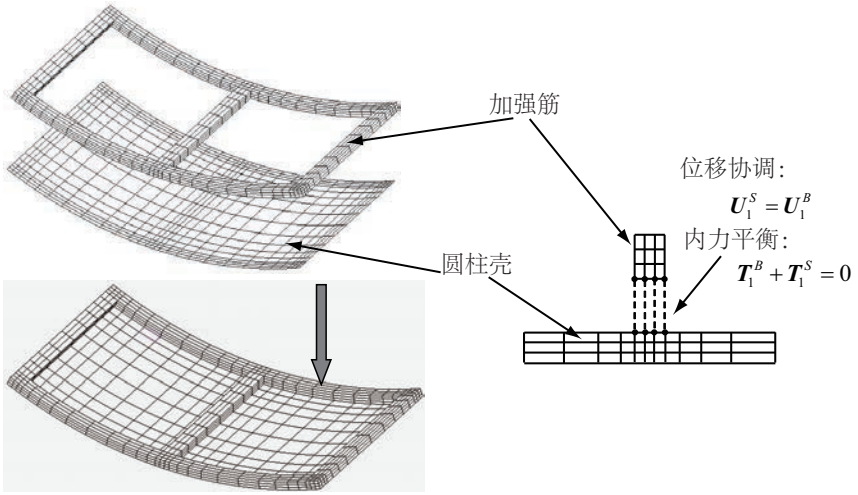


图 2.3　复合材料加筋层合圆柱壳结构 LW/SE 方法示意图

将复合材料层合壳结构问题域中所有的位移自由度 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{P}}$ 分为与加强筋结构连接的位移向量 $\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{P}}$（称为外部节点自由度）和不与加强筋结构连接的位移向量 $\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{P}}$（称为内部节点自由度）。据此对式 (2-22) 进行行列变换，重写成以下形式

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{P}} & \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{P}} \\ \boldsymbol{M}_{21}^{\mathrm{P}} & \boldsymbol{M}_{22}^{\mathrm{P}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{U}}_1^{\mathrm{P}} \\ \ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{P}} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{P}} \\ \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{P}} & \boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{P}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_1^{\mathrm{P}} \\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{P}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{P}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{T}_1^{\mathrm{P}} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{2-31}$$

式中，$\boldsymbol{F}_2^{\mathrm{P}}$ 和 $\boldsymbol{T}_1^{\mathrm{P}}$ 分别是壳结构的外载荷向量和外部相互作用力向量 (壳结构与加强筋之间的相互作用力)；下标 1 表示位移、加速度以及载荷向量是与外部节点相关的；下标 2 表示位移、加速度以及载荷向量是与内部节点相关的。

利用三维六面体单元离散加筋结构，其控制方程为式 (2-30)。同理，对加强筋结构的控制方程进行相同处理 (下式中符号和角标的含义与上式相同)

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{S}} & \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{S}}\\ \boldsymbol{M}_{21}^{\mathrm{S}} & \boldsymbol{M}_{22}^{\mathrm{S}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\boldsymbol{U}}_1^{\mathrm{S}}\\ \ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{S}}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{11}^{S} & \boldsymbol{K}_{12}^{S}\\ \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{S}} & \boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{S}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{S}}\\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{S}}\end{Bmatrix}=\\ &\begin{Bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{S}}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\boldsymbol{T}_1^{\mathrm{S}}\\ \boldsymbol{0}\end{Bmatrix}\end{aligned}\tag{2-32}$$

根据板壳结构与加强筋结构相互连接区域的位移协调条件和内力平衡条件 ($\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{P}}=\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{S}}$，$\boldsymbol{T}_1^{\mathrm{P}}+\boldsymbol{T}_1^{\mathrm{S}}=0$)，将式 (2-31) 的第一行与式 (2-32) 的第一行相加

$$\begin{aligned}&\left(\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{P}}+\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{S}}\right)\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{S}}+\boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{S}}\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{S}}+\boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{P}}\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{P}}+\\ &\left[\left(\boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{P}}+\boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{S}}\right)\ddot{\boldsymbol{U}}_1^{\mathrm{S}}+\boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{S}}\ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{S}}+\boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{P}}\ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{P}}\right]=\boldsymbol{0}\end{aligned}\tag{2-33}$$

将式 (2-33) 与式 (2-31) 第二行和 (2-32) 的第二行联立则可得到复合材料加筋层合圆柱壳结构的总体控制方程，写成矩阵形式为

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{P}}+\boldsymbol{M}_{11}^{S} & \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{P}} & \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{S}}\\ \boldsymbol{M}_{21}^{\mathrm{P}} & \boldsymbol{M}_{22}^{\mathrm{P}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{M}_{21}^{\mathrm{S}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{22}^{\mathrm{S}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\boldsymbol{U}}_1^{\mathrm{P}}\\ \ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{P}}\\ \ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{S}}\end{Bmatrix}+\\ &\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{P}}+\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{S}} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{P}} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{S}}\\ \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{P}} & \boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{P}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{S}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{S}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{P}}\\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{P}}\\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{S}}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{P}}\\ \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{S}}\end{Bmatrix}\end{aligned}\tag{2-34}$$

对于静力学问题

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{P}}+\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{S}} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{P}} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{S}}\\ \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{P}} & \boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{P}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{S}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{S}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{P}}\\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{P}}\\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{S}}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{P}}\\ \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{S}}\end{Bmatrix}\tag{2-35}$$

对于自由振动问题

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11}^{P}+\boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{S}} & \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{P}} & \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{S}} \\ \boldsymbol{M}_{21}^{P} & \boldsymbol{M}_{22}^{P} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{M}_{21}^{\mathrm{S}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{22}^{\mathrm{S}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{U}}_{1}^{\mathrm{P}} \\ \ddot{\boldsymbol{U}}_{2}^{\mathrm{P}} \\ \ddot{\boldsymbol{U}}_{2}^{\mathrm{S}} \end{Bmatrix} + \tag{2-36}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11}^{P}+\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{S}} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{P}} & \boldsymbol{K}_{12}^{S} \\ \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{P}} & \boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{P}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{S}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{S}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_{1}^{\mathrm{P}} \\ \boldsymbol{U}_{2}^{\mathrm{P}} \\ \boldsymbol{U}_{2}^{\mathrm{S}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix}$$

2.4　数值算例

2.4.1　圆柱壳的线性静力和自由振动分析

本节算例的目的是验证本文所编写基于逐层理论的复合材料板壳结构有限元分析程序的可靠性。以中心受集中载荷 $P=667.26\,\mathrm{kN}$ 的四边简支圆柱壳结构为研究对象，圆柱壳的几何尺寸为：$a=b=0.508\,\mathrm{m}$，$R=25.40\,\mathrm{m}$。材料性能参数为：$E=275.86\,\mathrm{GPa}$，$v=0.25$。为了验证本文程序的计算结果，基于有限元分析软件 MSC.Patran 建立了该圆柱壳的有限元模型，如图2.4，并利用 Nastran 软件求解。逐层理论采用的有限元网格划分与 MSC.Patran 软件建立的有限元模型一样，共 484(22×22) 个单元，且集中载荷作用附近区域的网格密度要大于其他区域。本文程序中采用 4×4 的高斯积分。

对于固有频率计算结果，利用下式进行无量纲化

$$\bar{\omega}=\omega\left(\frac{a^2}{t}\right)\sqrt{\frac{\rho}{E}} \tag{2-37}$$

式中 t 为板壳的厚度。

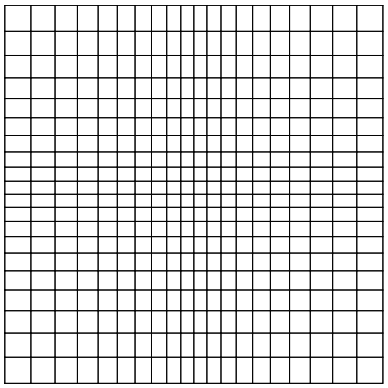


图 2.4　圆柱层合壳结构的有限元网格划分

表 2.1　逐层理论与 MSC 计算得到的圆柱壳位移 u_3 的最大值和第一阶固有频率的对比

t	最大位移 u_3 /10^1 mm			第 1 阶固有频率		
	逐层理论	MSC		逐层理论	MSC	
		(3D 实体元)	(2D 壳单元)		(3D 实体元)	(2D 壳单元)
1.0	-0.4430	-0.4572	-0.2591	1.0451	1.0185	1.6813
0.8	-0.7234	-0.8128	-0.4826	1.1362	1.0681	1.7120
0.6	-1.4519	-1.6637	-1.0770	1.2406	1.1603	1.7590
0.4	-3.5131	-4.3434	-3.2512	1.4903	1.3671	1.8657
0.2	-11.7300	-19.5834	-11.8796	2.3867	2.0253	2.3304

逐层理论与 MSC 计算得到的圆柱壳位移 u_3 的最大值和第一阶固有频率的对比情况见表2.1，其中 MSC.Nastran 的计算结果由 8 节点 Hex_Solid64 单元 (3D 实体单元) 和 4 节点 Quad4 单元 (2D 壳单元) 得到。从结果对比可以看出，当圆柱壳厚度较大时逐层理论的计算结果与 MSC 的 3D 实体单元计算结果吻合较好，当圆柱壳厚度较小时逐层理论的计算结果与 MSC 的 2D 壳单元计算结果吻合较好。因此，逐层理论既可以用于薄板壳又可以用于厚板壳。

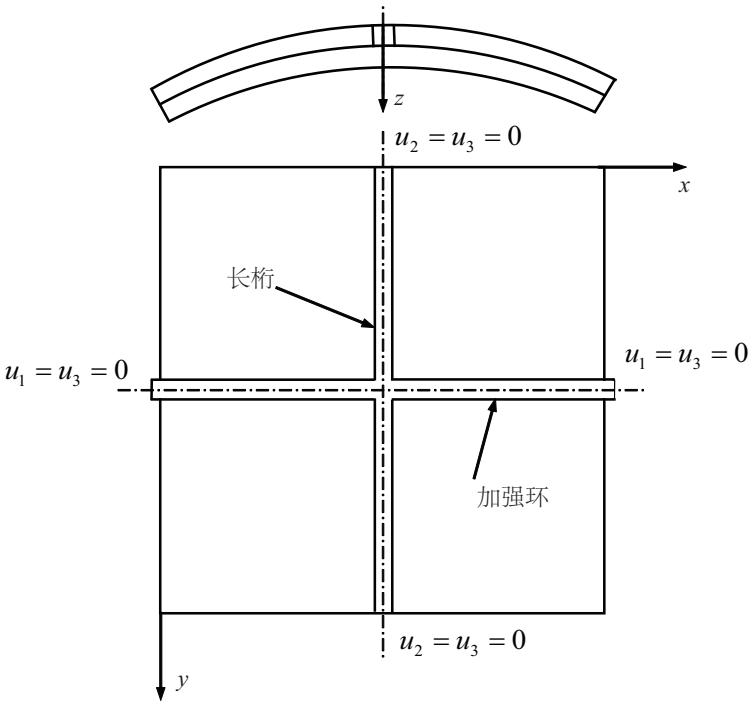
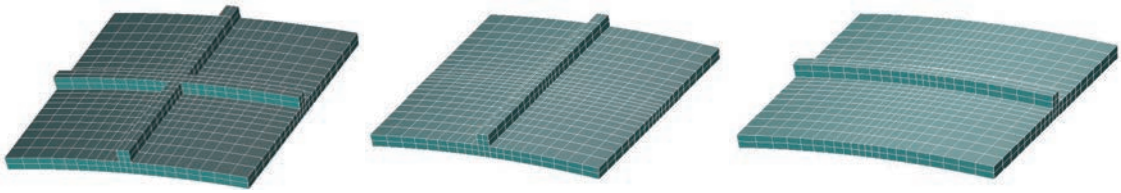


图 2.5　具有轴向和横向加筋条的圆柱壳结构

2.4.2　加筋圆柱壳的线性静力和自由振动分析

本算例以具有轴向和/或横向加筋条的四边简支圆柱壳结构为例，如图2.5所示，验证逐层/实体元方法分析各向同性材料加筋圆柱壳静力和自由振动问题的正确性。圆柱壳中心受集中载荷 $P=667.26\,\mathrm{KN}$ 作用，圆柱壳的几何尺寸为：$a=b=0.508\,\mathrm{m}$，$R=25.40\,\mathrm{m}$。轴向和横向加强筋的尺寸为：$t=c=2.54\,\mathrm{mm}$，其中 t 和 c 分别为加强筋的高度和厚度。圆柱壳和加强筋的材料性能参数相同：$E=275.86\,\mathrm{GPa}$，$v=0.25$。MSC 建立的加筋圆柱壳结构有限元模型如图2.6 所示，该模型中轴向和横向加强筋与圆柱壳之间采用位置重合节点合并的技术处理连接问题，即为完好刚性连接，与逐层/实体元方法中采用的连接面耦合方法等价。



(a)　(b)　(c)

图 2.6　MSC 建立的加筋圆柱壳结构有限元模型：(a) 具有轴向和横向加强筋的圆柱壳；(b) 具有轴向加强筋的圆柱壳；(c) 具有横向加强筋的圆柱壳

逐层/实体元方法和 MSC.Nastran 计算所得加筋圆柱壳结构位移 u_3 最大值和前 4 阶固有频率对比分别见表2.2 和2.3。本文方法计算得到的加筋圆柱壳结构前 4 阶基本振型如图2.7 所示。从最大位移、固有频率以及基本振型的对比可以看出，本文方法计算各向同性材料加筋圆柱壳结构的静动力响应结果是可靠的。具有横向加筋结构的整体位移要小于周向加强结构，而固有频率则刚好相反，原因是横向加强对圆柱壳结构整体刚度的提升要大于轴向加强。从前 4 阶振型可以看出，加强筋与圆柱壳之间的连接很好，说明通过连接界面位移协调和内力平衡条件的耦合方法是正确可靠的，实现了完好的刚性连接。

表 2.2　逐层/实体元方法和 MSC 计算得到的加筋圆柱壳结构位移 u_3 最大值对比

	轴向加强筋		横向加强筋		轴向和横向加强筋	
	LW/SE	MSC	LW/SE	MSC	LW/SE	MSC
壳	-3.6779	-3.5306	-3.0963	-3.5052	-2.6391	-2.7940
加强筋	-3.4138	-3.2258	-2.9566	-3.2004	-2.3647	-2.4892

表 2.3　逐层/实体元方法和 MSC 计算得到的加筋圆柱壳结构前 4 阶固有频率对比

阶次	轴向加强		横向加强		轴向和横向加强	
	LW/SE	MSC	LW/SE	MSC	LW/SE	MSC
1	1.0623	1.0889	1.1701	1.0876	1.2073	1.1649
2	2.6910	2.3872	2.5563	2.3833	2.9286	2.7786
3	2.9143	2.7655	2.9798	2.7447	3.1032	2.7920
4	4.1422	4.4806	4.1423	4.4665	4.2222	3.8451

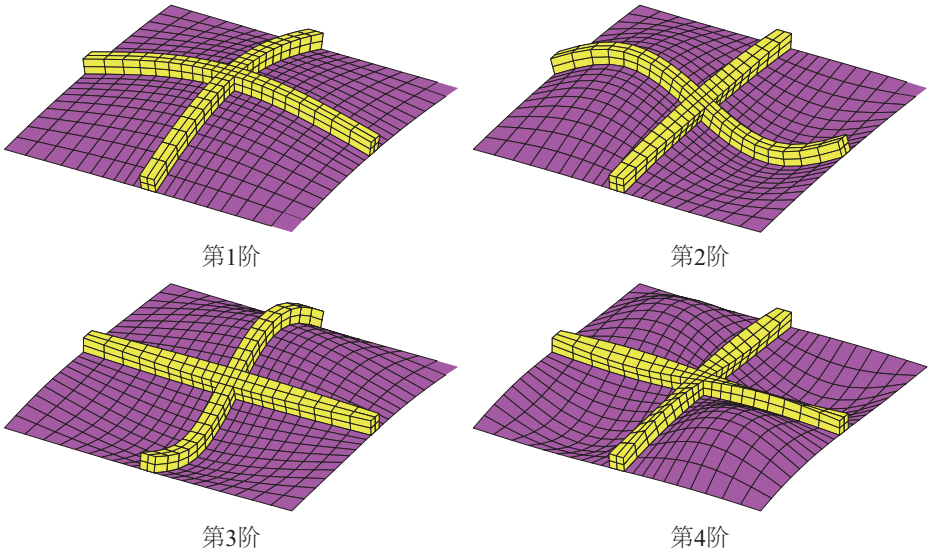
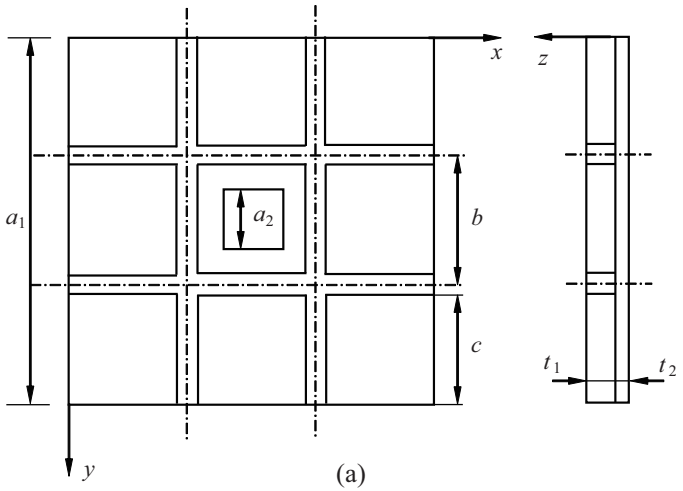


图 2.7　逐层/实体元方法计算得到的加筋圆柱壳结构前 4 阶基本振型

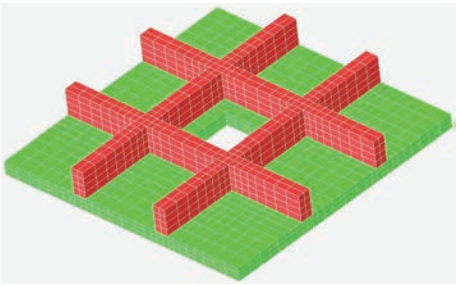
2.4.3　开口加筋板结构静力和自由振动分析

在工程实际应用中，在保证飞机结构强度、刚度、重量及工艺性等要求的前提下，为了实现各种装载的使用、检测和航测改装等相关功能，经常需要在飞机的适当位置上布置开口，如飞机机身上的舷窗、登机门以及机翼上的勤务端口等。这些开口的设计总体上来说主要是出于减重、使用性和维修性等方面的考虑。然而，结构开口将显著改变加筋结构的传力路径和振动特性等力学性能。对于复合材料结构来说，开口会切断纤维的连续性，大幅度削减复合材料结构的承载能力，直接影响到结构的使用寿命和安全裕度。

因此，本算例以开口加筋结构为研究对象，验证逐层/实体元方法分析这种结构的正确性。井字形加强开口加筋板结构的几何模型和有限元模型如图2.8所示，$a_1 = 508\,\text{mm}$，$a_2 = 98.806\,\text{mm}$，$t_1 = 50.8\,\text{mm}$，$t_2 = 25.4\,\text{mm}$，$b = 177.8\,\text{mm}$，$c = 152.4\,\text{mm}$，边界条件为四边固支，8 个由加强筋围成的外围矩形区域中心受单位集中载荷作用，用以模拟气动力的等效集中载荷。开口板的弹性参数



(a)



(b)

图 2.8　开口加筋板结构的几何模型和有限元模型：(a) 几何模型；(b) 有限元模型

和加强筋的弹性参数均为：$E = 275.86\,\text{GPa}$，$v = 0.25$。

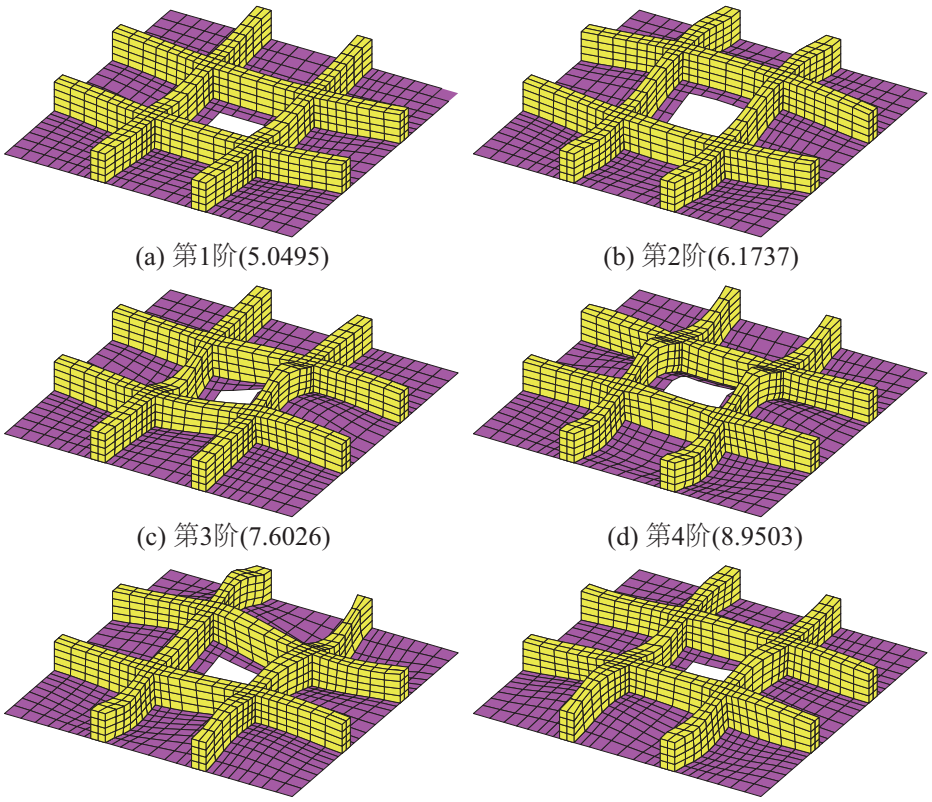
表 2.4　逐层/实体元方法和 MSC 计算得到开口加筋板结构最大位移分量计算结果对比

$u_1\ /10^{-7}\,\text{mm}$		$u_2\ /10^{-7}\,\text{mm}$		$u_3\ /10^{-6}\,\text{mm}$	
LW	MSC	LW/SE	MSC	LW/SE	MSC
6.8864	7.2898	6.8864	7.2898	4.1641	4.3434

逐层/实体元方法和 MSC 计算得到开口加筋板结构最大位移分量对比见表2.4，前 6 阶固有频率和振型如图2.9 所示。固有频率利用下式进行无量纲化

$$\bar{\omega} = \omega \left(\frac{a_1^2}{t_2} \right) \sqrt{\frac{\rho}{E_{22}}} \tag{2-38}$$

从表2.4中的比较结果可以看出，本文方法计算结果与有限元软件 MSC.Nastran 计算吻合较好，证明了逐层/实体元方法分析开口加筋结构静力和动力响应是正确的。



(a) 第1阶(5.0495)　(b) 第2阶(6.1737)

(c) 第3阶(7.6026)　(d) 第4阶(8.9503)

(e) 第5阶(9.2477)　(f) 第6阶(9.6234)

图 2.9　开口加筋板结构的前 6 阶固有频率和振型

2.4.4　复合材料加筋层合圆柱壳结构静力和自由振动分析

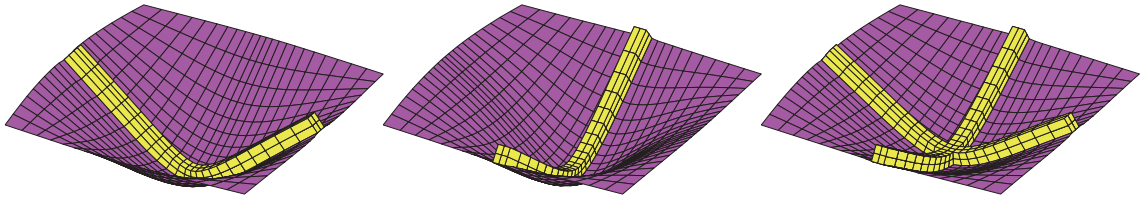
本算例以复合材料加筋层合圆柱壳结构为研究对象，该结构的几何尺寸和边界条件与 2.4.2 节算例中的相同。层合圆柱壳的铺层顺序为 [0/90/0]，所有单层具有相同的材料力学性能：$E_{11}=275.86\,\text{GPa}$，$E_{22}=E_{33}=6.8966\,\text{GPa}$，$G_{23}=4.1379\,\text{GPa}$，$G_{12}=G_{13}=3.4483\,\text{GPa}$，$v_{23}=0.25$，$v_{12}=v_{13}=0.25$。加强筋结构的材料性能为 $E=275.86\,\text{GPa}$，$v=0.25$。复合材料加筋层合壳的载荷为作用于中心点的集中载荷 $P=667.26\,\text{kN}$。

逐层/实体元方法计算得到的无加强和三种不同加强方式复合材料加强筋层合圆柱壳结构的最大位移和横向应力见表2.5，表中位移和应力取面内最大值点处层间界面上的值，I 表示复合材料圆柱壳的下表面；II 表示复合材料层合壳第一和第二层之间的界面；III 表示复合材料层合壳第二和第三层之间的界面；IV 表示复合材料圆柱壳的上表面。三种不同加强方式加筋圆柱壳的变形如图2.10 所示。从表中的位移结果，尤其是位移 u_3，可以看出加强筋的引入显著地提高了复合材料层合圆柱壳结构的整体刚度，但也使结构的最大横向应力显著增加，尤其是应力 σ_{33}。周向加强对圆柱壳结构整体刚度的提升作用

要明显强于轴向加强，且横向应力最大值的增加也要小于轴向加强。双向加强在刚度提升和横向应力增加两方面都要优于轴向或周向的单向加强。

表 2.5　无加强、轴向加强、周向加强和双向加强复合材料加强筋层合圆柱壳结构的最大位移和横向应力

		最大位移 (mm)			最大应力 (10^2 MPa)		
		u_1	u_2	u_3	σ_{13}	σ_{23}	σ_{33}
无加强	I	-1.3868	-2.2301	-28.4251	\	\	\
	II	-0.4191	-1.4427	-26.6319	-1.5248	-1.8832	-0.3447
	III	-0.4775	-0.7950	-26.6243	-1.1441	-1.6002	-0.3469
	IV	-1.4402	-1.1481	-28.4099	\	\	\
轴向加强	I	-0.9322	-2.1920	-24.8869	\	\	\
	II	-0.2819	-1.5697	-17.8435	-4.9069	-4.8876	-49.4738
	III	-0.3099	-0.9881	-15.9131	-2.4248	-4.7352	-45.8090
	IV	-0.9576	-0.4318	-15.1130	-1.8648	-3.2103	-44.0752
周向加强	I	-0.9169	-1.1278	-19.3751	\	\	\
	II	-0.5817	-0.5690	-12.3368	-5.0221	-4.7559	-33.4834
	III	-0.3734	-0.3099	-10.4191	-2.1372	-2.1262	-29.8821
	IV	-0.4318	-0.4470	-9.6114	-2.2462	-1.2717	-28.1455
双向加强	I	-0.7493	-1.1074	-17.2441	\	\	\
	II	-0.4775	-0.7950	-10.1905	-4.9055	-4.8124	-27.3476
	III	-0.3124	-0.5029	-8.2906	-1.7655	-2.3993	-23.5966
	IV	-0.3759	-0.2286	-7.4727	-1.8703	-1.6352	-21.5910



(a)　(b)　(c)

图 2.10　复合材料加强筋层合圆柱壳结构的变形图：(a) 轴向加强；(b) 轴向加强；(c) 双向加强

逐层/实体元方法计算得到的无加强和三种不同加强复合材料加强筋层合圆柱壳结构的前 6 阶固有频率见表2.6，三种不同加强层合圆柱壳结构的前 6 阶振型如图2.11 所示。固有频率利用下式进行无量纲化

$$\bar{\omega} = \omega \left(\frac{a^2}{t} \right) \sqrt{\frac{\rho}{E_{22}}} \tag{2-39}$$

从表2.6 和图2.11 可知，加强筋提高了层合圆柱壳结构与面外刚度有关的固有频率。加筋形式对固有频率的影响规律与振型相关。第 1 阶振型反映了层合圆柱壳结构整体面外刚度，所以虽然双向加强使结构的重量增加最大，但基频依然最大；第 2 阶振型主要反映了层合圆柱壳结构轴向刚度，周向加强筋变形很小，所以轴向加强层合圆柱壳结构的第 2 阶固有频率与双向加强的接近。

表 2.6　无加强、轴向加强、周向加强和双向加强复合材料加强筋层合圆柱壳结构的前 6 阶固有频率

	前 6 阶固有频率					
	第 1 阶	第 2 阶	第 3 阶	第 4 阶	第 5 阶	第 6 阶
无加强	2.8646	4.2754	7.4820	7.7514	9.0816	9.7293
轴向加强	3.1630	7.0170	7.3763	7.6751	9.1856	10.0748
周向加强	3.9242	4.5372	7.3765	7.6853	7.8509	9.9978
双向加强	4.1913	7.3119	7.3419	7.3552	10.3844	10.4023

2.4.5　复杂复合材料加筋层合壳结构静力和自由振动分析

本算例的目的是验证逐层/实体元分析方法在复杂加筋结构方面的适应性，研究对象为与半硬壳式飞机机身结构类似的复杂复合材料加筋圆柱壳。该结构的几何示意图和尺寸，以及有限元网格划分如图2.12 所示。桁条两端为简支边界，框两端为固支边界，每个小四边形框的中心均作用单位集中载荷，复合材料层合蒙皮的铺层顺序为 [0/90/0]。所有单层具有相同的材料性能：$E_{11}=275.86\,\text{GPa}$，$E_{22}=E_{33}=6.8966\,\text{GPa}$，$G_{23}=4.1379\,\text{GPa}$，$G_{12}=G_{13}=3.4483\,\text{GPa}$，$v_{23}=0.25$，$v_{12}=v_{13}=0.25$，$\rho=27679.9\,\text{kg/m}^3$（$1\text{lb/in.}^3$）。加强筋结构的材料性能为：$E=275.86\,\text{GPa}$，$v=0.25$。

具有复杂加筋结构的复合材料层合圆柱壳的最大位移和应力见表2.7，其变形图如图2.13 所示，前 6 阶固有频率和基本振型如图2.14 所示。固有频率利用下式进行无量纲化

$$\bar{\omega}=\omega\left(\frac{l_1^2}{t}\right)\sqrt{\frac{\rho}{E_{22}}} \tag{2-40}$$

本算例验证了逐层/实体元方法分析具有复杂加筋结构的复合材料层合结构的正确性和优势。

具有复杂加筋结构的复合材料开口层合圆柱壳结构的几何尺寸、边界条件以及材料参数与上面算例中复杂加筋结构的相同，矩形开口的尺寸为

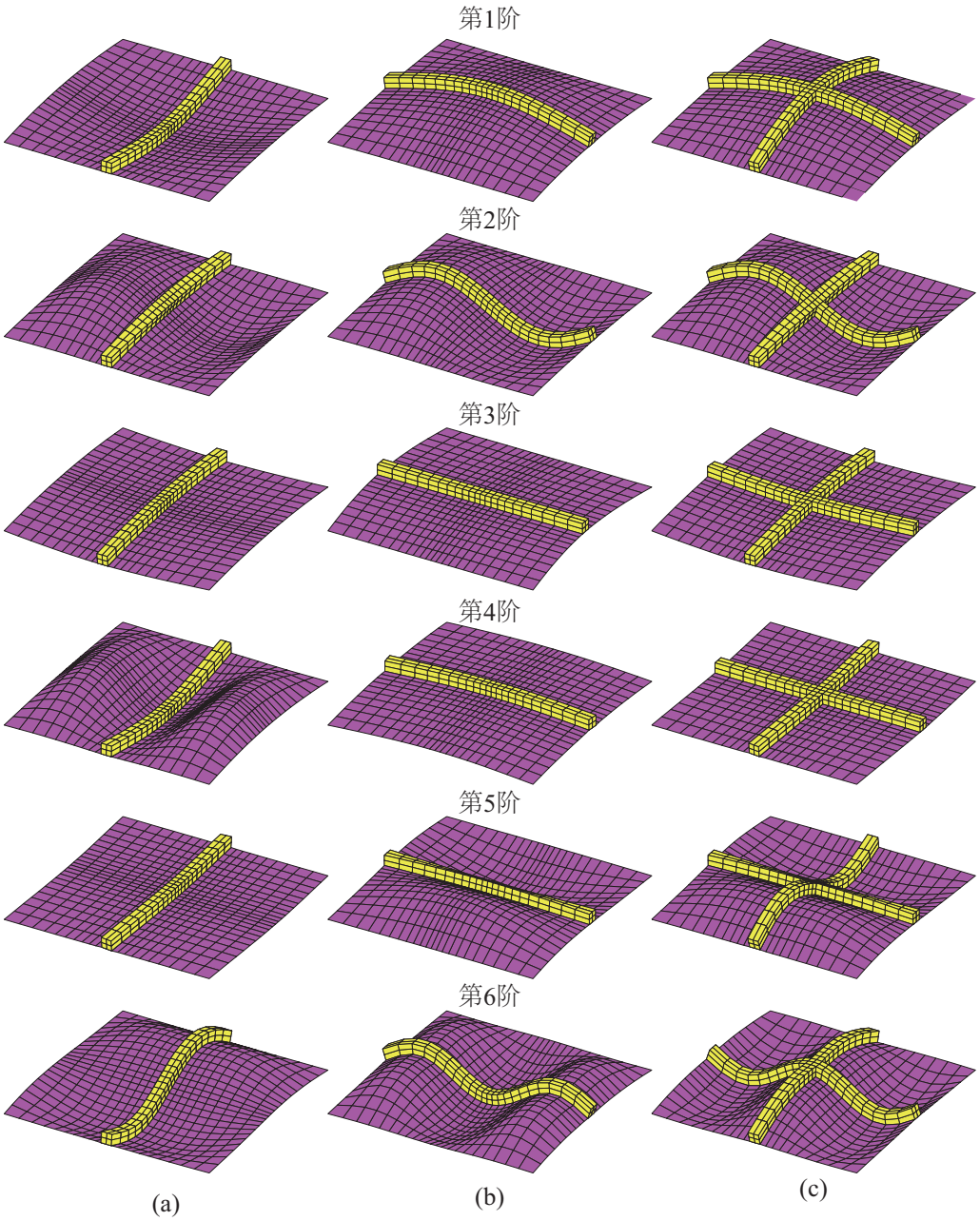


图 2.11　复合材料加强筋层合圆柱壳结构的前 6 阶振型：(a) 轴向加强；(b) 轴向加强；(c) 双向加强

376.4974 × 214.5612 mm，位于圆柱壳的中心，有限元网格划分如图2.15 所示，无开口小四边形框的中心均作用单位集中载荷。具有复杂加筋结构的复合材料开口层合圆柱壳的变形图如图2.16 所示，前 6 阶振型和固有频率如图2.17 所示，其中固有频率利用式 (2-40) 进行无量纲化。从图2.17 和图2.14 的对比可知，开口提高了结构的固有频率，主要原因是开口降低结构刚度的同时也大大减轻了结构重量，而加筋结构的刚度主要由加强筋贡献，所以对于本算例中的

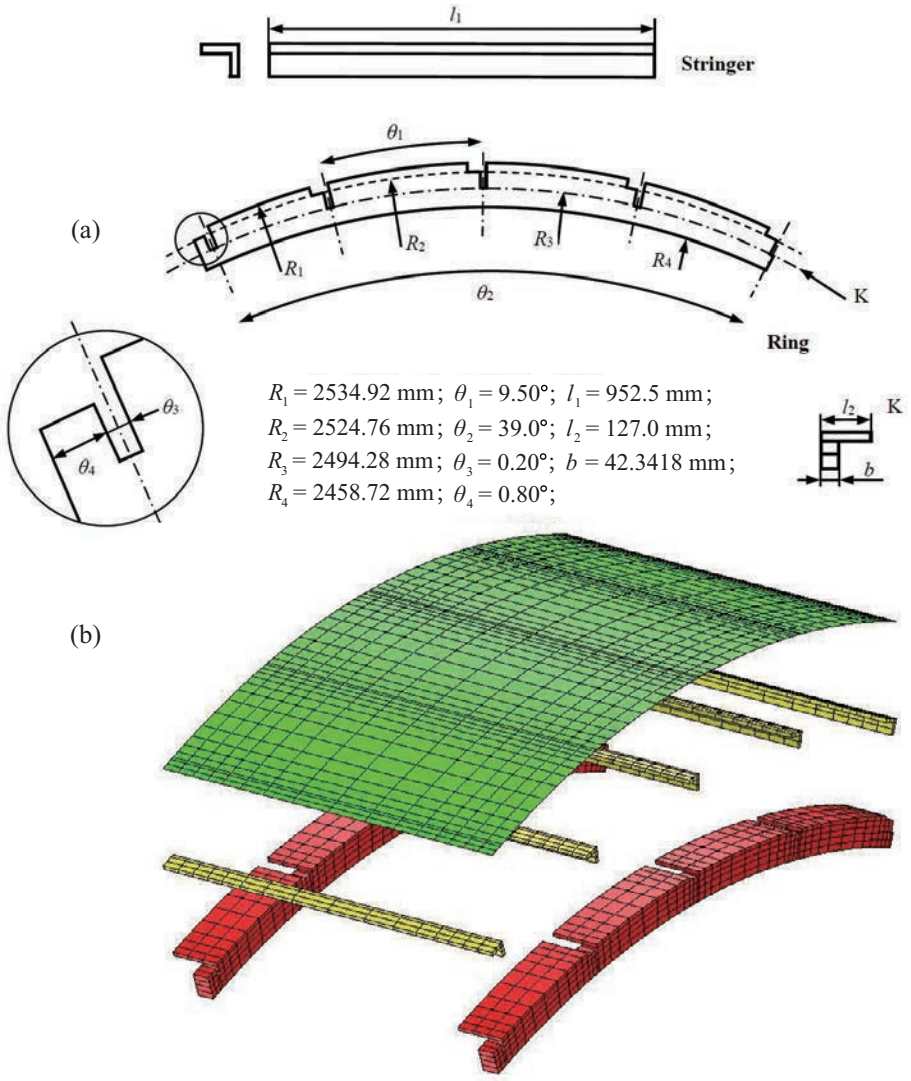
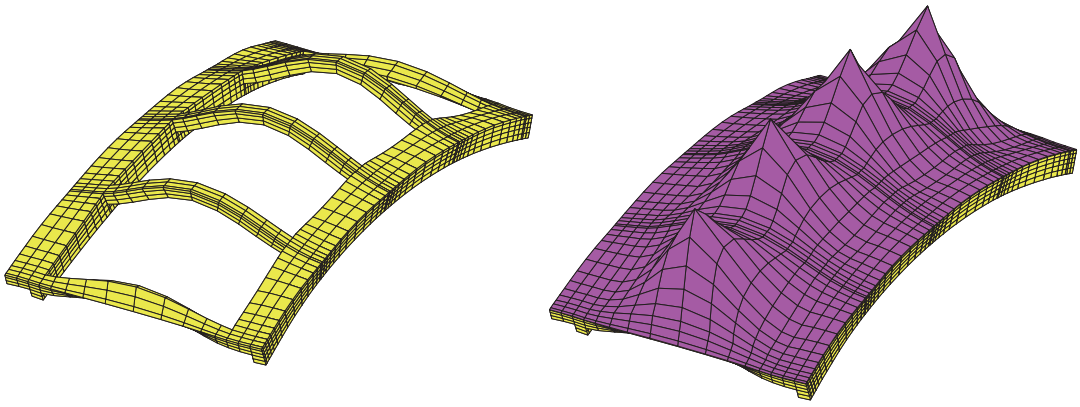


图 2.12　具有复杂加筋结构的复合材料层合圆柱壳结构的几何示意图和网格划分图：(a) 几何示意图；(b) 网格划分图

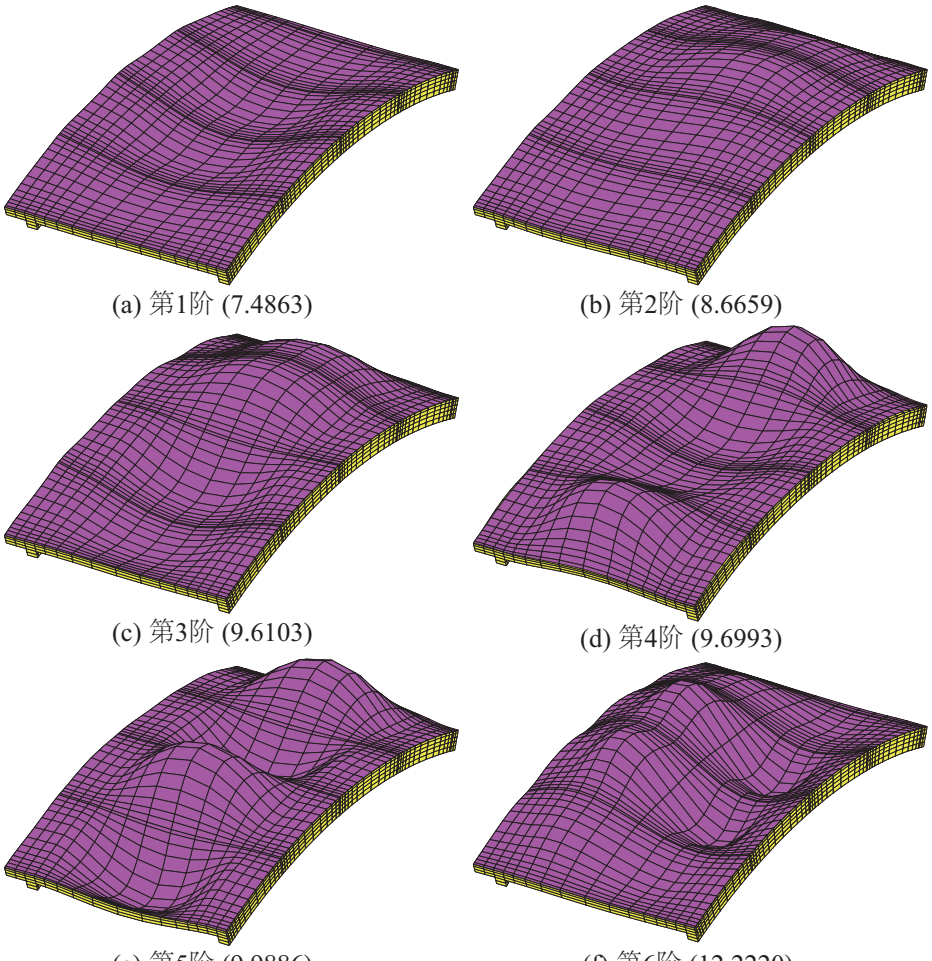
表 2.7　具有复杂加筋结构的复合材料层合圆柱壳沿厚度方向的最大位移和应力

	最大位移 (10^{-5} mm)			最大应力 (10^{-2} MPa)		
	u_1	u_2	u_3	σ_{13}	σ_{23}	σ_{33}
1	1.4884	2.2548	39.4513	1.0138	0.7943	10.2364
2	0.8347	1.8902	39.3776	0.9124	0.7309	10.2528
3	0.9004	1.6596	39.3217	0.6794	0.7999	10.2690
4	1.5406	1.6162	39.2862	\	\	\



(a)　(b)

图 2.13　具有复杂加筋结构的复合材料层合圆柱壳的变形图：(a) 加强筋结构；(b) 整体结构



(a) 第1阶 (7.4863)　(b) 第2阶 (8.6659)

(c) 第3阶 (9.6103)　(d) 第4阶 (9.6993)

(e) 第5阶 (9.9886)　(f) 第6阶 (12.2220)

图 2.14　具有复杂加筋结构的复合材料层合圆柱壳的前 6 阶振型和固有频率

加筋开口圆柱壳结构来说，，开口减重对固有频率的影响要大于刚度下降对固有频率的影响。另外，开口对结构 2 阶以上振型具有显著影响，因为低阶反应的是结构整体特性，高阶往往是结构的局部振动，开口并没有改变结构的整体力学特性。

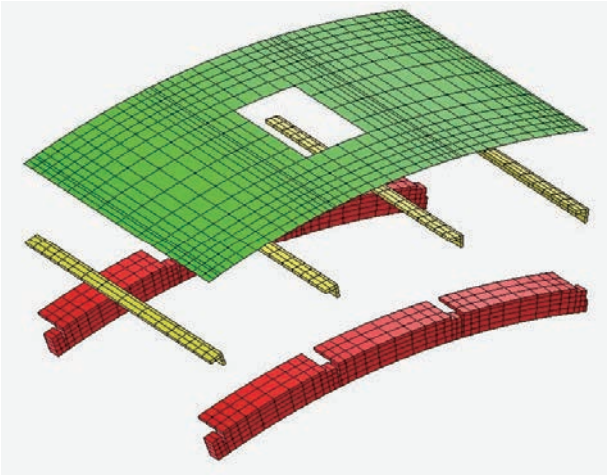
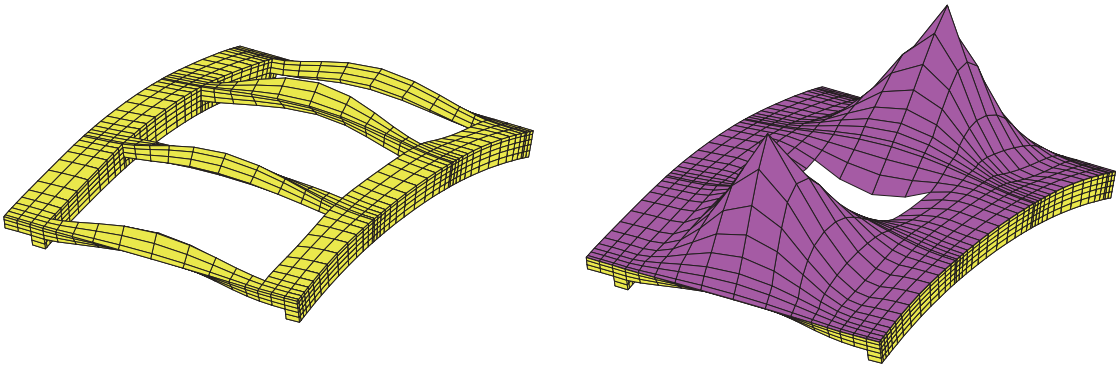


图 2.15　具有复杂加筋结构的复合材料开口层合圆柱壳结构的网格划分图

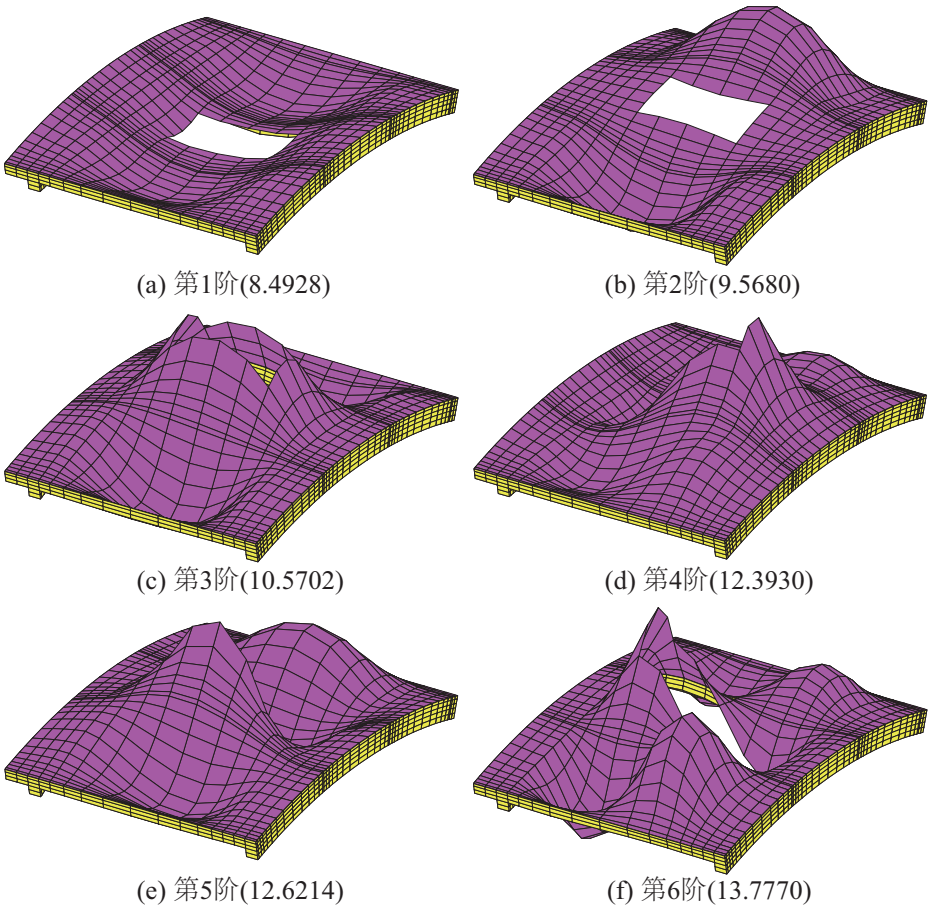


(a)　　(b)

图 2.16　具有复杂加筋结构的复合材料开口层合圆柱壳的变形图：(a) 加强筋结构；(b) 整体结构

2.5　本章小结

本章基于逐层理论和三维实体元建立了一种复合材料加筋板壳结构的逐层/实体元分析方法。在该方法中，复合材料层合板壳利用逐层理论建模，而加筋结构采用八节点实体元建模，然后基于板壳结构与加强筋结构之间的位移协调和内力平衡关系耦合得到复合材料加筋板壳结构的逐层/实体元分析方法的控制方程。通过数值算例验证了逐层/实体元分析方法在复合材料加筋板



(a) 第1阶(8.4928)　(b) 第2阶(9.5680)

(c) 第3阶(10.5702)　(d) 第4阶(12.3930)

(e) 第5阶(12.6214)　(f) 第6阶(13.7770)

图 2.17　具有复杂加筋结构的复合材料开口层合圆柱壳的前 6 阶振型和固有频率

壳结构静动力分析的正确性，以及逐层/实体元分析方法在复杂加筋结构方面的适应性。

逐层/实体元方法既可以得到板壳的精确应力位移结果，又可以在没有任何假设的情况下考虑任意复杂的加强筋结构，避免了传统分析方法对加筋结构进行等效处理而带来的误差。

一方面，逐层理论是准三维的，应力分析结果精度高。另一方面，加筋结构采用三维实体元建模时没有引入任何等效处理，且板壳与加强筋的耦合方法也完全真实地反映了它们之间的连接问题。逐层/实体元方法可以精确地得到复合材料加筋层合板壳结构的静动力响应，尤其是板壳与加强筋连接附近的局部响应，因此，逐层/实体元方法非常适合分析诸如集中载荷、集中支撑边界以及冲击等问题引起的局部响应。

逐层/实体元方法的思想和应用范围可以进行推广。在众多层合结构分析理论中，只要上下表面的位移自由度包含在控制方程中就可以方便地采用本章的方法建立加筋结构的耦合分析方法，如状态空间方法。在应用方面，逐

层/实体元方法可以推广应用到复合材料夹芯和点阵等结构中，这也是本文下一章的研究内容。

第 3 章 复合材料蜂窝夹芯结构的逐层/实体元方法

传统复合材料夹芯结构分析方法首先需要将芯子等效成为横观各向同性材料，然后采用板壳理论进行分析。在全局响应分析方面，传统分析方法能得到令人满意的结果。然而，对于一些需要重点关注局部响应的问题，如集中载荷作用和冲击问题，传统分析方法很难得到面板和芯子的准确局部响应。在实际情况中，复合材料夹芯结构在集中载荷和冲击载荷作用下，上下面板和芯子的响应是完全不同的，传统的分析方法不能得到这样真实的分析结果。另外，复合材料夹芯结构传统分析方法采用单层等效板壳理论，当芯子厚度增加时，将大大降低分析精度。逐层理论等三维分析方法可保证分析精度，但当芯子的厚度增加时，将大大提高计算成本。鉴于此，本章建立了一种逐层/实体元方法（layerwise/solid-element, LW/SE）来克服复合材料夹芯结构传统分析方法的缺点，针对实际工程应用，提出了芯子结构的三种建模方法：全局模型、局部模型和等效模型，并结合逐层/实体元方法和三种芯子建模方法建立了复合材料夹芯结构静动力响应灵敏度分析的半解析法和差分法。

3.1 复合材料夹芯结构的逐层/实体元方法

如果复合材料夹芯结构的芯子利用三维实体有限单元离散并建立控制方程，而面板采用逐层理论建立控制方程，那么就可以有效避免芯子厚度对分析精度的显著影响。与等效单层理论不同的是，逐层理论中板壳上下表面的位移自由度出现在最后控制方程中，所以逐层理论建立的面板控制方程可以很方便地与三维实体有限单元建立的芯子控制方程耦合，而且能完全保证界面上的位移连续性和内力平衡条件。

复合材料夹芯结构逐层/实体元分析方法的如图3.1所示。夹芯结构的上下复合材料层合面板由逐层理论建模，而芯子结构则采用八节点实体元建模，然后通过面板和芯子之间的位移协调和内力平衡条件耦合得到复合材料夹芯结构逐层/实体元方法的控制方程。本文的研究对象为复合材料蜂窝夹芯结构，其他类型夹芯结构的建模方法可类似地得到。

基于逐层理论建立的复合材料层合上下面板结构的控制方程为式 (2-22)。将上下面板结构的逐层理论控制方程中的所有位移自由度分为两部分，一部分位移自由度与芯子结构连接，称之为外部节点自由度，其余部分则称为内

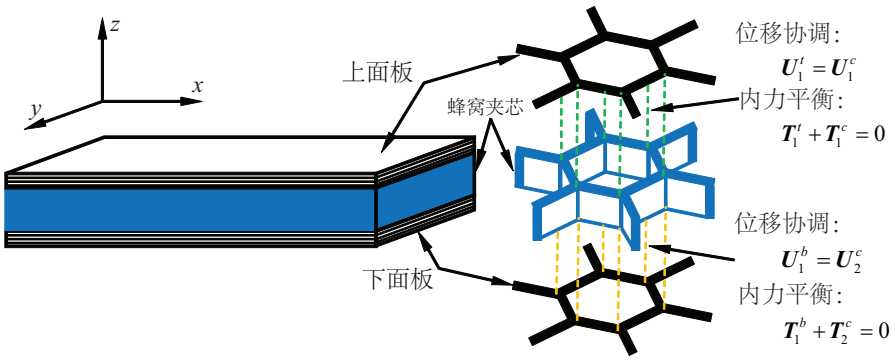


图 3.1　复合材料夹芯结构逐层/实体元分析方法

部节点自由度。据此，上下面板结构逐层理论控制方程可重写成以下形式：

对于上面板

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{t}} \\ \boldsymbol{M}_{21}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{M}_{22}^{\mathrm{t}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{U}}_1^{\mathrm{t}} \\ \ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{t}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{t}} \\ \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{t}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_1^{\mathrm{t}} \\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{t}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{t}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{T}_1^{\mathrm{t}} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{3-1}$$

对于下面板

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{b}} \\ \boldsymbol{M}_{21}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{M}_{22}^{\mathrm{b}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{U}}_1^{\mathrm{b}} \\ \ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{b}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{b}} \\ \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{b}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_1^{\mathrm{b}} \\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{b}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{b}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{T}_1^{\mathrm{b}} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{3-2}$$

式中，$\left[\ddot{\boldsymbol{U}}_1^{\mathrm{t}}, \ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{t}}\right]^{\mathrm{T}}$ 和 $\left[\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{t}}, \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{t}}\right]^{\mathrm{T}}$ 分别为根据外部节点自由度和内部节点自由度进行交换之后的上面板位移和加速度向量；$\left[\ddot{\boldsymbol{U}}_1^{\mathrm{b}}, \ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{b}}\right]^{\mathrm{T}}$ 和 $\left[\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{b}}, \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{b}}\right]^{\mathrm{T}}$ 分别为根据外部节点自由度和内部节点自由度进行交换之后的下面板位移和加速度向量；$\boldsymbol{F}_2^t$ 和 $\boldsymbol{T}_1^t$ 分别是上面板的外载荷向量和上面板与芯子之间的相互作用力向量；$\boldsymbol{F}_2^{\mathrm{b}}$ 和 $\boldsymbol{T}_1^{\mathrm{b}}$ 分别是下面板的外载荷向量和下面板与芯子之间的相互作用力向量；下标 1 表示位移、加速度以及载荷向量是与外部节点自由度相关的；下标 2 表示位移、加速度以及载荷向量是与内部节点自由度相关的。

利用三维六面体单元离散芯子结构，其控制方程为式 (2-30)。同理，对芯子结构的控制方程进行相同处理 (下式中符号和角标的含义与上式相同) 得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{M}_{13}^{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{M}_{21}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{M}_{22}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{M}_{23}^{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{M}_{31}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{M}_{32}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{M}_{33}^{\mathrm{c}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{U}}_{1,\mathrm{t}}^{\mathrm{c}} \\ \ddot{\boldsymbol{U}}_{1,\mathrm{b}}^{\mathrm{c}} \\ \ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{c}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{K}_{13}^{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{K}_{23}^{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{K}_{31}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{K}_{32}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{K}_{33}^{\mathrm{c}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_{1,\mathrm{t}}^{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{U}_{1,\mathrm{b}}^{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{c}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{c}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{T}_{1,t}^{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{T}_{1,b}^{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{3-3}$$

式中，上标 c 表示芯子结构；$\boldsymbol{U}_{1,\mathrm{t}}^{\mathrm{c}}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{U}}_{1,\mathrm{t}}^{\mathrm{c}}$ 分别为芯子与上面板相关的外部节点位移和加速度向量；$\boldsymbol{U}_{1,\mathrm{b}}^{\mathrm{c}}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{U}}_{1,\mathrm{b}}^{\mathrm{c}}$ 分别为芯子与下面板相关的外部节点位移和加速度向量。

根据上面板与芯子结构相互连接区域的位移协调和内力平衡条件 ($\boldsymbol{U}_1^t=\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{c}}$，$\boldsymbol{T}_1^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{T}_1^{\mathrm{c}}=0$)，将式 (3-1) 的第一行与式 (3-3) 的第一行相加，得

$$\begin{aligned}&\left(\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{c}}\right)\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{c}}\boldsymbol{U}_{1,b}^{\mathrm{c}}+\boldsymbol{K}_{13}^{\mathrm{c}}\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{c}}+\\&\left[\left(\boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{c}}\right)\ddot{\boldsymbol{U}}_1^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{t}}\ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{M}_{12}^{c}\ddot{\boldsymbol{U}}_{1,b}^{\mathrm{c}}+\boldsymbol{M}_{13}^{c}\ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{c}}\right]=\boldsymbol{0}\end{aligned}\tag{3-4}$$

根据下面板与芯子结构相互连接区域的位移协调和内力平衡条件 ($\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{b}}=\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{c}}$，$\boldsymbol{T}_1^{\mathrm{b}}+\boldsymbol{T}_1^{\mathrm{c}}=0$)，将式 (3-2) 的第一行与式 (3-3) 的第二行相加，得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{c}}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{t}}+\left(\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{b}}+\boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{c}}\right)\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{b}}+\boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{b}}+\boldsymbol{K}_{23}^{\mathrm{c}}\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{c}}+\\&\left[\boldsymbol{M}_{21}^{\mathrm{c}}\ddot{\boldsymbol{U}}_1^{\mathrm{t}}+\left(\boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{b}}+\boldsymbol{M}_{22}^{\mathrm{c}}\right)\ddot{\boldsymbol{U}}_1^{\mathrm{b}}+\boldsymbol{M}_{12}^{b}\ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{b}}+\boldsymbol{M}_{23}^{\mathrm{c}}\ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{c}}\right]=\boldsymbol{0}\end{aligned}\tag{3-5}$$

将式 (3-4)、式 (3-5)、式 (3-1) 和 (3-2) 的第二行以及式 (3-3) 的第三行联立则可得到复合材料夹芯结构的总体控制方程，写成矩阵形式为

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{13}^{\mathrm{c}}\\ \boldsymbol{M}_{21}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{M}_{22}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{M}_{21}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{b}}+\boldsymbol{M}_{22}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{M}_{23}^{\mathrm{c}}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{21}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{M}_{22}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{M}_{31}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{32}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{33}^{\mathrm{c}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\boldsymbol{U}}_1^{\mathrm{t}}\\ \ddot{\boldsymbol{U}}_2^{t}\\ \ddot{\boldsymbol{U}}_1^{\mathrm{b}}\\ \ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{b}}\\ \ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{c}}\end{Bmatrix}+\\&\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{13}^{\mathrm{c}}\\ \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{b}}+\boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{K}_{23}^{\mathrm{c}}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{K}_{31}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{32}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{33}^{\mathrm{c}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{t}}\\ \boldsymbol{U}_2^{t}\\ \boldsymbol{U}_1^{\mathrm{b}}\\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{b}}\\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{c}}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{t}}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{b}}\\ \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{c}}\end{Bmatrix}\end{aligned}\tag{3-6}$$

对于静力学问题，夹芯结构的控制方程为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{13}^{\mathrm{c}}\\ \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{b}}+\boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{K}_{23}^{\mathrm{c}}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{K}_{31}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{32}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{33}^{\mathrm{c}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{t}}\\ \boldsymbol{U}_2^{t}\\ \boldsymbol{U}_1^{\mathrm{b}}\\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{b}}\\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{c}}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{t}}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{b}}\\ \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{c}}\end{Bmatrix}\tag{3-7}$$

对于自由振动问题，夹芯结构的控制方程为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{c}} & & \boldsymbol{M}_{13}^{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{M}_{21}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{M}_{22}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{M}_{21}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{b}}+\boldsymbol{M}_{22}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{M}_{23}^{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{21}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{M}_{22}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{M}_{31}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{32}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{33}^{\mathrm{c}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{U}}_1^{\mathrm{t}} \\ \ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{t}} \\ \ddot{\boldsymbol{U}}_1^{\mathrm{b}} \\ \ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{b}} \\ \ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{c}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{13}^{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{b}}+\boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{K}_{23}^{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{K}_{31}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{32}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_{33}^{\mathrm{c}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_1^{\mathrm{t}} \\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{t}} \\ \boldsymbol{U}_1^{\mathrm{b}} \\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{b}} \\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{c}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix} \tag{3-8}$$

从式 (3-6) 中可以看出面板与芯子的耦合关系，式 (3-6) 中质量和刚度矩阵中右下角的 3×3 子矩阵为芯子与下面板的耦合控制矩阵，它的形式与第 2 章中复合材料加筋结构逐层/实体元方法的控制矩阵相同。如果将芯子和下面板看成整体，式 (3-6) 可写成

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{t}} & {}_{12}\boldsymbol{M}_{13}^{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{M}_{21}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{M}_{22}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{0} \\ {}_{21}\boldsymbol{M}_{31}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}^{\mathrm{bc}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{U}}_1^{\mathrm{t}} \\ \ddot{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{t}} \\ \ddot{\boldsymbol{U}}_{12}^{\mathrm{bc}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{t}} & {}_{12}\boldsymbol{K}_{13}^{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{K}_{21}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{0} \\ {}_{21}\boldsymbol{K}_{31}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{bc}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_1^{\mathrm{t}} \\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{t}} \\ \boldsymbol{U}_{12}^{\mathrm{bc}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{F}_2^{t} \\ \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{bc}} \end{Bmatrix} \tag{3-9}$$

式中，${}_{21}\boldsymbol{M}_{31}^{\mathrm{c}}=\begin{Bmatrix} \boldsymbol{M}_{21}^{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{M}_{31}^{\mathrm{c}} \end{Bmatrix}$；${}_{12}\boldsymbol{M}_{13}^{\mathrm{c}}=\begin{Bmatrix} \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{M}_{21}^{\mathrm{c}} \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}=[{}_{21}\boldsymbol{M}_{31}^{\mathrm{c}}]^{\mathrm{T}}$；

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{bc}}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{b}}+\boldsymbol{M}_{22}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{M}_{23}^{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{M}_{21}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{M}_{22}^{\mathrm{b}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{M}_{32}^{\mathrm{c}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_{33}^{\mathrm{c}} \end{bmatrix}$$

为芯子与下面板的耦合控制矩阵；刚度矩阵中的子矩阵可类似得到。

上式中芯子和下面板组成的整体结构与上面板的耦合控制矩阵的形式也与第 2 章中复合材料加筋结构逐层/实体元方法的控制矩阵相同，因此，可以

递推得到 n 个子结构耦合得到的控制矩阵。

3.2　蜂窝夹芯结构的建模方法和材料性能等效理论

3.2.1　蜂窝夹芯的三种建模方法

如图3.2(a) 所示，如果所有的蜂窝芯子胞元都按照真实结构建模（称之为全局模型），而胞元的尺寸相对夹芯结构来说要小得多，这会导致模型的计算量巨大。为了有效减少计算量，可以先将蜂窝芯子等效成横观各向同性材料，然后利用实体元建模分析，如图3.2(c) 所示，该方法称之为等效模型。虽然等效模型在最大程度上减小了计算量和建模难度，但与全局模型相比降低了分析精度，且不能得到由集中载荷或点支撑等引起的局部效应。为了兼顾计算量和分析精度，尤其是局部响应问题，可以采用如图3.2(b) 所示的局部模型，对需要重点关注的局部区域胞元按照真实结构建模，而其他区域则采用等效方法处理。局部模型兼顾了全局模型和等效模型两者的优点，在减小了计算量的情况下保证了分析精度，尤其是集中载荷作用下的局部响应。

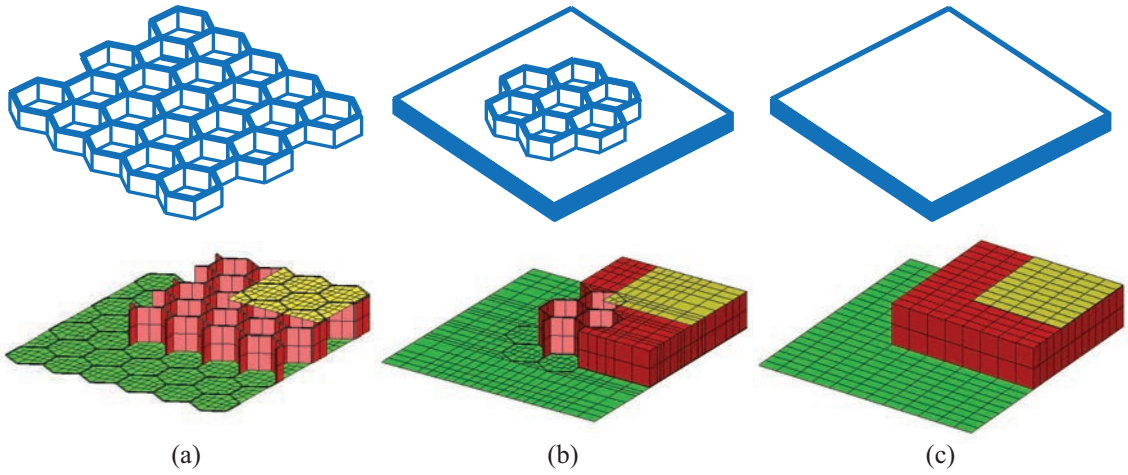


图 3.2　芯子结构的三中建模方法：(a) 全局模型；(b) 局部模型；(c) 等效模型

3.2.2　蜂窝夹芯结构的材料性能等效理论

六边形蜂窝芯子胞元及其几何尺寸如图3.3所示，图中 l 和 h 为芯子结构的边长，H 为芯子的高度，t 为芯子的厚度，θ 为芯子的特征角度。本文采用 Gibson[71] 的方法等效蜂窝芯子结构的材料性能参数，具体的等效过程简述如下。

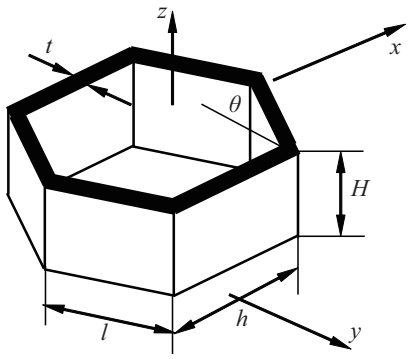


图 3.3　正六边形蜂窝芯子胞元

假设蜂窝结构的相对密度 $\rho^{\star}/\rho_{\mathrm{s}}$ 很小，即 t/l 很小，则相对密度为

$$\frac{\rho^{\star}}{\rho_{\mathrm{s}}}=\frac{t/l\,(h/l+2)}{2\cos\theta\,(h/l+\sin\theta)} \tag{3-10}$$

式中，$\rho^{\star}$ 为等效密度；ρ_{s} 为芯子材料的真实密度。

对于正六边形蜂窝，$l=h$，$\theta=30^{\circ}$，则等效密度为

$$\frac{\rho^{\star}}{\rho_{\mathrm{s}}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{t}{l} \tag{3-11}$$

沿 x 轴方向的等效弹性模量为

$$\frac{E_1^{\star}}{E_{\mathrm{s}}}=\left(\frac{t}{l}\right)^3\frac{\cos\theta}{(h/l+\sin\theta)\sin^2\theta} \tag{3-12}$$

沿 y 轴方向的等效弹性模量为

$$\frac{E_2^{\star}}{E_{\mathrm{s}}}=\left(\frac{t}{l}\right)^3\frac{(h/l+\sin\theta)}{\cos^3\theta} \tag{3-13}$$

对于正六边形蜂窝

$$\frac{E_1^{\star}}{E_{\mathrm{s}}}=\frac{E_2^{\star}}{E_{\mathrm{s}}}=2.3\left(\frac{t}{l}\right)^3 \tag{3-14}$$

面外等效弹性模量为

$$\frac{E_3^{\star}}{E_s}=\frac{t}{l} \tag{3-15}$$

面内等效泊松比为

$$v_{12}^{\star}=\frac{\cos^2\theta}{(h/l+\sin\theta)\sin\theta} \tag{3-16}$$

等效剪切弹性模量为

$$\frac{G_{12}^{\star}}{E_{\mathrm{s}}}=\left(\frac{t}{l}\right)^3\frac{(h/l+\sin\theta)}{(h/l)^2\,(2h/l+1)\cos\theta} \tag{3-17}$$

对于正六边形蜂窝有

$$\frac{G_{12}^{\star}}{E_{\mathrm{s}}}=0.57\left(\frac{t}{l}\right)^{3} \tag{3-18}$$

3.3　蜂窝夹芯结构静动力响应灵敏度分析

结构灵敏度分析是一种计算结构响应量随某一设计变量变化速率的分析方法，是结构优化设计、可靠性评估和参数识别等工程实际应用问题的主要先决条件，所以结构的灵敏度分析在工程上的意义重大。在过去的二十年中，灵敏度分析已经发展成为结构分析的重要研究领域之一，国内外已有大量的文献[24,137–144]对静力响应、瞬态响应、屈曲响应和特征值灵敏度问题进行了研究。虽然如今已有很多的灵敏度计算方法，但解析法 (Analytical Method, AM)、半解析法 (Semi-analytical method, SAM) 和有限差分法 (Over Finite Different Method, FDM) 是三种最为常用的方法[141]。解析法在进行数值计算之前的所有推导都是解析的，得到的结构响应灵敏度系数具有明显的物理意义。但是对于很多灵敏度分析情况，进行严格的解析推导是很困难的。有限差分法具有程序实现简单和计算精度高的特点，在工程领域应用广泛。但对于大型结构，其计算量巨大。半解析法的最终结果是解析的，但诸如刚度矩阵和载荷向量等中间变量的导数则采用有限差分法求解，所以它兼顾了解析法和有限差分法两者的优点。由于普遍的适应性、计算效率高以及实现相对简单，半解析法是三中方法中应用最广泛的方法。

Zienkiewicz 和 Campbell[145] 于 1973 首先将 SAM 方法应用于结构的形状优化。Cheng 和 Liu[146] 也对 SAM 方法进行了系统研究，将他们的方法称为准解析方法 (Quasi-Analytical Method, QAM)，并阐明了该方法在效率、精度和程序实现方面的优势。然而，不久之后的研究成果[147,148] 提出了该方法在某些方面存在精度不足的问题，这成为了该方法推广应用的最大障碍。经大量数值研究表明，SAM 在几何尺寸和材料性能参数灵敏度分析方面具有很高的精度。该方法的分析误差主要来自于两个源头，一个源头是有限差分的截断误差，对于某些形状设计变量来说，SAM 方法对差分步长很敏感，甚至得不到可靠的分析结果；另一个源头是有限元建模，如果分析对象的有限元模型在分析结构响应时就存在精度问题，则无疑灵敏度分析也存在精度问题。

为了克服 SAM 方法的精度问题，Cheng 等[149] 研究了梁单元、平面应力三角形单元、平面应力等参元、实体单元以及三角形弯曲单元在 SAM 灵敏度分析方面的精度问题。研究表明只有当有限元单元数量足够大的时候，SAM 方法

才会出现严重的精度问题。基于这些研究，Cheng 等提出了一种前/后差分法，在该差分法中单元的误差被邻近单元的误差中和掉。Olhoff 和 Rasmussen[150] 也研究了 SAM 方法的精度问题，并建立了一种刚度矩阵求导的非标准有限差分法，刚度矩阵导数的近似值取一阶前差和后差的平均值，进而避免了单元数量对 SAM 方法误差的影响。之后，Olhoff 等[151] 利用一些修正系数和特殊单元形函数又提出了一种“精确”数值差分方法。

3.3.1　灵敏度系数控制方程

对于静力问题来说，复合材料层合夹芯结构灵敏度系数的控制方程可通过对式 (3-7) 求导来建立。假设材料性能或几何设计参数为 λ，式 (3-7) 对 λ 的导数即为静力响应灵敏度系数的控制方程

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}_{,\lambda}=\boldsymbol{F}_{,\lambda}-\boldsymbol{K}_{,\lambda}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{F} \tag{3-19}$$

式中，$\boldsymbol{U}_{,\lambda}=\dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \lambda}$ 为静力响应灵敏度系数向量。

若载荷向量 $\boldsymbol{F}$ 与设计变量 λ 无关，即 $\boldsymbol{F}_{,\lambda}=0$，则静力响应灵敏度系数控制方程 (3-19) 可写为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}_{,\lambda}=-\boldsymbol{K}_{,\lambda}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{F} \tag{3-20}$$

即

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}_{,\lambda}=\boldsymbol{F}_{\lambda} \tag{3-21}$$

式中，$\boldsymbol{F}_{\lambda}=-\boldsymbol{K}_{,\lambda}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{F}$ 为静力响应灵敏度系数的等效载荷向量。

对于复合材料夹芯结构的面板来说，在逐层理论位移假设模式下，小变形的应变位移关系为[152]

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}&=u_{1,x}=u_{1i,x}\phi_i\\
\varepsilon_{22}&=u_{2,y}=u_{2i,y}\phi_i\\
\varepsilon_{33}&=u_{3,z}=u_{3i}\phi_{i,z}\\
\gamma_{13}&=u_{1,z}+u_{3,x}=u_{1i}\phi_{i,z}+u_{3i,x}\phi_i\\
\gamma_{12}&=u_{1,y}+u_{2,x}=u_{1i,y}\phi_i+u_{2i,x}\phi_i\\
\gamma_{23}&=u_{2,z}+u_{3,y}=u_{2i}\phi_{i,z}+u_{3i,y}\phi_i
\end{aligned} \tag{3-22}$$

式中，$i=1,2,\cdots,N+1$，N 为数学层数。

若设计变量 λ 与厚度方向上的插值函数 ϕ_i 无关，则式 (3-22) 关于设计变量的导数为

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11,\lambda} &= u_{1i,x\lambda}\phi_i \\
\varepsilon_{22,\lambda} &= u_{2i,y\lambda}\phi_i \\
\varepsilon_{33,\lambda} &= u_{3i,\lambda}\phi_{i,z} \\
\gamma_{13,\lambda} &= u_{1i,\lambda}\phi_{i,z} + u_{3i,x\lambda}\phi_i \\
\gamma_{12,\lambda} &= u_{1i,y\lambda}\phi_i + u_{2i,x\lambda}\phi_i \\
\gamma_{23,\lambda} &= u_{2i,\lambda}\phi_{i,z} + u_{3i,y\lambda}\phi_i
\end{aligned} \tag{3-23}$$

应力的灵敏度系数控制方程为

$$\boldsymbol{\sigma}_{,\lambda} = \boldsymbol{C}_{,\lambda}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}_{,\lambda} \tag{3-24}$$

式中，$\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33},\tau_{13},\tau_{12},\tau_{23}]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\varepsilon}=[\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{33},\gamma_{13},\gamma_{12},\gamma_{23}]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{C}=[C_{ij}]$ 为刚度矩阵；$C_{ij}(i,j=1,2,\cdots,6)$ 为材料的刚度系数。

若设计变量 λ 与刚度矩阵 $\boldsymbol{C}$ 无关，即 $\boldsymbol{C}_{,\lambda}=0$，则应力的灵敏度系数控制方程为

$$\boldsymbol{\sigma}_{,\lambda} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}_{,\lambda} \tag{3-25}$$

复合材料夹芯结构芯子的灵敏度分析方法与以上面板的分析方法相同，此处就不再重复推导。

复合材料夹芯结构自由振动的控制方程可写为

$$\left(\boldsymbol{K}-\omega_n^2\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{q}_n = \boldsymbol{0} \tag{3-26}$$

式中，ω_n 和 $\boldsymbol{q}_n$ 为第 n 阶固有频率和与之相对应的第 n 阶振型。

对上式关于 λ 求导，复合材料夹芯结构固有频率的控制方程为

$$\omega_{n,\lambda} = \frac{1}{2\omega_n\boldsymbol{q}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{q}_n}\boldsymbol{q}_n^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{K}_{,\lambda}-\omega_n^2\boldsymbol{M}_{,\lambda}\right)\boldsymbol{q}_n \tag{3-27}$$

如果振型 $\boldsymbol{q}_n$ 已经归一化，即 $\boldsymbol{q}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{q}_n=1$ 则固有频率的控制方程可进一步简化为

$$\omega_{n,\lambda} = \frac{1}{2\omega_n}\boldsymbol{q}_n^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{K}_{,\lambda}-\omega_n^2\boldsymbol{M}_{,\lambda}\right)\boldsymbol{q}_n \tag{3-28}$$

3.3.2　解析法和半解析法

基于 SAM 法，分别通过式 (3-20) 和 (3-28) 可计算得到复合材料夹芯结构有限元节点位移的灵敏度系数 $\boldsymbol{U}_{,\lambda}$ 和固有频率灵敏度系数 $\omega_{n,\lambda}$。但是，首先必须计算刚度矩阵的导数 $\boldsymbol{K}_{,\lambda}$ 和质量矩阵的导数 $\boldsymbol{M}_{,\lambda}$。值得注意的是，因为面板设计变量$\lambda$ 不会影响芯子的刚度和质量矩阵，所以此时 $\boldsymbol{K}^{\mathrm{c}}_{,\lambda}$ 和 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{c}}_{,\lambda}$ 为零，同样因为芯子设计变量λ 不会影响面板的刚度和质量矩阵，所以此时 $\boldsymbol{K}^{\mathrm{t}}_{,\lambda}$ 和 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{t}}_{,\lambda}$ 为零。故刚度和质量矩阵的导数可以按照以下表达式计算。

面板设计变量λ

$$\boldsymbol{K}_{,\lambda}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}^{\mathrm{t}}_{11,\lambda} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{t}}_{12,\lambda} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{K}^{\mathrm{t}}_{21,\lambda} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{t}}_{22,\lambda} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{b}}_{11,\lambda} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{b}}_{12,\lambda} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{b}}_{21,\lambda} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{b}}_{22,\lambda} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \tag{3-29}$$

$$\boldsymbol{M}_{,\lambda}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}^{\mathrm{t}}_{11,\lambda} & \boldsymbol{M}^{\mathrm{t}}_{12,\lambda} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{M}^{\mathrm{t}}_{21,\lambda} & \boldsymbol{M}^{\mathrm{t}}_{22,\lambda} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}^{\mathrm{b}}_{11,\lambda} & \boldsymbol{M}^{\mathrm{b}}_{12,\lambda} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}^{\mathrm{b}}_{21,\lambda} & \boldsymbol{M}^{\mathrm{b}}_{22,\lambda} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \tag{3-30}$$

芯子设计变量λ

$$\boldsymbol{K}_{,\lambda}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}^{\mathrm{c}}_{11,\lambda} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{c}}_{12,\lambda} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{c}}_{13,\lambda}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{K}^{\mathrm{c}}_{21,\lambda} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{c}}_{22,\lambda} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{c}}_{23,\lambda}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{K}^{\mathrm{c}}_{31,\lambda} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{c}}_{32,\lambda} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{c}}_{33,\lambda}\end{bmatrix} \tag{3-31}$$

$$\boldsymbol{M}_{,\lambda}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}^{\mathrm{c}}_{11,\lambda} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}^{\mathrm{c}}_{12,\lambda} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}^{\mathrm{c}}_{13,\lambda}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{M}^{\mathrm{c}}_{21,\lambda} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}^{\mathrm{c}}_{22,\lambda} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}^{\mathrm{c}}_{23,\lambda}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{M}^{\mathrm{c}}_{31,\lambda} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}^{\mathrm{c}}_{32,\lambda} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}^{\mathrm{c}}_{33,\lambda}\end{bmatrix} \tag{3-32}$$

根据刚度矩阵和质量矩阵导数的求解方法，可将结构灵敏度分析方法分为两类，如果刚度矩阵和质量矩阵的导数是通过解析表达式计算，则称该方法为解析法，如果刚度矩阵和质量矩阵的导数是通过差分法计算，但灵敏度分析的整个过程是解析的，则称这种方法为半解析法。对于本文所研究的复合材料夹芯结构来说，解析地求解刚度矩阵和质量矩阵的导数是非常复杂的，所以本文采用差分法求解这些导数 $\boldsymbol{K}_{ij,\lambda}^{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{M}_{ij,\lambda}^{\alpha}$。

向前差分

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{ij,\lambda}^{\alpha} &= \frac{\boldsymbol{K}_{ij}^{\alpha}(\lambda+\Delta\lambda)-\boldsymbol{K}_{ij}^{\alpha}(\lambda)}{\Delta\lambda} \quad (i,j=1,2;\alpha=t,b)\\
\boldsymbol{K}_{ij,\lambda}^{\mathrm{c}} &= \frac{\boldsymbol{K}_{ij}^{\mathrm{c}}(\lambda+\Delta\lambda)-\boldsymbol{K}_{ij}^{\mathrm{c}}(\lambda)}{\Delta\lambda} \quad (i,j=1,2,3)\\
\boldsymbol{M}_{ij,\lambda}^{\alpha} &= \frac{\boldsymbol{M}_{ij}^{\alpha}(\lambda+\Delta\lambda)-\boldsymbol{M}_{ij}^{\alpha}(\lambda)}{\Delta\lambda} \quad (i,j=1,2;\alpha=t,b)\\
\boldsymbol{M}_{ij,\lambda}^{\mathrm{c}} &= \frac{\boldsymbol{M}_{ij}^{\mathrm{c}}(\lambda+\Delta\lambda)-\boldsymbol{M}_{ij}^{\mathrm{c}}(\lambda)}{\Delta\lambda} \quad (i,j=1,2,3)
\end{aligned} \tag{3-33}$$

中心差分

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{ij,\lambda}^{\alpha} &= \frac{\boldsymbol{K}_{\mathrm{ij}}^{\alpha}(\lambda+\Delta\lambda/2)-\boldsymbol{K}_{ij}^{\alpha}(\lambda-\Delta\lambda/2)}{\Delta\lambda} \quad (i,j=1,2;\alpha=t,b)\\
\boldsymbol{K}_{ij,\lambda}^{\mathrm{c}} &= \frac{\boldsymbol{K}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{c}}(\lambda+\Delta\lambda/2)-\boldsymbol{K}_{ij}^{\mathrm{c}}(\lambda-\Delta\lambda/2)}{\Delta\lambda} \quad (i,j=1,2,3)\\
\boldsymbol{M}_{ij,\lambda}^{\alpha} &= \frac{\boldsymbol{M}_{\mathrm{ij}}^{\alpha}(\lambda+\Delta\lambda/2)-\boldsymbol{M}_{ij}^{\alpha}(\lambda-\Delta\lambda/2)}{\Delta\lambda} \quad (i,j=1,2;\alpha=t,b)\\
\boldsymbol{K}_{ij,\lambda}^{\mathrm{c}} &= \frac{\boldsymbol{M}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{c}}(\lambda+\Delta\lambda/2)-\boldsymbol{M}_{ij}^{\mathrm{c}}(\lambda-\Delta\lambda/2)}{\Delta\lambda} \quad (i,j=1,2,3)
\end{aligned} \tag{3-34}$$

本文建立的夹芯结构灵敏度分析方法整体上可以看成是半解析法，但也有不同的地方，即不是利用差分法求解整个控制矩阵的导数，而是用差分法求解控制矩阵中子矩阵的导数，然后得到整个控制矩阵的导数。

3.3.3　差分法

同样，向前差分和中心差分法也可以直接用于结构响应的灵敏度分析，复合材料夹芯结构位移和固有频率的向前差分灵敏度分析可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_{,\lambda}&=\frac{\boldsymbol{U}(\lambda+\Delta\lambda)-\boldsymbol{U}(\lambda)}{\Delta\lambda}\\ \omega_{n,\lambda}&=\frac{\omega_n(\lambda+\Delta\lambda)-\omega_n(\lambda)}{\Delta\lambda}\end{aligned}\tag{3-35}$$

复合材料夹芯结构位移和固有频率的中心差分灵敏度分析可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_{,\lambda}&=\frac{\boldsymbol{U}(\lambda+\Delta\lambda/2)-\boldsymbol{U}(\lambda-\Delta\lambda/2)}{\Delta\lambda}\\ \omega_{n,\lambda}&=\frac{\omega_n(\lambda+\Delta\lambda/2)-\omega_n(\lambda-\Delta\lambda/2)}{\Delta\lambda}\end{aligned}\tag{3-36}$$

本文采用向前差分研究复合材料夹芯结构的灵敏度问题。在步长足够小的情况下向前差分法可得到满足要求的灵敏度分析结果[153]，另外，当向前差分由于截断误差过大而无法得到精确分析结果时，可以用其他方法来代替向前差分，例如，中心差分和 Richardson 外推，但后者根据精度要求需对结构系统进行多次分析。

3.4　数值算例

3.4.1　LW/SE 方法正确性验证

本算例首先利用正六边形蜂窝夹芯结构验证 LW/SE 法的正确性，该蜂窝夹芯 x 方向上有 6 个胞元，y 方向上有 7 个胞元，单个胞元的几何尺寸为：$l=h=4\,\text{mm}$，$H=6\,\text{mm}$，$t=0.3464\,\text{mm}$。全局模型中面板和芯子的有限元网格如图3.4所示，这些模型中面板和芯子连接处的单元和节点保持一致，以此来保证连接面上位移连续和内力平衡。夹芯结构受上面板中心单位集中载荷作用，边界条件为四边固支，每条边的固支点如图3.5所示。面板的厚度为 1mm。面板和芯子结构具有相同的材料性能参数：$E=68\,\text{GPa}$，$v=0.3$，$\rho=2700\,\text{kg/m}^3$。

为了对比，基于 MSC.Patran 建立了本算例中夹芯结构的三维有限元模型，并采用 MSC.Nastran 进行求解，在该三维模型中面板和蜂窝夹芯都是采用八节点六面体 Solid64 单元建模的，面内有限元网格与 LW/SE 法采用的相同，如图3.4所示。LW/SE 法和三维有限元模型计算得到的夹芯结构位移 u_3 最大值和前 8 阶固有频率比较情况分别见表3.1和表3.2，表中 N_s 和 N_c 分别为面板和夹

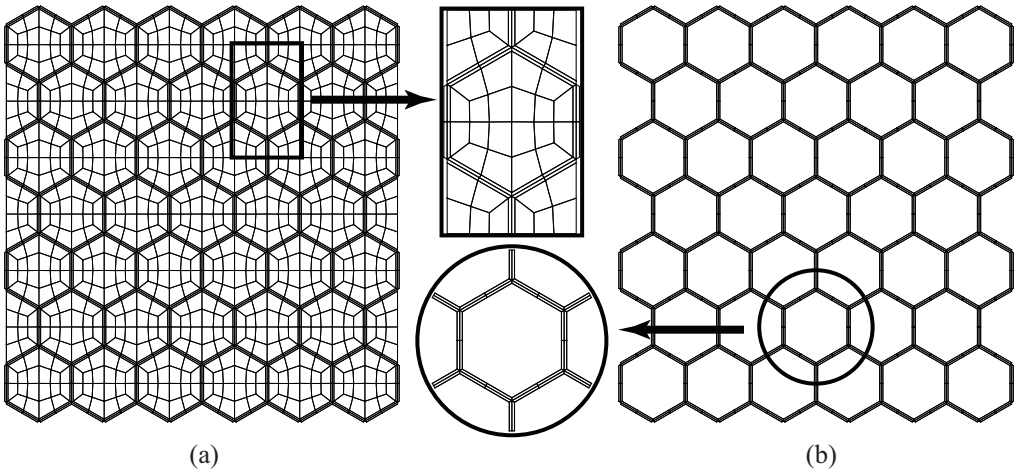


图 3.4　复合材料蜂窝夹芯结构的有限元网格：(a) 面板；(b) 蜂窝芯子

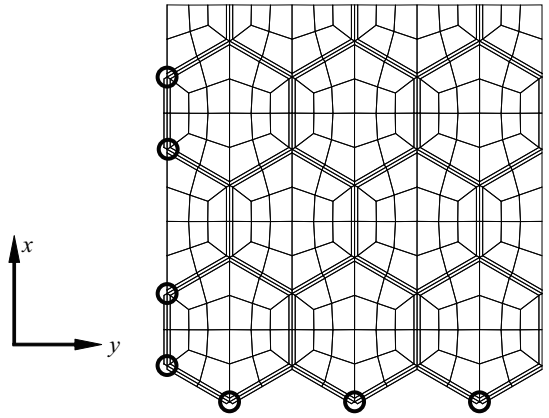


图 3.5　蜂窝夹芯结构的坐标系和边界条件（四分之一模型）

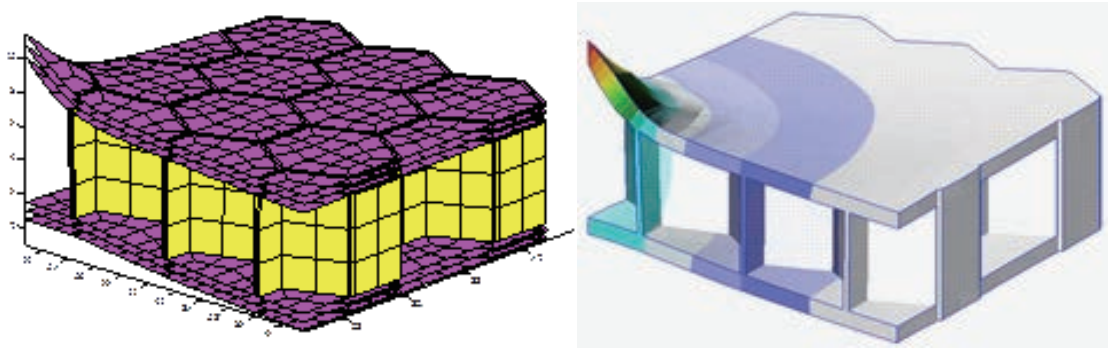
芯结构在厚度方向上的数学层数。LW/SE 法和 3D 弹性方法计算得到的变形对比如图3.6所示，图中 $N_c = 3$，$N_s = 2$。从表3.1和表3.2可看出，LW/SE 法和 3D 弹性方法计算得到的位移和固有频率吻合很好，蜂窝夹芯的数学层数 N_c 对计算结果的影响要比面板数学层数 N_s 大，主要原因是蜂窝夹芯的厚度远大于面板的厚度。在本算例集中载荷情况下，蜂窝夹芯结构上面板的位移要比下面板的大得多，上面板在集中载荷区域出现了局部凹陷，而下面板并没有。在 LW/SE 法中，因为利用三维实体元模拟了蜂窝芯子的真实结构，而不是进行传统方法的整体等效，所以 LW/SE 法可以得到上下面板变形不一致的夹芯结构真实变形模式，这种分析结果是蜂窝夹芯结构传统分析方法不能得到，从这点看，LW/SE 法的分析精度要比传统方法高，尤其是在局部响应问题上。

表 3.1　LW/SE 法和 3D 弹性解计算得到的夹芯结构最大位移 u_3 比较情况

	N_c	LW/SE 法 (10^{-5} m)				3D 弹性解 (10^{-5} m)	
		$N_s=1$	$N_s=2$	$N_s=3$	$N_s=4$	$N_s=1$	$N_s=2$
下面板	2	3.256	3.295	3.304	3.304	3.523	3.545
	3	3.056	3.081	3.085	3.088	3.124	3.165
蜂窝芯子	2	3.792	3.837	3.849	3.854	4.076	4.092
	3	3.765	3.810	3.822	3.830	4.012	4.034
上面板	2	8.763	9.004	9.098	9.137	11.23	11.37
	3	8.764	9.000	9.093	9.134	10.82	11.03

表 3.2　LW/SE 法和 3D 弹性解计算得到的夹芯结构前 8 阶固有频率比较情况

频率阶次	LW/SE 法						3D 弹性解	
	$N_c=2$			$N_c=3$			$N_c=2$	$N_c=3$
	$N_s=1$	$N_s=2$	$N_s=3$	$N_s=1$	$N_s=2$	$N_s=3$	$N_s=1$	$N_s=2$
1	601.79	599.14	598.43	605.51	602.84	602.18	589.62	592.19
2	987.84	981.90	980.64	995.32	989.15	987.68	958.33	963.94
3	1027.1	1020.6	1019.1	1034.5	1027.8	1026.2	999.16	1005.0
4	1316.5	1306.5	1304.2	1326.4	1316.2	1313.7	1268.6	1277.6
5	1469.0	1457.0	1454.3	1480.6	1468.3	1465.4	1398.7	1409.8
6	1536.7	1523.0	1519.8	1547.7	1533.9	1530.7	1472.3	1483.6
7	1711.6	1702.6	1698.9	1702.8	1700.9	1700.2	1627.7	1642.4
8	1718.9	1709.1	1708.2	1732.0	1715.5	1711.6	1666.0	1680.6



(a)　(b)

图 3.6　LW/SE 法和 3D 弹性方法计算得的变形图对比：(a) LW/SE 法；(b) 3D 弹性方法

3.4.2　蜂窝夹芯结构三种建模方法的对比研究

本算例的目的是对比研究三种夹芯结构建模方法（如图3.2所示），研究对象的几何尺寸和边界条件与 3.4.1 节中的相同，复合材料层合上下面板、蜂窝夹芯以及夹芯的等效材料性能参数见表3.3，芯子等效参数是根据 3.2.2 节中介绍的方法[71] 得到的。上下面板的铺层顺序为 [0/90/0]，且所有面板的单层都具有相同的材料性能。

表 3.3　复合材料夹芯结构面板和芯子的材料性能

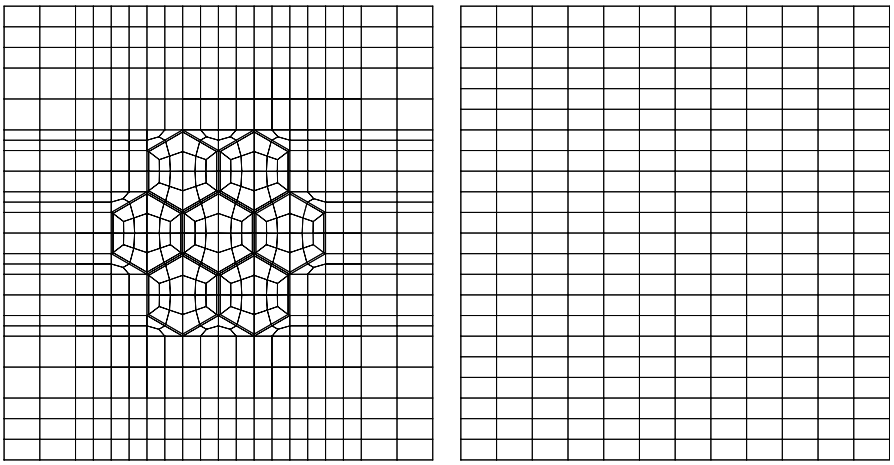
面板	$E_{11}=156.5\,\text{GPa}, E_{22}=E_{33}=13\,\text{GPa},$ $G_{23}=4.54\,\text{GPa}, G_{12}=G_{13}=6.96\,\text{GPa},$ $v_{23}=0.4, v_{12}=v_{13}=0.23, \rho=2700\,\text{kg/m}^3$
蜂窝夹芯	$E=68\,\text{GPa}, v=0.3, \rho=2700\,\text{kg/m}^3$
蜂窝夹芯等效参数	$E_{11}=E_{22}=0.1016\,\text{GPa}, E_{33}=5.8888\,\text{GPa},$ $G_{23}=G_{13}=1.3077\,\text{GPa}, G_{12}=0.0255\,\text{GPa},$ $v_{23}=0.0, v_{12}=1.0, v_{13}=0.3\ \rho=360\,\text{kg/m}^3$

复合材料夹芯结构全局模型的有限元模型如图3.4所示，局部和等效模型的有限元网格如图3.7所示，在三种不同的夹芯建模方法中都保证了面板与夹芯结构连接面上有限元单元和节点的一致性。基于三种不同建模方法的复合材料蜂窝夹芯结构有限元模型的节点数对比见表3.4，其中 $N_c=3$，$N_s=3$。从图3.4、图3.7 以及表3.4中可以看出，等效模型具有最小的计算量和建模难度，而全局模型的计算量和建模难度是最大的，但是如果需特别关注的重点区域尺寸相对整个夹芯结构来说很小时，局部模型的计算量和建模难度将和等效模型的相近。

表 3.4　三种建模方法的节点数对比

	全局模型	局部模型	等效模型
面板	35544	15576	7176
夹芯	7578	4896	2691
整体	43122	20472	9867

三种不同建模方法计算得到的复合材料蜂窝夹芯结构上下面板位移沿中线的分布如图3.8-图3.13 所示，图中位移 u_1 和 u_3 是沿 x 方向上的中心线分布的，而位移 u_2 是沿 y 方向上的中心线分布的。从图3.8-图3.13 可以看出：局部模型和等效模型计算得到的位移与全局模型计算得到的吻合很好；局部模型



(a)　(b)

图 3.7　夹芯结构的有限元网格 (a) 局部模型；(b) 等效模型

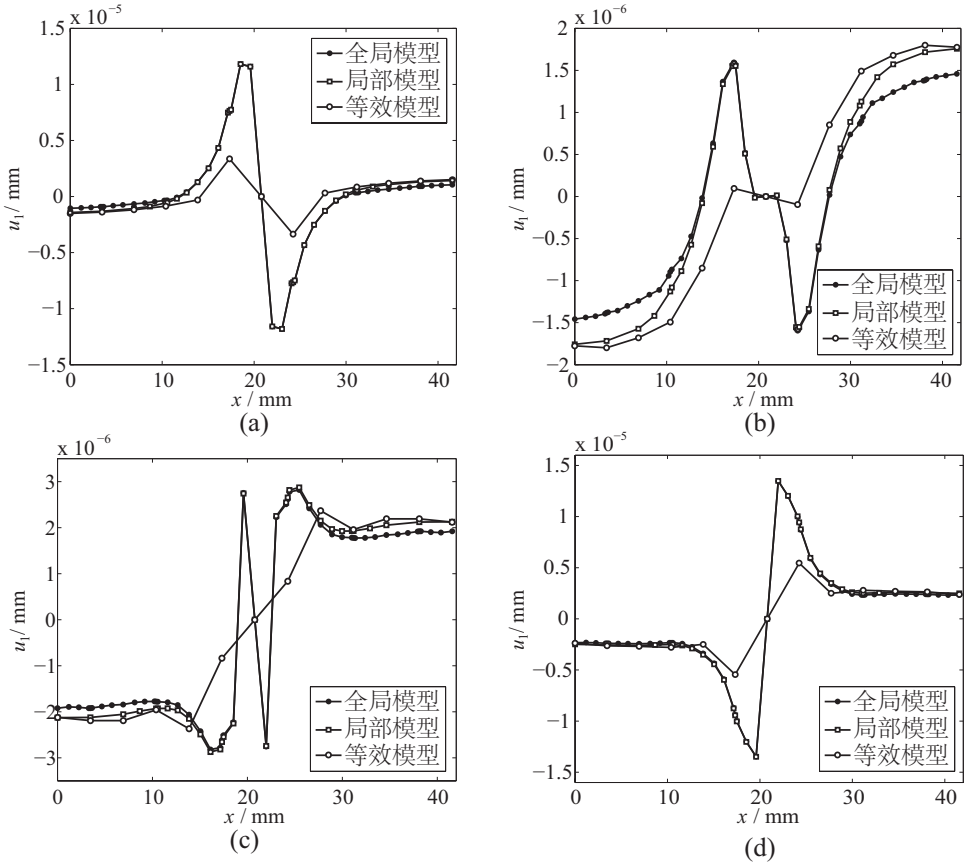


图 3.8　三种不同夹芯建模方法计算得到的上面板位移 u_1 的面内分布：(a) 下表面；(b) 第一和第二单层之间的界面；(c) 第二和第三单层之间的界面；(d) 上表面

在夹芯结构的整个区域都具有很好的精度，尤其是在集中载荷作用的局部区域，而等效模型只能在远离集中载荷的区域提供较高分析精度，因此，在集中载荷作用的局部问题中，局部模型的分析结果较之等效模型更为合理；由局部模型的特性和计算结果可知，在集中载荷区域局部模型的位移结果与全局模型的相一致，而在远离集中载荷的区域局部模型的位移计算结果则与等效模型的更为吻合；在蜂窝芯子被等效为横观各向同性材料的区域，局部模型和等效模型的上面板位移计算结果与全局模型计算结果之间的吻合程度要更好于下面板，由于集中载荷是垂直作用在上面板的，所以蜂窝夹芯等效对上面板分析结果的影响要小于下面板；在蜂窝芯子完全基于真实结构建模的区域，等效模型计算得到的下面板位移结果精度比上面板的更高，一个最重要的原因是集中载荷引起的局部效应在下面板表现更不明显。

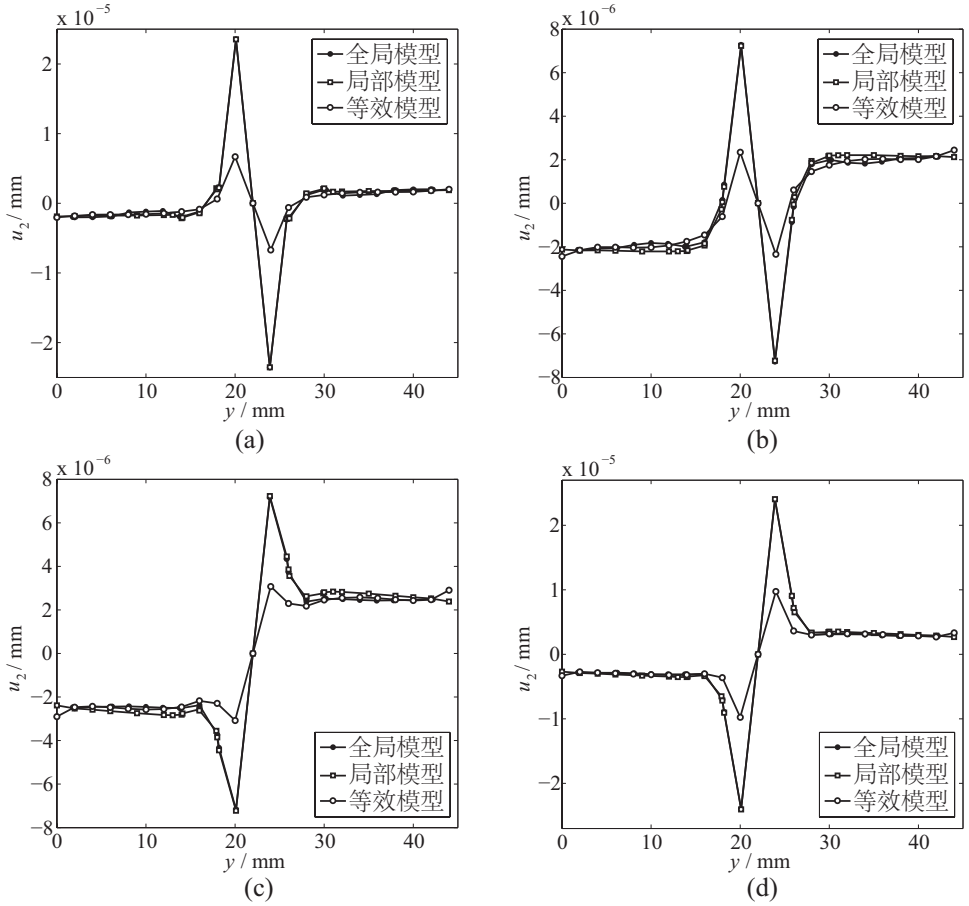


图 3.9　三种不同夹芯建模方法计算得到的上面板位移 u_2 的面内分布：(a) 下表面；(b) 第一和第二单层之间的界面；(c) 第二和第三单层之间的界面；(d) 上表面

三种不同建模方法计算得到的复合材料蜂窝夹芯结构面外和面内应力在载荷作用点上沿厚度方向的分布如图3.14和图3.15所示，从图中可以看出：在

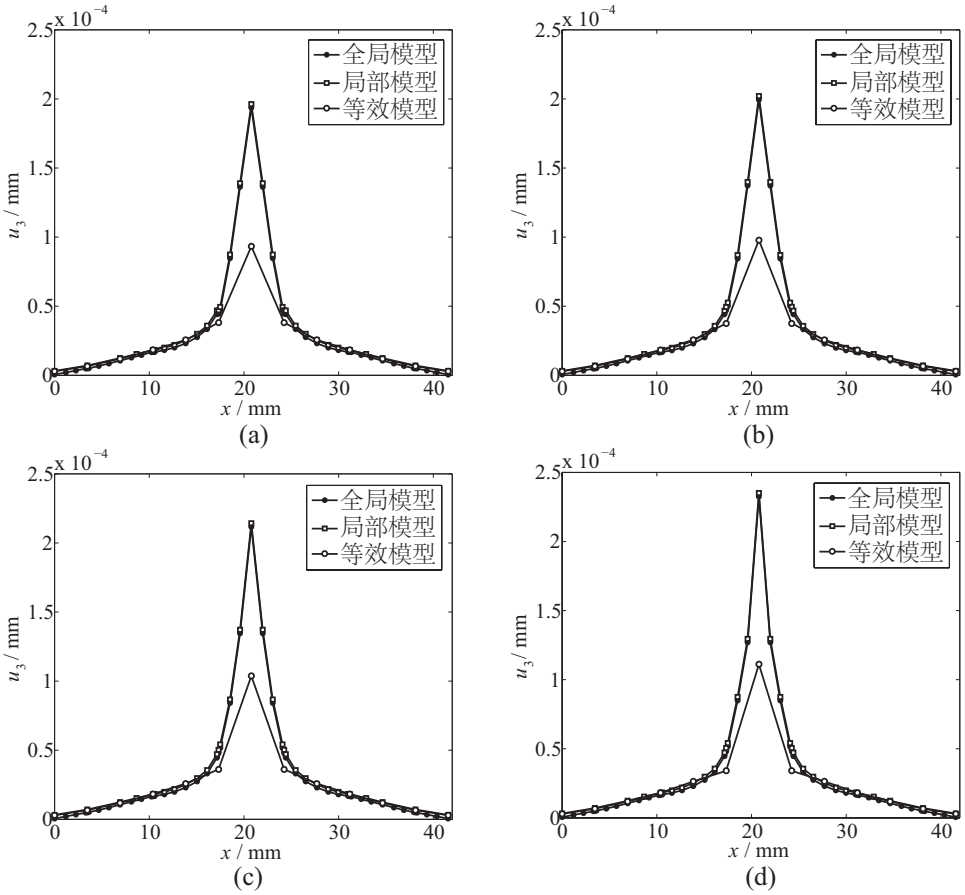


图 3.10　三种不同夹芯建模方法计算得到的上面板位移 u_3 的面内分布：(a) 下表面；(b) 第一和第二单层之间的界面；(c) 第二和第三单层之间的界面；(d) 上表面

上下面板的中心点处，局部模型计算得到的应力结果与全局模型的应力结果吻合很好，而且，局部模型计算得到的上面板的剪应力 σ_{12}、σ_{13} 和 σ_{23} 以及下面板剪应力 σ_{13} 与全局模型的保持一致；对于等效模型来说，只有正应力的计算结果与全局模型相吻合，因此，在集中载荷作用的问题中，等效模型不能得到合理的载荷作用局部区域的应力结果；与位移结果相似，局部模型和等效模型（尤其是局部模型）计算得到的上面板应力结果与全局模型的吻合程度要高于下面板应力结果。

三种不同建模方法计算得到的复合材料蜂窝夹芯结构前 6 阶固有频率见表3.5，从该表中可以看出，局部模型和等效模型的固有频率分析结果非常吻合，但两者的结果都与全局模型的结果有一定差别。与全局模型相比，局部模型和等效模型的分析误差主要来源于蜂窝芯子材料性能的等效算法。因为固有频率反映的是结构整体特性，所以局部模型和等效模型的固有频率分析结果吻合很好。

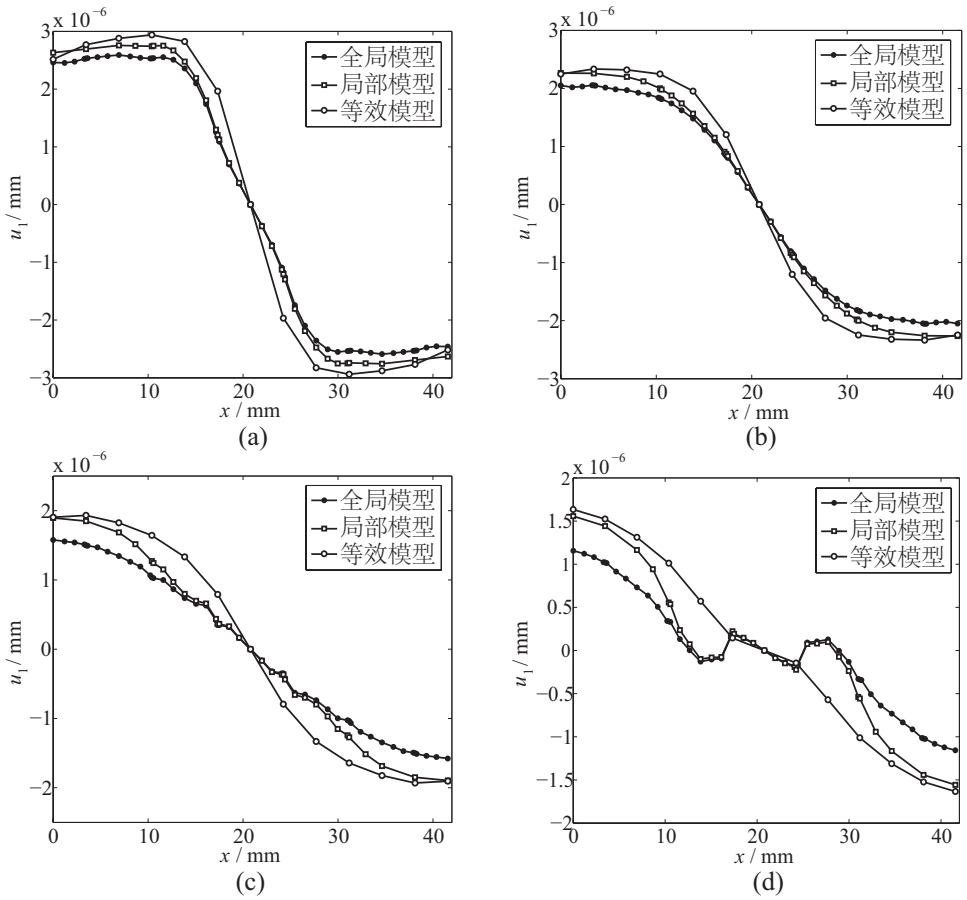


图 3.11　三种不同夹芯建模方法计算得到的下面板位移 u_1 的面内分布：(a) 下表面；(b) 第一和第二单层之间的界面；(c) 第二和第三单层之间的界面；(d) 上表面

表 3.5　LW/SE 法计算得到的复合材料蜂窝夹芯结构的前 6 阶固有频率

	阶次					
	1	2	3	4	5	6
全局模型	544.4556	864.0444	952.3632	1163.199	1255.012	1337.558
局部模型	500.2385	788.2661	863.6190	1069.856	1099.862	1150.257
等效模型	505.4335	807.5777	877.7303	1081.586	1177.806	1184.447

3.4.3　灵敏度分析半解析法和有限差分法的精度对比

在差分法中大的差分步长将引起较大的截断误差，而太小的差分步长将导致较大的舍入误差，本节的目的在于研究差分步长对 SAM 法和 FDM 法分析精度的影响，并为后面的算例确定合适的差分步长。对于板壳结构来说，FDM 方法的步长一般取 $10^{-3}\lambda$ 到 $10^{-5}\lambda$，而 SAM 方法则需要取小于 $10^{-5}\lambda$ 的步长[154,155]。本算例中蜂窝夹芯结构的几何尺寸和有限元网格与上面算例相同，见图3.4。边界条件为四边简支，上面板中心作用单位集中载荷，正六边形

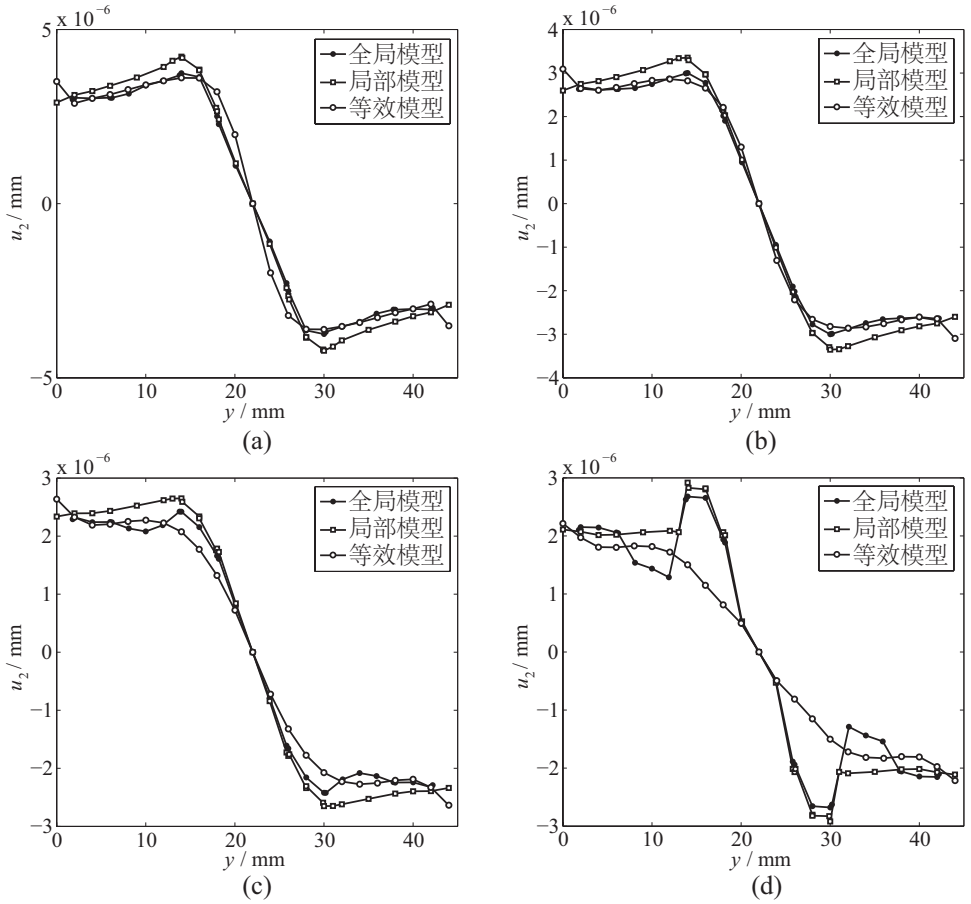


图 3.12　三种不同夹芯建模方法计算得到的下面板位移 u_2 的面内分布：(a) 下表面；(b) 第一和第二单层之间的界面；(c) 第二和第三单层之间的界面；(d) 上表面

蜂窝的几何尺寸见 3.4.1 节和图3.3。蜂窝芯子和上下面板的材料性能见表3.3，其铺层顺序为 [0/90/0]，各单层的厚度相同，总厚度为$t_s = 1$ mm。

上面板下表面位移 u_3 的最大灵敏度系数和固频率灵敏度系数随 SAM 和 FDM 差分步长的收敛情况分别见表3.6和表3.7，括号中为根据式 (3-37) 计算得到的误差。表中 $\Delta\lambda^{\mathrm{eq}} = \Delta\lambda/\lambda$ 定义为等效步长，$\Delta\lambda$ 为真实差分步长。从表3.6和表3.7 可以看出，对于材料参数设计变量 E_{11} 和几何形状设计变量t_{c} 来说，SAM 和 FDM 计算得到的灵敏度系数都随差分步长减小而收敛，而 FDM 的收敛速度更快，也就是说 FDM 所要求的差分步长要大于 SAM。位移灵敏度系数的收敛速度要大于自由振动灵敏度系数的收敛速度，夹芯结构三种不同建模方法的灵敏度分析收敛速度几乎一致。综上分析，为了保证灵敏度分析的精度高于 0.01%，本文后面算例中 FDM 灵敏度分析的步长取为 $10^{-4}\lambda$ 到 $10^{-5}\lambda$，SAM 的步长取 $10^{-5}\lambda$。虽然 FDM 程序实现简单，且具有很高的收敛速度，但 SAM 的计算成本约为 FDM 的一半，且在小步长情况下 SAM 也能得到精确的灵敏

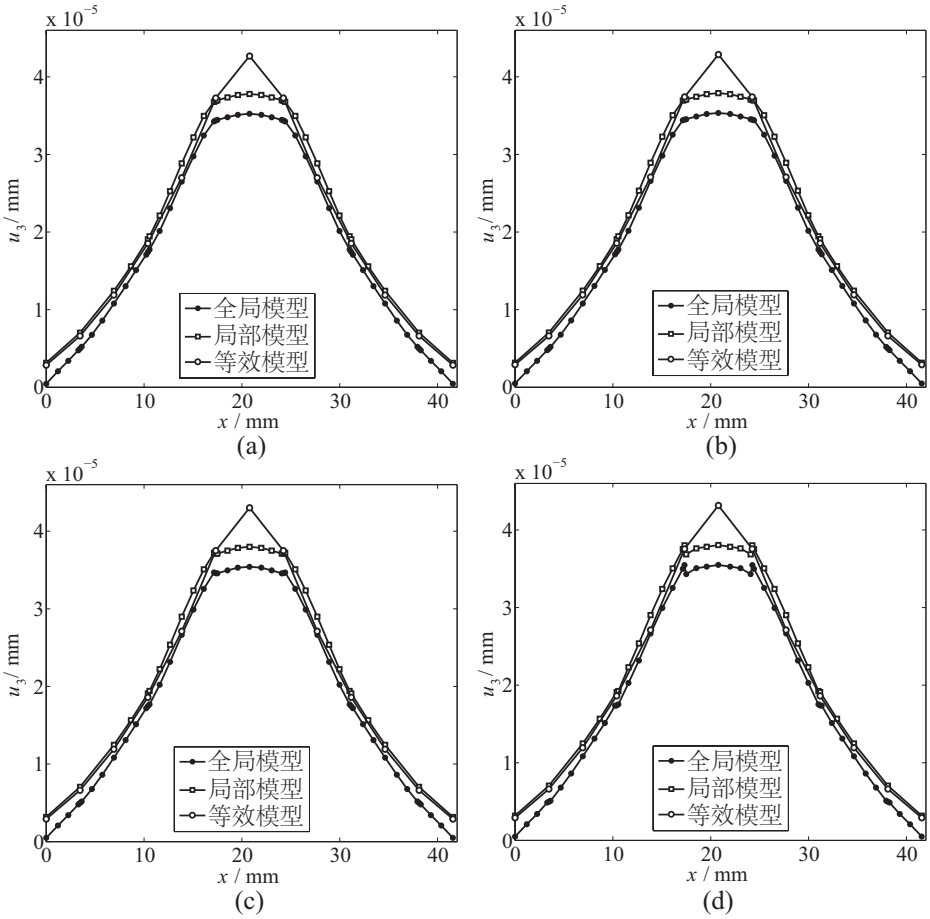


图 3.13　三种不同夹芯建模方法计算得到的下面板位移 u_3 的面内分布：(a) 下表面；(b) 第一和第二单层之间的界面；(c) 第二和第三单层之间的界面；(d) 上表面

度系数。故本文下面的算例将采用步长为 $10^{-5}\lambda$ 的 SAM 法进行复合材料蜂窝夹芯结构的静力和固有频率的灵敏度分析。

从表3.6和表3.7可以看出，当 SAM 和 FDM 的差分步长减小一个数量级时，位移和固有频率灵敏度系数的相对误差也大约下降一个数量级。表3.6和表3.7中的相对误差定义为

$$e_{\text{relative}} = e_{\text{truncation}} + e_{\text{roundoff}} = \left[\left(\frac{\Delta f}{\Delta\lambda^{\text{eq}}\cdot\lambda} - \frac{\partial f}{\partial\lambda}\right)/\frac{\partial f}{\partial\lambda}\right]\times 100 \tag{3-37}$$

式中，f 表示响应量，例如位移和固有频率。在此，$\partial f/\partial\lambda$ 是 SAM 和 FDM 以 10^{-7} 为步长计算得到的灵敏度系数。将响应量 f 以泰勒级数展开，并保留二次项，则设计变量的增量 $\Delta\lambda$ 导致的响应增量为

$$\Delta f(\lambda) = \frac{\partial f}{\partial\lambda}\Delta\lambda + O\left(\Delta\lambda^2\right) \tag{3-38}$$

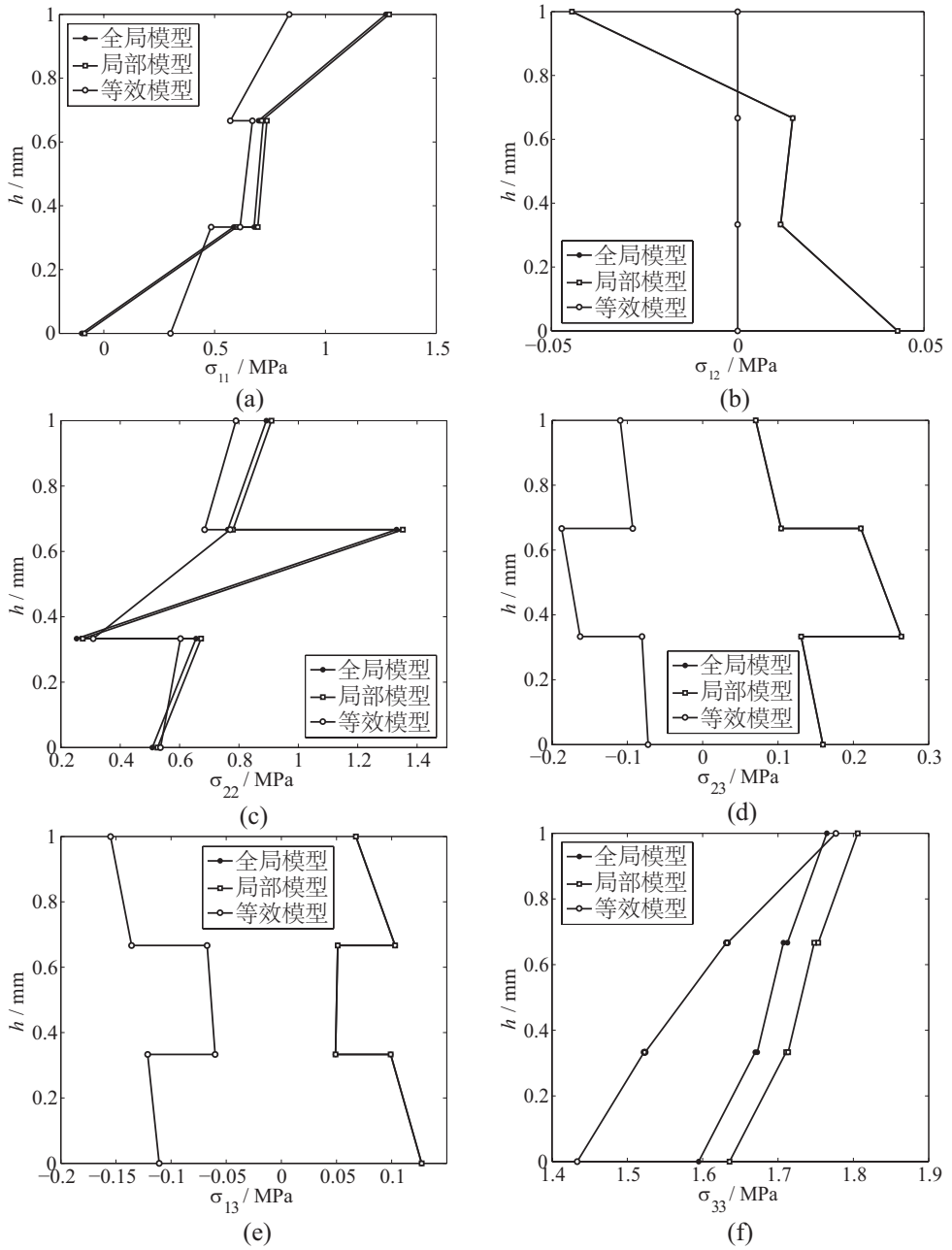


图 3.14　三种不同夹芯建模方法计算得到的上面板应力最大最沿厚度的分布：(a) σ_{11}；(b) σ_{22}；(c) σ_{33}；(d)σ_{12}；(e) σ_{13}；(f) σ_{23}

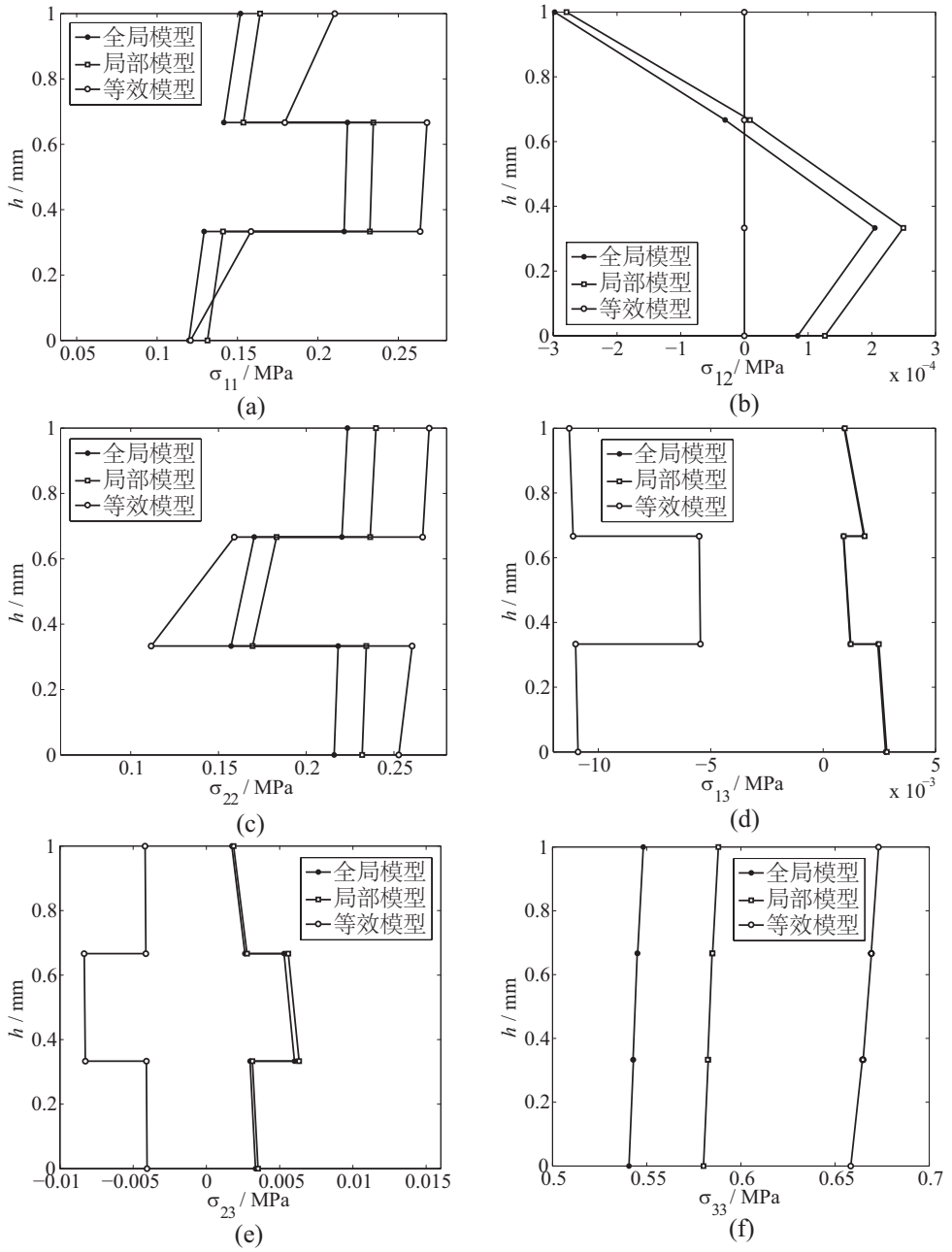


图 3.15　三种不同夹芯建模方法计算得到的下面板应力最大最沿厚度的分布：(a) σ_{11}；(b) σ_{22}；(c) σ_{33}；(d)σ_{12}；(e) σ_{13}；(f) σ_{23}

表 3.6　上面板下表面位移 u_3 的最大灵敏度系数随 SAM 和 FDM 差分步长的收敛情况

λ	$\Delta\lambda^{\mathrm{eq}}$	全模型		局部等效模型		等效模型	
		SAM	FDM	SAM	FDM	SAM	FDM
E_{11} $/10^{-10}$	10^{-1}	-1.76121	-1.82415	-1.77361	-1.83707	-0.47400	-0.49043
		(-9.0758)	(-5.8265)	(-9.0760)	(-5.8227)	(-9.1083)	(-5.9578)
	10^{-2}	-1.91787	-1.92499	-1.93137	-1.93856	-0.51632	-0.51818
		(-0.9881)	(-0.6205)	(-0.9884)	(-0.6198)	(-0.9933)	(-0.6366)
	10^{-3}	-1.93508	-1.93580	-1.94871	-1.94943	-0.52097	-0.52116
		(-0.0996)	(-0.0625)	(-0.0995)	(-0.0625)	(-0.1016)	(-0.0652)
	10^{-4}	-1.93682	-1.93689	-1.95046	-1.95053	-0.52144	-0.52146
		(-0.0098)	(-0.0062)	(-0.0097)	(-0.0062)	(-0.0115)	(-0.0077)
	10^{-5}	-1.93699	-1.93700	-1.95063	-1.95064	-0.52149	-0.52149
		(-0.0010)	(-0.0005)	(-0.0010)	(-0.0005)	(-0.0019)	(-0.0019)
	10^{-6}	-1.93701	-1.93701	-1.95065	-1.95065	-0.52150	-0.52150
		(-0.0000)	(-0.0000)	(-0.0000)	(-0.0000)	(-0.0000)	(-0.0000)
	10^{-7}	-1.93701	-1.93701	-1.95065	-1.95065	-0.52150	-0.52150
t $/10^{-4}$	10^{-1}	-2.89238	-2.43896	-2.92133	-2.46241	-0.67531	-0.59954
		(5.7171)	(-10.8554)	(5.7805)	(-10.8368)	(6.8309)	(-5.1556)
	10^{-2}	-2.75300	-2.70317	-2.77908	-2.72865	-0.63684	-0.62870
		(0.6228)	(-1.1985)	(0.6297)	(-1.1964)	(0.7451)	(-0.5426)
	10^{-3}	-2.73768	-2.73265	-2.76344	-2.75835	-0.63261	-0.63179
		(0.0629)	(-0.1210)	(0.0634)	(-0.1209)	(0.0759)	(-0.0538)
	10^{-4}	-2.73613	-2.73563	-2.76186	-2.76136	-0.63218	-0.63210
		(0.0062)	(-0.0121)	(0.0062)	(-0.0119)	(0.0079)	(-0.0047)
	10^{-5}	-2.73598	-2.73593	-2.76171	-2.76166	-0.63214	-0.63213
		(0.0007)	(-0.0011)	(0.0007)	(-0.0011)	(0.0016)	(-0.0000)
	10^{-6}	-2.73596	-2.73596	-2.76169	-2.76169	-0.63213	-0.63213
		(0.0000)	(-0.0000)	(0.0000)	(-0.0000)	(0.0000)	(0.0000)
	10^{-7}	-2.73596	-2.73596	-2.76169	-2.76169	-0.63213	-0.63213

将式 (3-38) 代入 (3-37)，可得到截断误差和差分步长之间的关系

$$e_{\mathrm{truncation}} = \left[\frac{(\partial f/\partial\lambda)\Delta\lambda + O\left(\Delta\lambda^2\right)}{\Delta\lambda} - \frac{\partial f}{\partial\lambda}\right] / \frac{\partial f}{\partial\lambda} = O(\Delta\lambda) / \frac{\partial f}{\partial\lambda} \tag{3-39}$$

式 (3-39) 两边取对数

$$\log e_{\mathrm{truncation}} = \log\left[O(\Delta\lambda)\right] - \log\frac{\partial f}{\partial\lambda} \tag{3-40}$$

表 3.7　第一阶固有频率灵敏度系数随 SAM 和 FDM 差分步长的收敛情况

λ	$\Delta\lambda^{\mathrm{eq}}$	全模型		局部等效模型		等效模型	
		SAM	FDM	SAM	FDM	SAM	FDM
E_{11} /10^{-4}	10^{-1}	3.06064	3.19136	2.52667	2.62983	2.47001	2.56813
		(-9.0805)	(-5.1974)	(-9.0812)	(-5.3688)	(-9.0825)	(-5.4709)
	10^{-2}	3.33303	3.34782	2.75155	2.76325	2.68987	2.70101
		(-0.9889)	(-0.5496)	(-0.9892)	(-0.5678)	(-0.9898)	(-0.5797)
	10^{-3}	3.36296	3.36445	2.77626	2.77745	2.71403	2.71516
		(-0.0998)	(-0.0556)	(-0.1000)	(-0.0569)	(-0.1005)	(-0.0589)
	10^{-4}	3.36598	3.36613	2.77876	2.77887	2.71647	2.71658
		(-0.0101)	(-0.0056)	(-0.0101)	(-0.0058)	(-0.0107)	(-0.0066)
	10^{-5}	3.36628	3.36630	2.77901	2.77902	2.71671	2.71672
		(-0.0012)	(-0.0006)	(-0.0011)	(-0.0004)	(-0.0018)	(-0.0015)
	10^{-6}	3.36631	3.36631	2.77903	2.77903	2.71674	2.71674
		(-0.0002)	(-0.0002)	(-0.0004)	(-0.0000)	(-0.0007)	(-0.0007)
	10^{-7}	3.36632	3.36632	2.77904	2.77903	2.71676	2.71676
t /10^{1}	10^{-1}	-3.51881	-5.84714	-1.44663	-3.57559	-1.16951	-3.23939
		(-43.283)	(-5.7535)	(-61.325)	(-4.4075)	(-65.318)	(-3.9350)
	10^{-2}	-5.91165	-6.16783	-3.49061	-3.72445	-3.13221	-3.35961
		(-4.7140)	(-0.5845)	(-6.6789)	(-0.4278)	(-7.1137)	(-0.3698)
	10^{-3}	-6.17460	-6.20048	-3.71523	-3.73884	-3.34789	-3.37086
		(-0.4757	(-0.0582)	(-0.6737)	(-0.0430)	(-0.7177)	(-0.0362)
	10^{-4}	-6.20116	-6.20375	-3.73791	-3.74027	-3.36967	-3.37197
		(-0.0475)	(-0.0055)	(-0.0674)	(-0.0048)	(-0.0718)	(-0.0033)
	10^{-5}	-6.20382	-6.20408	-3.74018	-3.74042	-3.37185	-3.37208
		(-0.0047)	(-0.0002)	(-0.0067)	(-0.0008)	(-0.0071)	(-0.0000)
	10^{-6}	-6.20408	-6.20412	-3.74041	-3.74043	-3.37207	-3.37209
		(-0.0005)	(0.0005)	(-0.0005)	(-0.0005)	(-0.0006)	(0.0003)
	10^{-7}	-6.20411	-6.20409	-3.74043	-3.74045	-3.37209	-3.37208

考虑 $\Delta\lambda^{\mathrm{eq}} = {}^{\Delta\lambda}/_{\lambda}$，有

$$\log e_{\mathrm{truncation}} = \log\left[O\left(\Delta\lambda^{\mathrm{eq}}\right)\right] + \log\lambda - \log\frac{\partial f}{\partial\lambda} \tag{3-41}$$

从式 (3-41) 可以看出，对数相对截断误差 $\log e_{\mathrm{truncation}}$ 与等效对数步长 $\log[\Delta\lambda^{\mathrm{eq}}]$ 是线性关系，且线性曲线的斜率为 1。位移和基频关于 E_{11} 灵敏度系数的 $\log e_{\mathrm{relative}} - \log[\Delta\lambda^{\mathrm{eq}}]$ 曲线如图3.16所示，当步长 $\Delta\lambda > 10^{-4}$ 时，对数相对误差 $\log e_{\mathrm{relative}}$ 与等效对数步长 $\log[\Delta\lambda^{\mathrm{eq}}]$ 具有很好的线性关系，且曲线的斜率为 1。因为当差分步长较大时截断误差占主导地位，所以表3.6和3.7中的误

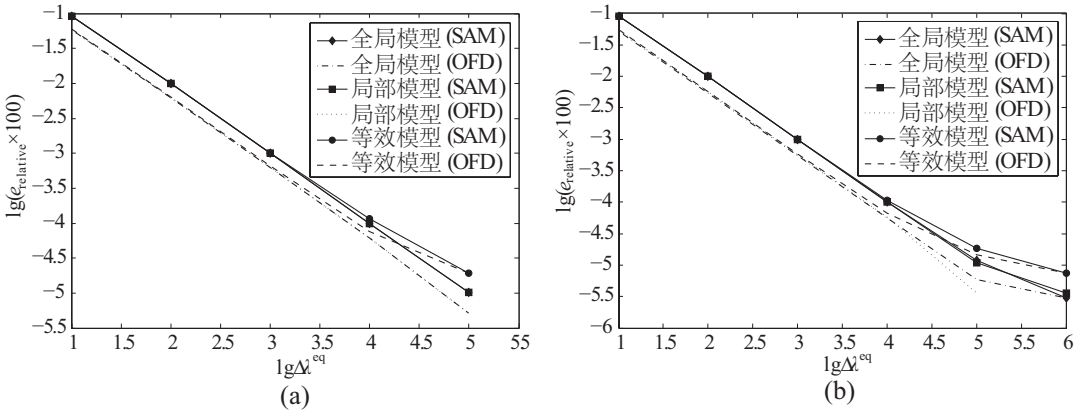


图 3.16　对数相对误差与等效对数步长的关系曲线：(a) 位移灵敏度系数；(b) 基频灵敏度系数

差收敛情况与式 (3-41) 中给出的理论收敛情况相一致，当步长 $\Delta\lambda > 10^{-5}$ 时，随着舍入误差的增加，$\log e_{\text{relative}} - \log[\Delta\lambda^{\text{eq}}]$ 曲线的斜率减小，如图3.16所示。

3.4.4　三种芯子结构建模方法的灵敏度分析方面对比

从表3.6和表3.7可以看出，对于面板材料参数 E_{11} 和形状参数 t_s 的位移灵敏度系数来说，全局模型和局部模型两者的计算结果非常接近，但与等效模型的计算结果存在明显差别。对于固有频率灵敏度系数来说，局部模型和等效模型两者的计算结果吻合很好，但与全局模型的计算结果存在明显差别。上一节研究三种夹芯结构建模方法在静动力响应分析方面的特点时也得到了相似的结论，所以本节将对三种夹芯结构建模方法在静动力灵敏度分析方面的特点进行详细对比研究。本节研究的复合材料蜂窝夹芯结构的几何尺寸、材料参数以及边界条件与上节中的相同。

三种建模方法计算得到的上面板关于 E_{11} 的位移灵敏度系数沿中心线的分布如图3.17所示，面内的分布如图3.18所示，从图3.17和图3.18中可以看出，与等效模型相比较，局部模型计算得到的整个上面板位移灵敏度系数具有更高的精度，尤其是在集中载荷作用的附近区域和面板的上下表面。在远离集中载荷作用的区域，等效模型计算得到的位移灵敏度系数与全局模型的计算结果吻合很好，然而等效模型在集中载荷作用区域得不到正确的灵敏度分析结果。

三种建模方法计算得到的下面板关于 E_{11} 的位移灵敏度系数沿中心线的分布如图3.19所示，面内的分布如图3.20所示，从图3.19和3.20中可以看出，对于下面板位移 u_1 和 u_2 的灵敏度系数，局部模型和等效模型计算得到的与全局模型计算得到的结果吻合很好，尤其是在集中载荷作用的周围区域。对于位

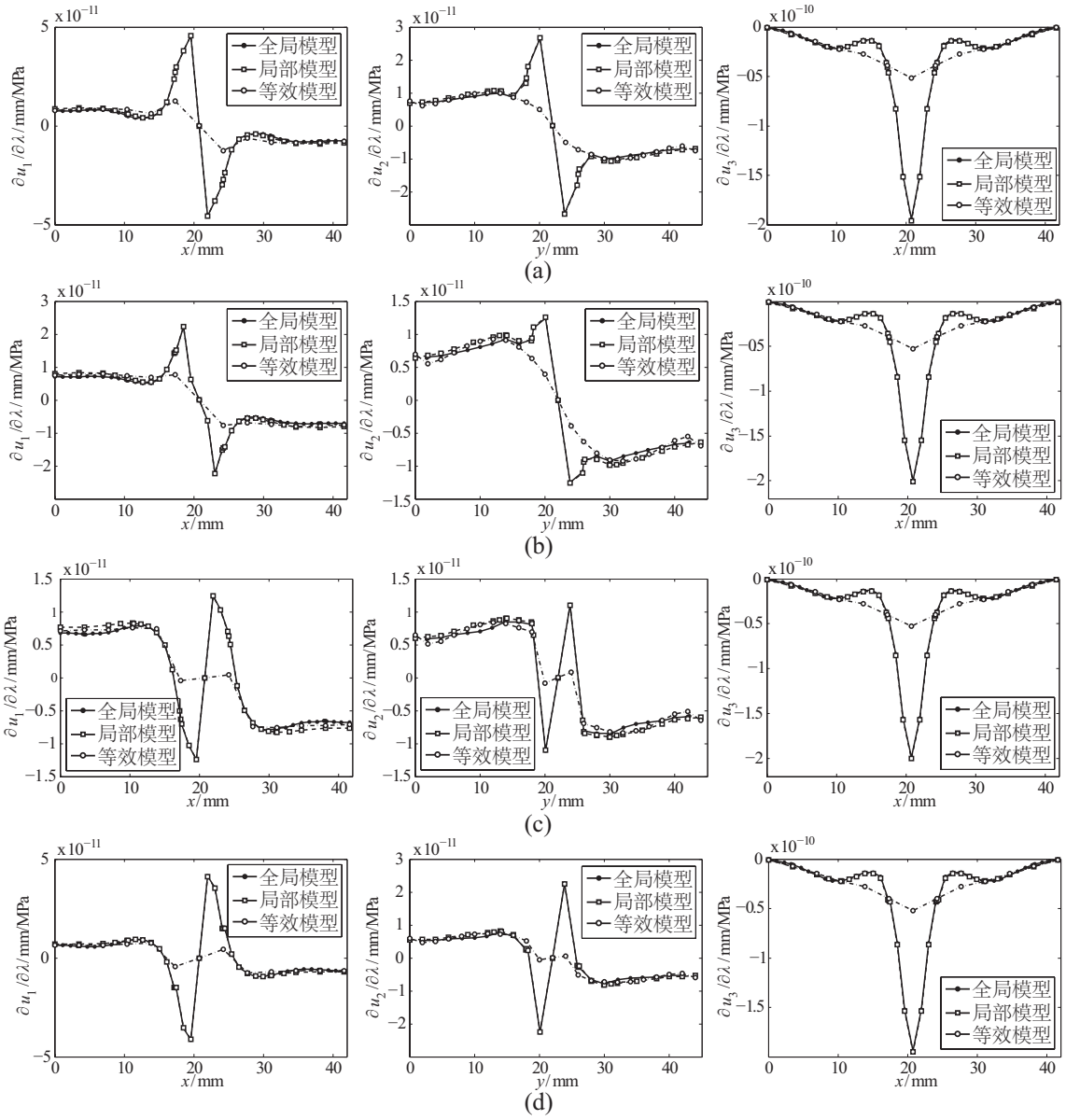


图 3.17　三种建模方法计算得到的上面板关于 E_{11} 的位移灵敏度系数沿中心线的分布：(a) 上表面；(b) 第一和第二单层之间界面；(c) 第二和第三单层之间界面；(d) 下表面

移 u_3 的灵敏度系数，在整个问题域中局部模型的计算结果与全局模型的吻合很好。虽然，在远离集中载荷作用的区域，等效模型计算得到的位移u_3 的灵敏度系数与全局模型的计算结果相吻合，但不能准确地得到下面板与上面板集中载荷作用区域中位移 u_3 的灵敏度系数。蜂窝夹芯将作用于上面板的集中载荷分散地传递给了下面板，集中载荷在下面板引起的局部效应要远小于上面板。因此，在与上面板集中载荷作用对应的区域中，等效模型计算得到的下面板灵敏度系数的精度要高于上面板。

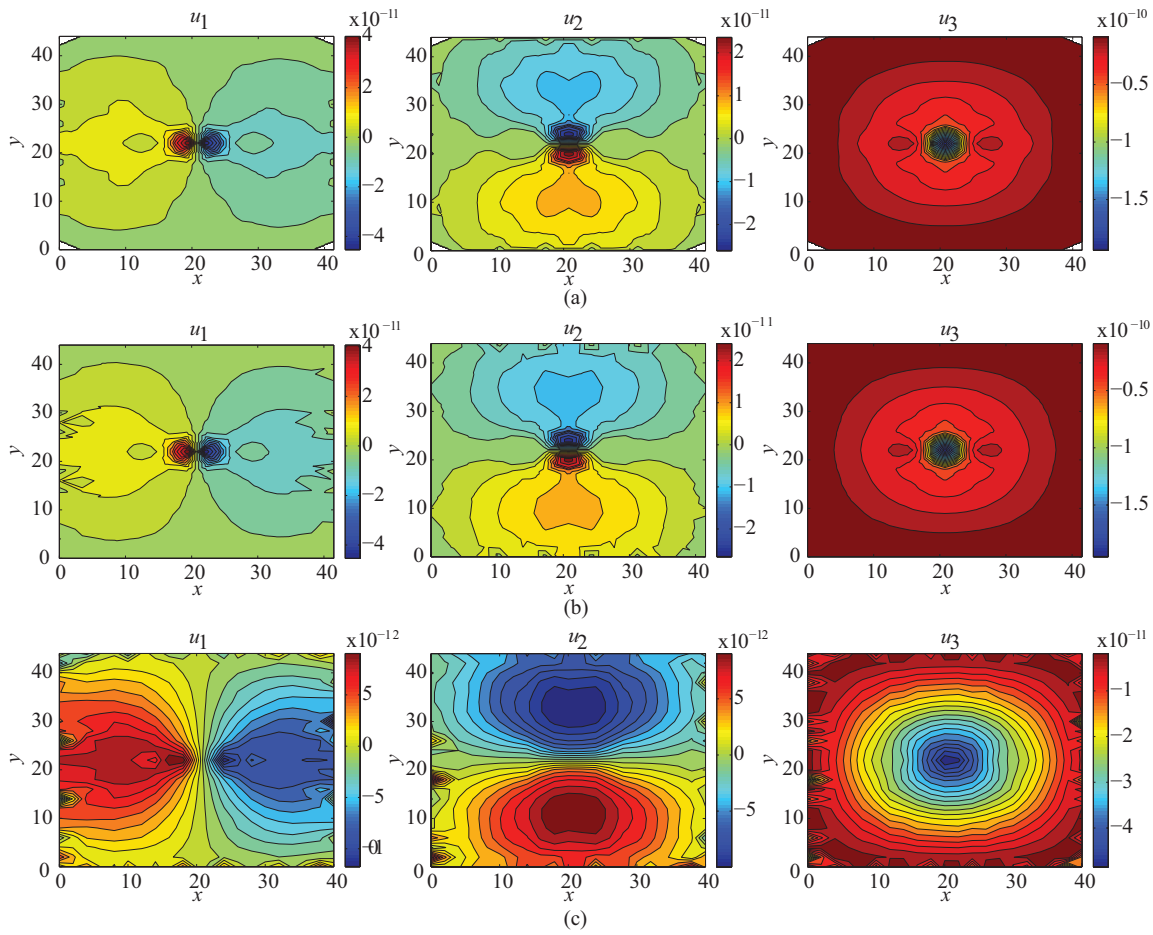


图 3.18　三种夹芯结构建模方法计算得到的关于 E_{11} 的上面板位移灵敏度系数在面内的分布：(a) 全局模型；(b) 局部模型；(c) 等效模型

在 xy平面内，上面板集中载荷作用区域附近的位移u_1 和u_2 对 E_{11} 最灵敏，而位移 u_3 的最大灵敏度系数出现在上面板的中心点处。在 xy平面内，下面板的位移u_1在边缘附近处($x=0,42\,\text{mm}$，$y=0\,\text{mm}$) 对 E_{11} 最灵敏，位移u_2在边缘附近处($x=0\,\text{mm}$，$y=15,30\,\text{mm}$) 对 E_{11} 最灵敏，而位移u_3 的最大灵敏度系数出现在上面板的中心点处。位移灵敏度系数在上面板上的集中程度要明显强于下面板。另外，基于全局模型和局部模型的灵敏度分析方法都可以精确模拟位移灵敏度系数的集中现象，但基于局部模型的灵敏度分析方法的计算量要小很多。

关于 E_{11} 的蜂窝芯子结构最大位移灵敏度系数沿厚度方向分布情况见表3.8，表中z 是蜂窝夹芯厚度方向上的坐标，$z=1\,\text{mm}$ 表示芯子的下表面；$z=7\,\text{mm}$ 表示芯子的上表面。局部模型计算得到的蜂窝芯子结构位移灵敏度系数与全局模型的吻合较好，但等效模型的位移灵敏度系数计算结果误差很大。位移 u_1 和 u_3 的灵敏度系数随着 z 坐标靠近上面板而增加，而位移 u_2 的灵敏度系数

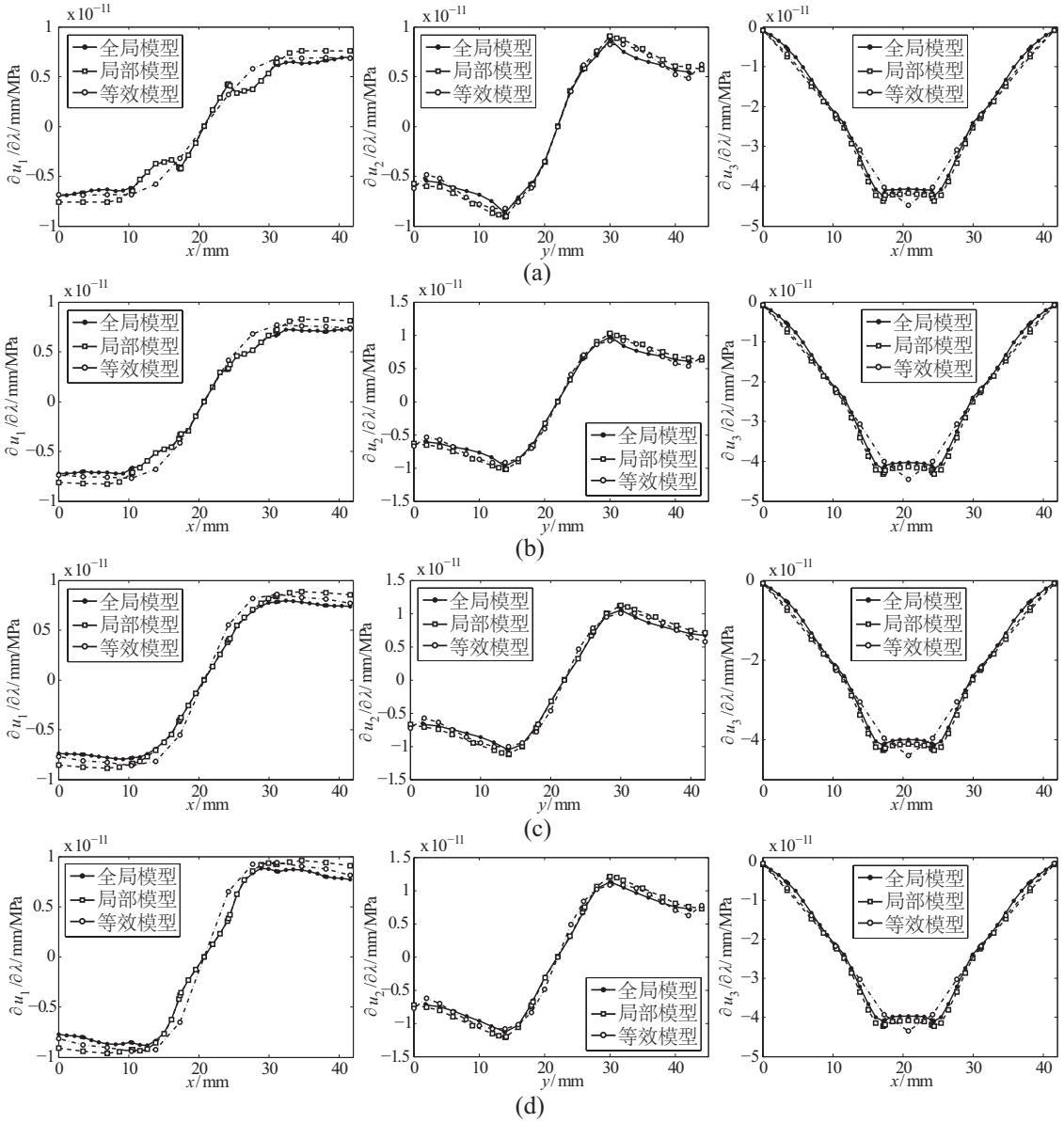


图 3.19　三种建模方法计算得到的下面板关于 E_{11} 的位移灵敏度系数沿中心线的分布：(a) 上表面；(b) 第一和第二单层之间界面；(c) 第二和第三单层之间界面；(d) 下表面

则是先减小后增加。

三种夹芯结构建模方法计算得到的关于 E_{11} 的前 6 阶固有频率灵敏度系数见表3.9，前 4 阶振型如图3.21所示，其它高阶振型见文献[156]，局部模型和等效模型计算得到的前 4 阶固有频率灵敏度系数吻合很好，但与全局模型的计算结果有一定差别。与全局模型相比，局部模型和等效模型的误差主要来源于蜂窝芯子材料性能参数的等效算法。因为固有频率反映的是结构整体特性，所以局部模型和等效模型的固有频率分析结果吻合很好，尤其是低阶固

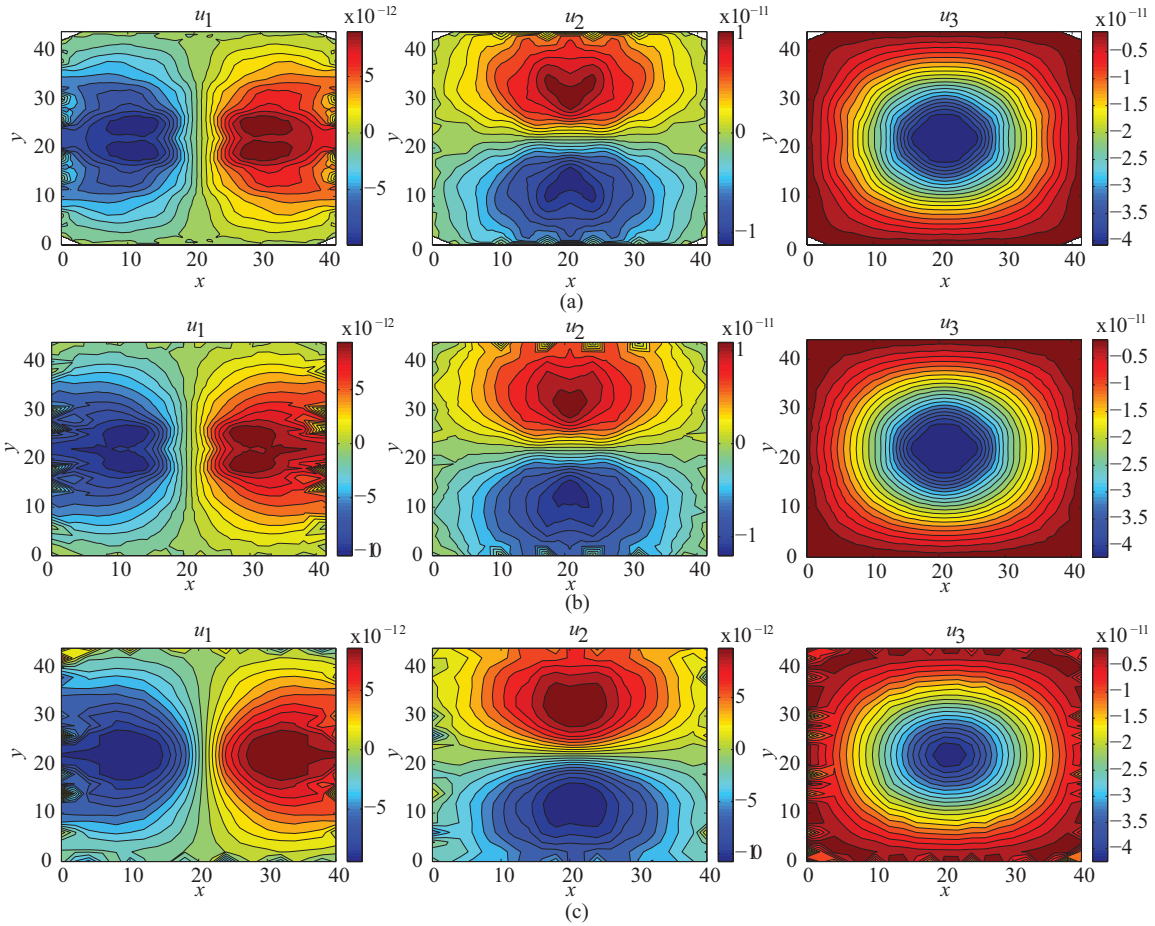


图 3.20　三种夹芯结构建模方法计算得到的关于 E_{11} 的下面板位移灵敏度系数在面内的分布：(a) 全局模型；(b) 局部模型；(c) 等效模型

有频率的灵敏度系数，但是由于蜂窝芯子的局部模型和等效模型在结构外形上与真实情况有差别，所以它们的计算结果与全局模型的计算结果有一定差别。这些现象与利用三种夹芯结构建模方法进行固有频率的分析时的现象相类似。即便如此，基于局部模型的复合材料蜂窝夹芯结构灵敏度分析方法仍然可以用来研究设计变量对低阶固有频率的影响规律，进而找到影响复合材料蜂窝夹芯结构自由振动特性的主要设计变量。

对于中心局部软化了的复合材料蜂窝夹芯结构 (软化处理区域如图3.22所示)，三种夹芯结构建模方法计算得到的关于 E_{11} 的前 6 阶固有频率灵敏度系数见表3.10，前 4 阶振型如图3.23所示，其它高阶振型见文献[156]，蜂窝芯子软化区域的杨氏模量为 68GPa，比其它区域小一个数量级，泊松比为 0.3。表3.10中最后一行为等效模型的固有频率阶次，而第二行为全局模型和局部模型的固有频率阶次。从表3.10中可以看出，局部模型和等效模型计算得到的前 6 阶固有频率灵敏度系数吻合很好，但与全局模型的计算结果有一定差别，但是全

表 3.8　三种夹芯结构建模方法计算得到的关于 E_{11} 的蜂窝芯子结构最大位移灵敏度系数

		z			
		1 mm	3 mm	5 mm	7 mm
全局模型	$u_1/10^{-11}$	0.75692	0.32172	0.43094	1.51222
	$u_2/10^{-12}$	8.69463	3.37981	2.14438	7.77873
	$u_3/10^{-11}$	-4.24945	-4.47298	-4.59915	-5.09848
局部模型	$u_1/10^{-11}$	0.78309	0.33220	0.43016	1.50762
		(3.4574)	(3.2575)	(-0.1810)	(-0.3042)
	$u_2/10^{-12}$	9.06572	3.46426	2.25052	8.16983
		(4.2680)	(2.4987)	(4.9497)	(5.0278)
	$u_3/10^{-11}$	-4.38066	-4.61116	-4.73573	-5.23593
		(3.0877)	(3.0892)	(2.9697)	(2.6959)
等效模型	$u_1/10^{-11}$	0.69160	0.26907	0.32113	0.76601
		(-8.6297)	(-16.3652)	(-25.4815)	(-49.3453)
	$u_2/10^{-12}$	8.23659	2.96975	2.45738	7.43040
		(-5.2681)	(-12.1326)	(14.5963)	(-4.4780)
	$u_3/10^{-11}$	-4.48391	-4.53479	-4.67936	-5.21490
		(5.5174)	(1.3819)	(1.7440)	(2.2834)

表 3.9　三种夹芯结构建模方法计算得到的关于 E_{11} 的前 6 阶固有频率灵敏度系数

	阶次					
	1	2	3	4	5	6
全局模型 $/10^{-4}$	3.36663	4.14847	4.61409	4.80562	4.05717	19.7201
局部模型 $/10^{-4}$	2.77901	3.28245	3.64119	3.76377	14.8161	3.56667
等效模型 $/10^{-4}$	2.71671	3.27316	3.45857	3.59546	17.8018	3.40357

表 3.10　三种夹芯结构建模方法计算得到的关于 E_{11} 的前 6 阶固有频率灵敏度系数（复合材料蜂窝夹芯结构中心进行了局部软化）

	阶次					
	1	2	3	4	5	6
全局模型 $/10^{-4}$	3.07784	2.86370	4.50614	4.19115	4.19764	6.39982
局部模型 $/10^{-4}$	2.63569	2.39511	3.68864	3.48583	3.47933	5.55841
等效模型 $/10^{-4}$	2.49900 1	2.33672 3	3.47081 5	2.93273 12	3.30624 19	4.80621 30

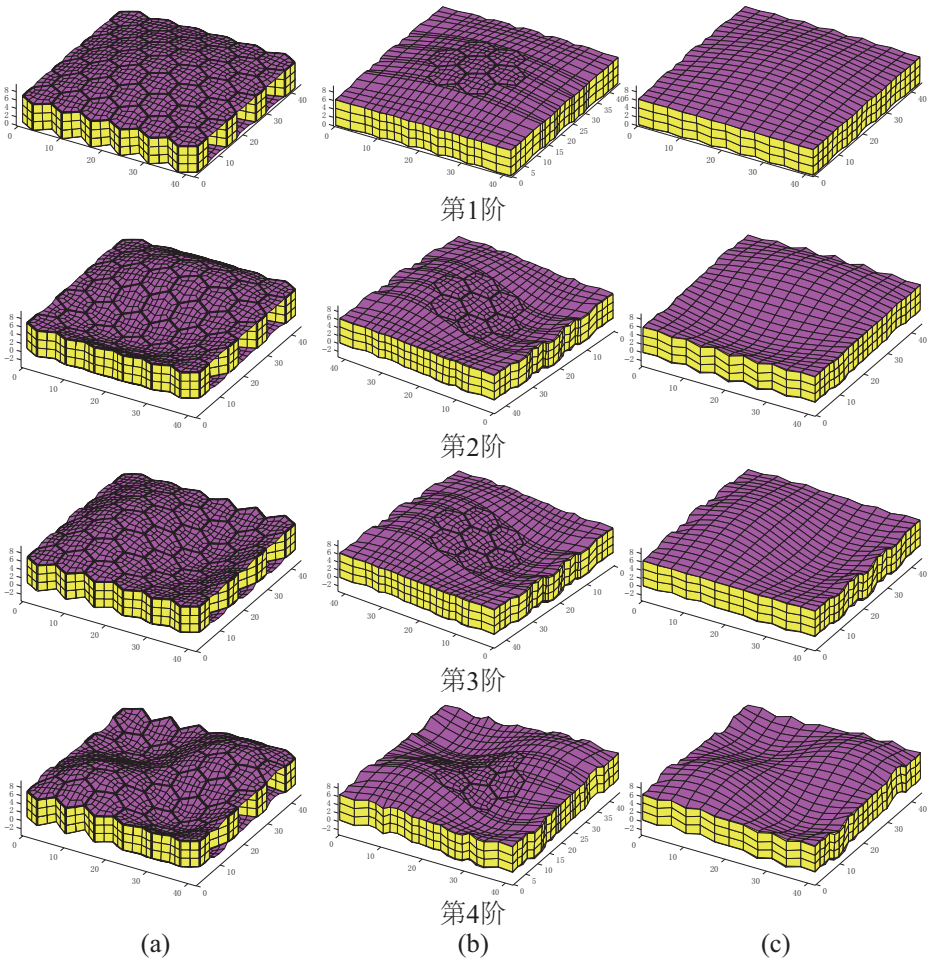


图 3.21　三种夹芯结构建模方法计算得到的复合材料蜂窝夹芯结构的前 4 阶振型：(a) 全局模型；(b) 局部模型；(c) 等效模型

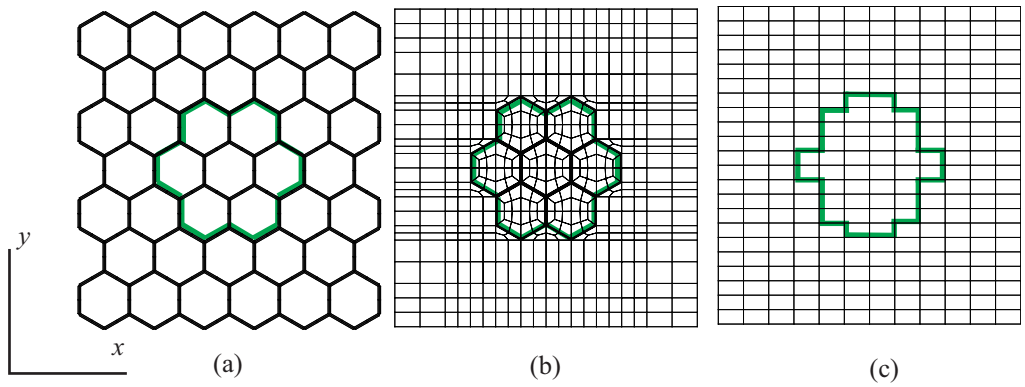


图 3.22　中心局部软化了的复合材料蜂窝夹芯结构的三种建模方法的有限元网格：(a) 全局模型；(b) 局部模型；(c) 等效模型

局模型与局部和等效模型计算结果之间的差别要比正常蜂窝芯子情况更小。另外，由于局部软化的存在前 8 阶振型中出现了一些局部振型。

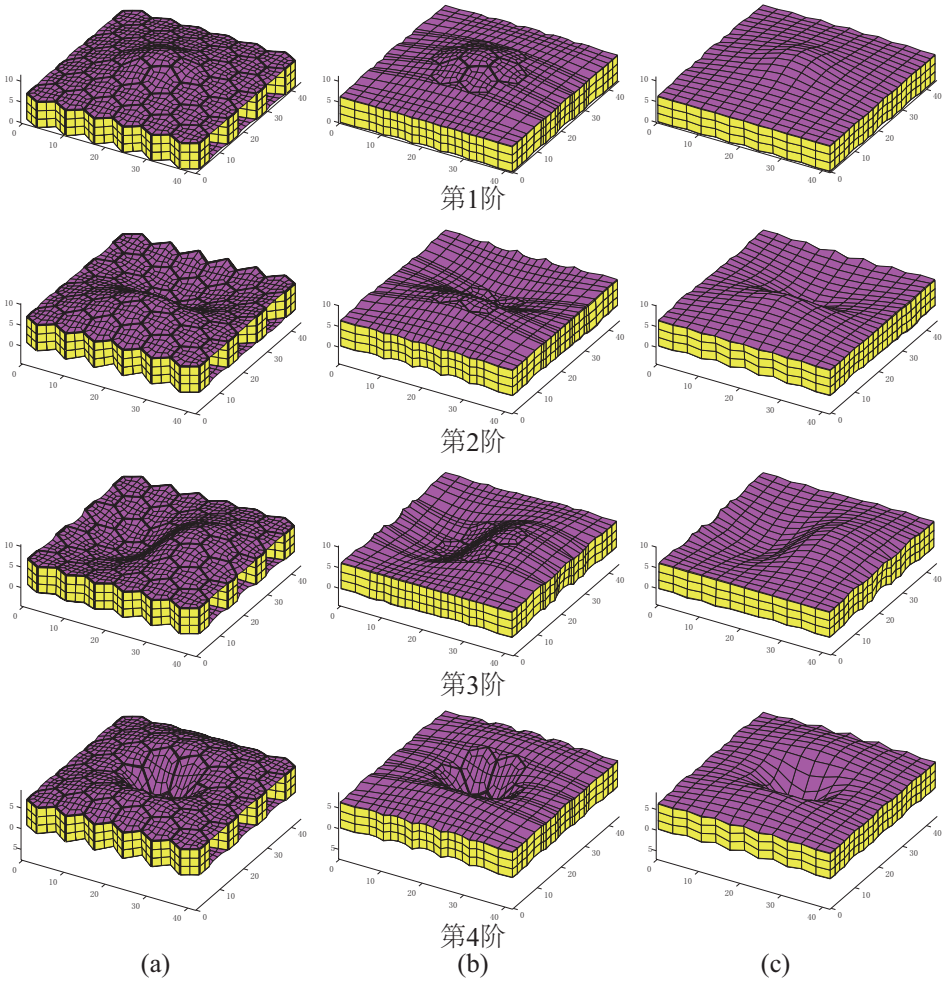


图 3.23　三种夹芯结构建模方法计算得到的复合材料蜂窝夹芯结构的前 4 阶振型（复合材料蜂窝夹芯结构中心进行了局部软化）：(a) 全局模型；(b) 局部模型；(c) 等效模型

3.5　本章小结

本章基于逐层理论和三维实体有限单元建立了复合材料夹芯层合结构的逐层/实体元方法，利用逐层理论建立上下面板的控制方程，利用三维实体有限元单元建立芯子的控制方程，然后基于面板和芯子之间的位移连续性条件和内力平衡条件得到复合材料夹芯结构的总体控制方程。数值算例中逐层/实体元方法计算得到复合材料蜂窝夹芯层合结构的静力和自由振动响应结果与 3D 弹性解吻合很好，验证了逐层/实体元方法的正确性。该方法能得到精确的

全局响应，又能得到很好的局部响应。即使夹芯结构形式复杂，逐层/实体元方法也能精确计算复合材料面板的位移和应力，所以逐层/实体元方法可以进一步推广应用于诸如泡沫或点阵等复合材料夹芯结构问题中。

在该方法中，本章提出了全局模型、局部模型和等效模型三种芯子建模方法。在集中载荷作用的静力分析问题中，全局模型的分析精度最高，计算成本最大。等效模型的计算成本最小，但分析精度很低，尤其是在集中载荷作用的局部区域。局部模型兼顾了前两者的优势，在保证了分析精度的同时又最大程度降低了计算量。根据具体情况可以选择不同的蜂窝芯子建模方法。对于集中载荷作用问题和冲击问题，为了减少计算量可以选择局部模型。对于全局响应分析问题可以选择等效模型。在自由振动问题方面，局部模型和等效模型的分析结果很接近，但都与全局模型存在较大误差，该误差的主要来源是蜂窝芯子材料性能参数的等效算法。

基于逐层/实体元方法，研究了复合材料蜂窝夹芯层合结构的灵敏度分析问题，推导复合材料蜂窝夹芯层合结构灵敏度系数的控制方程，并建立了该控制方程的半解析和有限差分解法。通过数值算例研究了差分步长对半解析法和有限差分法灵敏度分析精度的影响情况，并对比研究了三种蜂窝芯子建模方法对静动力灵敏度分析的影响。研究结果表明：有限差分解法所要求的步长要小于半解析法；当 SAM 和 FDM 的差分步长减小一个数量级，位移和固有频率灵敏度系数的相对误差也大约下降一个数量级；当差分步长较大时截断误差占主导地位，当差分步长过小时舍入误差将是相对误差的主要部分；对于集中载荷作用下的静力灵敏度分析问题，全局模型和局部模型都能精确地考虑位移灵敏度系数的集中现象，尤其是在集中载荷作用的面板上，但局部模型的计算量要明显小于全局模型；对于自由振动灵敏度分析问题，局部模型和等效模型计算得到的低阶固有频率灵敏度系数吻合很好，但与全局模型的计算结果有一定差别，与全局模型相比局部模型和等效模型的误差主要来源于蜂窝芯子材料性能参数的等效算法。

第 4 章 复合材料加筋层合板壳和夹芯结构中低速冲击的渐进损伤分析

加筋复合材料层合结构和夹芯结构的逐层/实体元方法没有对加强筋和夹芯结构进行简化和假设，能够真实反映板壳与加强筋和夹芯之间的相互作用。对于加筋复合材料层合结构来说，逐层/实体元方法可以精确计算连接区域附近的局部位移和应力。对于复合材料夹芯结构来说，逐层/实体元方法既能得到精确的全局响应，又能得到很好的局部响应。因此，逐层/实体元方法特别适合于加筋复合材料层合板壳和夹芯结构的中低速冲击问题，能够得到精确的局部冲击响应和损伤分布。本章结合渐进损伤模型，将逐层/实体元方法应用于加筋复合材料层合板和夹芯结构中低速冲击的响应分析和损伤预测问题中，建立了一种渐进损伤分析方法。通过数值算例，研究了冲击速度、加筋结构形式和加筋厚度等参数对复合材料加筋结构冲击响应和损伤分布的影响，比较研究了夹芯结构全局模型和局部模型在中低速冲击问题中的应用情况。

4.1 基于 Hertz 接触律的中低速冲击接触力

对于复合材料层合圆柱壳结构的中低速冲击问题，Krishnamurthy 和 Mahajan[75,157] 提出了一种修正后的非线性 Hertz 接触律，在该接触律中不考虑冲击体变形的影响，将其看成是刚体。本节将对该修正后的非线性 Hertz 接触律进行简单介绍，并考虑重复加载情况，将其应用于复合材料加筋层合板壳和夹芯结构中低速冲击响应分析问题上，如图4.1 所示。复合材料加筋层合板壳和夹芯结构的冲击损伤分析模型除了其自身的运动方程之外是相同的，下文仅以加筋层合板壳为例建立渐进分析模型，夹芯结构的可以类似地得到。

根据牛顿第二定律，刚性冲击体的运动方程为

$$m_{\mathrm{i}}\ddot{u}_{3,\mathrm{i}} = -f_{\mathrm{c}} \tag{4-1}$$

式中，m_{i} 和 $\ddot{u}_{3,\mathrm{i}}$ 分别是冲击体的质量和加速度；f_{c} 为冲击体和靶体之间的冲击接触力。

与板壳的尺寸相比，中低速冲击的接触面积很小，所以可以将冲击体和靶体之间的接触载荷等效为集中载荷 (点载荷)，在有限元方法的载荷向量中

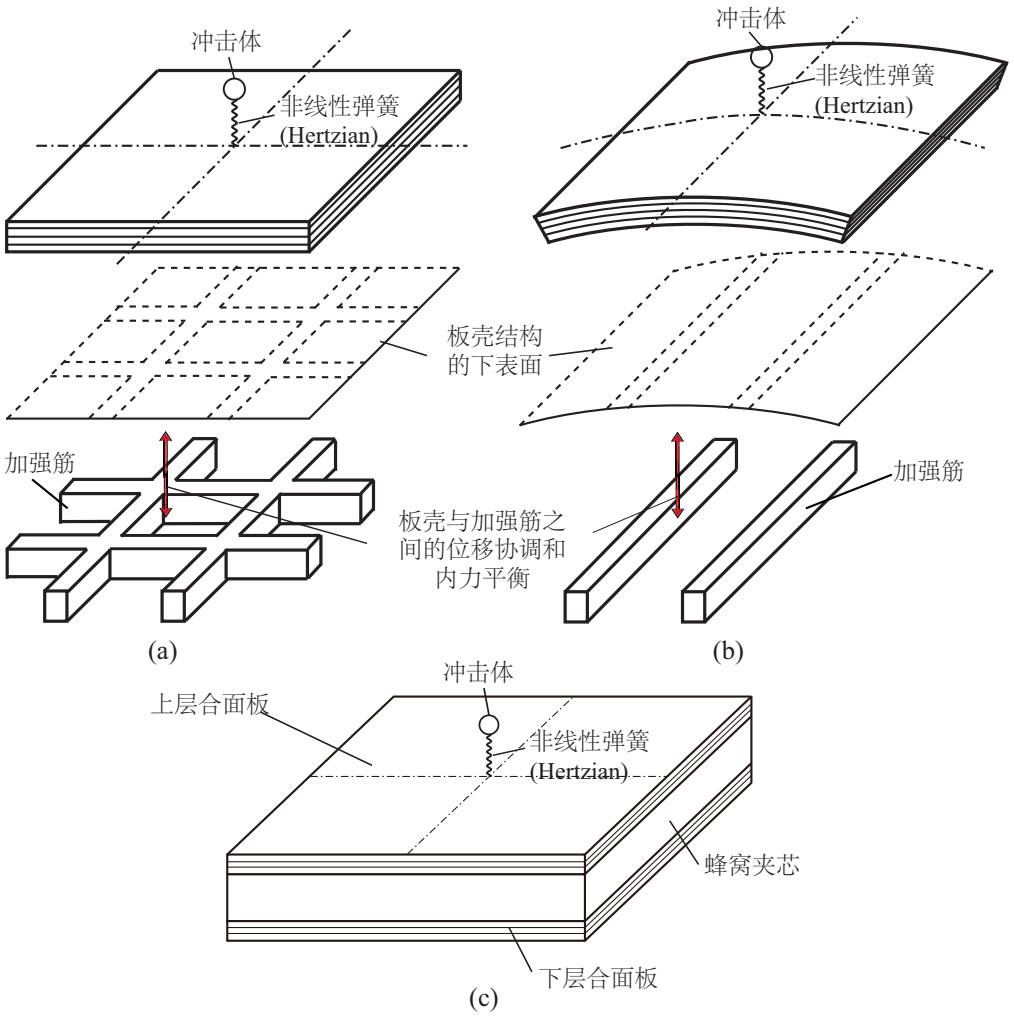


图 4.1　基于 Hertz 接触律的复合材料层合结构的中低速冲击分析模型：(a) 加筋层合板；(b) 加筋层合圆柱壳；(a) 蜂窝夹芯结构

只有接触点节点的载荷非零，且等于上式中的冲击接触力。板壳结构的载荷向量 $\boldsymbol{F}$ 可以写为

$$\boldsymbol{F}=\{0,0,\cdots,f_{\mathrm{c}},\cdots,0,0\}^{\mathrm{T}} \tag{4-2}$$

复合材料结构的中低速冲击过程可以分为加载、卸载和重新加载三个阶段，修正后的非线性 Hertz 接触律的接触力 f_{c} 可分三阶段，具体表达式为[158]

$$f_{\mathrm{c}}=\begin{cases} k\alpha^{1.5} & \text{加载} \\ f_{\mathrm{m}}\left(\dfrac{\alpha-\alpha_0}{\alpha_{\mathrm{m}}-\alpha_0}\right)^{2.5} & \text{卸载} \\ f_{\mathrm{m}}\left(\dfrac{\alpha-\alpha_0}{\alpha_{\mathrm{m}}-\alpha_0}\right)^{1.5} & \text{重新加载} \end{cases} \tag{4-3}$$

式中，$\alpha(t)=u_{3,\mathrm{i}}(t)-u_{3,\mathrm{t}}(t)$ 为冲击凹坑的深度；$u_{3,\mathrm{t}}(t)$ 为复合材料层合板壳结构接触点的位移；f_{m} 和 α_{m} 分别为卸载之前的最大接触力和凹坑深度。

式 (4-3) 中的 k 为非线性 Hertz 接触律的修正系数，对于圆柱壳和板的具体表达式为

$$k=\begin{cases}\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{r_{\mathrm{i}}}+\dfrac{1}{2R_{\mathrm{c}}}\right)^{-0.5}\Big/\left[\dfrac{(1-\nu_{\mathrm{i}})^2}{E_{\mathrm{i}}}+\dfrac{1}{E_2}\right] & \text{圆柱壳}\\ \dfrac{4}{3}\sqrt{r_{\mathrm{i}}}\Big/\left(\dfrac{1-\nu_{\mathrm{i}}^2}{E_{\mathrm{i}}}+\dfrac{1}{E_2}\right) & \text{平板}\end{cases} \tag{4-4}$$

式中，r_{i} 和 R_{c} 分别为冲击体和圆柱壳的半径；E_{i} 和 E_2 分别为冲击体的杨氏模量和层合板垂直纤维方向的弹性模型；ν_{i} 为冲击体的泊松比。

式 (4-3) 中的 α_0 为冲击加载 -卸载过程中形成的永久凹坑深度，其具体的表达式为

$$\alpha_0=\begin{cases}0 & \alpha_{\mathrm{m}}<\alpha_{\mathrm{cr}}\\ \alpha_{\mathrm{m}}\left[1-\left(\dfrac{\alpha_{\mathrm{cr}}}{\alpha_{\mathrm{m}}}\right)^{2/5}\right] & \alpha_{\mathrm{m}}\geqslant\alpha_{\mathrm{cr}}\end{cases} \tag{4-5}$$

式中，α_{cr} 为凹坑的临界深度，根据文献研究结果[75,157]，对于碳纤维/环氧树脂材料，α_{cr} 取 $8.03\times10^{-2}\,\mathrm{mm}$，对于玻璃纤维/环氧树脂材料，$\alpha_{\mathrm{cr}}$ 取 $1.016\times10^{-1}\,\mathrm{mm}$。

根据 Newmark 积分法，冲击体第 $n+1$ 时间步的位移和速度可写为

$$u_{3,\mathrm{i}}^{n+1}=u_{3,\mathrm{i}}^{n}+\dot{u}_{3,\mathrm{i}}^{n}\Delta t+\ddot{u}_{3,\mathrm{i}}^{n}\left(\frac{\Delta t^2}{4}\right)-f_{\mathrm{c}}^{n+1}\left(\frac{\Delta t^2}{4m_{\mathrm{i}}}\right) \tag{4-6}$$

将式 (4-6) 代入修正后的非线性 Hertz 接触律 (4-3)，得第 $n+1$ 时间步接触力与靶体位移 $u_{3,\mathrm{t}}$ 之间的隐式关系为

$$f_{\mathrm{c}}^{n+1}=\begin{cases}k\left[u_{3,\mathrm{i}}^{*}-u_{3,\mathrm{t}}^{n+1}-\left(\dfrac{\Delta t^2}{4m_{\mathrm{i}}}\right)f_{\mathrm{c}}^{n+1}\right]^{1.5} & \text{加载}\\ \dfrac{f_{\mathrm{m}}}{(\alpha_m-\alpha_0)^{2.5}}\left[u_{3,\mathrm{i}}^{*}-u_{3,\mathrm{t}}^{n+1}-\alpha_0-\left(\dfrac{\Delta t^2}{4m_{\mathrm{i}}}\right)f_{\mathrm{c}}^{n+1}\right]^{2.5} & \text{卸载}\\ \dfrac{f_{\mathrm{m}}}{(\alpha_m-\alpha_0)^{1.5}}\left[u_{3,\mathrm{i}}^{*}-u_{3,\mathrm{t}}^{n+1}-\alpha_0-\left(\dfrac{\Delta t^2}{4m_{\mathrm{i}}}\right)f_{\mathrm{c}}^{n+1}\right]^{1.5} & \text{重新加载}\end{cases} \tag{4-7}$$

式中，$u_{3,\mathrm{i}}^{*}=u_{3,\mathrm{i}}^{n}+\dot{u}_{3,\mathrm{i}}^{n}\Delta t+\ddot{u}_{3,\mathrm{i}}^{n}\left(\dfrac{\Delta t^2}{4}\right)$。

冲击体与复合材料层合板壳结构之间的接触力算法见文献[75,157]，计算流程如图4.2所示。对于本文所研究的中低速冲击问题，初始条件可取为 $\dot{u}_{3,\mathrm{i}}^{0}=v_0$(冲击体的初始冲击速度)，$u_{3,\mathrm{i}}^{0}=u_{3,\mathrm{t}}^{0}=0$。首先，基于加载情况下的隐式关系（式(4-7) 的第一式）取定接触力 f_{c} 的近似值，利用 Newton-Raphson 求解该隐式方程。然后，将接触力的近似值 f_{c}^{1} 以节点载荷的形式代入层合板壳结构的运动控制方程中，求解层合板壳结构接触点的位移 $u_{3,\mathrm{t}}^{1}$，并利用计算得到的 $u_{3,\mathrm{t}}^{1}$ 代入式 (4-7) 重新求接触力 f_{c}^{1}。重复以上过程直到接触力收敛达到精度要求。最后，利用精确的接触力计算冲击体和层合板壳结构的加速度、速度和位移，并将这些作为下一时间步求解的初始条件。如果在分析过程中需要考虑损伤影响的话，还应该在每一步中求解应力，并判断单元是否出现损伤。如果有损伤出现，还应根据刚度退化模型修正损伤单元的材料参数。

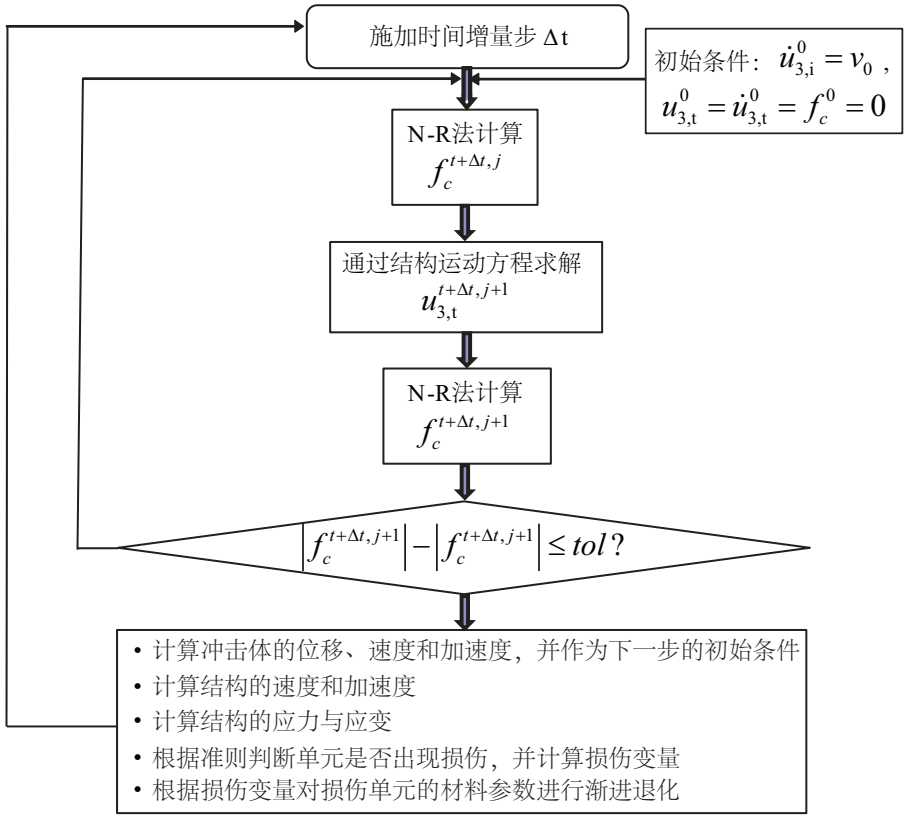


图 4.2　复合材料结构中低速冲击问题的计算流程

4.2 冲击损伤的渐进损伤分析模型

4.2.1 三维连续损伤模型

在连续损伤力学中通常用张量场来描述分布微观损伤，这个损伤张量既要描述微裂纹的密度，又要包含微裂纹的方向。由于微裂纹和缺陷的存在，材料的横截面由 A 减小为 $\overline{A}$，损伤变量可定义为

$$\boldsymbol{d}=\frac{\left(A-\overline{A}\right)}{A} \tag{4-8}$$

有效柯西应力可定义为

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1-\boldsymbol{d})} \tag{4-9}$$

式中，$\boldsymbol{\sigma}$ 为柯西应力张量，但为了建立有限元控制方程方便，其他章节的柯西应力都采用了 Voigt 对称形式。损伤变量 $\boldsymbol{d}=[d_1,d_2,d_3]$，$d_1$、$d_2$ 和 d_3 代表了不同载荷条件下由于损伤引起的材料模量退化程度。对于纤维铺层，d_1 和 d_2 表示主纤维方向的损伤或破坏，控制着面内的剪切损伤或破坏。d_i 为垂直于第i 个主材料方向平面内的有效退化分数，本文中纤维方向为第 1 个材料主方向，第二个主方向为纤维铺层的横向，第 3 个材料主方向为厚度方向。损伤变量的取值范围是 $0\le d_i\le 1$，$d_i=0$ 说明第i 个主材料方向材料无损伤，而 $d_i=1$ 表示第 i 个主材料方向的材料完全破坏。

通过损伤张量可将正交各向异性材料的有效应力表示为

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{M}_{\mathrm{d}}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{4-10}$$

式中，$\boldsymbol{M}_{\mathrm{d}}=\mathrm{diag}\left[\begin{array}{cccccc}1/\omega_{11} & 1/\omega_{22} & 1/\omega_{33} & 1/\omega_{23} & 1/\omega_{13} & 1/\omega_{12}\end{array}\right]$；$\omega_{11}=1-d_1$；$\omega_{22}=1-d_2$；$\omega_{33}=1-d_3$；$\omega_{12}=\sqrt{(1-d_1)(1-d_2)}$；$\omega_{13}=\sqrt{(1-d_1)(1-d_3)}$；$\omega_{12}=\sqrt{(1-d_1)(1-d_2)}$。

根据无损伤材料的应变能，含损伤正交各向异性材料的等效应变能为

$$W_{\mathrm{d}}=\frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\cdot\overline{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{M}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\cdot\boldsymbol{M}_{\mathrm{d}}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{d}}\right)^{-1}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{4-11}$$

式中，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{d}}=\boldsymbol{M}_{\mathrm{d}}^{-1}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\cdot\boldsymbol{M}_{\mathrm{d}}^{-\mathrm{T}}$ 为损伤正交各向异性材料的本构关系。

4.2.2 损伤起始准则

本文采用的损伤起始准则是应变形式的三维 Hashin 准则[86,159]，在该准则中，复合材料的损伤模式分为三种：纤维拉伸或压缩损伤 F_{f}、基体拉伸或压

缩损伤 F_{m} 和分层损伤 F_{z}，各种损伤的具体表达式为

$$F_{\mathrm{f}}^2=\begin{cases}\left(\dfrac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}^{\mathrm{f,t}}}\right)^2+\left(\dfrac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{12}^{\mathrm{f,t}}}\right)^2+\left(\dfrac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{13}^{\mathrm{f,t}}}\right)^2\geqslant 1 & (\varepsilon_{11}>0)\\ \left(\dfrac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}^{\mathrm{f,c}}}\right)^2\geqslant 1 & (\varepsilon_{11}<0)\end{cases} \tag{4-12}$$

$$F_{\mathrm{m}}^2=\begin{cases}\left(\dfrac{\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{22}^{\mathrm{f,t}}\cdot\varepsilon_{22}^{\mathrm{f,t}}}\right)^2-\dfrac{\varepsilon_{22}\cdot\varepsilon_{33}}{\left(\varepsilon_{23}^{\mathrm{f}}\right)^2}+\left(\dfrac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{12}^{\mathrm{f}}}\right)^2+\\ \qquad\left(\dfrac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{13}^{\mathrm{f}}}\right)^2+\left(\dfrac{\varepsilon_{23}}{\varepsilon_{23}^{\mathrm{f}}}\right)^2\geqslant 1 & (\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}>0)\\ \left(\dfrac{\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{22}^{\mathrm{f,c}}\cdot\varepsilon_{22}^{\mathrm{f,c}}}\right)^2+\dfrac{\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{22}^{\mathrm{f,c}}}\left(\dfrac{\varepsilon_{22}^{f,c}}{2\varepsilon_{12}^{\mathrm{f}}}-1\right)-\dfrac{\varepsilon_{22}\cdot\varepsilon_{33}}{\left(\varepsilon_{23}^{f}\right)^2}+\\ \qquad\left(\dfrac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{12}^{\mathrm{f}}}\right)^2+\left(\dfrac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{13}^{\mathrm{f}}}\right)^2+\left(\dfrac{\varepsilon_{23}}{\varepsilon_{23}^{\mathrm{f}}}\right)^2\geqslant 1 & (\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}<0)\end{cases} \tag{4-13}$$

$$F_{\mathrm{z}}^2=\begin{cases}\left(\dfrac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{33}^{\mathrm{f,t}}}\right)^2+\left(\dfrac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{13}^{\mathrm{f}}}\right)^2+\left(\dfrac{\varepsilon_{23}}{\varepsilon_{23}^{\mathrm{f}}}\right)^2\geqslant 1 & (\varepsilon_{33}>0)\\ \left(\dfrac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{33}^{\mathrm{f,c}}}\right)^2+\left(\dfrac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{13}^{\mathrm{f}}}\right)^2+\left(\dfrac{\varepsilon_{23}}{\varepsilon_{23}^{\mathrm{f}}}\right)^2\geqslant 1 & (\varepsilon_{33}<0)\end{cases} \tag{4-14}$$

式中，$\varepsilon_{ii}^{\mathrm{f,t}}=\sigma_{ii}^{\mathrm{f,t}}/C_{ii},(i=1,2,3)$；$\varepsilon_{ii}^{\mathrm{f,c}}=\sigma_{ii}^{\mathrm{f,c}}/C_{ii},(i=1,2,3)$；$\varepsilon_{12}^{\mathrm{f}}=\sigma_{12}^{\mathrm{f}}/C_{66}$；$\varepsilon_{23}^{\mathrm{f}}=\sigma_{23}^{\mathrm{f}}/C_{44}$；$\varepsilon_{13}^{\mathrm{f}}=\sigma_{13}^{\mathrm{f}}/C_{55}$；$\sigma_{ii}^{\mathrm{f,t}}$ 和 $\sigma_{ii}^{\mathrm{f,c}}$ 分别为复合材料三个方向上的拉伸和压缩强度；σ_{12}^{f}、σ_{13}^{f} 和 σ_{23}^{f} 是复合材料三个平面内的剪切强度。

4.2.3　刚度退化律

在基于有限元方法的失效分析过程中，首先通过损伤起始准则判断单元是否出现损伤，然后利用刚度退化算法来考虑损伤对单元刚度的影响。复合材料渐进损伤分析方法中已有大量的损伤后材料性能退化模型，大部分的这些算法总体上可分为三大类[160]：突然卸载算法、渐进卸载算法和常应力算法，如图4.3 所示。在突然卸载算法中，一旦有限元单元被判断出现损伤，则该单元的材料性能下降为零，复合材料层合结构的层失效理论 (ply-discount theory, PDT) 是最常用的突然卸载算法之一。这种刚度退化算法虽然与所使用的有限

元单元类型无关，但是值得注意的是，真实微损伤尺寸要比单元的小得多，所以突然将整个单元的刚度降为零是不太合理的。常应力算法中假设出现损伤的单元载荷保持不变，不再承受其他额外的载荷。在渐进卸载算法中，损伤单元与损伤模式对应的材料性能逐渐下降为零，材料性能的退化要么独立于失效模式，要么与失效模式相关联。

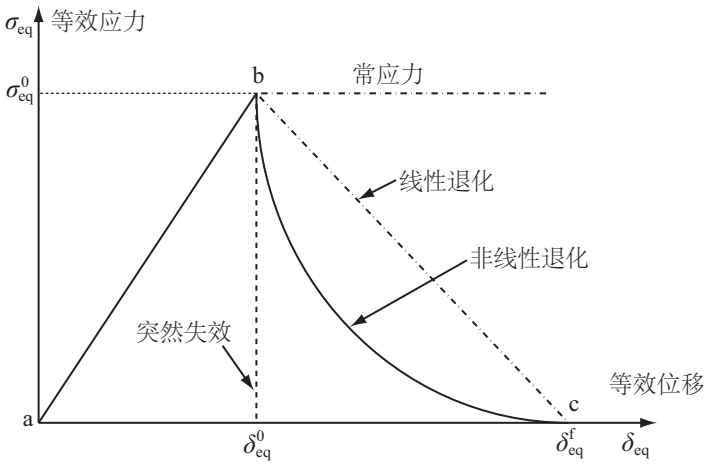


图 4.3　损伤单元的刚度退化算法[161]

本文中利用损伤变量 d_1、d_2 和 d_3 来控制损伤单元材料性能的退化，损伤变量的渐进退化分为线性和非线性两种，非线性退化中的指数退化算法为[161]

$$
\begin{aligned}
d_1 &= 1-\frac{\exp[-\sigma_{11}^{\mathrm{f}}\delta_{\mathrm{eq},11}^{\mathrm{f}}(F_{\mathrm{f}}-1)/G_{\mathrm{c},1}]}{F_{\mathrm{f}}}\\
d_2 &= 1-\frac{\exp[-\sigma_{22}^{\mathrm{f}}\delta_{\mathrm{eq},22}^{\mathrm{f}}(F_{\mathrm{m}}-1)/G_{\mathrm{c},2}]}{F_{\mathrm{m}}}\\
d_3 &= 1-\frac{\exp[-\sigma_{33}^{\mathrm{f}}\delta_{\mathrm{eq},33}^{\mathrm{f}}(F_{\mathrm{z}}-1)/G_{\mathrm{c},3}]}{F_{\mathrm{z}}}
\end{aligned}
\tag{4-15}
$$

式中，$G_{\mathrm{c},1}$、$G_{\mathrm{c},2}$ 和 $G_{\mathrm{c},3}$ 分别为三个主方向上的断裂能；$\delta_{\mathrm{eq},11}^{\mathrm{f}}$、$\delta_{\mathrm{eq},22}^{\mathrm{f}}$ 和 $\delta_{\mathrm{eq},33}^{\mathrm{f}}$ 为材料完全失效时的等效位移，具体表达式为

$$
\delta_{\mathrm{eq},ii}^{\mathrm{f}}=\varepsilon_{ii}^{\mathrm{f}}\cdot L_{\mathrm{c}} \tag{4-16}
$$

式中，L_c 为单元的特征长度，特征长度的计算方法有很多，Bažant 和 Oh[162] 为四边形单元提出了如下计算公式

$$
L_{\mathrm{c}}=\frac{\sqrt{A_{\mathrm{IP}}}}{\cos\theta} \tag{4-17}
$$

式中，A_{IP} 为积分点的面积；θ 为裂纹方向与裂纹扩展方向之间的夹角。根据 Maimí[163] 的研究工作，对于裂纹方向未知的情况，可取上式的平均，$\bar{L}_{\mathrm{c}} = \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/4} L_{\mathrm{c}} d\gamma = 1.12\sqrt{A_{\mathrm{IP}}}$。Lapczyk 和 Hurtado[164] 假设材料点上的特征长度等于相关区域面积的平方根。

4.3　数值算例

4.3.1　本文方法正确性

本节首先利用文献[74,165,166] 中的冲击响应结果来验证本文编写的 Hertz 接触律和渐进损伤模型计算程序的可靠性，研究对象为四边简支碳纤维/环氧树脂层合板，几何尺寸为：$200\,\mathrm{mm}\times 200\,\mathrm{mm}\times 2.69\,\mathrm{mm}$，铺层顺序为 $[0/90/0/90/0]_s$。板的下表面中心受直径为 12.7mm 的钢球冲击作用，冲击速度为 3 m/s。层合板的所有单层具有相同的厚度和材料性能，单层的材料性能参数为

$E_{11} = 141.2\,\mathrm{GPa}$, $E_{22} = 9.72\,\mathrm{GPa}$, $G_{12} = 5.53\,\mathrm{GPa}$, $G_{23} = 3.74\,\mathrm{GPa}$, $v_{12} = v_{23} = 0.30$, $\rho = 1536\mathrm{kg/m^3}$

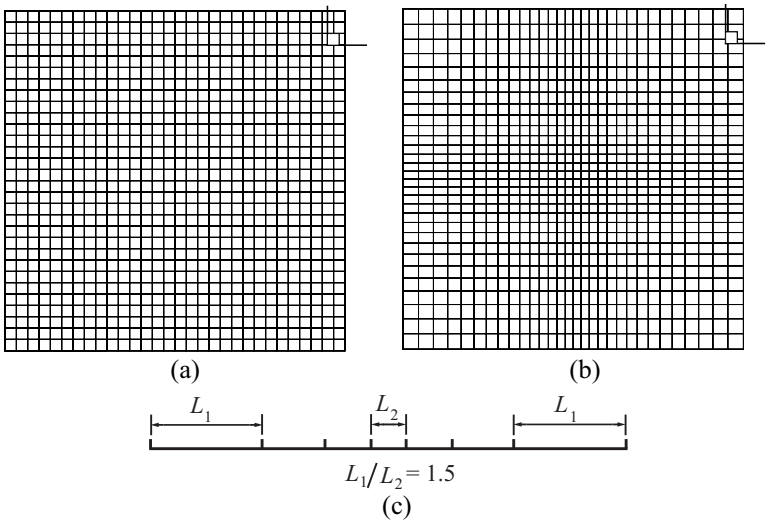


图 4.4　复合材料层合板结构的有限元网格：(a) 均匀网格；(b) 非均匀网格；(c) “Two way bias” 型非均匀网格

低速冲击复合材料层合板均匀和非均匀有限元网格如图4.4所示，非均匀网格中冲击接触局部区域的网格比周边的密。层合板和冲击体冲击响应的收敛情况如图4.5所示，图中为均匀网格（如图4.4(a) 所示）计算的结果。从图4.5中可以看出层合板和冲击体冲击响应随着单元数量的增加而收敛，且当单元数量为1600(40×40) 时冲击响应达到收敛。因为在有限元模型中随着单元数量的

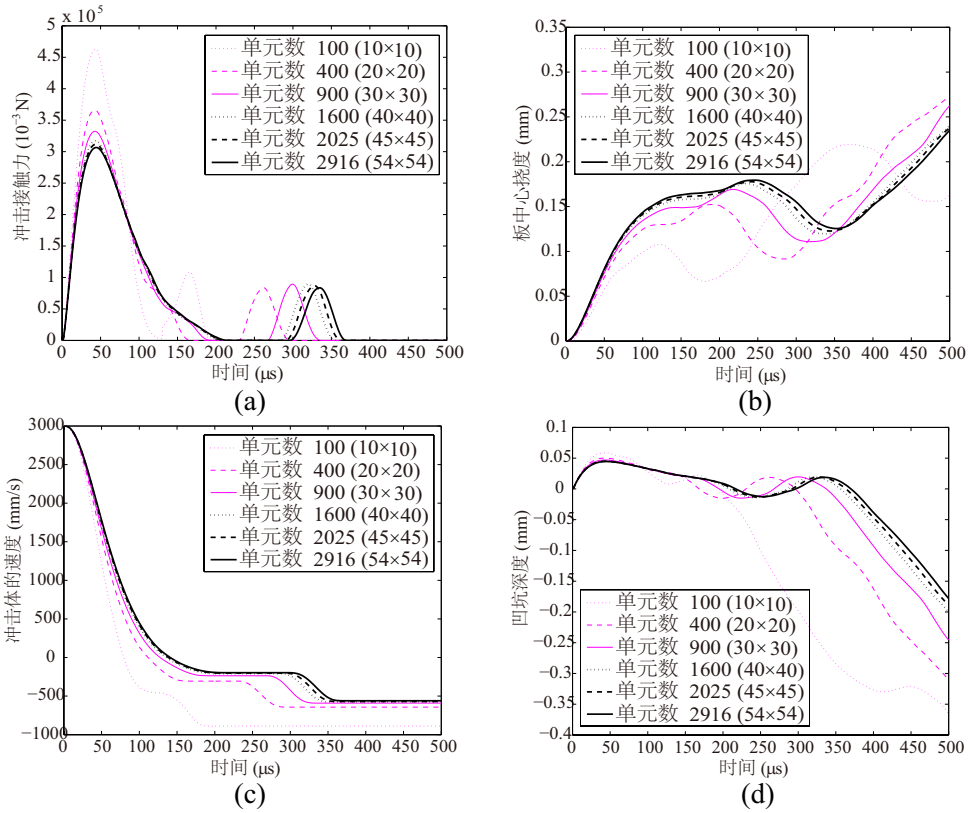


图 4.5　复合材料层合板和冲击体冲击响应的收敛性：(a) 接触力；(b) 层合板接触点 $(x = y = a/2, z = h/2)$ 的位移w；(c) 钢球的速度；(d) 凹坑深度

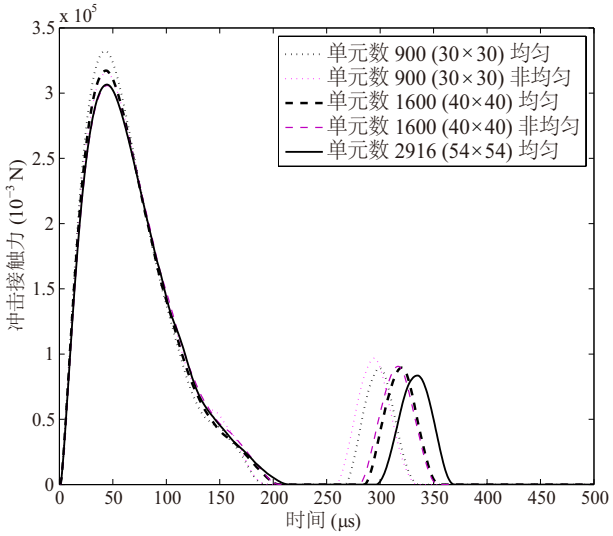


图 4.6　均匀和非均匀网格对接触力计算的影响

增加结构刚度会减小，接触力、层合板接触点位移u_3、冲击体的剩余速度和凹坑深度都随着单元数量的增加而增加，且二次冲击的时间也随着单元数量的增加而推迟。

对于非均匀网格（见图4.4(b)），层合板和冲击体之间的接触力的收敛如图4.6 所示，与均匀网格相比，非均匀网格计算得到的第一个加载 - 卸载过程中最大接触力的收敛速度要更快，但非均匀网格对第二次冲击出现的时间几乎没有明显影响。因为复合材料层合结构低速冲击损伤主要产生于第一次加载 -卸载过程，所以非均匀局部加密的有限元网格可以减小低速冲击损伤预测的计算量。但是如果要分析整个冲击过程中的响应，那么局部加密的非均匀网格与均匀网格相比并不能减少计算量。

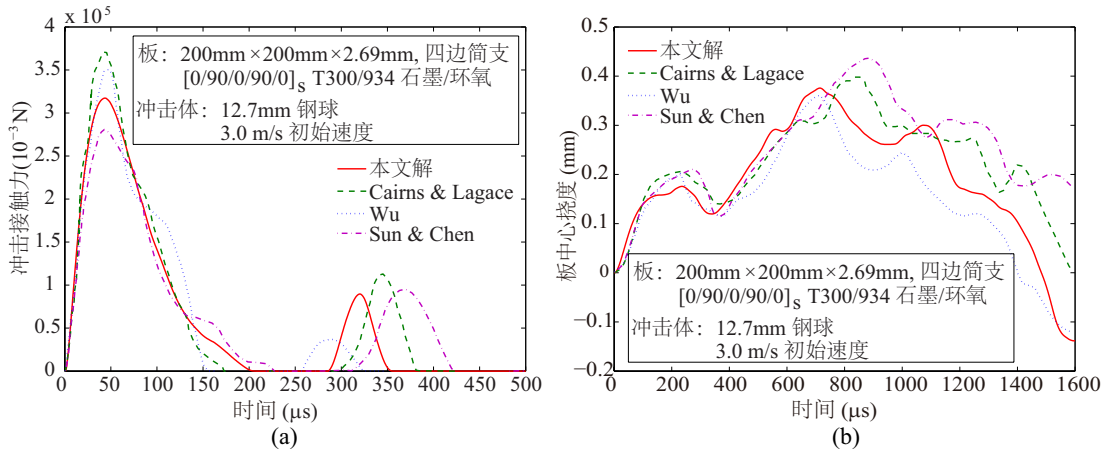


图 4.7　复合材料层合板低速冲击响应与文献结果的对比：(a) 接触力时间历程；(b) 层合板接触点位移时间历程

本文方法计算得到的复合材料层合板低速冲击响应与文献结果[74,165,166]对比如图4.7所示，从图中可以看出，本文方法计算得到的接触力时间历程和层合板接触点位移时间历程与文献结果吻合很好，证明了本文方法计算复合材料层合板结构低速冲击响应的正确性。

本节还研究了复合材料层合圆柱壳结构的低速冲击问题，并将计算结果与文献结果对比[157]。圆柱壳的边界条件为四边简支，中心点受钢球冲击，钢球的尺寸和其他参数与上一算例中的相同，初速度为 10m/s，铺层顺序为 [0/90/90/0]，层合圆柱壳的半径、周向弧长和轴向长度都为 254mm，总厚度为 2.54mm，所有单层具有相同的厚度和材料性能参数，材料参数为 $E_{11}=144.8\,\mathrm{GPa}$, $E_{22}=9.65\,\mathrm{GPa}$, $G_{12}=G_{13}=7.10\,\mathrm{GPa}$, $G_{23}=5.92\,\mathrm{GPa}$, $v_{12}=v_{23}=0.30$, $\rho=1389.2\,\mathrm{kg/m^3}$

本文方法计算得到的复合材料层合圆柱壳结构低速冲击响应与文献结

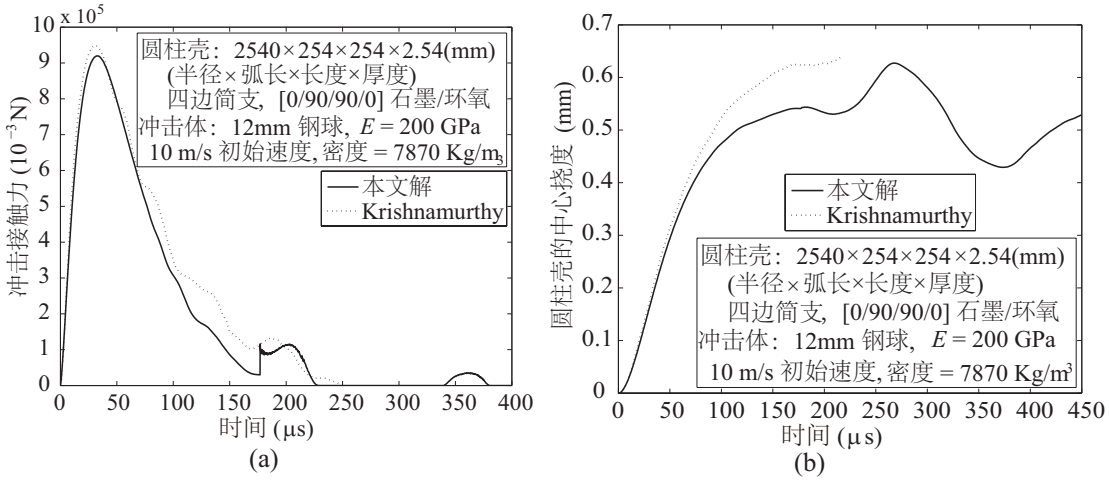


图 4.8 复合材料开口层合圆柱壳结构低速冲击响应对比：(a) 接触力时间历程；(b) 接触点位移时间历程

果[157] 对比如图4.8 所示，从图中可以看出，本文方法计算得到的接触力时间历程和层合板接触点位移时间历程与文献结果吻合很好，证明了本文方法计算复合材料层合圆柱壳结构低速冲击响应的正确性。

4.3.2 冲击载荷作用点对冲击响应的影响

在本文复合材料低速冲击分析方法中，冲击载荷通过 Hertz 接触律等效成了点载荷，而逐层理论在厚度方向是基于插值函数建立位移模式的，所以有必要研究接触力作用点在厚度方向上的位置对分析结果的影响。

本节中研究的复合材料层合板与上节中的具有相同的几何尺寸，但铺层顺序为 [0/90/0/90]，密度为 $\rho = 1389.2\text{kg/m}^3$，其他的材料性能参数见表4.1[167]。

大量研究结果证明，因为纤维的拉伸强度很大，由纤维断裂和屈曲引起的损伤仅出现在冲击接触区域，所以在中低速冲击载荷作用下复合材料层合结构的主要损伤是基体裂纹和层间分层。Choi 等[79] 指出中低速冲击载荷作用下复合材料层合结构最先出现的是基体裂纹，一旦基体裂纹扩展到上下具有不同纤维方向的层间，分层损伤就会随之出现。

考虑和不考虑渐进损伤模型复合材料层合板的低速冲击响应如图4.9所示，其中冲击速度为 30m/s，钢球的半径为 6.0mm。因为在渐进损伤模型中出现损伤的单元材料性能是逐渐弱化的，所以考虑渐进损伤模型时，最大接触力、层合板接触点位移以及冲击体的位移都要小于不考虑渐进损伤模型时的计算结果。从图4.9可以看出，如果没有考虑冲击损伤，即不考虑渐进损伤模型，那么冲击载荷作用点在厚度方向上的位置对除接触力以外的冲击响应没有影响。

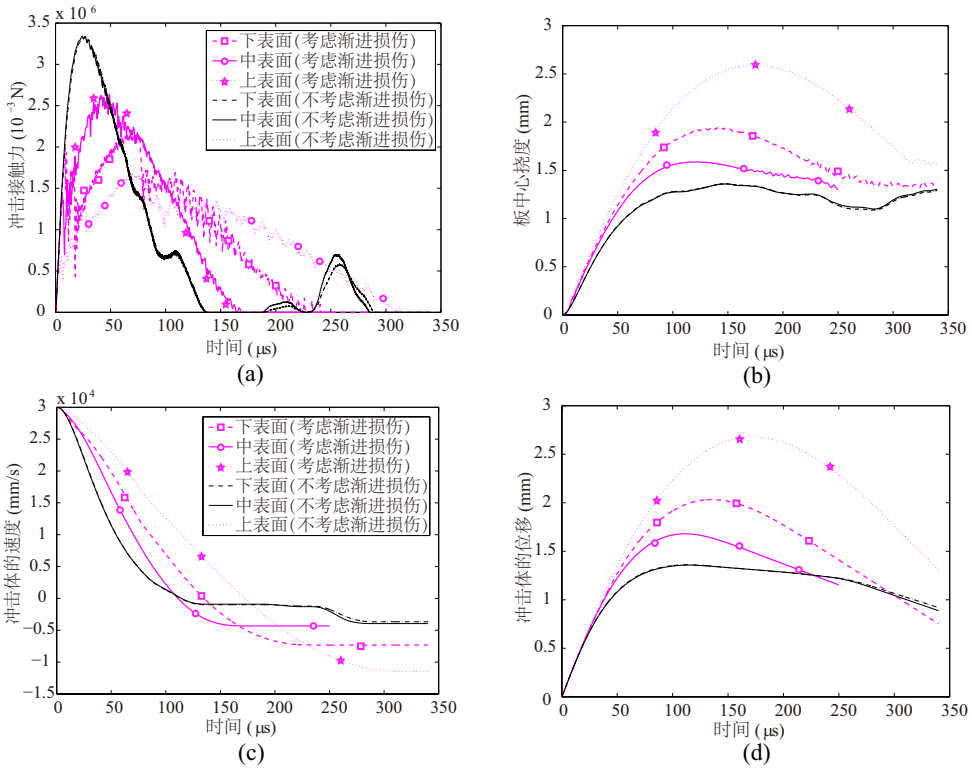


图 4.9　考虑和不考虑渐进损伤模型复合材料层合板的低速冲击响应：(a) 接触力；(b) 接触点位移；(c) 冲击体的速度；(d) 冲击体的位移

表 4.1　复合材料层合板的材料性能

弹性参数	E_{11}/GPa	E_{22}/GPa	E_{33}/GPa	G_{12}/GPa	G_{13}/GPa
	156.5	13.0	13.0	6.96	6.96
	G_{23}/GPa	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	
	3.45	0.23	0.23	0.4	
强度参数	$\sigma_{11}^{f,t}$/MPa	$\sigma_{11}^{f,c}$/MPa	$\sigma_{22}^{f,t}$/MPa	$\sigma_{22}^{f,c}$/MPa	
	1516.8	1592.7	44.5	253.0	
	σ_{12}^{f}/MPa	σ_{13}^{f}/MPa	σ_{23}^{f}/MPa		
	106.9	106.9	106.9		
断裂能	$G_{t,1}$/N/mm	$G_{c,1}$/N/mm	$G_{t,2}$/N/mm		
	20	20	0.23		
	$G_{c,2}$/N/mm	$G_{t,3}$/N/mm	$G_{c,3}$/N/mm		
	0.76	0.23	0.76		

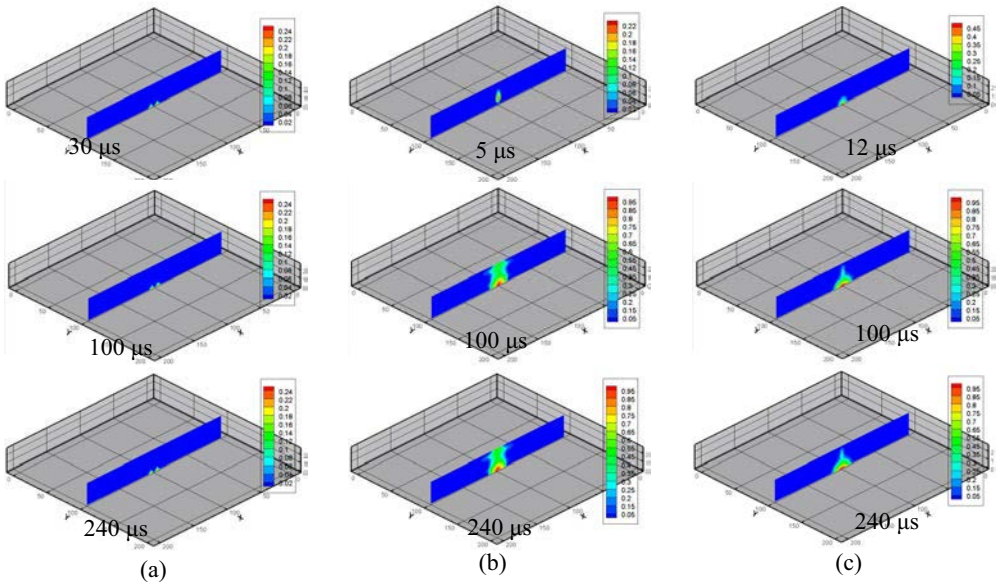


图 4.10　低速冲击载荷作用在层合板下表面时计算得到的损伤变量：(a) 损伤变量 d_1 (纤维断裂)；(b) 损伤变量 d_2 (基体裂纹)；(c) 损伤变量 d_3 (分层).

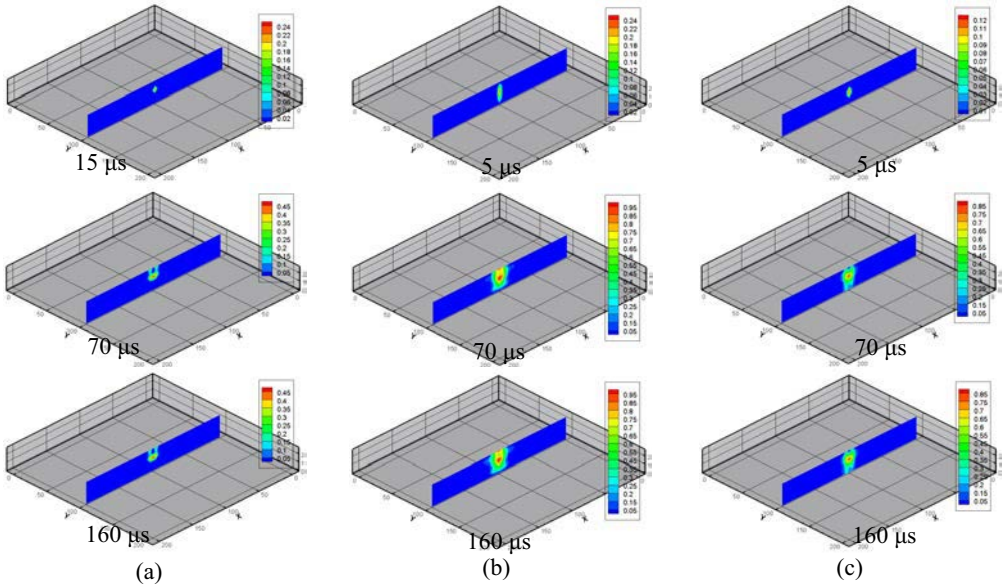


图 4.11　低速冲击载荷作用在层合板中性面上时计算得到的损伤变量：(a) 损伤变量 d_1 (纤维断裂)；(b) 损伤变量 d_2 (基体裂纹)；(c) 损伤变量 d_3 (分层).

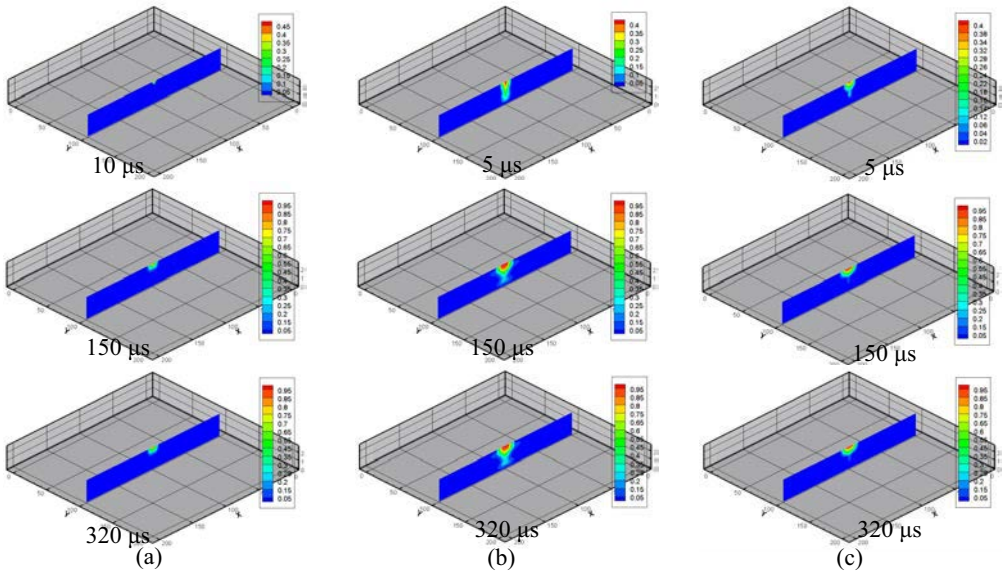


图 4.12　低速冲击载荷作用在层合板上表面时计算得到的损伤变量：(a) 损伤变量 d_1 (纤维断裂)；(b) 损伤变量 d_2 (基体裂纹)；(c) 损伤变量 d_3 (分层).

但是如果考虑了渐进损伤模型，则冲击载荷作用点在厚度方向上的位置对冲击载荷具有明显影响。

表 4.2　纤维断裂、基体裂纹和分层损伤的起始时间

冲击载荷厚度方向的作用点	损伤形式		
	纤维断裂	基体裂纹	分层
下表面	21 μs	3 μs	9 μs
中性面	13 μs	4 μs	5 μs
上表面	7 μs	2 μs	3 μs

低速冲击载荷作用在层合板下表面、中性面和上表面时计算得到的损伤变量分别如图4.10-4.12 所示，对于不同的冲击载荷作用点，纤维断裂、基体裂纹和分层损伤的出现时间见表4.2。从图4.10-4.12 和表4.2中可以看出，在低速冲击载荷作用下，复合材料层合板结构的主要损伤是基体裂纹和分层损伤，纤维断裂损伤变量要比基体裂纹和分层的小，且主要集中在冲击接触区域附近。基体裂纹是在冲击过程中最先出现的损伤，然后是分层损伤，纤维断裂是最后才出现的。当等效冲击载荷作用在层合板的下表面时，虽然纤维断裂损伤集中在冲击接触区域是与实际情况相符的，但损伤首先在下表面出现并扩展是不合理的。当等效冲击载荷作用在层合板的上表面时，损伤首先在上表面出现并扩展，对于损伤的主要部分分层损伤来说是不合理的。与前面的两种情况相比，当等效冲击载荷作用在层合板的中面时，基体裂纹和分层损伤沿

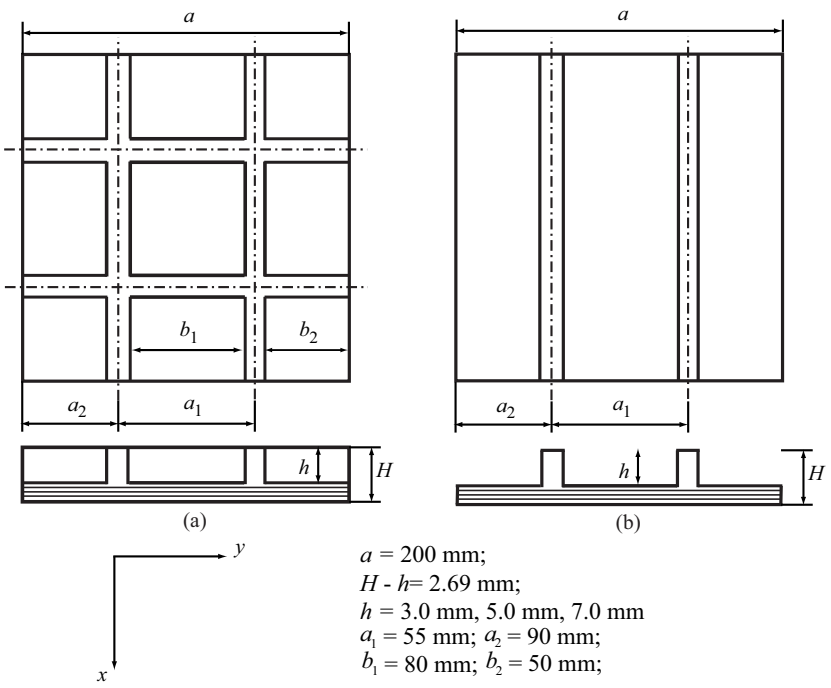


图 4.13　两种复合材料加筋层合板结构：(a) 对称“井”字形加强；(b) 平行加强

层合板的厚度方向出现并扩展，虽然纤维断裂损伤首先出现在中面上并在载荷作用点附近扩展是不合理的，但由于纤维断裂不是低速冲击损伤的主要部分，所以这种不合理现象对整个损伤分析过程的影响不大。因此，在下面的数值算例中，等效冲击载荷作用在复合材料层合板的中性面上。

4.3.3　低速冲击复合材料加筋层合板结构

加强筋的形式对复合材料层合结构的响应具有明显的影响，本算例将研究两种典型加筋复合材料层合板结构的低速冲击损伤问题，如图4.13所示，对称“井”字形加筋复合材料层合板结构和平行加筋复合材料层合板结构。本算例将重点研究加强筋和冲击体参数对冲击响应和损伤分布的影响情况，如加强筋的尺寸和形式、冲击速度和冲击体的质量等参数。

复合材料层合板和加强筋的所有单层具有相同的材料性能，见表4.1，层合板的铺层顺序为 [0/90/0/90/0]，加强筋的铺层顺序为 [0]，层合板的所有单层都具有相同的厚度。冲击体为钢球，其密度为 7960kg/m^3。低速冲击作用在加筋复合材料层合板的下表面，但等效冲击载荷作用在层合板的中性面上。当研究冲击速度对冲击响应和损伤分布的影响时，冲击体的半径取 6.0mm，加强筋的厚度取 7.0mm。当研究冲击体质量（半径）对冲击响应和损伤分布的影响时，冲击速度取 30m/s，加强筋的厚度取 7.0mm。当研究加强筋厚度对冲击

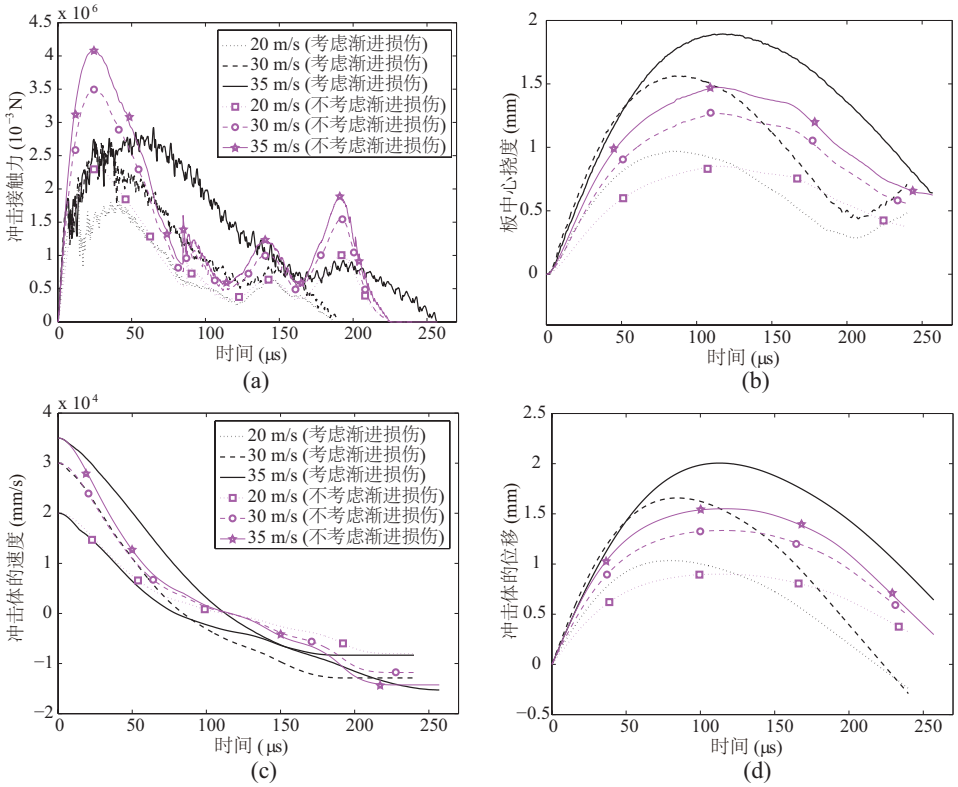


图 4.14　考虑和不考虑渐进损伤模型情况下冲击速度对“井”字形加强复合材料层合板结构低速冲击响应的影响：(a) 接触力；(b) 接触点位移；(c) 冲击体的速度；(d) 冲击体的位移

响应和损伤分布的影响时，冲击体的半径取 6.0mm，冲击速度取 30m/s。

4.3.3.1　对称“井”字形加筋复合材料层合板结构

考虑和不考虑渐进损伤模型情况下，冲击速度对“井”字形加筋复合材料层合板结构冲击响应的影响如图4.14所示，其中冲击体的半径取 6.0mm，加强筋的厚度取 7.0mm。随着冲击速度的增加，因为加筋层合板结构的损伤增加，所以渐进损伤模型对冲击响应的影响也增加。因此，如果冲击速度比较大，那么进行冲击响应分析时必须考虑损伤的影响。接触力最大值、冲击持续时间、层板接触点位移和冲击体位移都随冲击速度的增加而增加，在第一个加载 -卸载过程中，因为冲击损伤主要产生在这个阶段，所以接触力的波动很大，尤其是在加载过程中。

冲击速度为 30m/s 时，对称“井”字形加筋复合材料层合板结构的变形和损伤变量的时间历程如图4.15所示。冲击速度对损伤变量分布的影响如图4.16所示，图中的损伤变量是冲击过程的最终结果。从图中可以看出，在冲击作用的早期层合板的变形被限制在四根加强筋围成的局部区域中，然后，当层合板

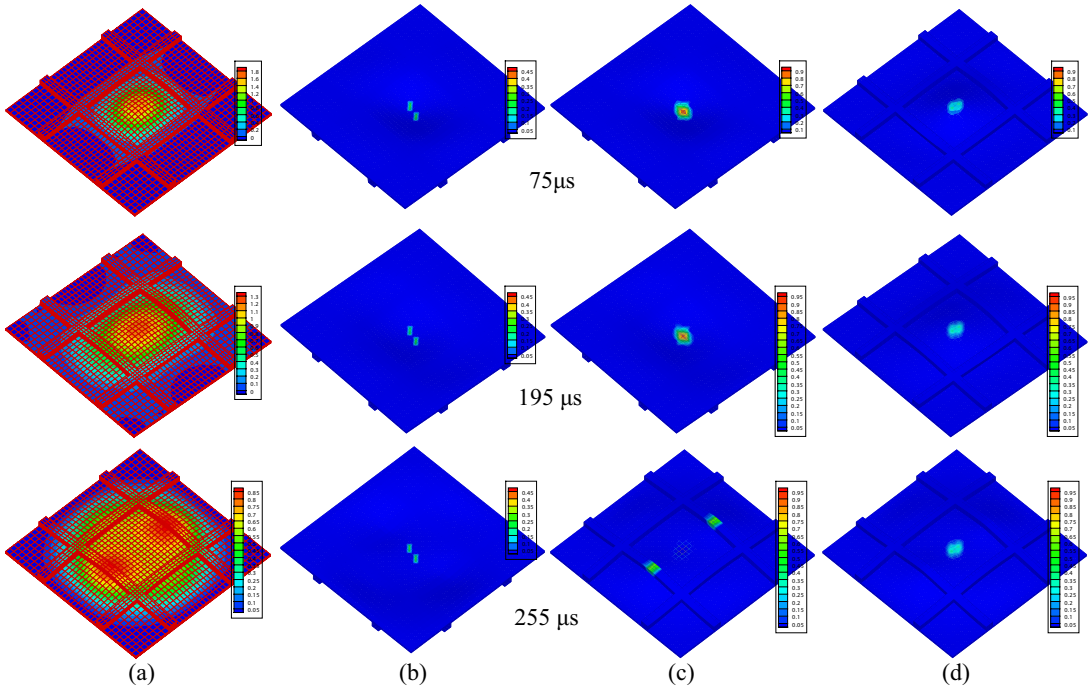


图 4.15　冲击速度为 30m/s 时对称“井”字形加筋复合材料层合板结构的变形和损伤变量的时间历程：(a) 变形和位移u_3 云图；(b) 损伤变量 d_1 (纤维断裂)；(c) 损伤变量 d_2 (基体裂纹)；(d) 损伤变量 d_3 (分层)

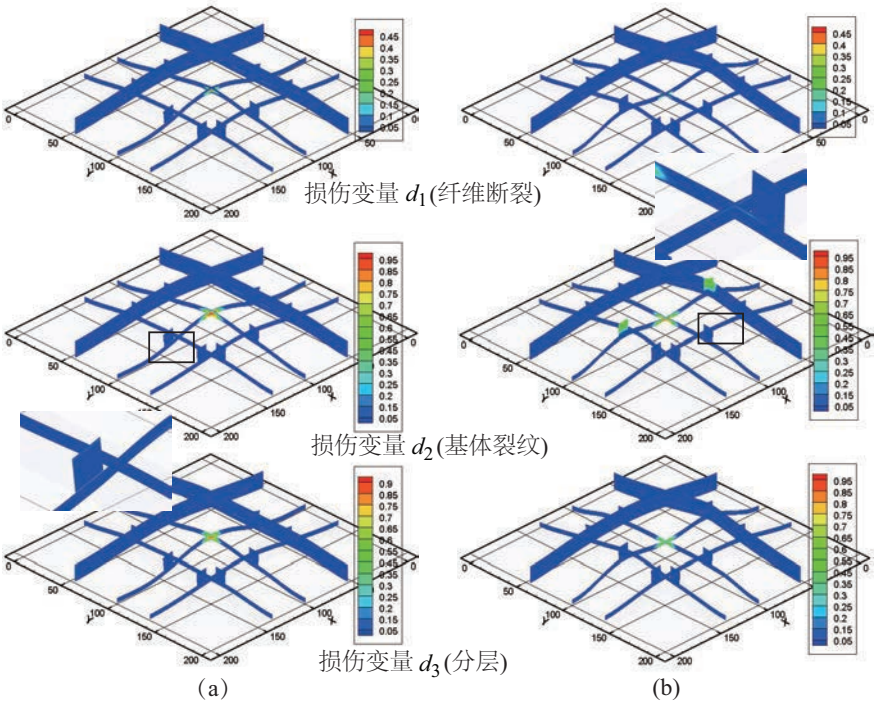


图 4.16　冲击速度对“井”字形加强复合材料层合板结构损伤变量分布的影响：(a) 冲击速度为 30 m/s；(b) 冲击速度为 35 m/s

出现弹性恢复后（冲击过程的后期），层合板的变形慢慢往加强筋围成的局部区域外扩展。在冲击过程中，纤维断裂损伤通常比较小 ($d_1 < 0.45$)，且主要集中在冲击接触区域。严重的基体裂纹和分层是层合板的主要损伤，纤维断裂损伤和分层主要是在第一个加载 -卸载阶段产生的，并主要集中在冲击区域，而基体裂纹在整个冲击过程中一直向冲击区域之外扩展，尤其是x 方向 (纤维方向) 加强筋的中间区域和 y 方向上加强筋与层合板的连接区域 (见图4.16(b) 中的小图)。因为层合板和加强筋的铺层顺序分别为 [0/90/0/90/0] 和 [0]，所以加筋结构x 方向上的刚度要大于 y 方向上的，这使得层合板和加强筋 y 方向上的变形要大于x 方向上的变形，进而导致了冲击损伤更容易在x 方向加强筋的中间区域和 y 方向上加强筋与层合板的连接区域中扩展。因此，在低速冲击载荷作用下，对于对称“井”字形加强复合材料层合板结构来说有三个危险区域：a) 冲击体和层合板的接触区域；b) 刚度较弱方向上加强筋的中间区域；c) 刚度较强方向上层合板与加强筋的连接区域。

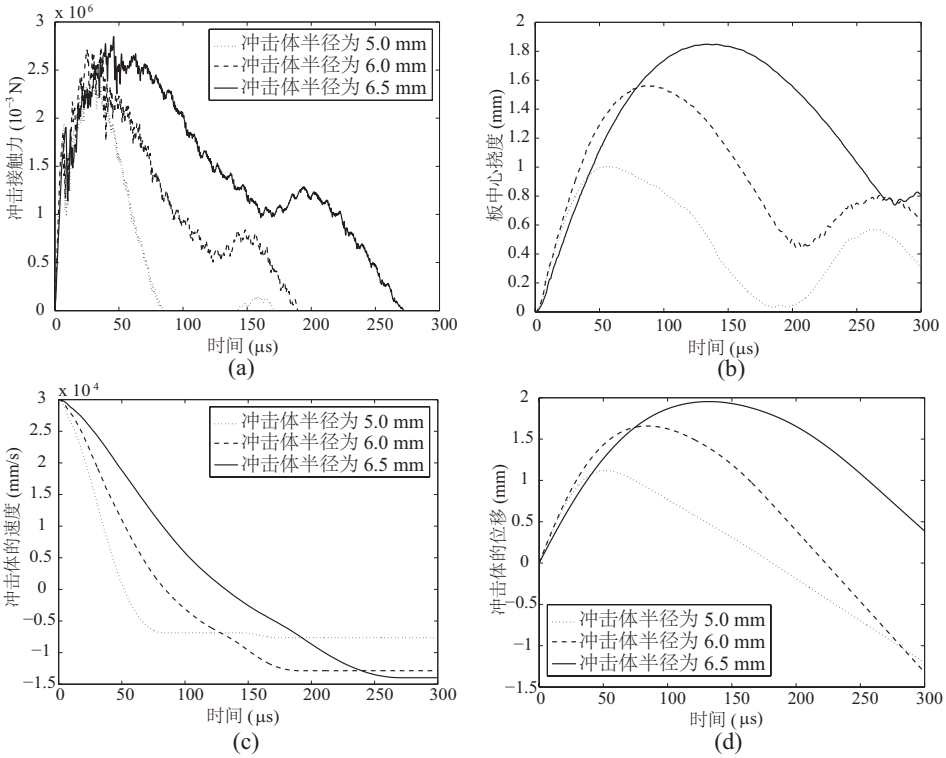


图 4.17 冲击体半径对“井”字形加强复合材料层合板低速冲击响应的影响：(a) 接触力；(b) 接触点位移；(c) 冲击体的速度；(d) 冲击体的位移

随着冲击速度的增加，纤维断裂和分层损伤的分布在层合板冲击区域附近的下表面上扩展，而基体裂纹损伤不仅在层合板冲击区域附近的下表面上扩展，而且还出现在 y 方向加强筋与层合板连接区域附近的上表面 (见图4.16(b)

中的小图)。另外，基体裂纹在x方向加强筋上的扩展非常快。

冲击体半径对“井”字形加筋复合材料层合板低速冲击响应的影响如图4.17所示，冲击体半径对损伤变量分布的影响如图4.18所示，图中的结果考虑了渐进损伤模型，冲击速度为 30m/s，加强筋的厚度为 7.0mm。从图中可以看出，因为冲击体的质量和 Hertz 接触律中的参数（见式 (4-4)）都随冲击体半径的增加而增加，所以冲击体半径对冲击响应有很大的影响。接触力、冲击完成时间、层合板接触点位移和冲击体位移均随冲击体半径的增加而快速增加，纤维断裂、基体裂纹和分层的损伤变量值和分布范围也随冲击体半径的增加而快速增加。

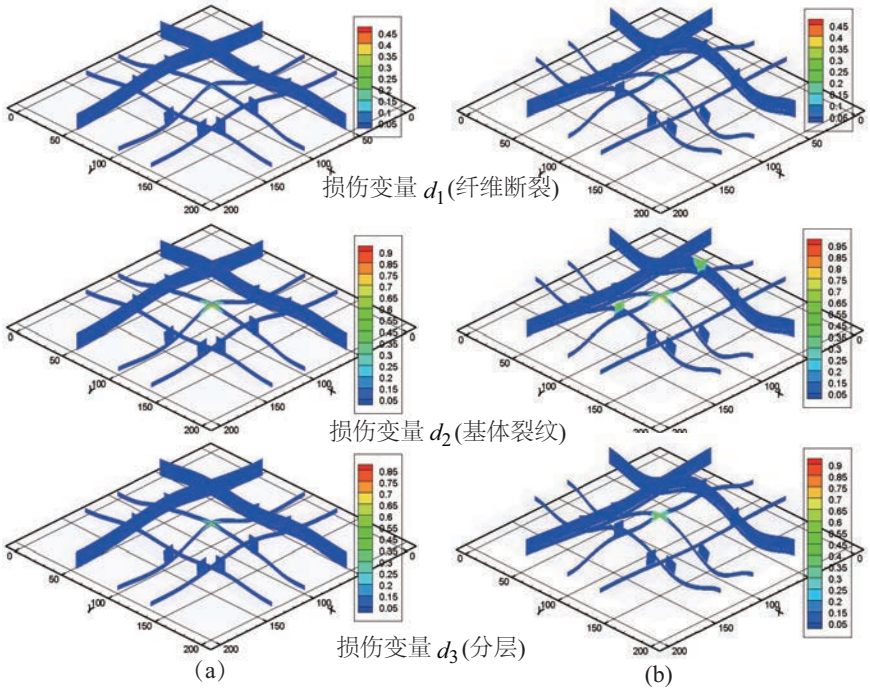


图 4.18　冲击体半径对“井”字形加强复合材料层合板结构损伤变量分布的影响：(a) 冲击体半径为 5.0 mm；(b) 冲击体半径为 7.0 mm.

加强筋厚度对“井”字形加筋复合材料层合板低速冲击响应的影响如图4.19所示，加强筋厚度对损伤变量分布的影响如图4.20所示，图中的结果考虑了渐进损伤模型，冲击速度为 30m/s，冲击体半径为 6.0mm。从图中可以看出，在第一个加载 -卸载过程中加强筋厚度对冲击响应几乎没有影响，主要原因是在第一个加载 -卸载过程中层合板的变形只是局限在冲击接触区域附近，即四根加强筋围成的矩形区域。第二个加载 -卸载过程中的接触力、冲击完成时间以及冲击体的剩余速度随着加强筋厚度的增加而增加。

因为加筋复合材料结构的整体刚度随加强筋厚度的增加而增加，所以纤

维断裂和分层的损伤变量随着加强筋厚度的增加而增加。然而，随着加强筋厚度的增加，x 方向上的基体裂纹先增加而后减小，见图4.16(a) 和图4.20。

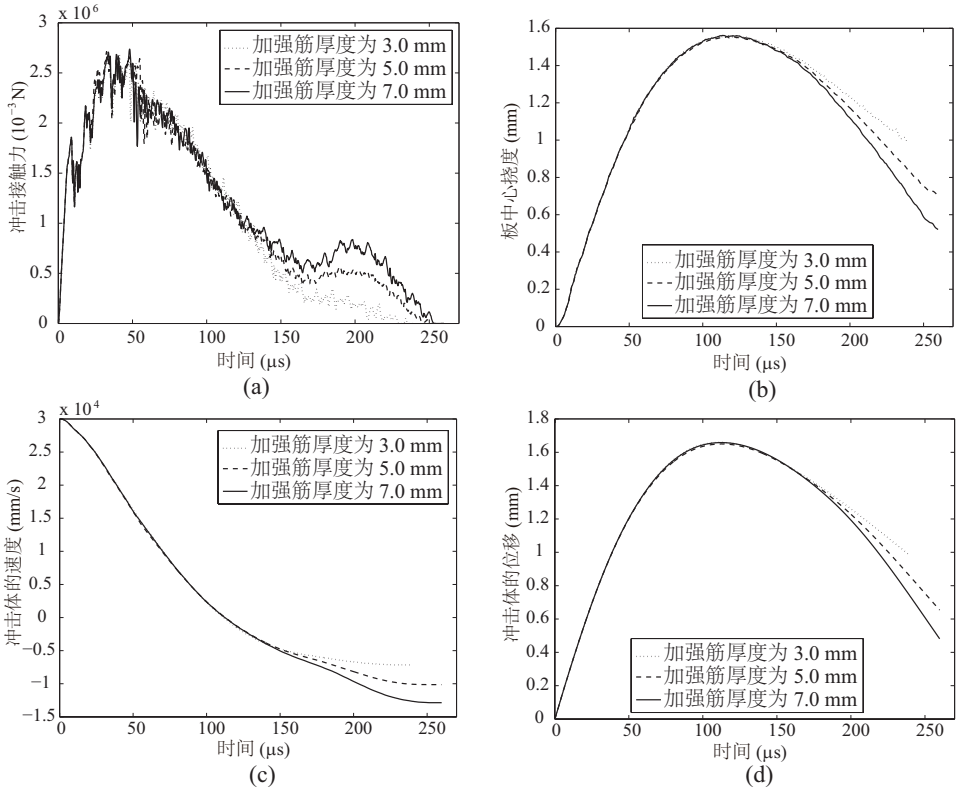


图 4.19 加强筋厚度对“井”字形加强复合材料层合板低速冲击响应的影响：(a) 接触力；(b) 接触点位移；(c) 冲击体的速度；(d) 冲击体的位移

4.3.3.2 平行加筋复合材料层合板结构

考虑和不考虑渐进损伤模型情况下，冲击速度对平行加强复合材料层合板结构低速冲击响应的影响如图4.21所示，其中冲击体半径为 6.0mm，加强筋厚度为 7.0mm。从图中可以看出，接触力、接触点位移、冲击体的速度以及冲击体的位移随着冲击速度增加而增加。冲击速度对接触力的影响，第一个过程比第二个过程更显著。层合板接触点位移和冲击体的位移随着冲击速度呈比例增长。

冲击速度为 40m/s 时，平行加强复合材料层合板结构的变形和损伤变量的时间历程如图4.22所示，冲击速度对损伤变量的影响如图4.23所示。在冲击的早期，层合板的变形局限在两条加强筋之间的区域，然后，当层合板出现弹性恢复后（冲击过程的后期），层合板的变形慢慢往加强筋围成的局部区域外扩展。损伤变量的值和分布范围都随冲击速度的增加而增加。

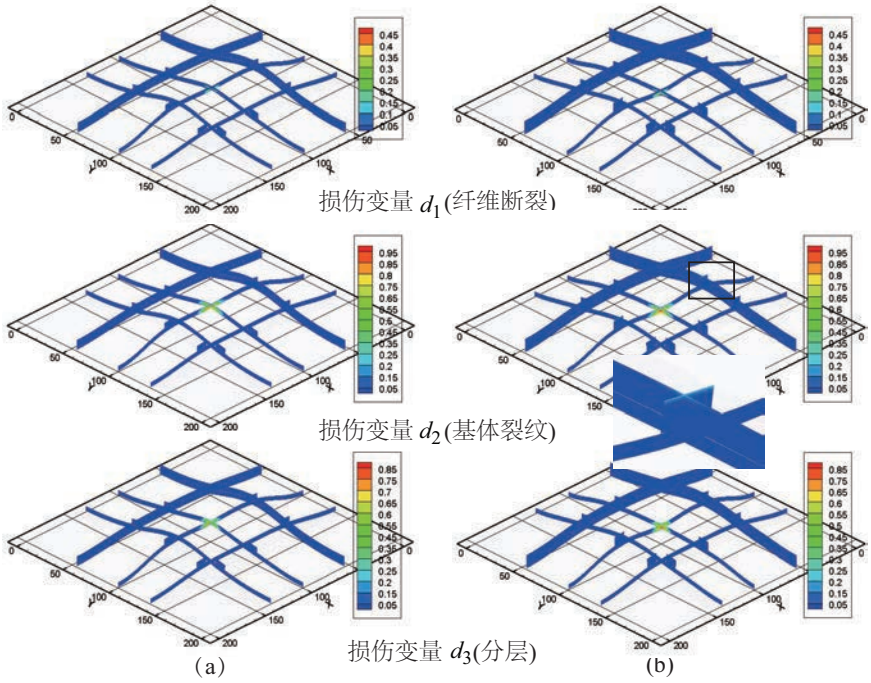


图 4.20　加强筋厚度对“井”字形加强复合材料层合板结构损伤变量分布的影响：(a) 加强筋厚度为 3.0 mm；(b) 加强筋厚度为 5.0 mm

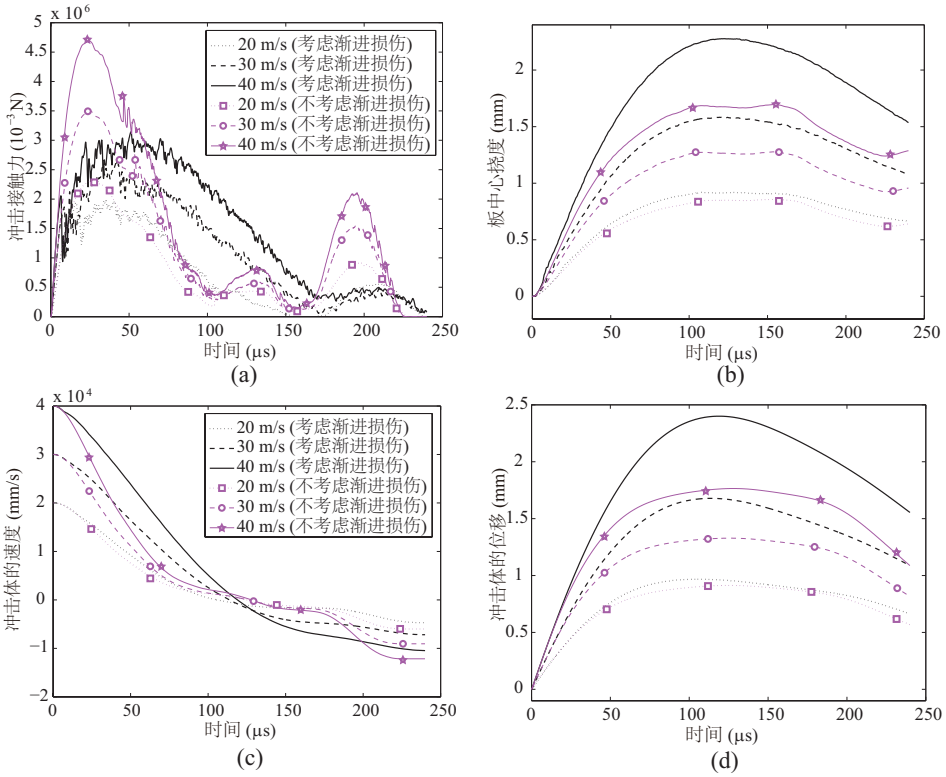


图 4.21　考虑和不考虑渐进损伤模型情况下冲击速度对平行加强复合材料层合板结构低速冲击响应的影响：(a) 接触力；(b) 接触点位移；(c) 冲击体的速度；(d) 冲击体的位移

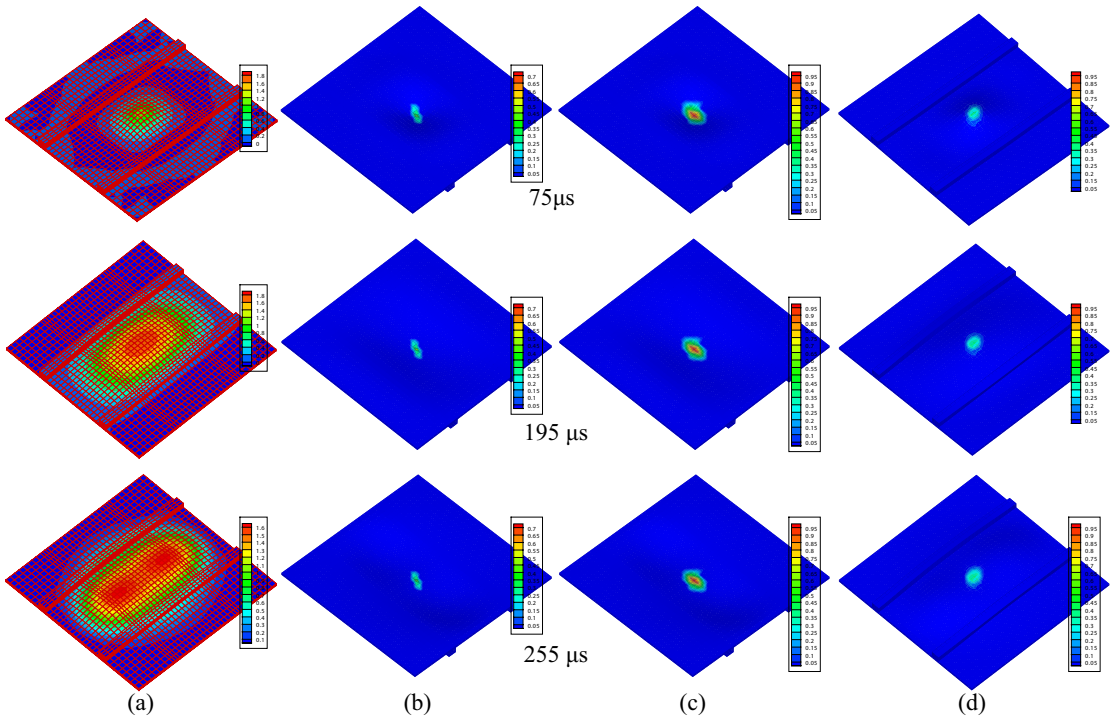


图 4.22　冲击速度为 40m/s 时平行加强复合材料层合板结构的变形和损伤变量的时间历程：(a) 变形和位移w 云图；(b) 损伤变量 d_1 (纤维断裂)；(c) 损伤变量 d_2 (基体裂纹)；(d) 损伤变量 d_3 (分层)

纤维断裂损伤变量非常小，而且局限在冲击体与层合板接触区域的附近。基体裂纹首先在接触点的上表面开始出现，第一个加载 -卸载过程中在接触点附近区域快速扩展，当层合板出现弹性恢复后（二次冲击），基体裂纹向层合板的下表面扩展，如图4.23(b) 所示。分层同样首先在接触点区域开始出现，第一个加载 -卸载过程中在接触点附近区域快速扩展。因此，在低速冲击载荷作用下，对于平行加强复合材料层合板结构来说有两个个危险区域：a) 冲击体和层合板的连接区域；b) 刚度较强方向上层合板与加强筋的连接区域。

冲击体半径对平行加强复合材料层合板结构低速冲击响应的影响如图4.24所示，冲击体半径对损伤变量值和分布的影响如图4.25所示，其中冲击速度为 30m/s，加强筋的厚度为 7.0mm。从图中可以看出，冲击体半径对平行加强复合材料层合板结构和冲击体的响应具有显著影响。接触力、冲击完成时间、层合板接触点位移和冲击体位移都随冲击体半径的增加而增加，纤维断裂、基体裂纹和分层的损伤变量值和分布范围也随冲击体半径的增加而快速增加。

加强筋厚度对平行加强复合材料层合板结构低速冲击响应的影响如图4.26所示，冲击速度为 30m/s，冲击体半径为 6.0mm。与“井”字形加强复

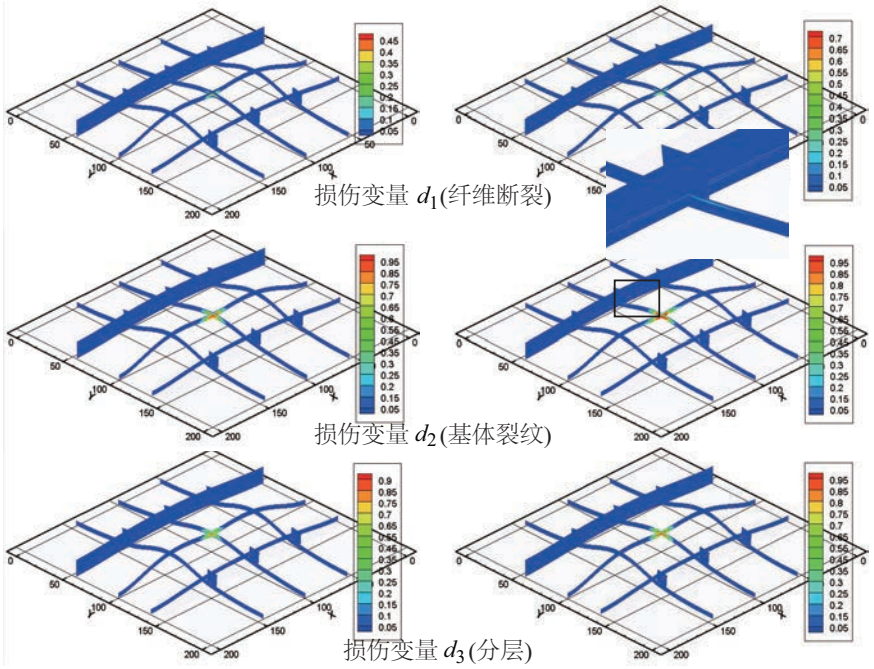


图 4.23　冲击速度对平行加强复合材料层合板结构损伤变量分布的影响：(a) 冲击速度为 30 m/s；(b) 冲击速度为 40 m/s

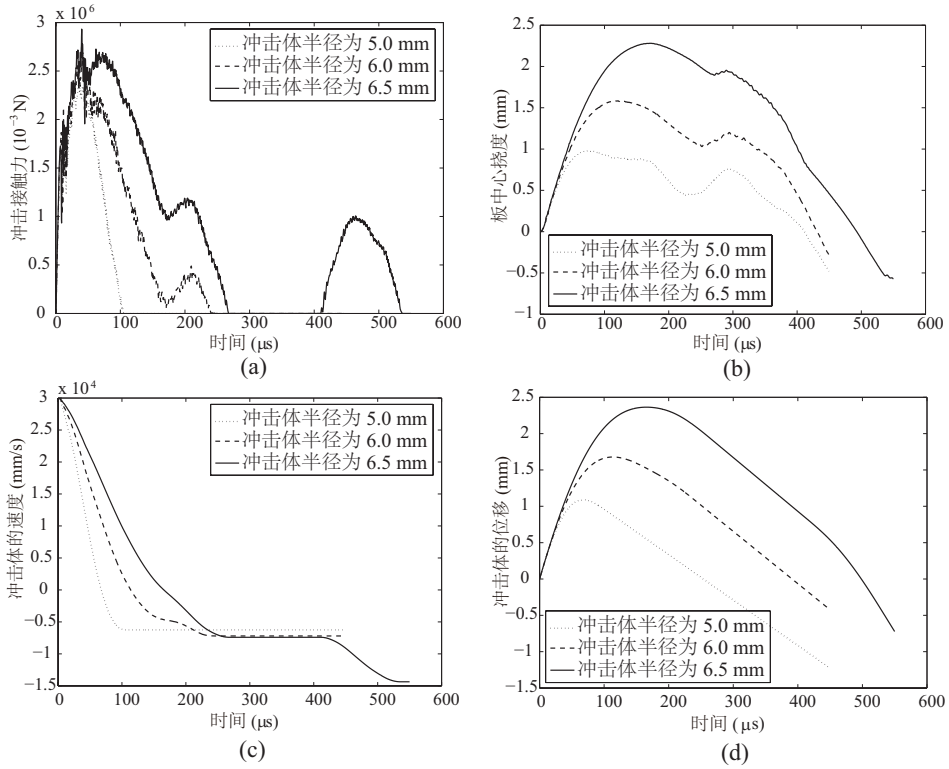


图 4.24　冲击体半径对平行加强复合材料层合板结构低速冲击响应的影响：(a) 接触力；(b) 接触点位移；(c) 冲击体的速度；(d) 冲击体的位移

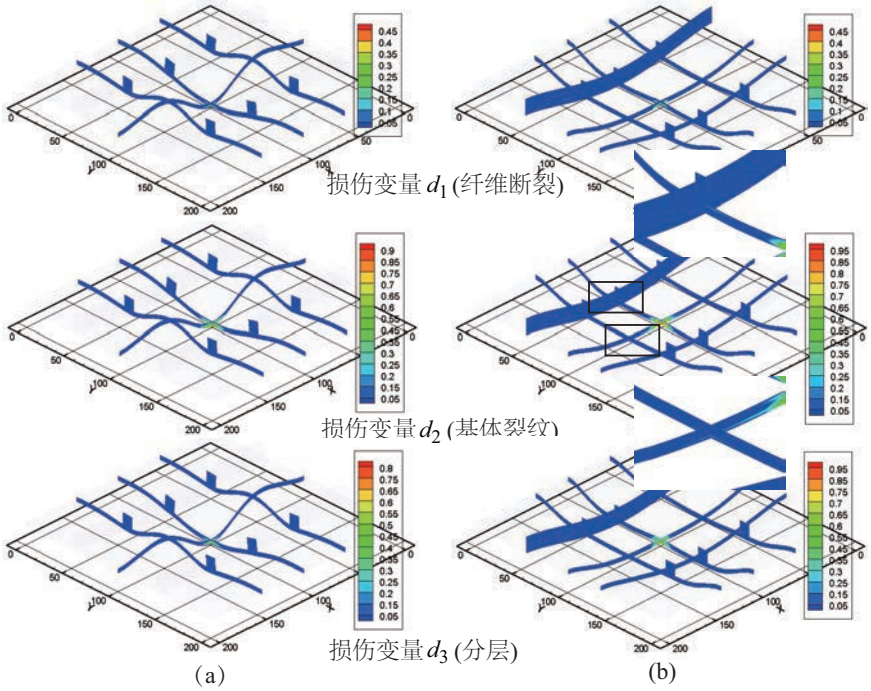


图 4.25　冲击体半径对平行加强复合材料层合板结构损伤变量分布的影响：(a) 冲击体半径为 5.0 mm；(b) 冲击体半径为 7.0 mm.

合材料层合板结构类似的是，在第一个加载 -卸载过程中加强筋厚度对平行加强复合材料层合板结构的冲击响应几乎没有影响，第二个加载 -卸载过程中的接触力、冲击完成时间以及冲击体的剩余速度随着加强筋厚度的增加而增加。加强筋厚度对平行加强复合材料层合板结构损伤变量分布的影响如图4.27所示，加强筋厚度对平行加强复合材料层合板结构的纤维断裂和基体裂纹没有明显影响，但分层损伤随着加强筋厚度的增加而轻微地增加。

表 4.3　各参数对冲击体剩余速度的影响

参数	冲击速度	“井”字形加强		平行加强	
		剩余速度v_r	$v_r/v_0\times100$	剩余速度v_r	$v_r/v_0\times100$
冲击速度	20 m/s	8.3303	41.6515	4.7011	23.5155
	30 m/s	12.8645	42.8817	7.1945	23.9817
	40 (35) m/s	15.2766	43.6474	10.4774	26.1935
冲击体半径	5.0 mm	7.6256	25.4187	6.2506	20.8353
	6.0 mm	12.8645	42.8817	7.1945	23.9817
	7.0 (6.5) mm	13.9746	46.5820	14.3573	47.8577
加强筋厚度	3.0 mm	7.1551	23.8503	5.4546	18.1820
	5.0 mm	10.1293	33.7643	6.3986	21.3287
	7.0 mm	12.8645	42.8817	7.1945	23.9817

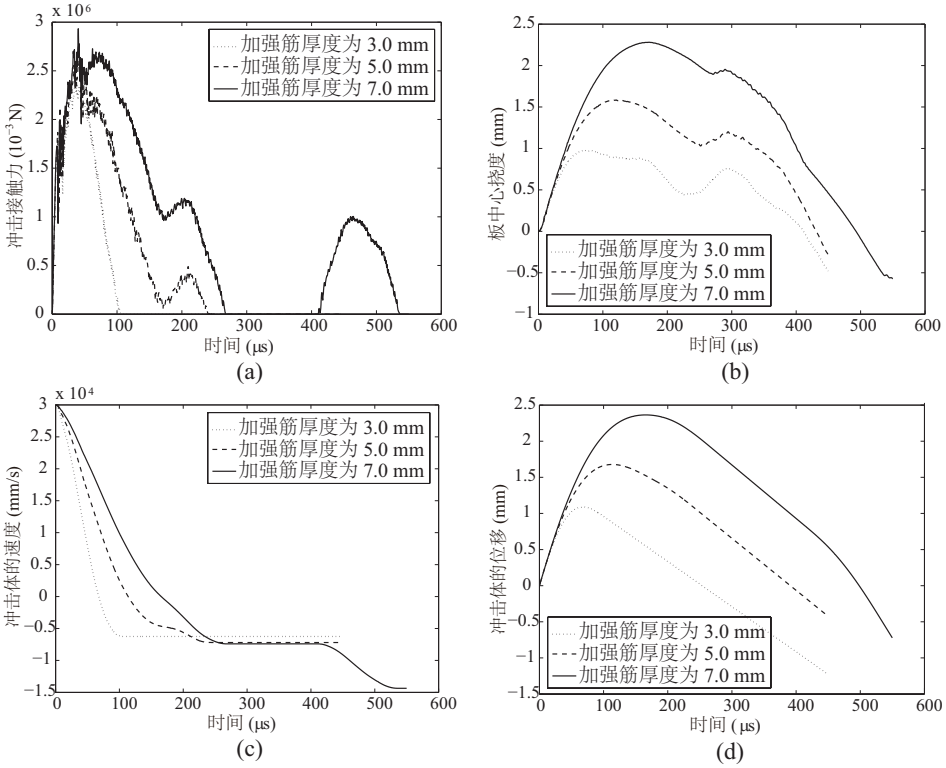


图 4.26　加强筋厚度对平行加强复合材料层合板结构低速冲击响应的影响：(a) 接触力；(b) 接触点位移；(c) 冲击体的速度；(d) 冲击体的位移

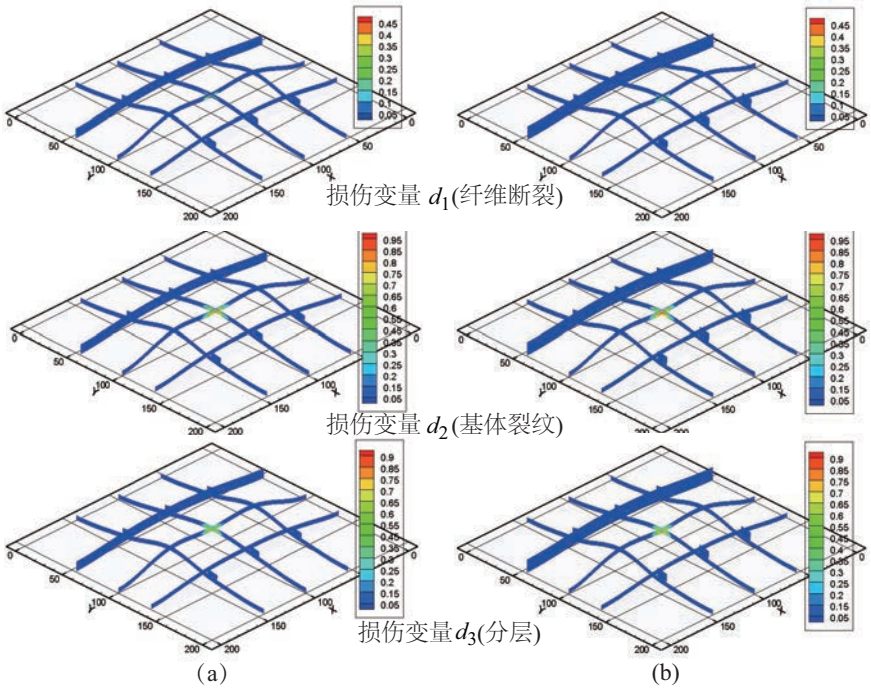


图 4.27　加强筋厚度对平行加强复合材料层合板结构损伤变量分布的影响：(a) 加强筋厚度为 3.0 mm；(b) 加强筋厚度为 5.0 mm

各参数对冲击体剩余速度的影响见表4.3，表中“井”字形加强复合材料层合板结构采用括号内的冲击速度。从表中可以看出，剩余速度占冲击速度的百分比随着冲击速度、冲击体半径和加强筋厚度的增加而增加。“井”字形加强复合材料层合板结构的剩余速度占冲击速度的百分比大于平行加强复合材料层合板结构的，所以平行加强复合材料层合板结构的能量吸收要比“井”字形加强复合材料层合板结构好。对比本文研究的两种加筋复合材料层合板结构可以发现，在同样的冲击载荷作用下，“井”字形加强复合材料层合板结构接触点的位移小于平行加强复合材料层合板结构的，然而冲击损伤则刚好相反，因此，加筋复合材料层合板结构的抗冲击性能与结构的刚度性能是相互矛盾的。

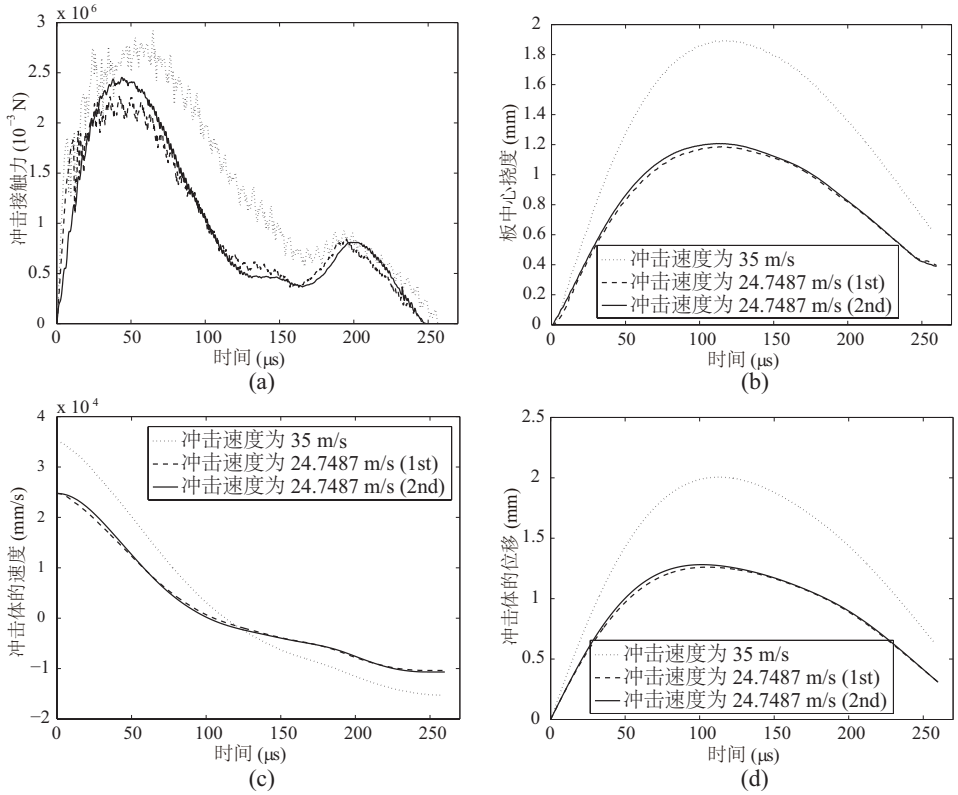


图 4.28　“井”字形加强复合材料层合板结构多次低速冲击下的响应：(a) 接触力；(b) 接触点位移；(c) 冲击体的速度；(d) 冲击体的位移

4.3.4　受多次低速冲击复合材料加筋层合板结构

低速冲击载荷引起的内部损伤将显著地降低复合材料层合结构的刚度和强度，而且这些内部损伤是目视不可检查的，在没有得到及时检查和维修的情况下这些内部损伤将不可避免地引起结构突然破坏，而这些结构在外观上

是毫无损伤的。因此，为了保证安全，有必要研究复合材料结构在多次低速冲击载荷作用下的响应和损伤问题。虽然复合材料结构的单次低速冲击问题已经得到了系统深入地研究，但关注多次低速冲击损伤问题的研究工作还很少[168]，尤其是对于加筋复合材料结构来说。本节将基于本文方法研究加筋复合材料层合板结构的多次低速冲击响应和损伤累积问题，在本节的多次低速冲击分析过程中，除了材料性能参数外复合材料结构的所有参数保持不变，因为材料参数在分析过程中将根据损伤退化，加筋复合材料层合板的材料参数和几何参数与上节采用的相同。

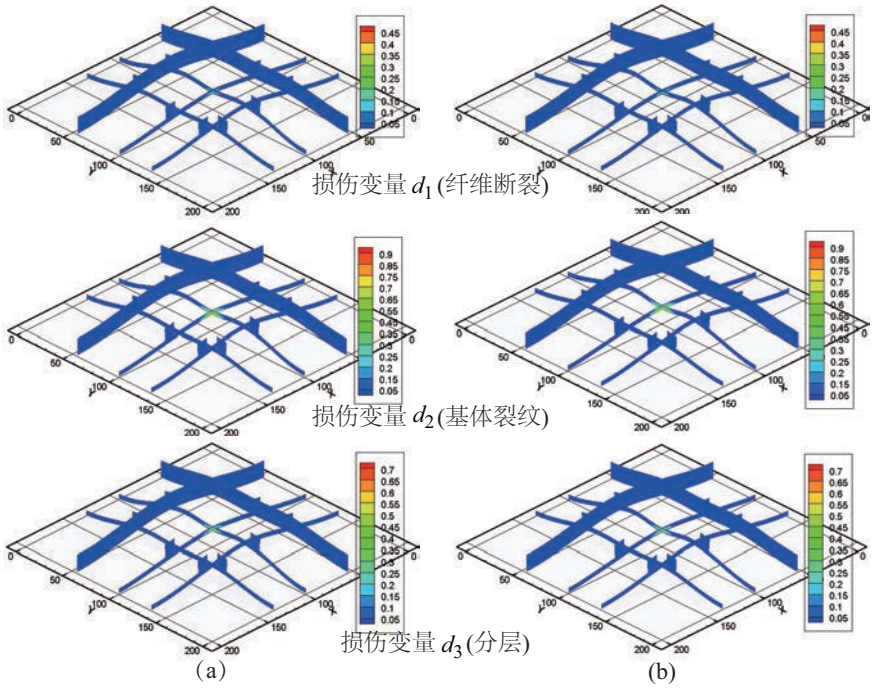


图 4.29　“井”字形加强复合材料层合板结构多次低速冲击下的损伤变量：(a) 第一次冲击；(b) 第二次冲击

“井”字形加强复合材料层合板结构多次低速冲击作用下的响应如图4.28所示，在本算例中，加强筋的厚度为 7.0mm，冲击体的半径为 6.0mm，第一和第二次冲击的冲击速度均为 24.7487m/s，两次冲击的总能量相当于 35m/s 的冲击能量。在第一个加载 - 卸载过程中，第一次冲击过程中接触力加载速度比第二次冲击的更大，而第一次冲击的接触力最大值要比第二次冲击的小，这是因为第一次冲击引起的损伤使得层合板接触点附近区域的刚度明显降低。在第二个加载 -卸载过程中，第一次和第二次冲击过程中的接触力最大值几乎相等。虽然第一次冲击过程中二次冲击出现的时间要早于第一次冲击，但整个冲击过程的结束时间是几乎相同的。对于 35m/s 的单次冲击来说，剩余速度占冲击

速度的百分比为 43.6474%(剩余速度为 15.2766m/s)。对于 24.7487m/s 的两次冲击来说，第一次和第二次的剩余速度占冲击速度的百分比分别为 41.9060%(剩余速度为 10.3712m/s) 和 43.1178%(剩余速度为 10.6711m/s)。由于损伤的累积作用，第二次冲击过程中层合板接触点位移和冲击体位移要大于第一次冲击。

“井”字形加强复合材料层合板结构多次低速冲击下的损伤变量如图4.29所示。虽然两次冲击的总能量相当于 35m/s 的冲击能量，但相较于 35m/s 单次冲击引起的损伤 (如图4.16所示)，多次冲击累积成的内部损伤要小。虽然第一次和第二次冲击各自产生的损伤很有限，但第二次冲击还是进一步扩大了复合材料层合板的损伤范围，这体现了重复低能量冲击损伤的累积效应，而且这种损伤累积过程是目视不可检的，只能通过无损探伤发现，所以复合材料结构在重复低能量冲击载荷作用下容易导致突然破坏，多次重复低能量冲击的危害性往往要比单次大能量冲击更大。

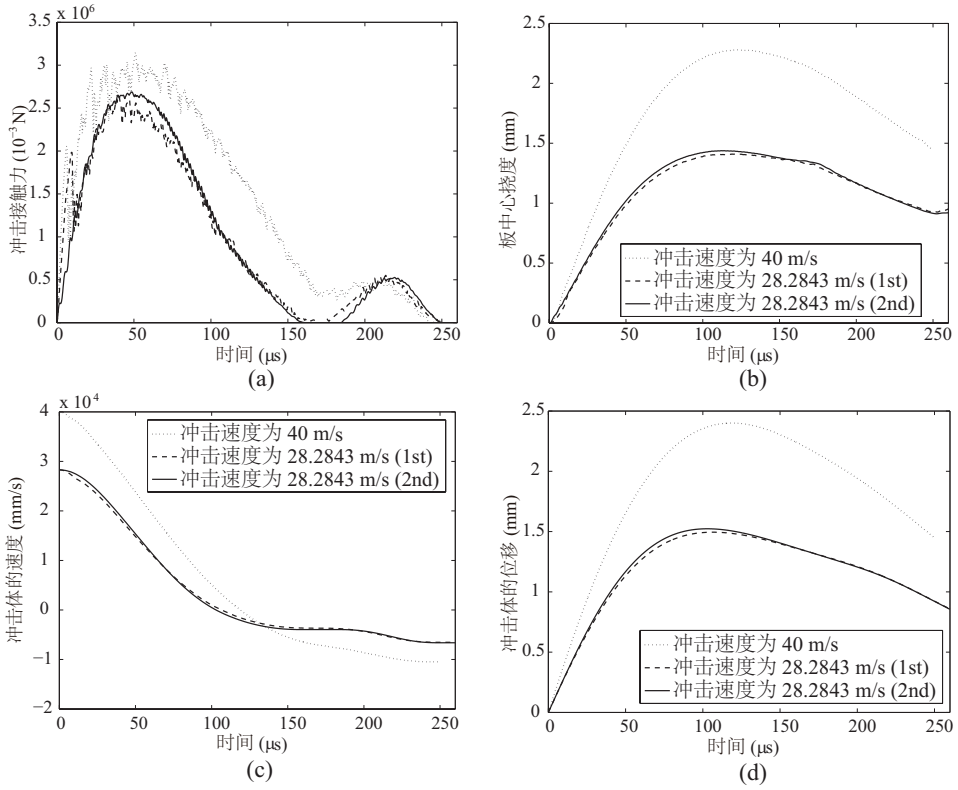


图 4.30 平行加强复合材料层合板结构多次低速冲击下的响应：(a) 接触力；(b) 接触点位移；(c) 冲击体的速度；(d) 冲击体的位移

平行加强复合材料层合板结构多次低速冲击下的响应如图4.28所示，多次低速冲击下的损伤变量如图4.31所示，其中加强筋的厚度为 7.0mm，冲击体的半径为 6.0mm，第一和第二次冲击的冲击速度均为 28.2843m/s，两次冲击的总

能量相当于 40m/s 的冲击能量。对于 40m/s 的单次冲击来说，剩余速度占冲击速度的百分比为 26.19%(剩余速度为 10.4770m/s)。对于 28.2843m/s 的两次冲击来说，第一次和第二次的剩余速度占冲击速度的百分比分别为23.0969%(剩余速度为 6.5328m/s) 和 23.4218%(剩余速度为 6.6247m/s)。

从图4.28和图4.31可以看出，平行加强复合材料层合板结构的多次低能量冲击特性与“井”字形加强复合材料层合板结构的类似，在第一个加载 -卸载过程中，第一次冲击过程中接触力的加载速度比第二次冲击的更大。在第二个加载 -卸载过程中，第一次和第二次冲击过程中的接触力最大值几乎相等。

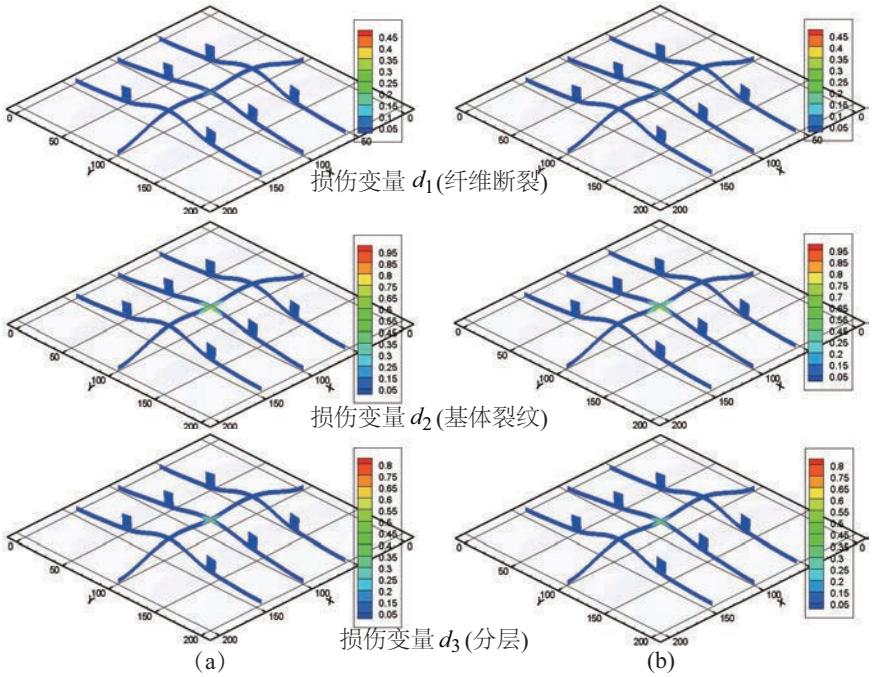


图 4.31　平行加强复合材料层合板结构多次低速冲击下的损伤变量：(a) 第一次冲击；(b) 第二次冲击

4.3.5　低速冲击复合材料蜂窝夹芯结构

本算例的目的是研究全局模型和局部模型在复合材料夹芯结构低速冲击问题上的应用情况，此处，复合材料蜂窝夹芯结构的材料性能、几何参数、边界条件和网格划分与第三章中的相同。上下面板的铺层顺序均为 [0/90/90/0]。

首先利用瞬态响应分析算例来验证本文编写程序的正确性，载荷为上面板中心点单位幅值的正弦集中载荷，周期为 1s。逐层/实体元方法和 MSC 计算得到的夹芯结构下面板中心点位移 u_3 的时程曲线对比如图4.32所示，图中逐层/实体元方法采用了夹芯结构全局模型，从图中的对比可知逐层/实体元方法

的分析结果与 MSC 的吻合很好，证明了本文所编写的基于逐层/实体元方法进行复合材料夹芯结构瞬态响应分析的程序是正确可靠的。

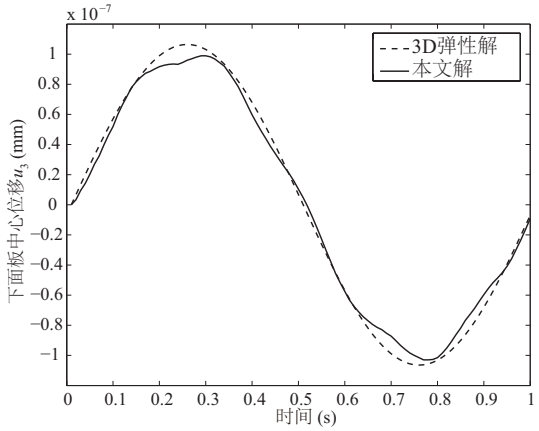


图 4.32 逐层/实体元方法（全局模型）和 MSC 计算得到复合材料夹芯结构下面板中心点位移 u_3 的时程曲线

在 10m/s 和 15m/s 两种速度冲击载荷作用下，全局模型和局部模型计算得到的冲击响应曲线如图4.33所示，15m/s 冲击载荷作用下夹芯结构的变形如图4.35所示，其中冲击体的半径为 6.0mm，力学性能和密度与前文算例中的相同，没有考虑复合材料面板和芯子的渐进损伤，冲击体的冲击载荷作用在下面板上，面板的厚度为 2mm。从冲击响应曲线可以看出，两种模型计算得到的接触力和冲体的速度在整个冲击过程中几乎一致。对于复合材料面板的中心点挠度，在冲击过程中两种模型的分析结构吻合很好，尤其是下面板的中心点挠度。在冲击完成之后的自由振动过程中两种模型分析的中心点挠度差别比较大，局部模型的振动幅值要小，但该过程的结构响应对结构的损伤几乎没有影响。从结构整体变形时间历程可以看出，与全局模型相比，局部模型完全精确地得到了冲击初期的局部效应，而这些局部效应对损伤的预测是至关重要的。因此，在进行复合材料夹芯结构的中低速冲击分析中，局部模型在大量减少计算量的情况下，并没有损失分析精度。

从图4.33中的冲击响应可知，接触力的最大值随冲击速度的增加而增加，冲击完成时间则刚好相反，但冲击速度对冲击完成时间的影响不是很明显。上下面板的中心点挠度均随冲击速度的增加而增加，冲击完成之后不同冲击速度引起的自由振动的相位不同，且随冲击速度的增加而增加，即随冲击速度的增加自由振动的相位后移。在冲击过程中，上下面板的响应明显不同，且上面板的挠度要远小于下面板的，这种显现是其它传统复合材料夹芯结构分析方法所不能得到的。但冲击完成之后，上下面板的振动是一致的，如图4.34

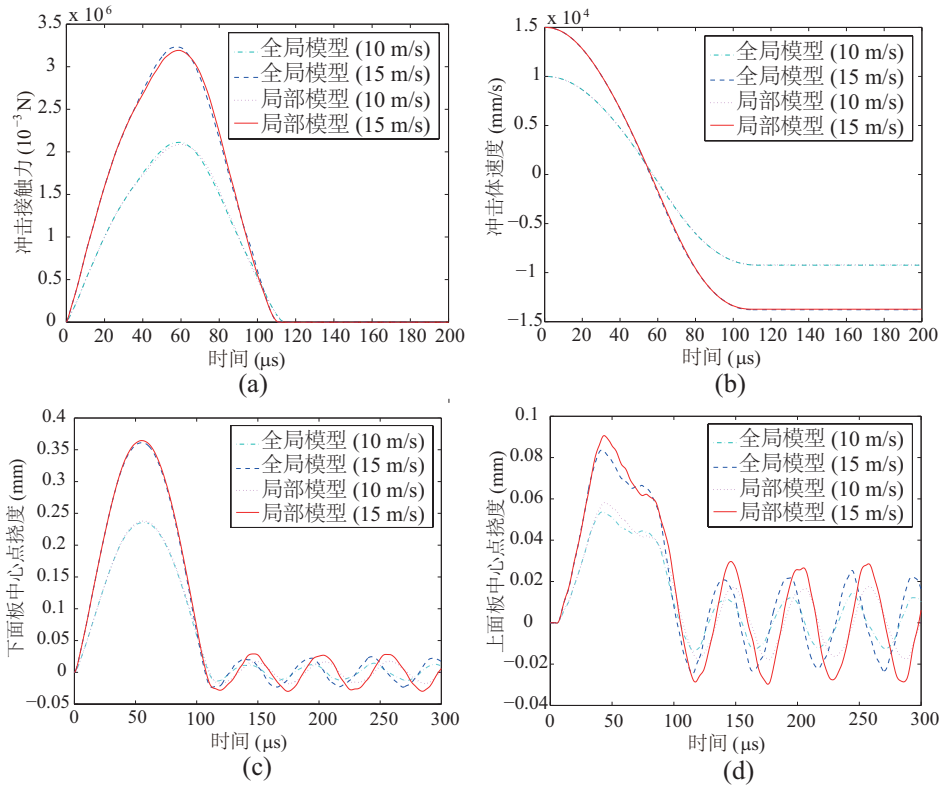


图 4.33　全局模型和局部模型计算得到的冲击响应曲线：(a) 接触力；(b) 冲击体的速度；(c) 下面板中下点挠度；(d) 上面板中下点挠度

所示。

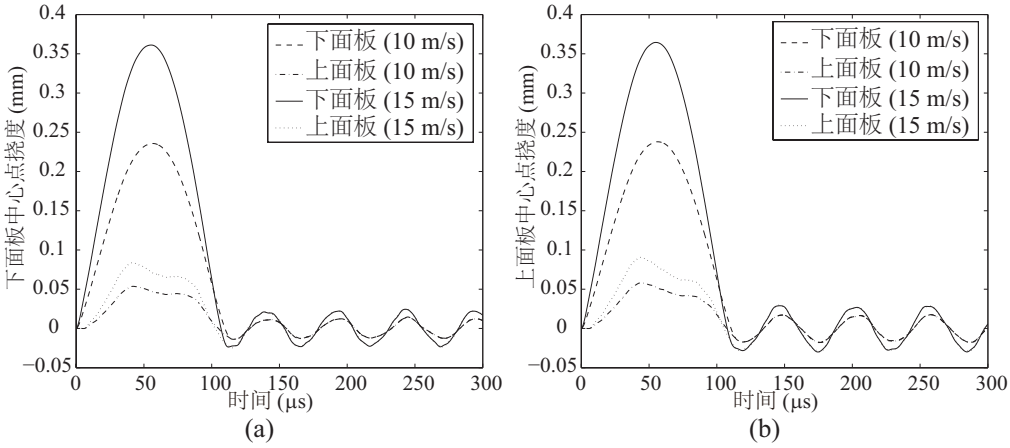


图 4.34　上下面板中心点挠度时程响应对比：(a) 全局模型；(b) 局部模型

图4.36给出了面板厚度不同情况下局部模型计算得到的冲击响应曲线，其中冲击速度为 15m/s，冲击体的半径为 6.0mm。因为夹芯结构的整体刚度会随面板厚度的增加而增加，所以冲击接触力随面板厚度增加而增加，而冲击完成时间随面板厚度的增加而减少。冲击体的剩余速度随面板厚度的增加而减

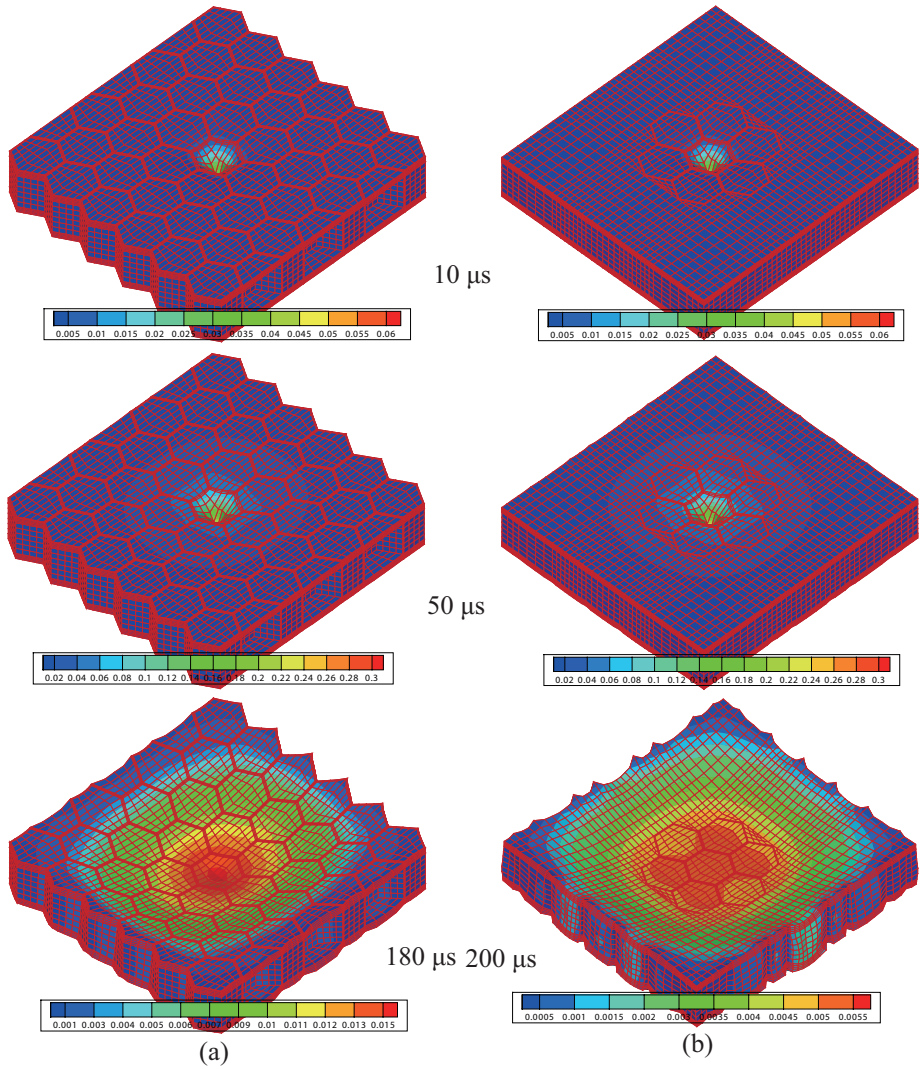


图 4.35　全局模型和局部模型计算得到的夹芯板变形图：(a) 全局模型；(b) 局部模型

小，但减小的幅度不大。上下面板挠度的最大值均随面板厚度的增加而增加，下面板的增大幅值要更明显。

下文将考虑面板和芯子结构的渐进损伤，研究面板的强度参数和断裂能见表4.1，其中冲击速度为 10m/s，冲击体的半径为 6.0mm，上下面板的厚度为 2mm。芯子结构的损伤起始和累积的算法与面板的相同，但只考虑损伤变量 d_2。芯子结构的强度参数和断裂能为：

$\sigma_{11}^{\mathrm{f,t}}=\sigma_{22}^{\mathrm{f,t}}=\sigma_{33}^{\mathrm{f,t}}=150\,\mathrm{Mpa}$，$\sigma_{11}^{\mathrm{f,c}}=\sigma_{22}^{\mathrm{f,c}}=\sigma_{33}^{\mathrm{f,c}}=155\,\mathrm{Mpa}$，

$\sigma_{12}^{\mathrm{f}}=\sigma_{13}^{\mathrm{f}}=\sigma_{23}^{\mathrm{f}}=55\,\mathrm{Mpa}$，$G_{\mathrm{t},1}=G_{\mathrm{c},1}=G_{\mathrm{t},2}=G_{\mathrm{c},2}=G_{\mathrm{t},3}=G_{\mathrm{c},3}=10\,\mathrm{N/mm}$。

考虑渐进损伤的复合材料夹芯结构的冲击响应如图4.37所示，考虑渐进损伤之后接触力以及上下面板的挠度的计算结果要明显小于未考虑渐进损伤的。在冲击完成后的自由振动过程中，上下面板的振动仍然是一致的。

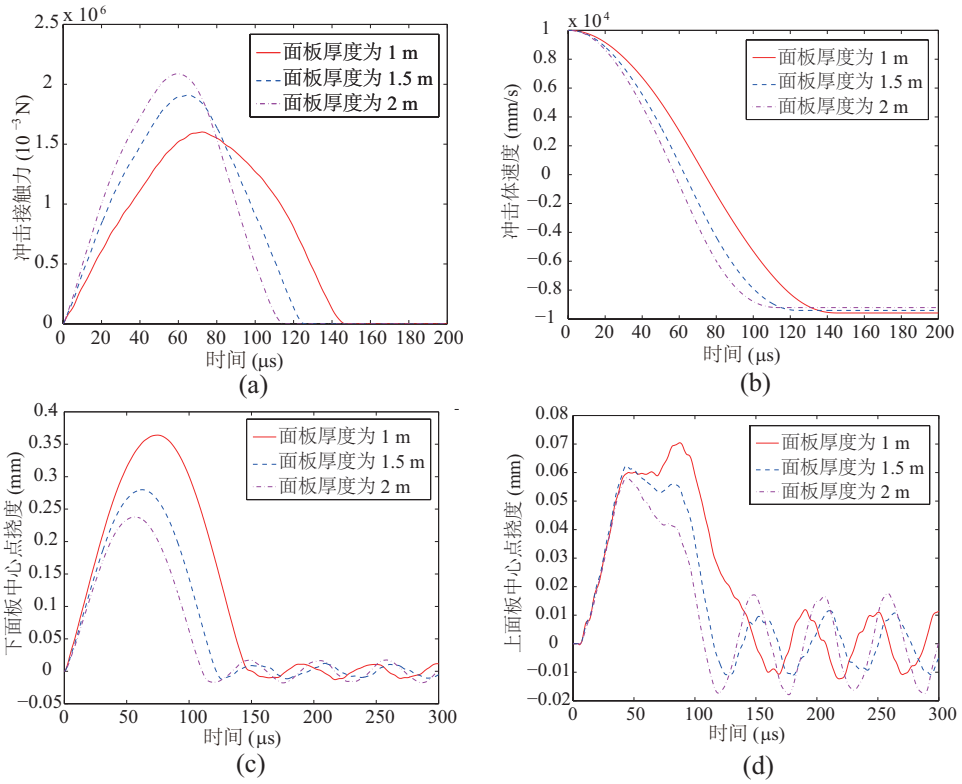


图 4.36　面板厚度不同情况下局部模型计算得到的冲击响应曲线：(a) 接触力；(b) 冲击体的速度；(c) 下面板中下点挠度；(d) 上面板中下点挠度

图4.38和4.39分别给出了芯子和上下面板损伤变量随时间的累积过程，从图中可知，芯子结构的损伤从靠近下面板（冲击载荷作用的面板）一侧的角上起始，并向周边扩展，但只是集中在靠近下面板一侧。在低速冲击载荷作用下，损伤主要出现在下面板上，纤维损伤只出现在接触区域附近，损伤主要由基体裂纹和分层损伤贡献，且损伤的扩展受到了芯子结构的限制。

4.4　本章小结

基于修正后的非线性 Hertz 接触律和渐进损伤模型，本章建立了加筋复合材料层合结构和蜂窝夹芯结构的低速冲击响应分析和损伤预测方法。在该方法中，加筋复合材料层合结构和蜂窝夹芯结构的瞬态响应分析模型是利用逐层/实体元方法和 Newmark 方法建立的，基于非线性 Hertz 接触律与复合材料结构的瞬态响应分析模型耦合计算冲击接触力，利用三维 Hashin 准则和连续损伤退化模型组成的渐进损伤模型进行冲击损伤起始和累积的预测。通过与文献结果对比，验证了本文方法的正确性，并研究了冲击速度、冲击体半径和加强筋厚度对加筋复合材料层合板结构冲击响应和损伤的影响。另外，利

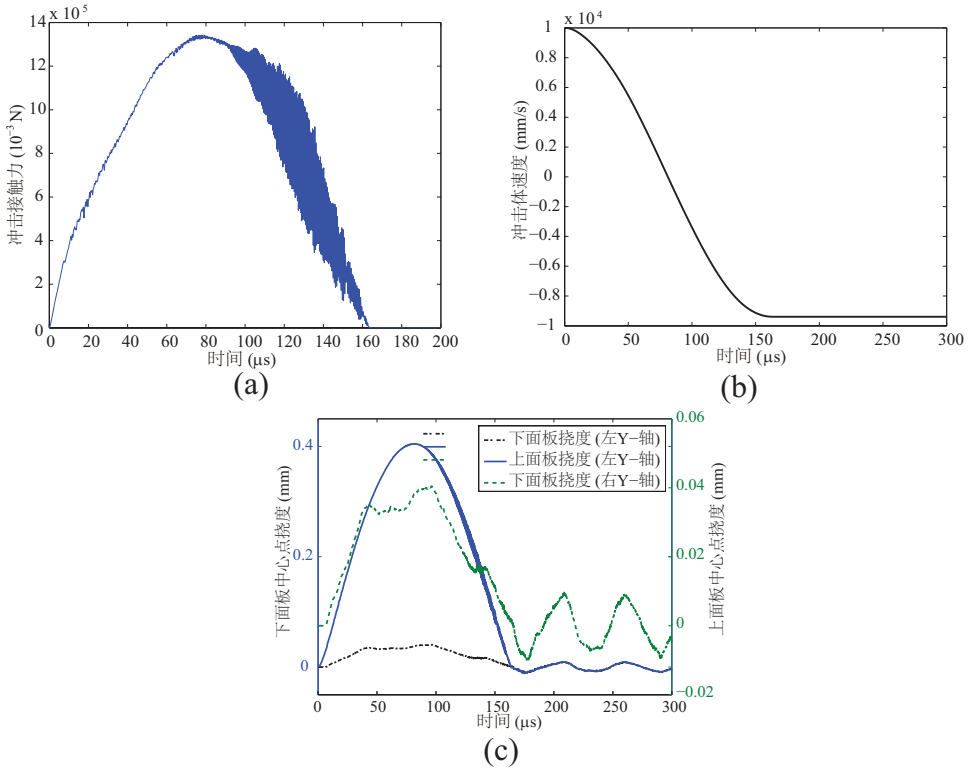


图 4.37　考虑渐进损伤复合材料夹芯结构的冲击响应：(a) 接触力；(b) 冲击体的速度；(c) 上下面板中心点的挠度

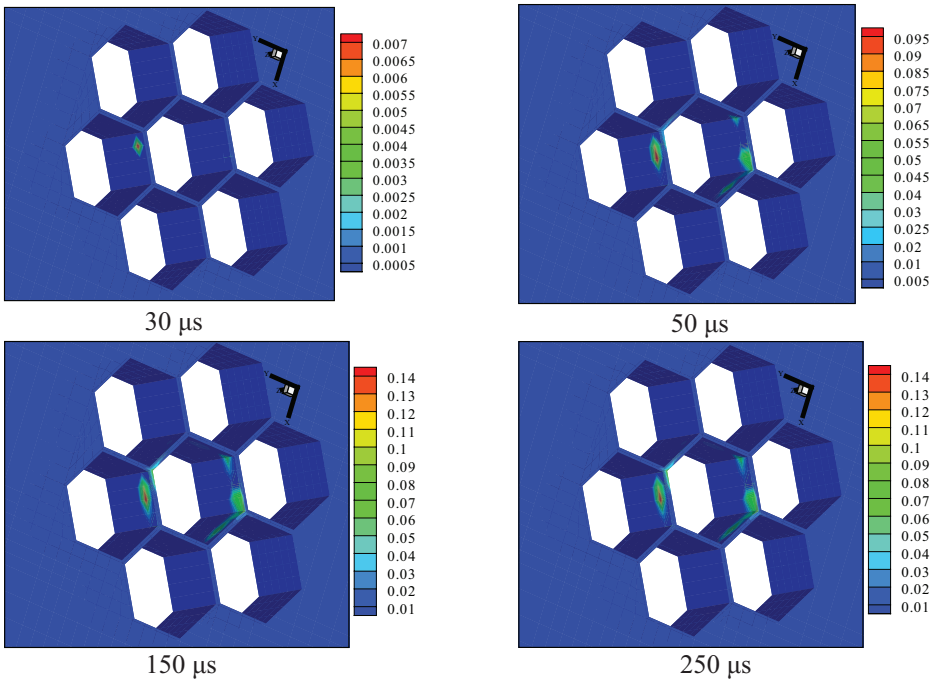


图 4.38　芯子结构的损伤随时间的累积过程

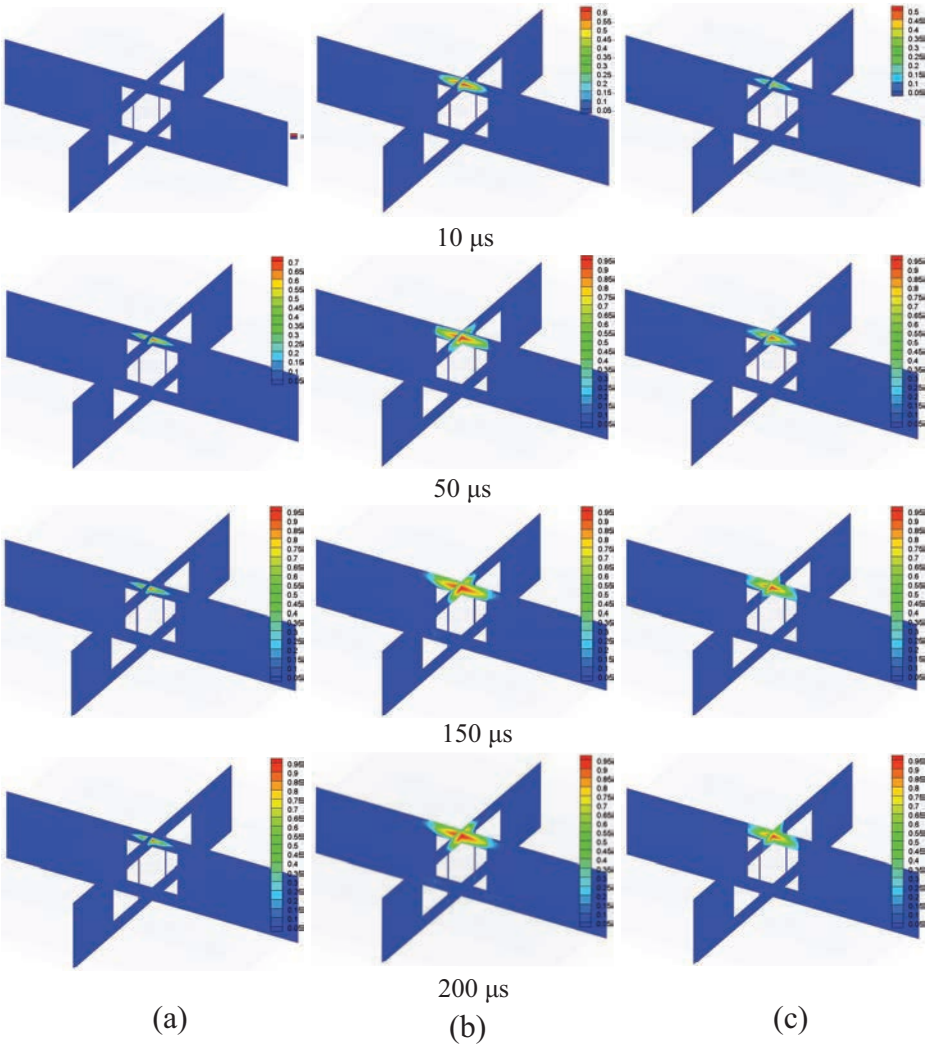


图 4.39　复合材料夹芯结构上下面板损伤变量随时间的累积过程：(a) 损伤变量 d_1 (纤维断裂)；(b) 损伤变量 d_2 (基体裂纹)；(c) 损伤变量 d_3 (分层)

用本文方法研究了加筋复合材料层合板结构的多次低能量冲击问题。对于复合材料蜂窝夹芯结构，通过数值算例对比研究了全局模型和局部模型在低速冲击问题中的应用情况。

1. 本文方法可以在没有任何加强筋简化和假设的情况下精确地计算层合板和加强筋的位移和应变，结合渐进损伤模型可以精确地预测加筋复合材料结构冲击损伤的起始和累积过程；
2. 如果不考虑复合材料结构的冲击损伤，除了二次冲击最大接触力之外，等效冲击载荷的作用点在厚度方向上的位置对冲击响应几乎没有影响。当考虑结构冲击损伤时，等效冲击载荷的作用点在厚度方向上的位置对冲击响应具有显著影响。数值算例结果表明，为了得到合理准确的冲击响应和损伤预测结果，本文方法中的等效冲击载荷应该作用在复合材料

层合板的中性面上；

3. 因为纤维的拉伸强度很大，由纤维断裂和屈曲引起的损伤仅局限在冲击接触区域，所以在中低速冲击载荷作用下复合材料加筋层合结构的主要损伤是基体裂纹和层间分层。但是随着冲击能量的增加基体裂纹将向远离接触点的区域扩展；
4. 在低速冲击载荷作用下，对于对称“井”字形加强复合材料层合板结构来说有三个危险区域：a) 冲击体和层合板的接触区域；b) 刚度较弱方向上加强筋的中间区域；c) 刚度较强方向上层合板与加强筋连接区域。对于平行加强复合材料层合板结构来说有两个个危险区域：a) 冲击体和层合板的接触区域；b) 刚度较强方向上层合板与加强筋连接区域；
5. 复合材料结构在重复低能量冲击载荷作用下容易导致突然破坏，多次重复低能量冲击的危害性往往要比单次大能量冲击更大；
6. 在进行复合材料夹芯结构的中低速冲击分析中，局部模型在大量减少计算量的情况下，并没有损失分析精度，且能完全精确地得到了冲击初期的局部效应；
7. 在冲击载荷作用过程中，复合材料夹芯结构上下面板的响应明显不同，且冲击载荷作用面板的变形要远大于另一面板。然而，在冲击完成后的自由振动过程中，上下面板的振动一致；
8. 复合材料夹芯结构在低速冲击载荷作用下，损伤主要出现在冲击载荷作用的面板上，纤维损伤只出现在接触区域附近，损伤主要由基体裂纹和分层损伤贡献，且损伤的扩展受到了芯子结构的限制。

由于计算冲击接触力的非线性 Hertz 接触律是针对中低速的，所以本文方法只能用于分析复合材料结构的中低速冲击问题。由于本文采用的是复合材料典型损伤准则，所以并不能直接用于结构的宏观损伤分析问题。

第 5 章 复合材料层合梁结构的扩展逐层理论

虽然在冲击载荷作用下面内基体裂纹和分层往往是同时存在的，但能够同时精确模拟基体裂纹和分层损伤的传统分析方法和研究工作还不多。近年扩展有限元方法被应用于复合材料层合结构损伤的模拟，但现有扩展有限元方法对复合材料结构的基体裂纹和分层损伤也是分开独立研究的，且只能处理穿透型基体裂纹。针对此问题，本章为含多层分层和多处基体裂纹复合材料层合梁结构建立了一种扩展逐层理论，在该理论厚度方向上的位移假设模式中引入弱不连续和强不连续函数，它们分别用来模拟层间界面导致的应变不连续和分层损伤导致的位移不连续。因为厚度方向上位移插值点位于层合结构上下表面和各单层的中面上，所以扩展逐层方法可以很方便地与 XFEM 结合模拟面内基体裂纹。扩展逐层理论拓展了扩展有限元方法在复合材料结构损伤分析和预测问题上的应用范围。

5.1 位移假设模式

5.1.1 复合材料低速冲击损伤

前文的综述和研究工作已阐明，因为纤维的拉伸强度很大，有纤维断裂和屈曲引起的损伤仅出现在冲击接触区域，所以在中低速冲击载荷作用下复合材料层合结构的主要损伤是基体裂纹和层间分层。Joshi 和 Sun[84] 得到的复合材料层合板中低速冲击作用下的损伤形式如图1.3所示。

虽然基于板壳单元的 XFEM 已经单独地应用于复合材料结构的裂纹和分层损伤问题，但只限于贯穿整个厚度的裂纹，且还没有利用 XFEM 同时处理含分层和基体裂纹损伤问题的研究工作。从图1.3中可知，复合材料层合结构的典型低中速损伤是具有层特征的复杂三维裂纹，由于 XFEM 直接处理这样的复杂三维裂纹比较困难，所以我们可以利用合适的位移假设模式将复杂三维裂纹转化为两个一维裂纹（对于板壳来说是两个二维裂纹），即基体裂纹和分层损伤分开描述，如图5.1所示，图中假设各单层的基体裂纹垂直于中面。

现在已有大量的位移假设模式被应用于复合材料层合结构的分析问题[7]，如单层等效理论、三维弹性理论和多层方法等。对于诸如含分层和基体裂纹之类的三维问题，单层等效理论往往无法满足精度要求，且无法得到各层的三维应力场。逐层理论中的位移假设模式是基于各单层建立的，可以得到各

数学层的高精确应力应变场，尤其是 Reddy[7] 的位移全逐层理论，它与三维弹性理论是等价的。因此，逐层理论非常适合与 XFEM 结合来模拟复合材料层合结构具有层特征的复杂三维裂纹。

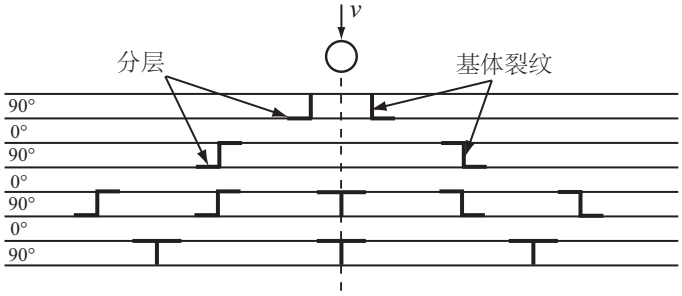


图 5.1　简化后的复合材料低速冲击损伤模式

5.1.2　厚度方向上的位移假设

为利用强间断函数来模拟由于分层损伤引起的位移不连续性，逐层理论厚度方向上的位移插值点应该放置在层合结构上下表面和各数学层的中性面上，同时这种位移插值点的布置方式也为基体裂纹的模拟提供了方便。因为插值点之间存在位移连续而应变不连续的层间界面，为了在位移模式中模拟这种由层间界面引起的应变不连续现象，需要另外再引入弱不连续函数。对于含多层分层损伤复合材料层合梁，本文位移假设模式示意图如图5.2 所示，图中 h_j 为第 j 单层的厚度，z_j 为第 j 和 $j-1$ 单层之间界面在厚度方向上的坐标，图左边的数值表示厚度方向上位移模式中的插值点的序号，图右边的数值表示层间界面的序号。

根据以上假设，含多层分层损伤复合材料层合梁任意点 (y,z) 处的位移为

$$u_\alpha(y,z,t)=\sum_{k=1}^{N+2}\phi_k(z)u_{\alpha ik}(y,t)+\sum_{k=1}^{N_D}\Xi_k(z)u_{\alpha lk}(y,t)+\sum_{k=1}^{N}\Theta_k(z)u_{\alpha rk}(y,t) \tag{5-1}$$

式中，$\alpha=1,2$ 表示 y 和 z 方向的分量；$u_{\alpha ik}$、$u_{\alpha lk}$ 和$u_{\alpha rk}$ 分别为插值点位移自由度、分层损伤引起位移不连续的附加自由度以及层间界面引起应变不连续的附加自由度，k 为厚度方向上位移模式中的插值点序号，下标 i、l和 r分别表示标准自由度、分层的附加自由度和层间界面的附加自由度；ϕ_k 为沿复合材料层合梁厚度方向上的线性拉格朗日插值函数，如图5.3(a) 所示；$\Theta_k=\phi_k(z)\chi_k(z)$ 为用于模拟层间界面的弱不连续函数，如图5.3(b) 所示，其中 $\chi_k(z)$ 是一维符号距离函数；$\Xi_k=\phi_k(z)H_k(z)$ 为用于模拟分层损伤的强不连续函数，如图5.3(c) 所

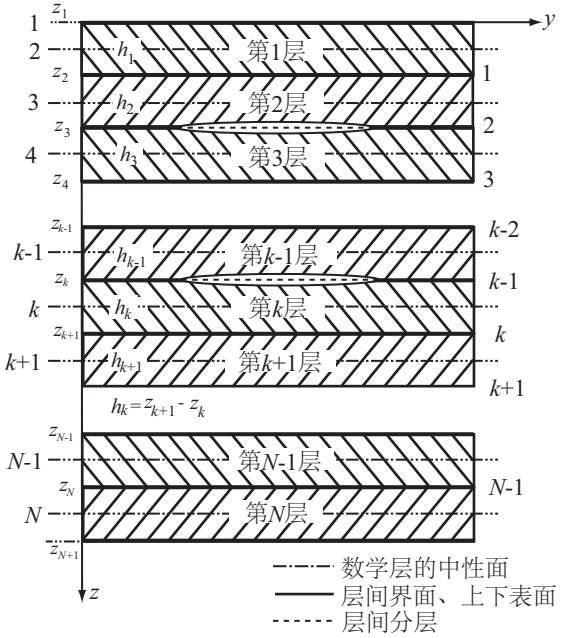


图 5.2　含多层分层损伤复合材料层合梁位移模式

示，其中 $H_k(z)$ 是一维 Heaviside 函数；N为复合材料层合梁数学层的层数，此处数学层的概念已在第 2 章中详细阐明。

从图5.2中可以看出，标准自由度和附件自由度的在厚度方向上的插值点数量分别为 $N+2$ 和 N，另外，N_D 为由于分层而扩充的插值点的数量。

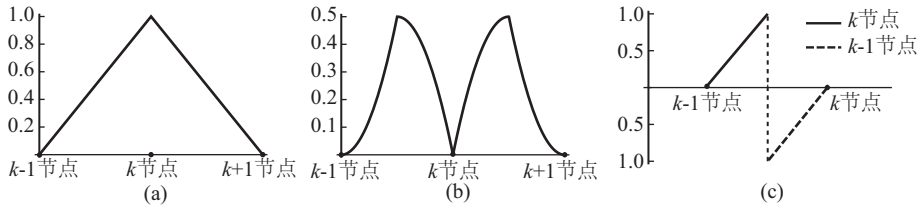


图 5.3　厚度方向上位移假设模式中的插值函数：(a) ϕ_k；(b) $\Theta_k=\phi_k(z)\chi_k(z)$；(c) $\Xi_k=\phi_k(z)H_k(z)$.

沿复合材料层合梁厚度方向上的线性拉格朗日插值函数 ϕ_k 为

$$\phi_k(z)=\begin{cases}\varphi_k^1=-\dfrac{\bar{z}_{k-1}-z}{\bar{z}_k-\bar{z}_{k-1}} & \bar{z}_{k-1}\le z\le\bar{z}_k\\ \varphi_k^2=-\dfrac{z-\bar{z}_{k+1}}{\bar{z}_{k+1}-\bar{z}_k} & \bar{z}_k\le z\le\bar{z}_{k+1}\end{cases}\tag{5-2}$$

式中，$\bar{z}_0=z_1,\bar{z}_1=\dfrac{z_1+z_2}{2},\cdots,\bar{z}_k=\dfrac{z_k+z_{k+1}}{2},\cdots\bar{z}_N=\dfrac{z_N+z_{N+1}}{2},\bar{z}_{N+1}=z_{N+1}$，$z_k$ 的定义见图5.2。

用于模拟层间界面的弱不连续函数 Θ_k 为

$$\Theta_k = \begin{cases} -\varphi_k^1 \dfrac{\bar{z}_{k-1} - z}{\bar{z}_{k-1} - z_{k-1}} & \bar{z}_{k-1} \le z \le z_k \\ -\varphi_k^1 \dfrac{z - \bar{z}_k}{\bar{z}_k - z_k} & z_k \le z \le \bar{z}_k \\ -\varphi_k^2 \dfrac{\bar{z}_k - z}{\bar{z}_k - z_k} & \bar{z}_k \le z \le z_{k+1} \\ -\varphi_k^2 \dfrac{z - \bar{z}_{k+1}}{\bar{z}_{k+1} - z_{k+1}} & z_{k+1} \le z \le \bar{z}_{k+1} \end{cases} \tag{5-3}$$

用于模拟分层损伤的强不连续函数 Ξ_k 为

$$\Xi_k = \begin{cases} -\dfrac{\bar{z}_{k-1} - z}{\bar{z}_{k-1} - z_{k-1}} & \bar{z}_{k-1} \le z \le z_k \\ 0 & z_k \le z \le \bar{z}_k \\ 0 & \bar{z}_k \le z \le z_{k+1} \\ \dfrac{z - \bar{z}_{k+1}}{\bar{z}_{k+1} - z_{k+1}} & z_{k+1} \le z \le \bar{z}_{k+1} \end{cases} \tag{5-4}$$

假设

$$\Phi_{ik} = \phi_k(z), \Phi_{lk} = \Xi_k(z), \Phi_{rk} = \Theta_k(z) \tag{5-5}$$

则式 (5-1) 可简化为

$$u_\alpha(y,z,t) = \Phi_{\zeta k}(z) u_{\alpha\zeta k}(y,t),\ \zeta = i,l,r \tag{5-6}$$

式中利用了 Einstein 求和约定，即，重复指标 k 和 ζ 在取值范围内求和，见式 (5-1)。例如，当 ζ 取为 i 时，k 取 1 到 $N+2$，但是当 ζ 取为 r 时，k 取 1 到 N。

如果复合材料层合梁厚度方向上没有分层损伤，则位移模式中就没有强不连续函数，式 (5-5) 简化为

$$u_\alpha(y,z,t) = \Phi_{\zeta k}(z) u_{\alpha\zeta k}(y,t),\ \zeta = i,r \tag{5-7}$$

在 Reddy 的全逐层理论中[7]，沿厚度方向上的一维线性拉格朗日插值函数之类的逐层连续函数被用于构造复合材料层合结构的位移模式，且厚度方向上的位移插值点位于层合结构上下表面和层间界面，保证了厚度方向上位移的连续性和位移导数（应变）在层间界面上的不连续性。因此，本文提出的位移假设模式可以看成是 Reddy 全逐层理论的扩展。

5.1.3　面内位移离散

为了在面内模拟基体裂纹，利用一维线性拉格朗日插值函数 ψ_m 和一维不连续扩充函数离散面内位移，基于该思想，含多层分层和基体裂纹复合材料层合梁结构节点位移 ($u_{\alpha ik}$) 和附加自由度 ($u_{\alpha lk}$ 和 $u_{\alpha rk}$) 可以表示为

$$u_{\alpha\zeta k}(y,t) = \psi_m(y)U_{\alpha\zeta km}(t) + \Lambda_s(y)\bar{U}_{\alpha\zeta ks}(t) \tag{5-8}$$

式中，$m = 1,\cdots,N_{\mathrm{E}}$ 为面内有限元节点数；$s = 1,\cdots,N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{P}}$ 为由于基体裂纹而必须扩充的面内有限元节点数；$\bar{U}_{\alpha iks}$、$\bar{U}_{\alpha lks}$ 和 $\bar{U}_{\alpha rks}$ 为由于基体裂纹而引起的面内扩充自由度；$\Lambda_s = \psi_s(y)H_s(y)$ 是用来模拟基体裂纹的强不连续扩充形函数，如图5.4所示，其中 $H_s(y)$ 为 Heaviside 函数。如果将扩展逐层理论应用于含多层分层和基体裂复合材料层合板壳结构，那么式 (5-8) 还必须包括基体裂纹的裂尖扩充形函数，这个问题将在下一章中详细讨论。

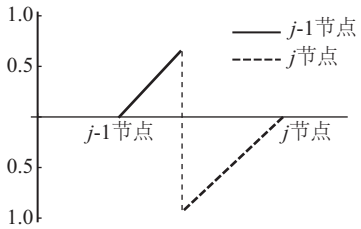


图 5.4　形函数 Λ_s

如图1.3所示，基体裂纹的裂尖往往是位于层间界面上的。在扩展逐层理论中，因为厚度方向上位移插值点放置在层合结构上下表面和各数学层的中性面上，所以基体裂纹的裂尖是位于数学层中性面上的，如图5.5(a) 和 (c) 所示。因此，扩展逐层理论中得基体裂纹在厚度方向上比实际基体裂纹要长 $h_j/2$。如果将裂尖附近的数学层分为两个子层，如图5.5(b) 和 (d) 所示，假设靠近基体裂纹裂尖的子层的厚度为 h_j/n，那么扩展逐层理论中得基体裂纹在厚度方向上的长度比实际裂纹只长了 $h_j/2n$，当 n 很大时，这点差别可以忽略。

如果复合材料层合梁没有基体裂纹损伤，则面内位移离散中就没有扩充自由度，上式简化为

$$u_{\alpha\zeta k}(y,t) = \psi_m(y)U_{\alpha\zeta km}(t) \tag{5-9}$$

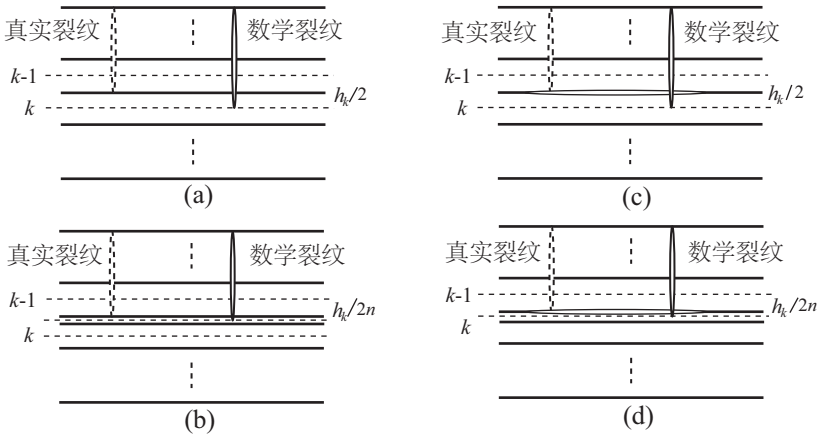


图 5.5　基体裂纹裂尖的位置

5.2　Hamilton 原理和 Euler-Lagrange 方程

将厚度方向上的位移模式 (式 (5-6)) 代入应变 -位移关系中

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \Phi_{\zeta k} u_{1\zeta k,y} \\ \varepsilon_{12} &= \Phi_{\zeta k,z} u_{1\zeta k} + \Phi_{\zeta k} u_{2\zeta k,y} \\ \varepsilon_{22} &= \Phi_{\zeta k,z} u_{2\zeta k}\end{aligned} \tag{5-10}$$

利用 Hamilton 原理可以建立含多层分层和基体裂复合材料层合梁结构的运动方程，从式 (5-10) 中可以得到应变的一阶变分，则虚应变能为

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_L \int_{-H/2}^{H/2} (\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\delta\varepsilon_{22} + \sigma_{12}\delta\gamma_{12})\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\ &= \int_L \left(N^y_{\zeta k}\delta u_{1\zeta k,y} + Q^{yz}_{\zeta k}\delta u_{1\zeta k} + N^{yz}_{\zeta k}\delta u_{2\zeta k,y} + Q^{zz}_{\zeta k}\delta u_{2\zeta k} \right) \mathrm{d}y\end{aligned} \tag{5-11}$$

式中，

$$\begin{aligned}\left(N^y_{\zeta k}, N^{yz}_{\zeta k}\right) &= \int_{-H/2}^{H/2} (\sigma_{11}, \sigma_{12})\,\Phi_{\zeta k}\mathrm{d}z, \\ \left(Q^{yz}_{\zeta k}, Q^{zz}_{\zeta k}\right) &= \int_{-H/2}^{H/2} (\sigma_{12}, \sigma_{22})\,\Phi_{\zeta k,z}\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{5-12}$$

外力虚功为

$$\begin{aligned}\delta V &= \int_L [q_b(y,t)\delta u_2(y,-H/2,t) + q_t(y,t)\delta u_2(y,H/2,t)]\,\mathrm{d}y \\ &= \int_L \left(q_b\delta u_2^{N+1} + q_t\delta u_2^0\right)\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{5-13}$$

式中，$q_b(y,t)$ 和 $q_t(y,t)$ 分别为复合材料层合梁下表面 ($z=-H/2$) 和上表面 ($z=H/2$) 的分布外载荷；H 为复合材料层合梁的厚度。

虚动能为

$$\begin{aligned}\delta M &= \int_L \int_{-H/2}^{H/2} \rho_0 \left(\dot{u}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \delta \dot{u}_2\right) \mathrm{d}z\mathrm{d}y \\ &= \int_L \int_{-H/2}^{H/2} \rho_0 \left(\Phi_{\zeta k}\Phi_{\eta e}\ddot{u}_{1\eta e}\delta \dot{u}_{1\zeta k} + \Phi_{\zeta k}\Phi_{\eta e}\ddot{u}_{2\eta e}\delta \dot{u}_{2\zeta k}\right) \mathrm{d}z\mathrm{d}y \\ &= \int_L \left(I_{\zeta\eta ke}\ddot{u}_{1\eta e}\delta \dot{u}_{1\zeta k} + I_{\zeta\eta ke}\ddot{u}_{2\eta e}\delta \dot{u}_{2\zeta k}\right) \mathrm{d}y\end{aligned} \tag{5-14}$$

式中

$$I_{\zeta\eta ke} = \int_{-H/2}^{H/2} \rho_0 \Phi_{\zeta k}\Phi_{\eta e} \mathrm{d}z \tag{5-15}$$

将式 (5-11)、(5-13) 和 (5-14) 代入 Hamilton 原理，并分部积分，则有

$$\begin{aligned}\int_0^T (\delta U - \delta V - \delta M)\mathrm{d}t = \quad & \int_0^T \Big[N^y_{\zeta k}\delta u_{1\zeta k}\Big|_{\Gamma_\sigma} + N^{yz}_{\zeta k}\delta u_{2\zeta k}\Big|_{\Gamma_\sigma} - \\ & \int_L \Big(N^y_{\zeta k,y}\delta u_{1\zeta k} - Q^{yz}_{\zeta k}\delta u_{1\zeta k} + \\ & \quad N^{yz}_{\zeta k,y}\delta u_{2\zeta k} - Q^{zz}_{\zeta k}\delta u_{2\zeta k}\Big) \mathrm{d}y + \\ & \int_L \left(I_{\zeta\eta ke}\ddot{u}_{1\eta e}\delta u_{1\zeta k} + I_{\zeta\eta ke}\ddot{u}_{2\eta e}\delta u_{2\zeta k}\right) \mathrm{d}y - \\ & \int_L \left(q_b \delta u_2^{N+1} + q_t \delta u_2^0\right) \mathrm{d}y \Big] \mathrm{d}t = 0\end{aligned} \tag{5-16}$$

根据 Hamilton 原理可得含多层分层和基体裂复合材料层合梁结构的 Euler-Lagrange 方程，该方程组有 $2[(N+2)+N+N_D]$ 个方程和未知量

$$\begin{aligned}&\delta u_{1\zeta k} : N^y_{\zeta k,y} - Q^{yz}_{\zeta k} = I_{\zeta\eta ke}\ddot{u}_{1\eta e} \\ &\delta u_{2\zeta k} : N^{yz}_{\zeta k,y} - Q^{zz}_{\zeta k} + q_b\delta_k^{N+1} + q_t\delta_k^0 = I_{\zeta\eta ke}\ddot{u}_{2\eta e}\end{aligned} \tag{5-17}$$

自然边界条件为

$$\begin{aligned}&\delta u_{1\zeta k} : \quad N^y_{\zeta k}\Big|_{\Gamma_\sigma} = 0 \\ &\delta u_{2\zeta k} : \quad N^{yz}_{\zeta k}\Big|_{\Gamma_\sigma} = 0\end{aligned} \tag{5-18}$$

5.3　复合材料层合梁的本构方程

对于梁问题来说，正应力 σ_{22} 以及剪应力 σ_{21} 和 σ_{23} 可以不考虑，则式 (2-14) 中的三维本构关系可以简化为二维

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}^{(\mu)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{13} & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(\mu)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}^{(\mu)} \tag{5-19}$$

式中

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{13} & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(\mu)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{13} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix}^{(\mu)} - \\ &\begin{bmatrix} C_{12} & 0 & C_{16} \\ C_{23} & 0 & C_{36} \\ 0 & C_{45} & 0 \end{bmatrix}^{(\mu)} \left(\begin{bmatrix} C_{22} & 0 & C_{26} \\ 0 & C_{44} & 0 \\ C_{26} & 0 & C_{66} \end{bmatrix}^{(\mu)} \right)^{-1} \begin{bmatrix} C_{12} & C_{23} & 0 \\ 0 & 0 & C_{45} \\ C_{16} & C_{36} & 0 \end{bmatrix}^{(\mu)} \end{aligned} \tag{5-20}$$

将式 (5-20) 代入式 (5-12)，复合材料层合梁扩展逐层理论中的合内力和力矩为

$$\begin{aligned} N_{\zeta k}^{y} &= \int_{-H/2}^{H/2} \left(\bar{C}_{11}\varepsilon_{11} + \bar{C}_{13}\varepsilon_{22} \right) \Phi_{\zeta k} dz = A_{11\zeta\eta ke}^{1} u_{1\eta e,y} + A_{13\zeta\eta ke}^{2} u_{2\eta e} \\ Q_{\zeta k}^{yz} &= \int_{-H/2}^{H/2} \left(\bar{C}_{44}\varepsilon_{12} \right) \Phi_{\zeta k,z} dz = A_{44\zeta\eta ke}^{4} u_{1\eta e} + A_{44\zeta\eta ke}^{3} u_{2\eta e,y} \\ N_{\zeta k}^{yz} &= \int_{-H/2}^{H/2} \left(\bar{C}_{44}\varepsilon_{12} \right) \Phi_{\zeta k} dz = A_{44\zeta\eta ke}^{2} u_{1\eta e} + A_{44\zeta\eta ke}^{1} u_{2\eta e,y} \\ Q_{\zeta k}^{zz} &= \int_{-H/2}^{H/2} \left(\bar{C}_{13}\varepsilon_{11} + \bar{C}_{33}\varepsilon_{22} \right) \Phi_{\zeta k,z} dz = A_{13\zeta\eta ke}^{3} u_{1\eta e,y} + A_{33\zeta\eta ke}^{4} u_{2\eta e} \end{aligned} \tag{5-21}$$

式中，等效刚度系数 $A^1_{pq\zeta\eta ke}, A^2_{pq\zeta\eta ke}, A^3_{pq\zeta\eta ke}$ 和 $A^4_{pq\zeta\eta ke}$ 为

$$\begin{aligned} A^1_{pq\zeta\eta ke} &= \int_{-H/2}^{H/2} \Phi_{\zeta k}\bar{C}_{pq}\Phi_{\eta e}\mathrm{d}z, \\ A^2_{pq\zeta\eta ke} &= \int_{-H/2}^{H/2} \Phi_{\zeta k,z}\bar{C}_{pq}\Phi_{\eta e}\mathrm{d}z, \\ A^3_{pq\zeta\eta ke} &= \int_{-H/2}^{H/2} \Phi_{\zeta k}\bar{C}_{pq}\Phi_{\eta e,z}\mathrm{d}z, \\ A^4_{pq\zeta\eta ke} &= \int_{-H/2}^{H/2} \Phi_{\zeta k,z}\bar{C}_{pq}\Phi_{\eta e,z}\mathrm{d}z, \end{aligned} \qquad p,q = 1,3,4 \tag{5-22}$$

上式中刚度系数沿厚度的积分结果见附录 A2。

5.4　控制方程

5.4.1　含多层分层复合材料层合梁的控制方程

将式 (5-9) 代入式 (5-16)，对于静力问题来说，含多层分层损伤复合材料层合梁结构的有限元控制方程为

$$\boldsymbol{K}_{\zeta\eta kemn}\boldsymbol{U}_{\eta en} = \boldsymbol{F}_{\zeta km} \tag{5-23}$$

式中，$m,n = 1,\cdots,N_{\mathrm{E}}$；$\boldsymbol{K}_{\zeta\eta kemn}$ 为单元刚度矩阵

$$\boldsymbol{K}_{\zeta\eta kemn} = \begin{bmatrix} \psi_{m,y}A^1_{11\zeta\eta ke}\psi_{n,y} + \psi_m A^4_{44\zeta\eta ke}\psi_n & \psi_{m,y}A^2_{13\zeta\eta ke}\psi_n + \psi_m A^3_{44\zeta\eta ke}\psi_{n,y} \\ \psi_{m,y}A^2_{44\zeta\eta ke}\psi_n + \psi_m A^3_{13\zeta\eta ke}\psi_{n,y} & \psi_{m,y}A^1_{44\zeta\eta ke}\psi_{n,y} + \psi_m A^4_{33\zeta\eta ke}\psi_n \end{bmatrix} \tag{5-24}$$

从式 (5-24) 中可以看出，扩展逐层理论中，含多层分层损伤复合材料层合梁结构的刚度矩阵与 Reddy 的逐层理论[169] 中的单元刚度矩阵具有相同的形式，但是式 (5-22) 中的等效刚度系数与 Reddy 逐层理论中的不同。

5.4.2　含多层分层和多处基体裂纹复合材料层合梁的控制方程

对于含多层分层和多处基体裂纹复合材料层合梁的静力问题来说，将式 (5-8) 代入式 (5-16) 可得到有限元控制方程为

$$\boldsymbol{K}_{\zeta\eta ke\kappa\iota}\boldsymbol{U}_{\eta e\iota} = \boldsymbol{F}_{\zeta k\kappa} \tag{5-25}$$

式中，$\kappa = m,s;\ \iota = n,g$；$m,n = 1,2,\cdots N_{\mathrm{E}}$；$s,g = 1,\cdots N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{P}}$；$\boldsymbol{K}_{\zeta\eta ke\kappa\iota}$ 为单元刚度矩阵，它的子矩阵为

$$\boldsymbol{K}_{\zeta\eta kemg} = \begin{bmatrix} \psi_{m,y}A^{1}_{11\zeta\eta ke}\Lambda_{g,y} + \psi_{m}A^{4}_{44\zeta\eta ke}\Lambda_{g} & \\ \psi_{m,y}A^{2}_{44\zeta\eta ke}\Lambda_{g} + \psi_{m}A^{3}_{13\zeta\eta ke}\Lambda_{g,y} & \\ \psi_{m,y}A^{2}_{13\zeta\eta ke}\Lambda_{g} + \psi_{m}A^{3}_{44\zeta\eta ke}\Lambda_{g,y} & \\ \psi_{m,y}A^{1}_{44\zeta\eta ke}\Lambda_{g,y} + \psi_{m}A^{4}_{33\zeta\eta ke}\Lambda_{g} & \end{bmatrix} \tag{5-26}$$

$$\boldsymbol{K}_{\zeta\eta kesn} = \begin{bmatrix} \Lambda_{s,y}A^{1}_{11\zeta\eta ke}\psi_{n,y} + \Lambda_{s}A^{4}_{44\zeta\eta ke}\psi_{n} & \\ \Lambda_{s,y}A^{2}_{44\zeta\eta ke}\psi_{n} + \Lambda_{s}A^{3}_{13\zeta\eta ke}\psi_{n,y} & \\ \Lambda_{s,y}A^{2}_{13\zeta\eta ke}\psi_{n} + \Lambda_{s}A^{3}_{44\zeta\eta ke}\psi_{n,y} & \\ \Lambda_{s,y}A^{1}_{44\zeta\eta ke}\psi_{n,y} + \Lambda_{s}A^{4}_{33\zeta\eta ke}\psi_{n} & \end{bmatrix} \tag{5-27}$$

$$\boldsymbol{K}_{\zeta\eta kesg} = \begin{bmatrix} \Lambda_{s,y}A^{1}_{11\zeta\eta ke}\Lambda_{g,y} + \Lambda_{s}A^{4}_{44\zeta\eta ke}\Lambda_{g} & \\ \Lambda_{s,y}A^{2}_{44\zeta\eta ke}\Lambda_{g} + \Lambda_{s}A^{3}_{13\zeta\eta ke}\Lambda_{g,y} & \\ \Lambda_{s,y}A^{2}_{13\zeta\eta ke}\Lambda_{g} + \Lambda_{s}A^{3}_{44\zeta\eta ke}\Lambda_{g,y} & \\ \Lambda_{s,y}A^{1}_{44\zeta\eta ke}\Lambda_{g,y} + \Lambda_{s}A^{4}_{33\zeta\eta ke}\Lambda_{g} & \end{bmatrix} \tag{5-28}$$

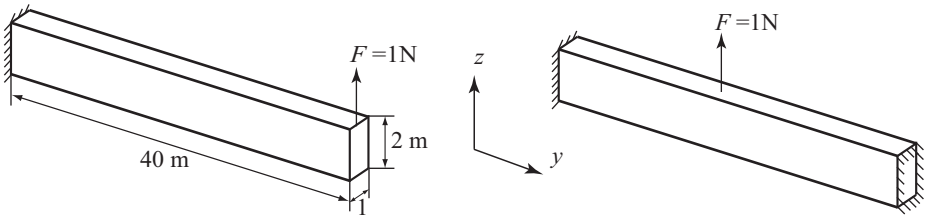
对于含多层分层和基体裂纹损伤复合材料层合梁结构来说，从式 (5-26-5-28) 中可以看出，扩展逐层理论中的单元刚度矩阵由四个子矩阵组成，其中 $\boldsymbol{K}_{\zeta\eta kemn}$ 和 $\boldsymbol{K}_{\zeta\eta kesg}$ 分别为标准自由度和扩充自由度的刚度矩阵，$\boldsymbol{K}_{\zeta\eta kemg}$ 和 $\boldsymbol{K}_{\zeta\eta kesn}$ 为标准自由度和扩充自由度的耦合刚度矩阵。四个子矩阵的形式都与 Reddy 逐层理论中的相同[169]。

5.5　数值算例

5.5.1　无损伤复合材料层合梁

本算例以无损伤复合材料层合梁为研究对象，因为没有用于模拟分层和基体裂纹的扩充自由度$u_{\alpha lk}$，所以式 (5-23) 中的指标 ζ 和 η 取 i 和 r，而指标 k 和 e 的取值取决于指标 ζ，见式 (5-1)。

无损伤复合材料层合梁结构的几何尺寸、载荷以及边界条件如图5.6所示，图中考虑了两种不同的边界条件：一端固支 (CF)；两端固支 (CC)。



(a) CF　　(b) CC

图 5.6　无损伤复合材料层合梁：(a) 一端固支 (CF)；(b) 两端固支 (CC).

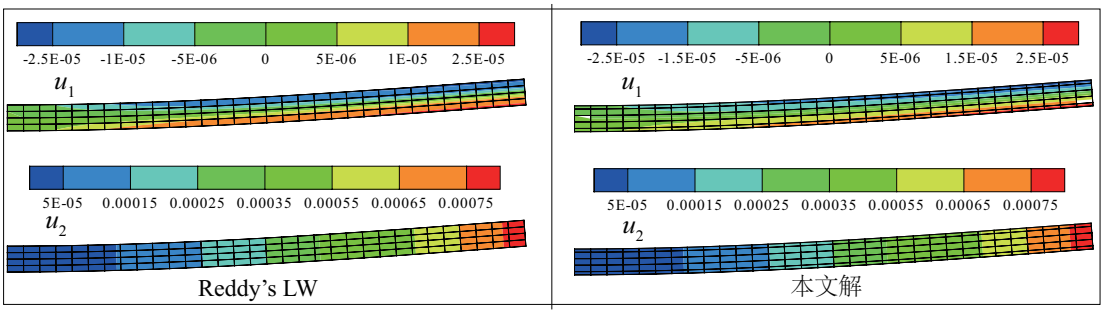
首先利用各向同性材料梁来验证扩展逐层方法分析无损伤梁结构的正确性，该各向同性梁在分析时分为 4 层，各层的材料性能参数为：$E = 40\,\mathrm{GPa}$，$v = 0.3$。表5.1和图5.7分别比较了扩展逐层方法和 Reddy 逐层理论分析得到的各向同性梁最大位移和变形云图，从表中可以看出，对于无损伤梁结构来说，扩展逐层方法的分析结果是精确可靠的，与 Reddy 逐层理论的结果吻合很好。另外，扩展逐层方法的位移分析结果要稍大于 Reddy 逐层理论的分析结果，主要原因是在数学层数相同的情况下扩展逐层方法在厚度方向上的位移插值点要比 Reddy 逐层理论的多。

表 5.1　扩展逐层方法和 Reddy 逐层理论分析得到的各向同性梁最大位移

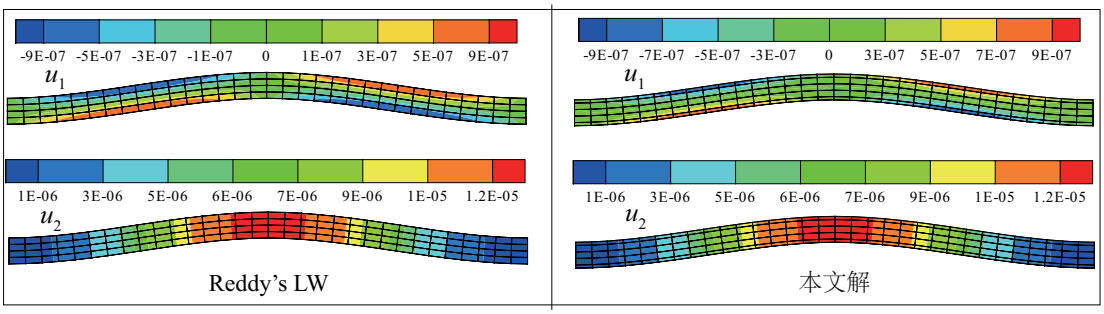
节点数	CF				CC			
	$u_1\,(10^{-5}\,\mathrm{m})$		$u_2\,(10^{-4}\,\mathrm{m})$		$u_1\,(10^{-7}\,\mathrm{m})$		$u_2\,(10^{-5}\,\mathrm{m})$	
	LW	XLWM	LW	XLWM	LW	XLWM	LW	XLWM
5	3.00185	3.00242	7.56014	7.56158	0.85294	0.85303	0.13899	0.39000
9	3.00167	3.00215	7.92479	7.92601	9.42912	9.44562	1.05667	1.05801
17	3.00145	3.00181	8.00036	8.00103	9.41905	9.43285	1.25029	1.25161
33	3.00206	3.00251	8.01092	8.01142	9.39910	9.40742	1.27789	1.27907

本算例中扩展逐层方法也用来研究无损伤各向异性梁结构，该复合材料层合梁有 6 层，其几何尺寸、载荷以及边界条件如图5.6所示，所有单层都具有相同的厚度和材料性能，材料性能为：$E_{11} = 181\,\mathrm{GPa}$，$E_{22} = E_{33} = 10.3\,\mathrm{GPa}$，$G_{12} = G_{13} = 7.17\,\mathrm{GPa}$，$G_{23} = 6.21\,\mathrm{GPa}$，$G_{12} = 0.28$，$G_{13} = 0.02$，$G_{23} = 0.40$。

表5.2比较了扩展逐层方法和 Reddy 逐层理论分析得到的不同铺层方式复合材料层合梁的最大位移，从表中的对比结果可以看出，对于无损伤复合材料层合梁结构，扩展逐层方法的分析结果是精确可靠的。



(a) CF



(b) CC

图 5.7　扩展逐层方法和 Reddy 逐层理论分析得到的各向同性梁位移云图：(a) CF; (b) CC.

表 5.2　扩展逐层方法和 Reddy 逐层理论分析得到的复合材料层合梁最大位移

	CF				CC			
	$u_1\,(10^{-6}\,\mathrm{m})$		$u_2\,(10^{-4}\,\mathrm{m})$		$u_1\,(10^{-7}\,\mathrm{m})$		$u_2\,(10^{-6}\,\mathrm{m})$	
	LW	XLWM	LW	XLWM	LW	XLWM	LW	XLWM
$[0]_6$	6.67219	6.67878	1.8024	1.8030	2.1325	2.1399	3.6426	3.6584
$[0/90/0]_s$	8.8110	8.8174	2.3741	2.3749	2.7765	2.7867	4.5300	4.5498
$[0/0/90]_s$	6.9114	6.9180	1.8686	1.8693	2.2110	2.2189	3.7971	3.8127
$[90/0/0]_s$	19.839	19.848	5.3027	5.3043	6.3762	6.3980	9.3776	9.4177
$[0/90/90]_s$	9.2331	9.2392	2.4894	2.4902	2.9010	2.9207	4.7532	4.7736
$[90/90/0]_s$	72.325	72.328	19.296	19.299	22.779	22.818	31.195	31.257
$[90/0/90]_s$	22.123	22.133	5.9145	5.9163	7.0925	7.1161	1.0396	1.0440

5.5.2　含多层分层复合材料层合梁

本算例中的研究对象是含多层分层损伤复合材料层合梁结构，几何尺寸、载荷、边界条件、有限元网格以及分层尺寸和位置如图5.8所示，图中考虑了两种不同的边界条件：一端固支 (CF)；两端固支 (CC)。考虑了三种不同铺层方式：$[0]_8$、$[0/90/0/90]_s$ 和 $[90/0/90/0]_s$，各单层的材料性能为：$E_{11}=181\,\mathrm{GPa}$，$E_{22}=E_{33}=10.3\,\mathrm{GPa}$，$G_{12}=G_{13}=7.17\,\mathrm{GPa}$，$G_{23}=6.21\,\mathrm{GPa}$，$G_{12}=0.28$，$G_{13}=$

0.02，$G_{23}=0.40$。

为了验证扩展逐层方法在含多层分层损伤复合材料层合梁分析问题上的正确性，利用 MSC.Nastran 中的 Hex8 实体元建立了该问题的三维有限元模型，模型中用层间界面上的位置重复节点来模拟分层损伤，两种分析方法在梁长度方向和厚度方向上的节点数量和分布是相同的。分层损伤在厚度方向上的位置可以表示为 $[\theta/\theta/\theta/\theta/\cap/\theta/\theta/\theta/\theta]$，其中 θ 为铺层角，$\cap$ 表示分层损伤。

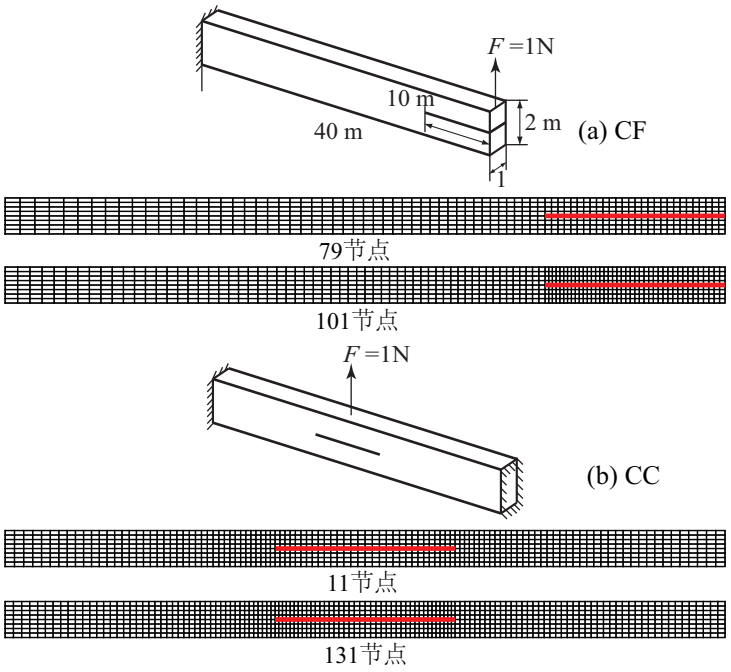


图 5.8　含分层损伤复合材料层合梁结构：(a) CF; (b) CC.

表5.3和表5.4对比了扩展逐层理论和三维有限元模型分析得到的含分层损伤复合材料层合梁的最大位移，一端固支层合梁的分层损伤位于自由端，而两端固支层合梁的分层损伤位于中间，表中扩展逐层方法所在列括号里为 2 节点单元分析结果，其它的为 3 节点单元分析结果。从表5.3和表5.4可以看出，随着节点数从 79 增加到 101，位移的最大值的增加小于 1%。对于不同的单元形式，位移最大值都收敛，但 3 节点单元的收敛速度要大于 2 节点单元。扩展逐层方法计算得到的含分层损伤复合材料层合梁的位移云图如图5.9所示，图中层合梁的铺层方式为 $[0]_8$。

图5.10对比了扩展逐层方法和三维有限元模型分析得到的含分层损伤的复合材料层合梁应力 σ_{11} 和 σ_{12} 的云图，层合梁的下表面作用单位均布压力，其几何尺寸、载荷、边界条件以及有限元离散与上个算例中的一样。从图5.10中可以看出，扩展逐层方法计算得到的应力最大值和应力云图与三维有限元模

表 5.3　扩展逐层方法和三维有限元模型分析得到的含多层分层损伤的复合材料层合梁最大位移 (CF)

铺层方式	节点数	$u_1\,(10^{-5}\,\mathrm{m})$		$u_2\,(10^{-4}\,\mathrm{m})$	
		MSC	XLWM	MSC	XLWM
$[0]_8$	79	8.25315	8.28552	2.07623	2.08307
			(8.23609)		(2.07139)
	101	8.25848	8.29079	2.07725	2.08383
			(8.25698)		(2.07076)
$[0/90/0/90]_s$	79	1.21638	1.22722	3.13409	3.16742
			(1.21660)		(3.14017)
	101	1.21695	1.22829	3.13544	3.17020
			(1.22157)		(3.15293)
$[90/0/90/0]_s$	79	2.29316	2.31304	5.59327	5.61992
			(2.28079)		(5.54563)
	101	2.29477	2.31551	5.59542	5.62149
			(2.29282)		(5.57115)

表 5.4　扩展逐层方法和三维有限元模型分析得到的含多层分层损伤的复合材料层合梁最大位移 (CC)

铺层方式	节点数	$u_1\,(10^{-7}\,\mathrm{m})$		$u_2\,(10^{-6}\,\mathrm{m})$	
		MSC	XLWM	MSC	XLWM
$[0]_8$	111	2.13887	2.15082	4.34984	4.36381
			(2.14684)		(4.38274)
	131	2.13905	2.15117	4.36242	4.36740
			(2.14814)		(4.39888)
$[0/90/0/90]_s$	111	2.97151	2.99313	6.22773	6.29975
			(2.98571)		(6.29328)
	131	2.97165	2.99440	6.24240	6.29376
			(2.98803)		(6.32132)
$[90/0/90/0]_s$	111	6.00012	6.05247	10.0818	10.2310
			(6.02489)		(10.2004)
	131	6.00068	6.05462	10.0978	10.2329
			(6.02521)		(10.2025)

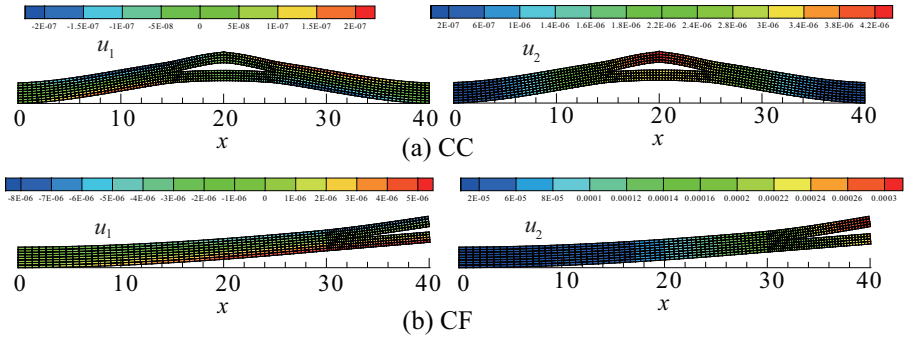


图 5.9　扩展逐层方法计算得到的含分层损伤的复合材料层合梁位移云图 $[0]_8$：(a) CC; (b) CF.

型分析得到的吻合很好，应力 σ_{12} 在分层前缘和边界处形成了严重的应力集中。

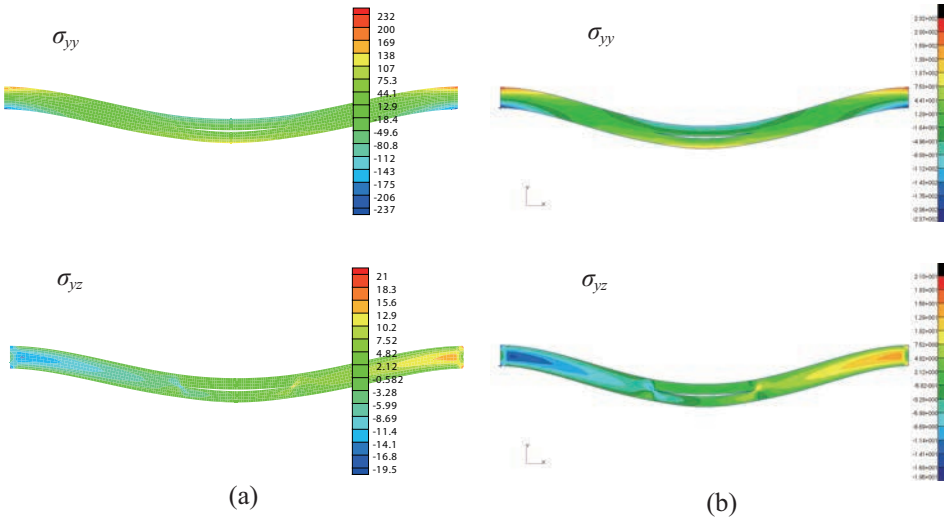


图 5.10　扩展逐层方法和三维有限元模型分析得到的含分层损伤复合材料层合梁 ($[0/90/0/90]_s$) 的应力云图：(a) XLWM；(b) 3D 有限元

分层损伤在厚度方向上的位置对复合材料层合梁结构的变形和最大位移的影响分别如图5.11和图5.12 所示，分层损伤在厚度方向上的位置由第 1 界面 (第 1 层和第 2 层之间的界面) 变化到第 7 界面 (第 7 层和第 8 层之间的界面)，图中 $u_1^{(1)}$ 和 $u_2^{(1)}$ 为第 1 界面上的最大位移，图5.11中复合材料层合梁的铺层方式为 $[0/90/0/90]_s$。从图5.11和5.12中可以看出，随着分层损伤越靠近层合梁载荷作用的表面，分层区域的局部变形越明显。对于最大位移对分层损伤在厚度方向上位置的敏感程度来说，铺层方式为 $[90/90/90/0]_s$ 的层合梁比铺层方式为 $[0]_8$ 和 $[0/90/0/90]_s$ 的层合梁更敏感。

分层损伤尺寸对复合材料层合梁结构的变形和最大位移的影响分别如

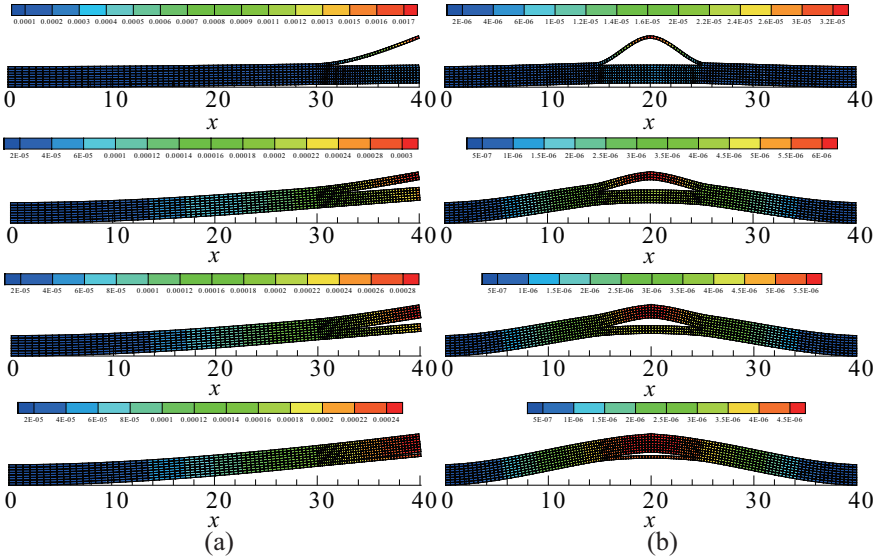


图 5.11　分层损伤在厚度方向上的位置对复合材料层合梁结构 ($[0/90/0/90]_s$) 变形的影响：(a) CF；和 (b) CC

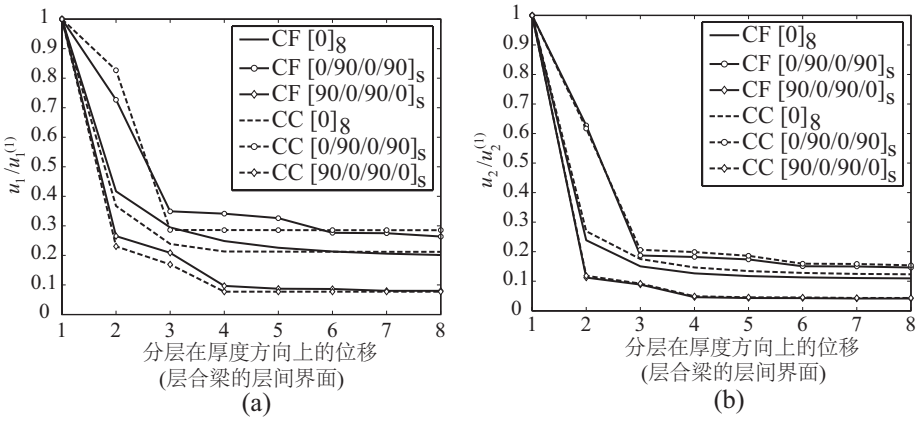


图 5.12　分层损伤在厚度方向上的位置对复合材料层合梁结构最大位移的影响：(a) 位移 u_1；(b) 位移 u_2

图5.13和图5.14所示，分层损伤的尺寸由 0mm 变化到 10mm，图中 $u_1^{(10)}$ 和 $u_2^{(10)}$ 是分层尺寸为 10mm 时复合材料层合梁的最大位移，图5.13中复合材料层合梁的铺层方式为 $[0/90/0/90]_s$。从图5.11和图5.12中可以看出，层合梁分层区域的局部变形随着分层损伤尺寸的增加而增加，层合梁的最大位移随着分层损伤尺寸的增加而显著增加。随着分层损伤越靠近层合梁载荷作用的表面，分层损伤尺寸对最大位移的影响越显著。当分层损伤位于第 2 层和第 3 层之间时，铺层方式为 $[90/90/90/0]_s$ 和 $[0/90/0/90]_s$ 的层合梁的最大位移对分层损伤尺寸的敏感程度要比铺层方式为 $[0]_8$ 的层合梁高。当分层损伤越靠近层合梁载荷作用表面的反面时，铺层方式为 $[0]_8$ 的层合梁的最大位移对分层损伤尺寸的敏感

程度要比铺层方式为 $[90/90/90/0]_s$ 和 $[0/90/0/90]_s$ 的层合梁高。当分层损伤位于第 4 层和第 5 层之间时，三种铺层方式的层合梁中，铺层方式为 $[0/90/0/90]_s$ 的层合梁的最大位移对分层损伤尺寸最敏感。然而，当分层损伤位于第 6 层和第 7 层之间时，铺层方式为 $[90/90/90/0]_s$ 的层合梁的最大位移对分层损伤尺寸最敏感。

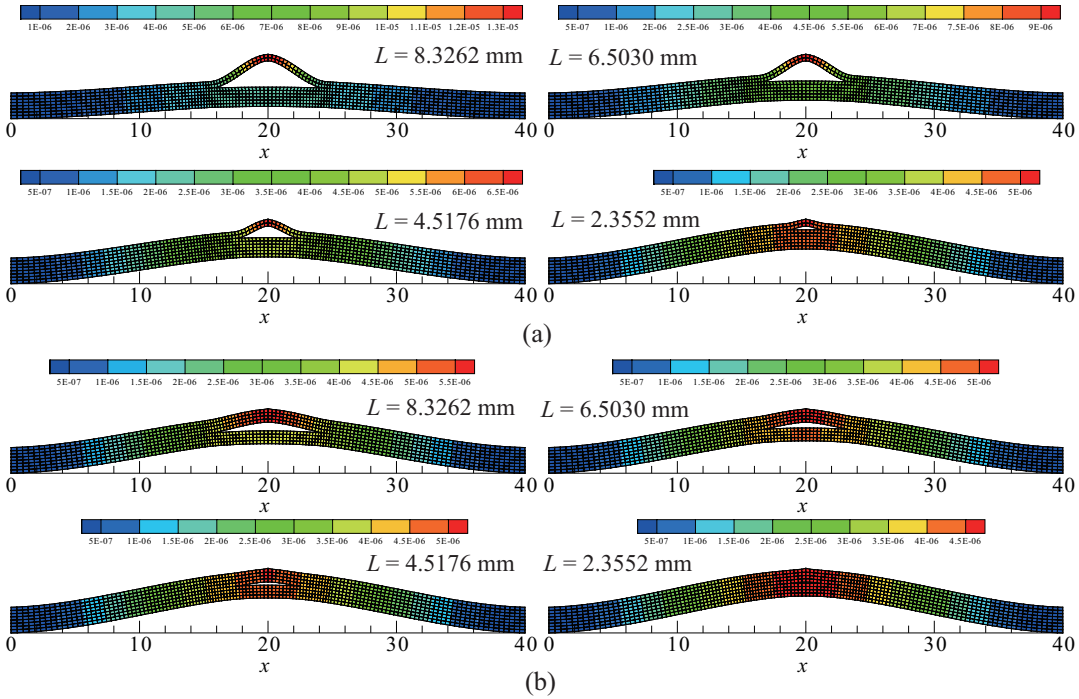


图 5.13　分层损伤尺寸对复合材料层合梁结构变形的影响：(a) 分层位移第 2 和第 3 层之间；(b) 分层位移第 4 和第 5 层之间；

本算例还利用扩展逐层理论研究了含多层分层复合材料层合梁问题，在分层区域分层损伤可表示为 $[\theta/\theta/\cap/\theta/\theta/\cap/\theta/\theta/\cap/\theta/\theta]$，层合梁的铺层方式为 $[0/90/0/90]_s$。含多层分层损伤两端固支和一端固支复合材料层合梁结构的变形云图分别如图5.15图5.16所示，从图中可以看出扩展逐层理论能够很好地分析含多层分层复合材料层合梁问题。

5.5.3　含多处基体裂纹复合材料层合梁

本算例以含多处基体裂纹复合材料层合梁为研究对象，因为没有用于模拟分层的附加自由度$u_{\alpha lk}$，所以式 (5-25) 中的指标 ζ 和 η 取 i 和 r，而指标 k 和 e 的取值取决于指标 ζ，见式 (5-1)。

为了验证扩展逐层方法在含多处基体裂纹损伤复合材料层合梁分析问题上的正确性，利用 MSC.Nastran 中的 Hex8 实体元建立了含多处基体裂纹各向

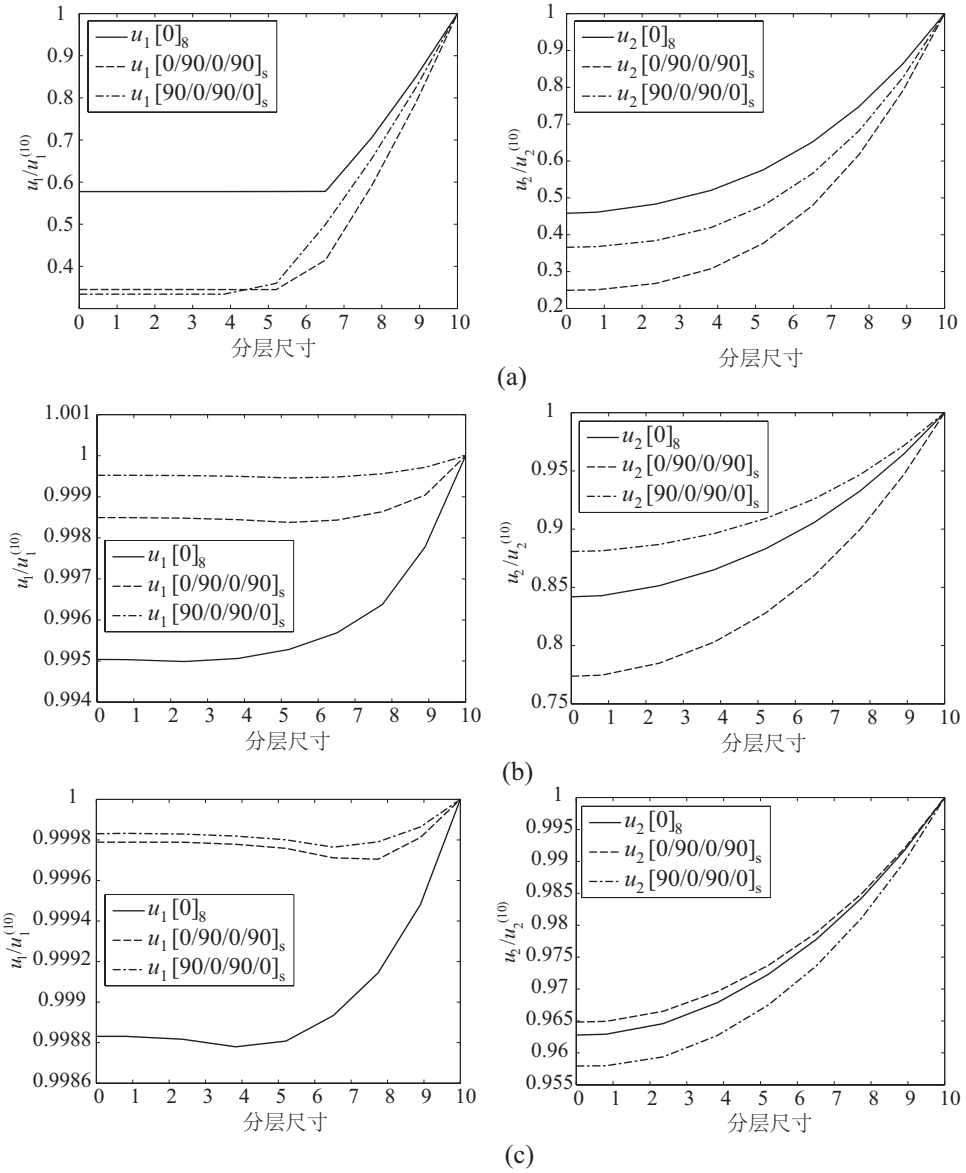


图 5.14　分层损伤尺寸对复合材料层合梁结构最大位移的影响：(a) 分层位移第 2 和第 3 层之间；(b) 分层位移第 4 和第 5 层之间；(c) 分层位移第 6 和第 7 层之间

同性梁的三维有限元模型，模型中用裂纹面的重复节点来模拟基体裂纹损伤，两种分析方法在梁长度方向和厚度方向上的节点数量和分布是相同的。

含多处基体裂纹复合材料梁的几何尺寸、载荷以及边界条件如图5.17所以，图中考虑了一端固支 (CF) 和两端固支 (CC) 两种边界条件以及四种不同的基体裂纹深度。图5.17中的 $\underline{\theta}$ 表示基体裂纹的裂尖位于该层的中面上，$\boldsymbol{\theta}$ 表示基体裂纹穿过了该层。各向同性梁的材料性能为：$E = 52\,\text{GPa}$，$v = 0.3$。

表5.5对比了扩展逐层方法和三维有限元模型分析得到的含基体裂纹损伤各向同性梁的最大位移，在分析过程中该梁在厚度方向上被等厚度地分为 8

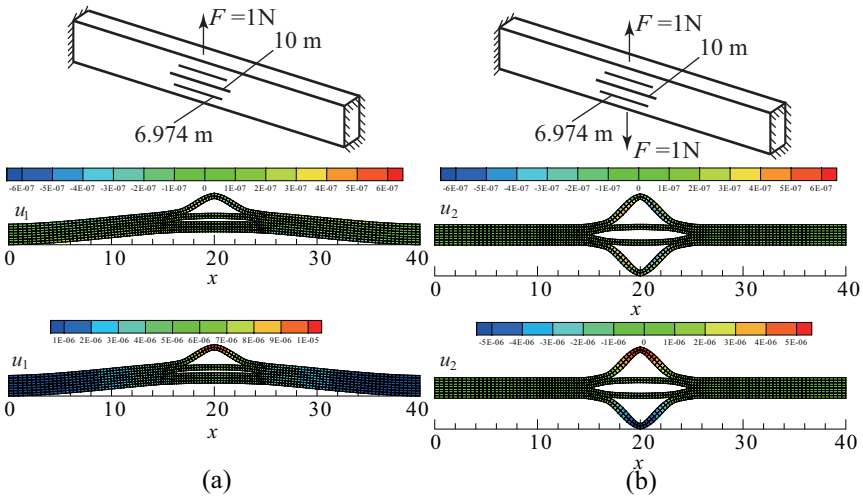


图 5.15　含多层分层损伤两端固支复合材料层合梁结构 ($[0/90/0/90]_s$) 的变形云图：(a) 非对称载荷工况；(b) 对称载荷工况

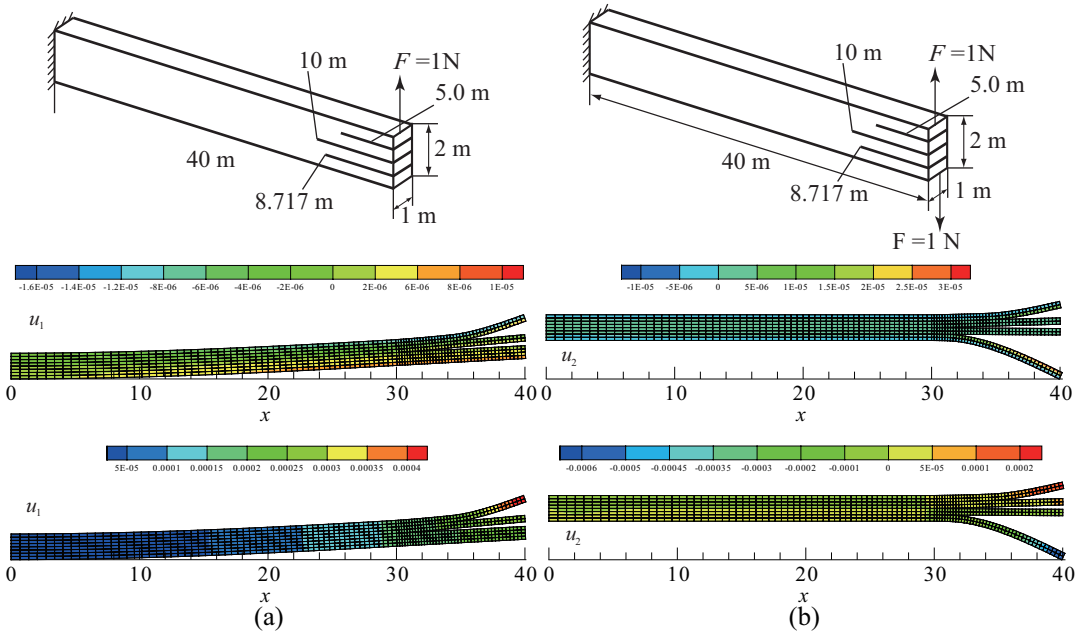
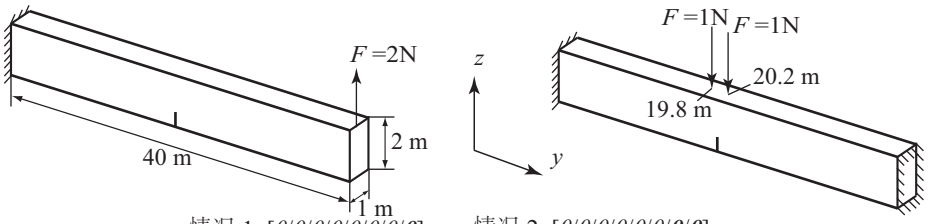


图 5.16　含多层分层损伤以端固支复合材料层合梁结构 ($[0/90/0/90]_s$) 的变形云图：(a) 非对称载荷工况；(b) 对称载荷工况

层，从表中可以看出扩展逐层方法的分析结果与三维有限元结果吻合很好。含基体裂纹损伤的各向同性梁的变形云图 (四种基体裂纹深度) 如图5.18所示，图中云图为位移 u_2。

含基体裂纹损伤复合材料层合梁的几何尺寸、载荷以及边界条件如图5.17所示，所有单层具有相同的厚度和材料性能：$E_{11}=181\,\text{GPa}$，$E_{22}=E_{33}=10.3\,\text{GPa}$，$G_{12}=G_{13}=7.17\,\text{GPa}$，$G_{23}=6.21\,\text{GPa}$，$G_{12}=0.28$，$G_{13}=0.02$，$G_{23}=0.40$。对于三种不同的铺层方式，基体裂纹尺寸对复合材料层合梁结构最大位移的影响



情况 1: $[\theta/\theta/\theta/\theta/\theta/\theta/\theta/\underline{\boldsymbol{\theta}}]$　　情况 2: $[\theta/\theta/\theta/\theta/\theta/\theta/\underline{\boldsymbol{\theta}}/\boldsymbol{\theta}]$

情况 3: $[\theta/\theta/\theta/\theta/\theta/\underline{\boldsymbol{\theta}}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}]$　　情况 4: $[\theta/\theta/\theta/\theta/\underline{\boldsymbol{\theta}}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}]$

(a) CF　　(b) CC

图 5.17　含基体裂纹复合材料层合梁：(a) 一端固支 (CF)；(b) 两端固支 (CC)

表 5.5　扩展逐层方法和三维有限元模型分析得到的含基体裂纹损伤各向同性梁最大位移

	节点	一端固支 (CF)				两端固支 (CC)			
		$u_1\,(10^{-5}\,\mathrm{m})$		$u_2\,(10^{-3}\,\mathrm{m})$		$u_1\,(10^{-6}\,\mathrm{m})$		$u_2\,(10^{-5}\,\mathrm{m})$	
		3D 解	XLWM	3D 解	XLWM	3D 解	XLWM	3D 解	XLWM
无裂纹	114		4.5535		1.2127		1.42218		1.9438
	172	4.6161	4.5920	1.2296	1.2234	1.4404	1.4345	1.9676	1.9611
情况 1	114		4.6375		1.2261		1.4779		2.0335
	172	4.7026	4.6741	1.2437	1.2368	1.4992	1.4901	2.0642	2.0512
情况 2	114		4.8421		1.2543		1.5986		2.1947
	172	4.9167	4.8799	1.2731	1.2651	1.6252	1.6117	2.2328	2.2138
情况 3	114		5.2577		1.3085		1.8174		2.4519
	172	5.3474	5.2980	1.3291	1.3197	1.8507	1.8318	2.4977	2.4734
情况 4	114		6.1326		1.4165		2.1817		2.8204
	172	6.2579	6.1785	1.4413	1.4284	2.2242	2.1987	2.8761	2.8451

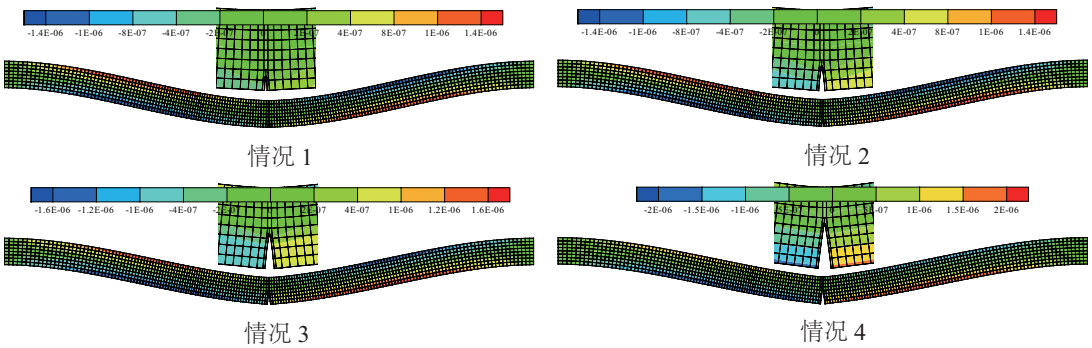


图 5.18　含基体裂纹损伤各向同性梁的变形云图 (四种基体裂纹深度)

如图5.19所示，图中基体裂纹的裂尖从第 2 层中性面变化到第 7 层中性面，从图中可以看出，一端固支和两端固支含基体裂纹损伤复合材料层合梁的最大位移都随裂纹尺寸的增加而增加，一端固支含基体裂纹损伤复合材料层合梁的最大位移都随裂纹尺寸增加而增加的速度越来越快，而两端固支边界情况则刚好相反。

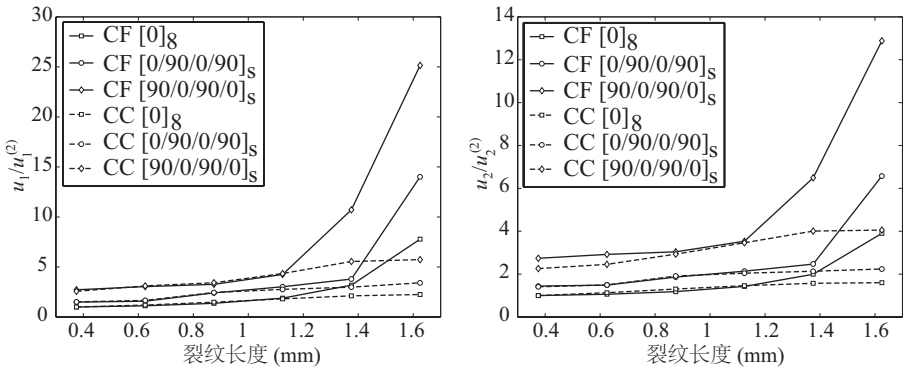


图 5.19　基体裂纹尺寸对复合材料层合梁结构最大位移的影响：(a) 位移 u_1；(b) 位移 u_2

本算例还基于扩展逐层方法研究了含多处基体裂纹复合材料层合梁问题，其几何尺寸、载荷以及边界条件如图5.20所示，铺层方式为 $[90/0/90/0]_s$，考虑了三种工况：情况 1：$[\theta/\theta/\theta/\theta/\theta/\underline{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}]$；情况 2：$[\theta/\theta/\theta/\underline{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}]$ 和情况 3$[\theta/\underline{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}]$。含多处基体裂纹复合材料层合梁 ($[90/0/90/0]_s$) 的变形云图如图5.21所示。.

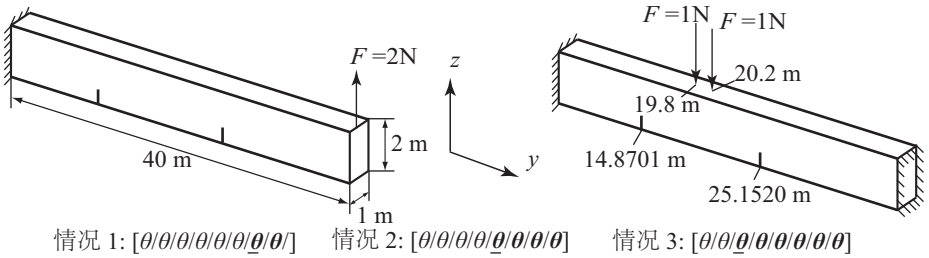


图 5.20　含多处基体裂纹复合材料层合梁：(a) 一端固支 (CF)；(b) 两端固支 (CC)

5.5.4　含多层分层和多处基体裂纹复合材料层合梁

本算例以含多层分层和多处基体裂纹复合材料层合梁为研究对象，首先利用含分层和基体裂纹各向同性梁来验证扩展逐层方法的正确性，其几何尺寸、载荷以及边界条件如图5.22所示，并考虑了一端固支 (CF) 和两端固支 (CC)

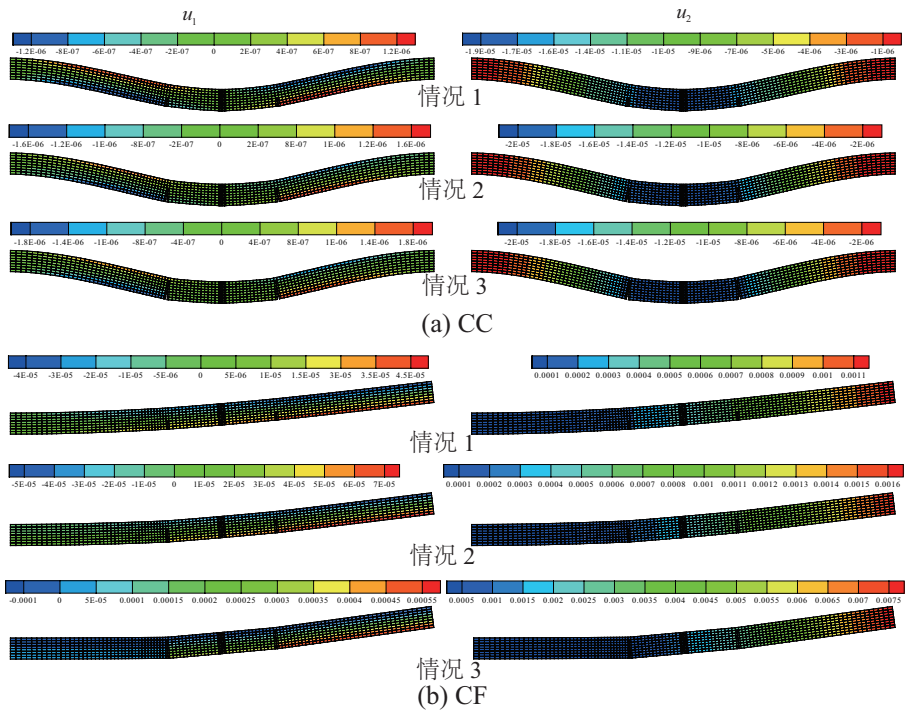


图 5.21　含多处基体裂纹复合材料层合梁 ($[90/0/90/0]_s$) 的变形云图：(a) 一端固支 (CF)；(b) 两端固支 (CC)

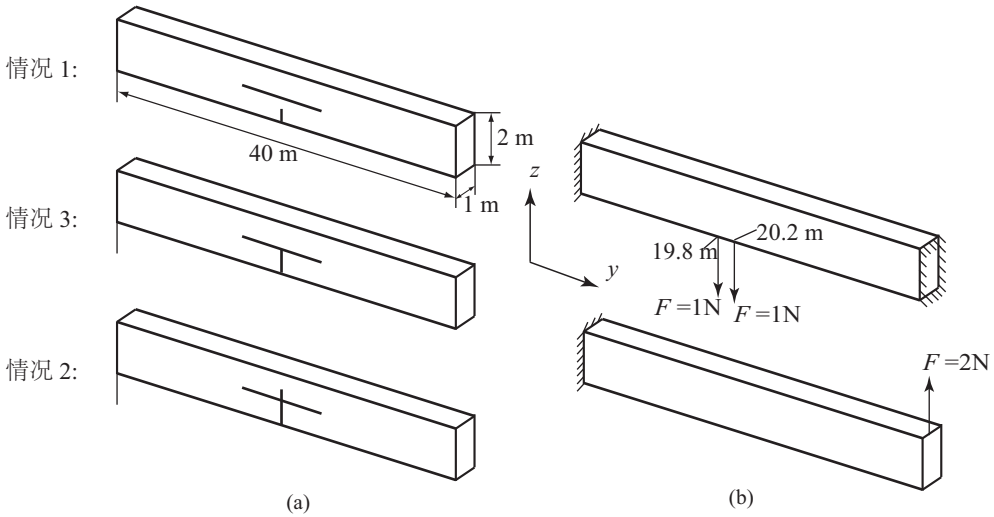


图 5.22　含分层和基体裂纹复合材料层合梁：(a) 三种不同的损伤情况；(b) CF 和 CC 的载荷情况

两种边界条件，在分析过程中该梁结构在厚度方向上被等厚度地分为 8 层，材料性能为：$E=52\text{GPa}$，$v=0.3$。并考虑了三种情况，情况 1，基体裂纹与分层损伤相互独立，即 $[\theta/\theta/\theta/\theta/\cap/\theta/\underline{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}]$；情况 2，基体裂纹与分层损伤刚好相交，即 $[\theta/\theta/\theta/\theta/\cap/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}]$；情况 3，基体裂纹穿过了分层损伤，即 $[\theta/\underline{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\cap/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}]$。

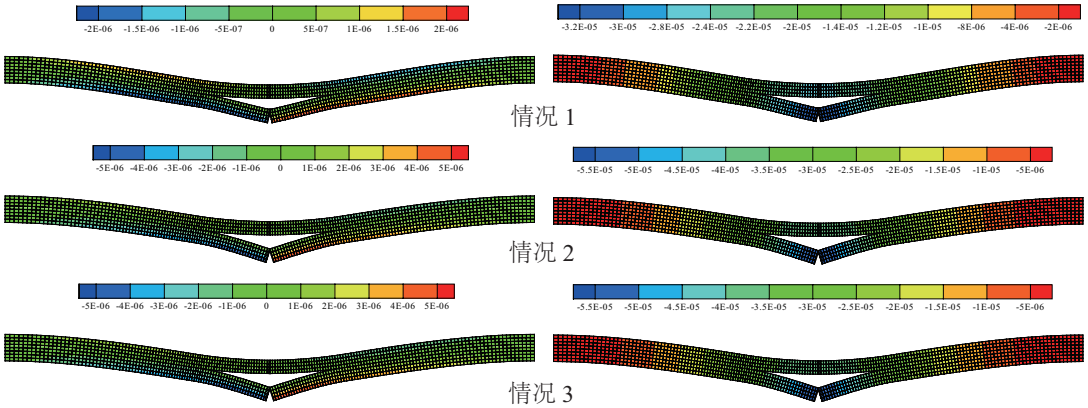
表 5.6　扩展逐层方法和三维有限元模型分析得到的含分层和基体裂纹损伤的复合材料层合梁最大位移

	节点	一端固支 (CF)				两端固支 (CC)			
		$u_1/(10^{-4}\text{m})$		$u_2/(10^{-3}\text{m})$		$u_1/(10^{-6}\text{m})$		$u_2/(10^{-5}\text{m})$	
		3D 解	XLWM	3D 解	XLWM	3D 解	XLWM	3D 解	XLWM
情况 1	114		0.5243		1.3256		2.2433		3.3437
	172	0.5361	0.5281	1.3510	1.3370	2.3524	2.2682	3.4682	3.3937
情况 2	114		1.7834		2.9452		5.3833		5.6659
	172	1.8297	1.8245	3.0192	3.0063	5.5085	5.4678	5.8150	5.7832
情况 3	114		2.6996		3.9651		5.4195		5.6766
	172	2.8407	2.7427	4.1443	4.0287	5.5400	5.4992	5.8287	5.7924

基于 MSC.Nastran 的 Hex8 实体元建立了含分层和基体裂纹各向同性梁的三维有限元模型，表5.6对比了扩展逐层方法和三维有限元模型分析得到的含分层和基体裂纹损伤的复合材料层合梁最大位移，扩展逐层方法分析得到的变形云图如图5.23所示。从表5.6 中可以看出，随着节点数从 79 增加到 101，位移的最大值的增加小于 2%，收敛速度要小于含分层裂纹各向同性梁。对于不同的边界条件，位移最大值都收敛，但一端固支的收敛速度要大于两端固支。扩展逐层方法计算得到的最大位移与三维有限元模型的分析结果吻合很好，但由于没有考虑接触条件，所以从图5.23中可以看出明显的材料相互嵌入的不合理现象。

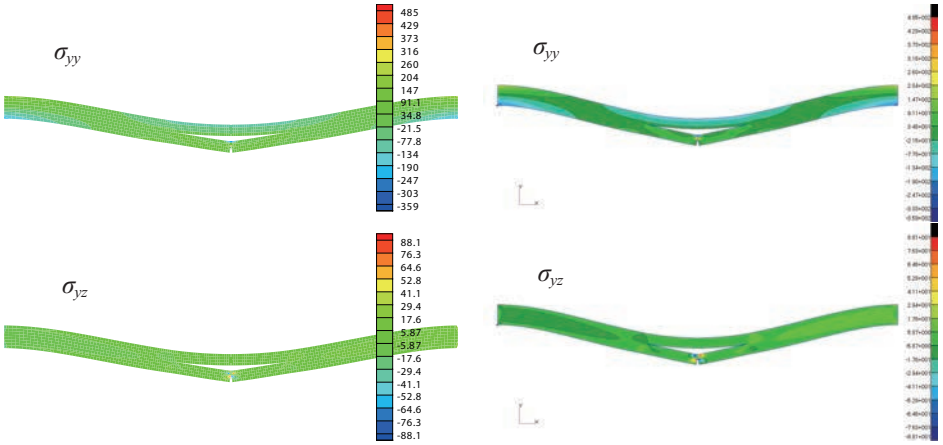
图5.24对比了扩展逐层方法和三维有限元模型分析得到的含分层和基体裂纹损伤复合材料层合梁应力 σ_{11} 和 σ_{12}，层合梁的下表面作用单位均布压力，其几何尺寸、载荷、边界条件以及有限元离散与上个算例中的一样。从图5.10中可以看出，扩展逐层方法计算得到的应力最大值和应力云图与三维有限元模型分析得到的吻合很好，应力 σ_{12} 在分层前缘、基体裂纹以及边界附近处形成了严重的应力集中，而应力 σ_{22} 只在基体裂纹附近处形成了严重的应力集中。

为了验证扩展逐层方法分析复杂损伤形式的优势，本算例最后研究了含



(a) 位移 u_1　　(b) 位移 u_2

图 5.23　含分层和基体裂纹损伤复合材料层合梁的变形云图：(a) 位移 u_1(CC)；(b) 位移 u_2(CC)



(a)　　(b)

图 5.24　扩展逐层方法和三维有限元模型分析得到的含分层和基体裂纹损伤复合材料层合梁的应力云图：(a) XLWM；(b) 3D 有限元

多层分层和多处基体裂纹损伤复合材料层合梁问题，该层合梁的铺层方式为 $[0/90/0/90]_s$，所有单层具有相同的厚度和材料性能：$E_{11}=181\,\text{GPa}$，$E_{22}=E_{33}=10.3\,\text{GPa}$，$G_{12}=G_{13}=7.17\,\text{GPa}$，$G_{23}=6.21\,\text{GPa}$，$G_{12}=0.28$，$G_{13}=0.02$，$G_{23}=0.40$。含多层分层和多处基体裂纹损伤复合材料层合梁的位移云图如图5.25所示，在图5.25(a) 和 (b) 中，基体裂纹和分层损伤可表示为 $[\theta/\underline{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\cap/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\cap/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}]$。在图5.25(c) 中，横截面 I 和 III 上基体裂纹和分层损伤可表示为 $[\theta/\theta/\theta/\cap/\theta/\theta/\theta/\cap/\theta/\theta]$，横截面 II 上基体裂纹和分层损伤可表示为 $[\theta/\underline{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\cap/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\cap/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}]$。在图5.25(c) 中，横截面 I 和 III 上基体裂纹和分层损伤可表示为 $[\theta/\theta/\theta/\cap/\theta/\theta/\cap/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}]$，横截面 II 上基体裂纹和分层损伤可表示为 $[\theta/\underline{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\cap/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}/\cap/\boldsymbol{\theta}/\boldsymbol{\theta}]$。从图5.25中可以看出，扩展逐层方法能够

很好地模拟含多层分层和多处基体裂纹损伤复合材料层合梁问题。另外，四种含多层分层和多处基体裂纹损伤复合材料层合梁的应力云图如图5.26所示。

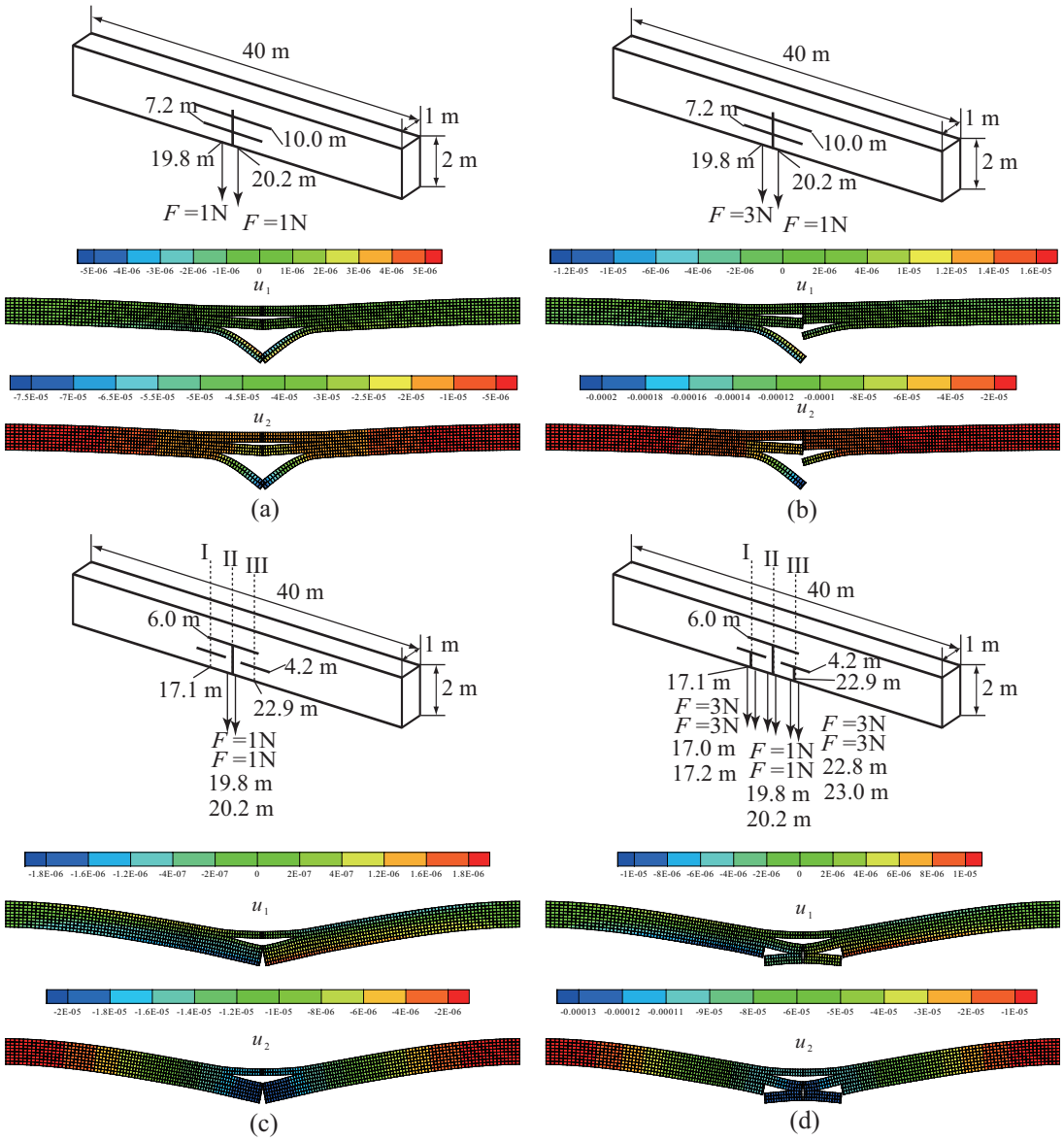


图 5.25　含多层分层和多处基体裂纹损伤复合材料层合梁 ($[0/90/0/90]_s$) 的位移云图

5.6　本章小结

本章基于逐层理论和 XFEM，为含多层分层和多处基体裂纹复合材料层合梁结构建立了一种扩展逐层方法。首先，在厚度方向上的位移假设模式中引入一维强不连续和弱不连续函数来模拟分层损伤和层间界面，然后在位移的面内离散中引入间断函数来模拟基体裂纹损伤。因此，扩展逐层方法不仅能

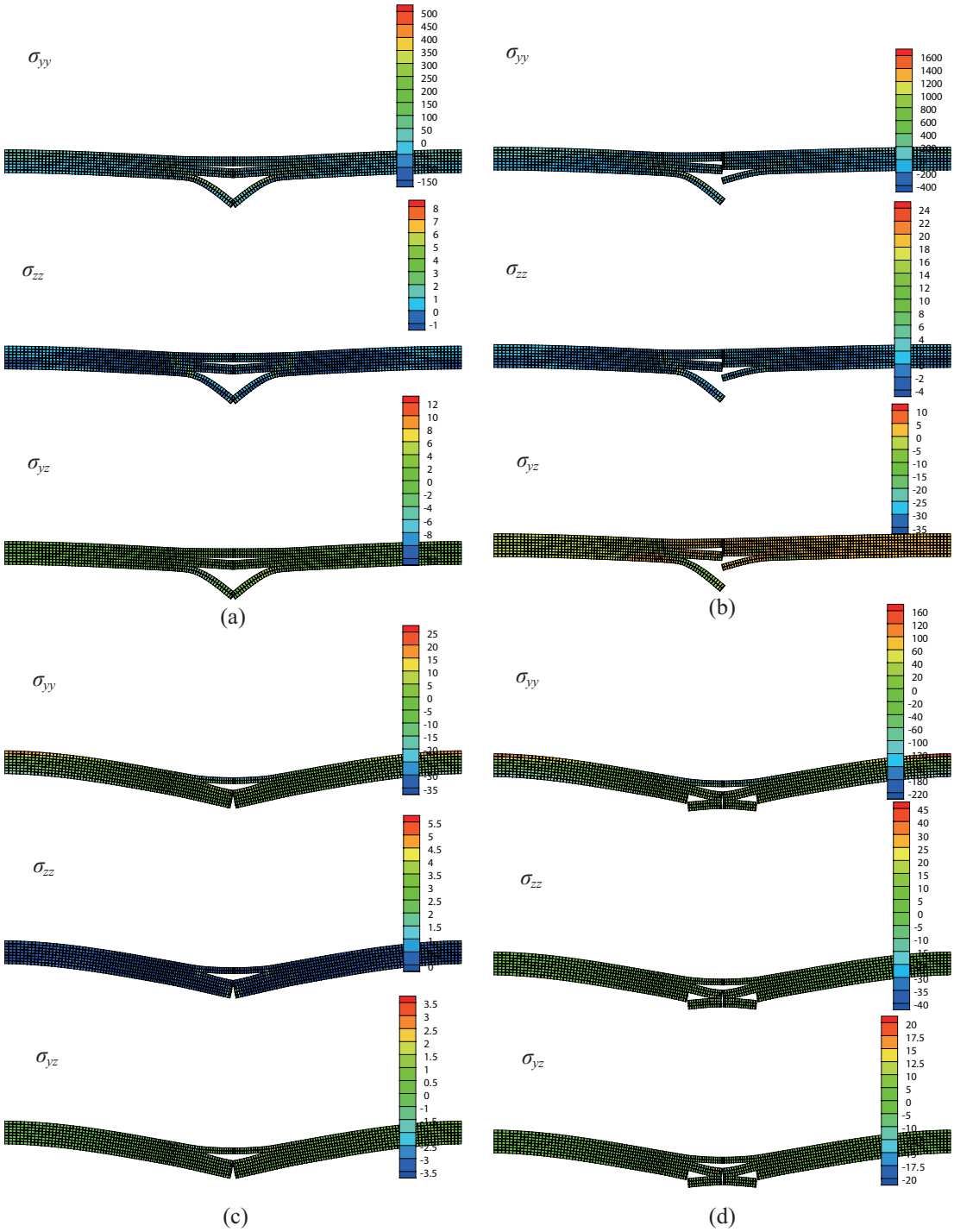


图 5.26　含多层分层和多处基体裂纹损伤复合材料层合梁 ($[0/90/0/90]_s$) 的应力云图

同时精确描述复合材料层合梁结构中的多层分层和多处基体裂纹损伤，还能精确分析基体裂纹裂尖和分层前缘应力场。由于真实的复合材料分层和基体裂纹损伤形态是十分复杂，本文方法是建立在对实际损伤进行抽象等效的基础之上，所以不能完全真实地描述复合材料分层和基体裂纹损伤。

通过大量数值算例验证了扩展逐层方法在分析无损伤、含分层和/或基体裂纹损伤复合材料层合梁结构问题的正确性，且扩展逐层方法的分析结果与 Reddy 的逐层理论以及三维有限元方法的分析结果吻合很好。如果在分析过程中，考虑分层面和基体裂纹面的接触条件，并结合虚拟裂纹闭合技术 (Virtual Crack Closure Technique, VCCT)，扩展逐层方法可以很方便地应用于复合材料层合梁结构的低速冲击损伤预测问题。

另外，本章基于扩展逐层方法研究了分层损伤尺寸和位置对复合材料层合梁结构最大位移的影响，以及基体裂纹长度对复合材料层合梁结构最大位移的影响。

第 6 章　复合材料层合板结构的扩展逐层方法

本章将复合材料层合梁结构的扩展逐层理论推广应用到含多层分层和多处基体裂纹复合材料层合板问题上，结合各向同性和各向异性材料的裂纹尖端扩充函数，分别建立了各向同性材料板和复合材料层合板的扩展逐层理论。该理论能同时精确描述层间分层和基体裂纹，进而精确分析层间分层前缘和基体裂纹尖端的位移场和应力场。

6.1　位移场

6.1.1　位移假设模式

含多层分层损伤复合材料层合板位移模式如图6.1所示。与第 5 章提出的含多层分层损伤复合材料层合梁的位移假设模式类似，含多层分层损伤复合材料层合板任意点 (x,y,z) 的位移为

$$u_\alpha(x,y,z,t)=\sum_{k=1}^{N+2}\phi_k(z)u_{\alpha ik}(x,y,t)+\sum_{k=1}^{N_D}\Xi_k(z)u_{\alpha lk}(x,y,t)+\sum_{k=1}^{N}\Theta_k(z)u_{\alpha rk}(x,y,t) \quad (6\text{-}1)$$

式中，$\alpha=1,2,3$ 表示三个方向上的分量；下标 i、l和 r分别表示标准自由度、分层的附加自由度和层间界面的附加自由度；其它符号的意义见第 5 章的第 1 节。

根据式 (5-5) 的定义，式 (6-1) 可简化为

$$u_\alpha(x,y,z,t)=\Phi_{\zeta k}(z)u_{\alpha\zeta k}(x,y,t),\ \zeta=i,l,r \quad (6\text{-}2)$$

如果复合材料层合板厚度方向无分层损伤，则位移模式简化为

$$u_\alpha(x,y,z,t)=\Phi_{\zeta k}(z)u_{\alpha\zeta k}(x,y,t),\ \zeta=i,r \quad (6\text{-}3)$$

若在 $x-y$ 平面内有基体裂纹存在，则需要引入扩充自由度来描述裂纹，位移在面内可基于扩展有限元方法离散为

$$u_{\alpha\zeta k}(x,y,t)=\psi_m(x,y)\tilde{U}_{\alpha\zeta km}(t)+\Lambda_s(x,y)\bar{U}_{\alpha\zeta ks}(t)+\Pi_{hb}(x,y)\hat{U}_{\alpha\zeta khb}(t) \quad (6\text{-}4)$$

式中，$m=1,\cdots,N_{\mathrm{E}}$，$N_{\mathrm{E}}$ 为面内节点数量；$s=1,\cdots,N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{P}}$，$N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{P}}$ 为由于裂纹面而需扩充的节点数量；$h=1,\cdots,N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{Q}}$，$N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{Q}}$ 是为了精确描述裂纹尖端应力场而需扩充

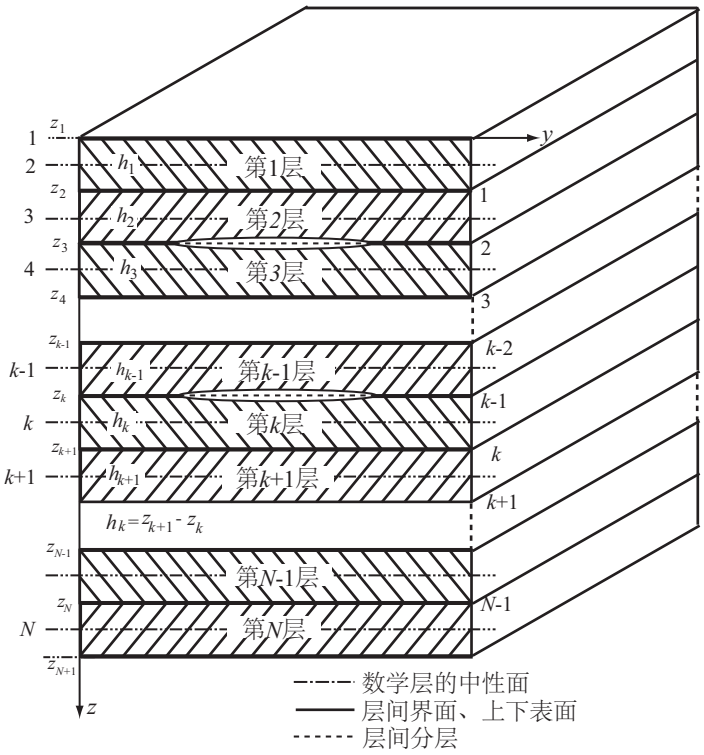


图 6.1　含多层分层损伤复合材料层合板位移模式

的节点数量；$b=1,\cdots,N^{\mathrm{F}}$，$N^{\mathrm{F}}$ 为裂纹尖端扩充函数的数量；$\tilde{U}_{\alpha\zeta km}$ 为标准自由度，$\bar{U}_{\alpha\zeta ks}$ 为裂纹间断面引起的扩充自由度，$\hat{U}_{\alpha\zeta khb}$ 为裂纹尖端引起的扩充自由度；$\psi_m(x,y)$ 为节点 m 的有限元形函数；$\Lambda_s=\psi_s(x,y)H_s(x,y)$ 为描述裂纹面间断的强不连续扩充形函数，$H_s(x,y)$ 是 Heaviside 函数；$\boldsymbol{\Pi}_h=\psi_h(x,y)F_h^b(x,y)$ 为描述裂纹尖端的扩充形函数，$F_h^b(x,y)$ 的形式将因材料是各向同性还是各向异性而不同，将在本节的后面详细介绍。

如果复合材料层合板没有基体裂纹损伤，则面内位移离散中就没有扩充自由度，上式简化为

$$u_{\alpha\zeta k}(x,y,t)=\psi_m(x,y)\tilde{U}_{\alpha\zeta km}(t) \tag{6-5}$$

6.1.2　水平集函数

在扩展有限元方法中允许单元包含裂纹或不连续面，因此需要对单元内的不连续面进行几何描述，通常利用的方法是水平集函数。另外，扩展有限元方法中的扩充形函数的构造也需要借助水平集函数。关于水平集函数的初始化和更新方法见文献[170,171]，此处只做简单介绍。

在裂纹任意扩展过程中，裂纹引起的不连续面上的点始终满足水平集函数 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)=0$，在不连续面的两侧水平集函数的符合相反。裂纹尖端的描述需

要利用两个水平集函数 $\varphi(\boldsymbol{x},t)=0$ 和 $\Psi_i(\boldsymbol{x},t)=0$ 共同描述，其中 i 表示裂纹尖端的编号。

可利用节点到裂纹面的符号距离来初始化水平集函数 ψ

$$\varphi(\boldsymbol{x},t=0)=\pm\min_{x_\gamma\in\gamma(t)}\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_\gamma\right\| \tag{6-6}$$

式中，$\gamma(t)$ 表示裂纹面。

在初始化水平集函数 Ψ_i 时，可先找到在裂纹尖端垂直于裂纹面的直线，然后利用节点到这条直线的符号距离来初始化水平集函数 Ψ_i

$$\Psi_i(\boldsymbol{x},t)=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)\cdot\hat{\boldsymbol{t}} \tag{6-7}$$

式中，$\boldsymbol{x}_i$ 为第 i 个裂纹尖端的位置；$\hat{\boldsymbol{t}}$ 为在裂纹尖端垂直于裂纹面的直线的单位切向矢量。

所以，单元内的裂纹可以用以上两个水平集函数描述为

$$\{\boldsymbol{x}:\varphi(\boldsymbol{x},t)=0\text{和}\Psi_i(\boldsymbol{x},t)\le 0\} \tag{6-8}$$

6.1.3　扩充函数

面内基体裂纹面的扩充函数由 Heaviside 函数构造

$$H(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1 & \psi(\boldsymbol{x},t)>0\\ -1 & \psi(\boldsymbol{x},t)<0\end{cases} \tag{6-9}$$

由于复合材料层合结构的单层是各向异性材料，所以裂纹尖端附近的扩充函数 $\boldsymbol{F}^b$ 应该基于各向异性弹性体位移场来构造。根据 Asadpoure 和 Mohammadi 的研究成果[125,126]，$\boldsymbol{F}^b$ 可构造成为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}^b(r,\theta)=\ &\left\{\sqrt{r}\cos\frac{\theta_1}{2}\sqrt{g_1(\theta)},\ \sqrt{r}\cos\frac{\theta_2}{2}\sqrt{g_2(\theta)},\right.\\ &\left.\sqrt{r}\sin\frac{\theta_1}{2}\sqrt{g_1(\theta)},\ \sqrt{r}\sin\frac{\theta_2}{2}\sqrt{g_2(\theta)}\right\}\\ &b=1,2,3,4\end{aligned} \tag{6-10}$$

式中，$g_j(\theta),(j=1,2)$ 和 $\theta_j,(j=1,2)$ 的具体表达式将在下面详细给出。

在不考虑体积力的情况下，将 Airy 应力函数代入各向异性材料的协调方程可得

$$C_{22}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}-2C_{26}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^3\partial y}+(2C_{12}+C_{66})\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}-2C_{16}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x\partial y^3}+C_{22}\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=0 \tag{6-11}$$

上式的特征方程为

$$C_{11}s^4 - 2C_{16}s^3 + (2C_{12}+C_{66})s^2 - 2C_{26}s + C_{22} = 0 \tag{6-12}$$

特征方程 (6-12) 的根往往是两对共轭复数或虚数[172]，四个根为 $s_j = s_{jx} + \mathrm{i}s_{jy}\,(j=1,2)$ 和 $\bar{s}_j\,(j=1,2)$。根据上面特征方程可将复合材料分为两类，分类依据为两个参数 a_1 和 a_2

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{d_{11}d_{22} - d_{12}^2 - 2d_{12}d_{66}}{2d_{11}d_{66}} \\ a_2 &= \frac{d_{22}}{d_{11}} \end{aligned} \tag{6-13}$$

式中，$d_{ij}(i,j=1,2,\cdots 6)$ 为各向异性材料的柔度系数。

对于正交各向异性复合材料，式 (6-10) 中函数 $g_j(\theta)$ 和 θ_j 具有一般地表达式

$$g_j(\theta) = \sqrt{(\cos\theta + s_{ix}\sin\theta)^2 + (s_{iy}\sin\theta)^2} \tag{6-14}$$

$$\theta_j = \arctan\left(\frac{s_{iy}\sin\theta}{\cos\theta + s_{ix}\sin\theta}\right) \tag{6-15}$$

如果 Airy 应力函数的特征方程只有虚根，则该复合材料定义为类型 I $(a_1 > \sqrt{a_2}, a_2 > 0)$，所以函数 $g_j(\theta)$ 和 θ_j 可写成

$$\begin{aligned} g_j(\theta) &= \sqrt{\left(\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{e_j^2}\right)} \\ \theta_j &= \arctan\left(\frac{\theta}{e_j}\right) \end{aligned} \tag{6-16}$$

式中，$j=1,2$；$e_1 = \sqrt{a_1 - \sqrt{a_1^2 - a_2}}$；$e_2 = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_1^2 - a_2}}$。

如果 Airy 应力函数的特征方程有复根，则该复合材料定义为类型 II $(a_1 < \sqrt{a_2}, a_2 > 0)$，所以函数 $g_j(\theta)$ 和 θ_j 可写成

$$\begin{aligned} g_j(\theta) &= \sqrt{\left[\cos^2\theta + l^2\sin^2\theta + (-1)^j l^2\sin 2\theta\right]} \\ \theta_j &= \arctan\left(\frac{\gamma_2 l^2\sin^2\theta}{\cos\theta + (-1)^j\gamma_1 l^2\sin\theta}\right) \end{aligned} \tag{6-17}$$

式中，$j=1,2$；$\gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + (\sqrt{a_2} + a_1)}$；$\gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + (\sqrt{a_2} - a_1)}$；$l^2 = \left(\gamma_1^2 + \gamma_2^2\right)^{-1}$。

式 (6-10) 中的裂纹尖端扩充函数并不适合各向同性材料[125,126]，所以如果利用本文的方法去分析各向同性板时，裂纹尖端扩充函数 $\boldsymbol{F}^b$ 应取

$$\boldsymbol{F}^b(r,\theta)=\left\{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2},\ \sqrt{r}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2},\ \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2},\ \sqrt{r}\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\right\},\ b=1,2,3,4 \tag{6-18}$$

6.2　Hamilton 原理和 Euler-Lagrange 方程

将厚度方向上的位移模式 (式 (6-1)) 代入应变 -位移关系中

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}&=\Phi_{\zeta k}u_{1\zeta k,x}\\
\varepsilon_{22}&=\Phi_{\zeta k}u_{2\zeta k,y}\\
\varepsilon_{33}&=\Phi_{\zeta k,z}u_{3\zeta k}\\
\varepsilon_{12}&=\Phi_{\zeta k}u_{1\zeta k,y}+\Phi_{\zeta k}u_{2\zeta k,x}\\
\varepsilon_{23}&=\Phi_{\zeta k,z}u_{2\zeta k}+\Phi_{\zeta k}u_{3\zeta k,y}\\
\varepsilon_{13}&=\Phi_{\zeta k,z}u_{1\zeta k}+\Phi_{\zeta k}u_{3\zeta k,x}
\end{aligned} \tag{6-19}$$

利用 Hamilton 原理可以建立含多层分层和基体裂纹复合材料层合板结构的运动方程。从式 (6-19) 中可以得到应变的一阶变分，则虚应变能为

$$\begin{aligned}
\delta U&=\int_\Omega\int_{-H/2}^{H/2}\left(\sigma_{\alpha\beta}\delta\varepsilon_{\alpha\beta}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\
&=\int_\Omega\Big(N^x_{\zeta k}\delta u_{1\zeta k,x}+N^{xy}_{\zeta k}\delta u_{1\zeta k,y}+Q^{xz}_{\zeta k}\delta u_{1\zeta k}+\\
&\quad N^y_{\zeta k}\delta u_{2\zeta k,y}+N^{xy}_{\zeta k}\delta u_{2\zeta k,x}+Q^{yz}_{\zeta k}\delta u_{2\zeta k}+\\
&\quad N^{yz}_{\zeta k}\delta u_{3\zeta k,y}+N^{xz}_{\zeta k}\delta u_{3\zeta k,x}+Q^{zz}_{\zeta k}\delta u_{3\zeta k}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{6-20}$$

式中，

$$\begin{aligned}
\left(N^x_{\zeta k},N^y_{\zeta k},N^{xy}_{\zeta k},N^{yz}_{\zeta k},N^{xz}_{\zeta k}\right)&=\int_{-H/2}^{H/2}(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12},\sigma_{23},\sigma_{13})\Phi_{\zeta k}\mathrm{d}z,\\
\left(Q^{zz}_{\zeta k},Q^{yz}_{\zeta k},Q^{xz}_{\zeta k}\right)&=\int_{-H/2}^{H/2}(\sigma_{33},\sigma_{23},\sigma_{13})\Phi_{\zeta k,z}\mathrm{d}z
\end{aligned} \tag{6-21}$$

外力虚功为

$$\begin{aligned}\delta V=&\int_{\Omega}\left[q_b(y,t)\delta u_3(y,-\frac{H}{2},t)+q_t(y,t)\delta u_3(y,\frac{H}{2},t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\\&\int_{\Gamma}\int_{-H/2}^{H/2}\left(\bar{\sigma}_{nn}\delta u_n+\bar{\sigma}_{ns}\delta u_s+\bar{\sigma}_{nz}\delta u_3\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}\Gamma\\&=\int_{\Omega}\left(q_b\delta u_3^{N+1}+q_t\delta u_3^0\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\\&\int_{\Gamma}\left(\bar{N}_{\zeta k}^{nn}\delta u_{1\zeta k}^n+\bar{N}_{\zeta k}^{ns}\delta u_{1\zeta k}^s+\bar{Q}_{\zeta k}^n\delta u_{3\zeta k}\right)\mathrm{d}\Gamma\end{aligned}\tag{6-22}$$

式中 $q_b(y,t)$ 和 $q_t(y,t)$ 分别为层合板下表面 $(z=-H/2)$ 和上表面 $(z=H/2)$ 的分布外载荷；H 为层合板的厚度。

$$\begin{aligned}\bar{N}_{\zeta k}^{nn}&=\int_{-H/2}^{H/2}\bar{\sigma}_{nn}\phi_{\zeta k}\mathrm{d}z,\\\bar{N}_{\zeta k}^{ns}&=\int_{-H/2}^{H/2}\bar{\sigma}_{ns}\phi_{\zeta k}\mathrm{d}z,\\\bar{Q}_{\zeta k}^{n}&=\int_{-H/2}^{H/2}\bar{\sigma}_{nz}\phi_{\zeta k}\mathrm{d}z\end{aligned}\tag{6-23}$$

为边界上的合应力。

$$\begin{aligned}u_{1\zeta k}^n&=u_{1\zeta k}n_x+u_{2\zeta k}n_y\\u_{1\zeta k}^s&=-u_{1\zeta k}n_y+u_{2\zeta k}n_x\end{aligned}\tag{6-24}$$

为边界上的法向和切向位移。

虚动能为

$$\begin{aligned}\delta M=&\int_L\int_{-H/2}^{H/2}\rho_0\left(\dot{u}_1\delta\dot{u}_1+\dot{u}_2\delta\dot{u}_2+\dot{u}_3\delta\dot{u}_3\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\=&\int_{\Omega}\int_{-H/2}^{H/2}\rho_0\left(\Phi_{\zeta k}\Phi_{\eta e}\dot{u}_{1\eta e}\delta\dot{u}_{1\zeta k}+\Phi_{\zeta k}\Phi_{\eta e}\dot{u}_{2\eta e}\delta\dot{u}_{2\zeta k}+\right.\\&\left.\Phi_{\zeta k}\Phi_{\eta e}\dot{u}_{3\eta e}\delta\dot{u}_{3\zeta k}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\int_{\Omega}\left(I_{\zeta\eta ke}\dot{u}_{1\eta e}\delta\dot{u}_{1\zeta k}+I_{\zeta\eta ke}\dot{u}_{2\eta e}\delta\dot{u}_{2\zeta k}+I_{\zeta\eta ke}\dot{u}_{3\eta e}\delta\dot{u}_{3\zeta k}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}\tag{6-25}$$

式中，

$$I_{\zeta\eta ke}=\int_{-H/2}^{H/2}\rho_0\Phi_{\zeta k}\Phi_{\eta e}\mathrm{d}z \tag{6-26}$$

将式 (6-20)、(6-22) 和 (6-25) 代入 Hamilton 原理，并分部积分，得

$$\begin{aligned}
&\int_0^T(\delta U-\delta V-\delta M)dt\\
&=\int_0^T\left\{\int_\Gamma\left[\left(N_{\zeta k}^{x}n_x+N_{\zeta k}^{xy}n_y\right)\delta u_{1\zeta k}+\left(N_{\zeta k}^{y}n_y+N_{\zeta k}^{xy}n_x\right)\delta u_{2\zeta k}+\right.\right.\\
&\qquad\left.\left(N_{\zeta k}^{yz}n_y+N_{\zeta k}^{xz}n_x\right)\delta u_{3\zeta k}\right]\mathrm{d}\Gamma-\\
&\int_\Omega\left[\left(N_{\zeta k,x}^{x}+N_{\zeta k,y}^{xy}-Q_{\zeta k}^{xz}\right)\delta u_{1\zeta k}+\left(N_{\zeta k,y}^{y}+N_{\zeta k,x}^{xy}-Q_{\zeta k}^{yz}\right)\delta u_{2\zeta k}+\right.\\
&\qquad\left.\left(N_{\zeta k,y}^{yz}+N_{\zeta k,x}^{xz}-Q_{\zeta k}^{zz}\right)\delta u_{3\zeta k}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\\
&\int_\Omega(q_b\delta_k^{N+1}+q_t\delta_k^0)\delta u_{3,i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\\
&\int_\Gamma\left[(\bar{N}_{\zeta k}^{nn}n_x-\bar{N}_{\zeta k}^{ns}n_y)\delta u_{1\zeta k}+(\bar{N}_{\zeta k}^{nn}n_y+\bar{N}_{\zeta k}^{ns}n_x)\delta u_{2\zeta k}+\bar{Q}_{\zeta k}^{n}\delta u_{3\zeta k}\right]\mathrm{d}\Gamma+\\
&\left.\int_\Omega\left(I_{\zeta\eta ke}\ddot{u}_{1\eta e}\delta u_{1\zeta k}+I_{\zeta\eta ke}\ddot{u}_{2\eta e}\delta u_{2\zeta k}+I_{\zeta\eta ke}\ddot{u}_{3\eta e}\delta u_{3\zeta k}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}t=0
\end{aligned} \tag{6-27}$$

根据 Hamilton 原理可得含多层分层和基体裂纹复合材料层合板结构的 Euler-Lagrange 方程

$$\begin{aligned}
&\delta u_{1\zeta k}:N_{\zeta k,x}^{x}+N_{\zeta k,y}^{xy}-Q_{\zeta k}^{xz}=I_{\zeta\eta ke}\ddot{u}_{1\eta e}\\
&\delta u_{2\zeta k}:N_{\zeta k,y}^{y}+N_{\zeta k,x}^{xy}-Q_{\zeta k}^{yz}=I_{\zeta\eta ke}\ddot{u}_{2\eta e}\\
&\delta u_{3\zeta k}:N_{\zeta k,y}^{yz}+N_{\zeta k,x}^{xz}-Q_{\zeta k}^{zz}+q_b\delta_i^{N+1}+q_t\delta_i^0=I_{\zeta\eta ke}\ddot{u}_{3\eta e}
\end{aligned} \tag{6-28}$$

自然边界条件为

$$\begin{aligned}
&\delta u_{1\zeta_k}: N_{\zeta_k}^{nn}-\tilde{N}_{\zeta_k}^{nn}=0\\
&\delta u_{2\zeta_k}: N_{\zeta_k}^{ns}-\tilde{N}_{\zeta_k}^{ns}=0\\
&\delta u_{3\zeta_k}: Q_{\zeta_k}^{n}-\bar{Q}_{\zeta_k}^{n}=0
\end{aligned} \tag{6-29}$$

式中

$$\begin{aligned}
N_{\zeta_k}^{nn}&=N_{\zeta_k}^{x}n_x+N_{\zeta_k}^{xy}n_y\\
N_{\zeta_k}^{ns}&=N_{\zeta_k}^{y}n_y+N_{\zeta_k}^{xy}n_x\\
Q_{\zeta_k}^{n}&=N_{\zeta_k}^{yz}n_y+N_{\zeta_k}^{xz}n_x\\
\tilde{N}_{\zeta_k}^{nn}&=\bar{N}_{\zeta_k}^{nn}n_x-\bar{N}_{\zeta_k}^{ns}n_y\\
\tilde{N}_{\zeta_k}^{ns}&=\bar{N}_{\zeta_k}^{nn}n_y+\bar{N}_{\zeta_k}^{ns}n_x
\end{aligned} \tag{6-30}$$

6.3　本构方程

复合材料层合板的应力应变关系见式 (2-14)。将式 (2-14) 代入式 (6-21)，可得合内力和内力矩

$$\begin{aligned}
N_{\zeta_k}^{x}&=\int_{-H/2}^{H/2}\left(C_{11}\varepsilon_{11}+C_{12}\varepsilon_{22}+C_{13}\varepsilon_{33}+C_{16}\varepsilon_{12}\right)\Phi_{\zeta_k}\mathrm{d}z\\
&=A_{11\zeta\eta ke}^{1}\frac{\partial u_{1\eta e}}{\partial x}+A_{16\zeta\eta ke}^{1}\left(u_{1\eta e,y}+u_{2\eta e,x}\right)+\\
&\quad A_{12\zeta\eta ke}^{1}u_{2\eta e,y}+A_{13\zeta\eta ke}^{2}u_{3\eta e}
\end{aligned} \tag{6-31}$$

$$\begin{aligned}
N_{\zeta_k}^{y}&=\int_{-H/2}^{H/2}\left(C_{12}\varepsilon_{11}+C_{22}\varepsilon_{22}+C_{23}\varepsilon_{33}+C_{26}\varepsilon_{12}\right)\Phi_{\zeta_k}\mathrm{d}z\\
&=A_{12\zeta\eta ke}^{1}u_{1\eta e,x}+A_{26\zeta\eta ke}^{1}\left(u_{1\eta e,y}+u_{2\eta e,x}\right)+\\
&\quad A_{22\zeta\eta ke}^{1}u_{2\eta e,y}+A_{23\zeta\eta ke}^{2}u_{3\eta e}
\end{aligned} \tag{6-32}$$

$$
\begin{aligned}
Q_{\zeta}^{zz} &= \int_{-H/2}^{H/2} \left(C_{13}\varepsilon_{11} + C_{23}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} + C_{36}\varepsilon_{12}\right) \Phi_{\zeta k,z} \mathrm{d}z \\
&= A_{13\zeta\eta ke}^{3} u_{1\eta e,x} + A_{36\zeta\eta ke}^{3} \left(u_{1\eta e,y} + u_{2\eta e,x}\right) + \\
&\quad A_{23\zeta\eta ke}^{3} u_{2\eta e,y} + A_{33\zeta\eta ke}^{4} u_{3\eta e}
\end{aligned} \tag{6-33}
$$

$$
\begin{aligned}
N_{\zeta k}^{xy} &= \int_{-H/2}^{H/2} \left(C_{16}\varepsilon_{11} + C_{26}\varepsilon_{22} + C_{36}\varepsilon_{33} + C_{66}\varepsilon_{12}\right) \Phi_{\zeta k} \mathrm{d}z \\
&= A_{16\zeta\eta ke}^{1} u_{1\eta e,x} + A_{66\zeta\eta ke}^{1} \left(u_{1\eta e,y} + u_{2\eta e,x}\right) + \\
&\quad A_{26\zeta\eta ke}^{1} u_{2\eta e,y} + A_{36\zeta\eta ke}^{2} u_{3\eta e}
\end{aligned} \tag{6-34}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(N_{\zeta k}^{yz}, Q_{\zeta k}^{yz}\right) &= \int_{-H/2}^{H/2} \left(C_{44}\varepsilon_{23} + C_{45}\varepsilon_{13}\right) \left(\Phi_{\zeta k}, \Phi_{\zeta k,z}\right) \mathrm{d}z \\
&= \left(A_{45\zeta\eta ke}^{2}, A_{45\zeta\eta ke}^{4}\right) u_{1\eta e} + \left(A_{44\zeta\eta ke}^{2}, A_{44\zeta\eta ke}^{4}\right) u_{2\eta e} + \\
&\quad \left(A_{45\zeta\eta ke}^{1}, A_{45\zeta\eta ke}^{3}\right) u_{3\eta e,x} + \left(A_{44\zeta\eta ke}^{1}, A_{44\zeta\eta ke}^{3}\right) u_{3\eta e,y}
\end{aligned} \tag{6-35}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(N_{\zeta k}^{xz}, Q_{\zeta k}^{xz}\right) &= \int_{-H/2}^{H/2} \left(C_{45}\varepsilon_{23} + C_{55}\varepsilon_{13}\right) \left(\Phi_{\zeta k}, \Phi_{\zeta k,z}\right) \mathrm{d}z \\
&= \left(A_{55\zeta\eta ke}^{2}, A_{55\zeta\eta ke}^{4}\right) u_{1\eta e} + \left(A_{45\zeta\eta ke}^{2}, A_{45\zeta\eta ke}^{4}\right) u_{2\eta e} + \\
&\quad \left(A_{55\zeta\eta ke}^{1}, A_{55\zeta\eta ke}^{3}\right) u_{3\eta e,x} + \left(A_{45\zeta\eta ke}^{1}, A_{45\zeta\eta ke}^{3}\right) u_{3\eta e,y}
\end{aligned} \tag{6-36}
$$

式中，等效刚度系数 $A_{pq\zeta\eta ke}^{1}, A_{pq\zeta\eta ke}^{2}, A_{pq\zeta\eta ke}^{3}, A_{pq\zeta\eta ke}^{4}$ 为

$$
\begin{aligned}
A_{pq\zeta\eta ke}^{1} &= \int_{-H/2}^{H/2} \Phi_{\zeta k} \bar{C}_{pq} \Phi_{\eta e} \mathrm{d}z, \\
A_{pq\zeta\eta ke}^{2} &= \int_{-H/2}^{H/2} \Phi_{\zeta k,z} \bar{C}_{pq} \Phi_{\eta e} \mathrm{d}z, \\
A_{pq\zeta\eta ke}^{3}, &= \int_{-H/2}^{H/2} \Phi_{\zeta k} \bar{C}_{pq} \Phi_{\eta e,z} \mathrm{d}z, \\
A_{pq\zeta\eta ke}^{4} &= \int_{-H/2}^{H/2} \Phi_{\zeta k,z} \bar{C}_{pq} \Phi_{\eta e,z} \mathrm{d}z,
\end{aligned} \tag{6-37}
$$

6.4　控制方程

6.4.1　含多层分层复合材料层合板的控制方程

对于静力问题，将式 (6-5) 代入式 (6-20)，变分并分部积分可得含多层分层复合材料层合板的有限元控制方程

$$K_{\alpha\beta\zeta\eta kemn}U_{\beta\eta en}=F_{\alpha\zeta km} \tag{6-38}$$

式中，$m,n=1,\cdots,N_E$；$K_{\alpha\beta\zeta\eta kemn}$ 为单元刚度矩阵。$\boldsymbol{K}_{\zeta\eta kemn}$ 各元素的具体表达

式为

$$
\begin{aligned}
K_{11\zeta\eta kemn} &= \psi_{m,x}A^1_{11\zeta\eta ke}\psi_{n,x} + \psi_{m,x}A^1_{16\zeta\eta ke}\psi_{n,y} + \psi_{m,y}A_{16\zeta\eta ke}\psi_{n,x} + \\
&\quad \psi_{m,y}A^1_{66\zeta\eta ke}\psi_{n,y} + \psi_m A^4_{55\zeta\eta ke}\psi_n \\
K_{12\zeta\eta kemn} &= \psi_{m,x}A^1_{12\zeta\eta ke}\psi_{n,y} + \psi_{m,x}A^1_{16\zeta\eta ke}\psi_{n,x} + \psi_{m,y}A^1_{26\zeta\eta ke}\psi_{n,y} + \\
&\quad \psi_{m,y}A^1_{66\zeta\eta ke}\psi_{n,x} + \psi_m A^4_{45\zeta\eta ke}\psi_n \\
K_{13\zeta\eta kemn} &= \psi_{m,x}A^2_{13\zeta\eta ke}\psi_n + \psi_{m,y}A^2_{36\zeta\eta ke}\psi_n + \\
&\quad \psi_m A^3_{45\zeta\eta ke}\psi_{n,y} + \psi_m A^3_{55\zeta\eta ke}\psi_{n,x} \\
K_{21\zeta\eta kemn} &= \psi_{m,y}A^1_{12\zeta\eta ke}\psi_{n,x} + \psi_{m,x}A^1_{16\zeta\eta ke}\psi_{n,x} + \psi_{m,y}A^1_{26\zeta\eta ke}\psi_{n,y} + \\
&\quad \psi_{m,x}A^1_{66\zeta\eta ke}\psi_{n,y} + \psi_m A^4_{45\zeta\eta ke}\psi_n = K_{12\zeta\eta kemn} \\
K_{22\zeta\eta kemn} &= \psi_{m,y}A^1_{22\zeta\eta ke}\psi_{n,y} + \psi_{m,y}A^1_{26\zeta\eta ke}\psi_{n,x} + \psi_{m,x}A^1_{26\zeta\eta ke}\psi_{n,y} + \\
&\quad \psi_{m,x}A^1_{66\zeta\eta ke}\psi_{n,x} + \psi_m A^4_{44\zeta\eta ke}\psi_n \\
K_{23\zeta\eta kemn} &= \psi_{m,y}A^2_{23\zeta\eta ke}\psi_n + \psi_{m,x}A^2_{36\zeta\eta ke}\psi_n + \\
&\quad \psi_m A^3_{45\zeta\eta ke}\psi_{n,x} + \psi_m A^3_{44\zeta\eta ke}\psi_{n,y} \\
K_{31\zeta\eta kemn} &= \psi_m A^3_{13\zeta\eta ke}\psi_{n,x} + \psi_m A^3_{36\zeta\eta ke}\psi_{n,y} + \\
&\quad \psi_{m,y}A^2_{45\zeta\eta ke}\psi_n + \psi_{m,x}A^2_{55\zeta\eta ke}\psi_n = K_{13\zeta\eta kemn} \\
K_{32\zeta\eta kemn} &= \psi_m A^3_{23\zeta\eta ke}\psi_{n,y} + \psi_m A^3_{36\zeta\eta ke}\psi_{n,x} + \\
&\quad \psi_{m,y}A^2_{44\zeta\eta ke}\psi_n + \psi_{m,x}A^2_{45\zeta\eta ke}\psi_n = K_{23\zeta\eta kemn} \\
K_{33\zeta\eta kemn} &= \psi_{m,y}A^1_{44\zeta\eta ke}\psi_{n,y} + \psi_{m,y}A^1_{45\zeta\eta ke}\psi_{n,x} + \psi_{m,x}A^1_{45\zeta\eta ke}\psi_{n,y} + \\
&\quad \psi_{m,x}A^1_{55\zeta\eta ke}\psi_{n,x} + \psi_m A^4_{33\zeta\eta ke}\psi_n
\end{aligned}
\tag{6-39}
$$

6.4.2　含多层分层和基体裂纹复合材料层合板的控制方程

对于含多层分层和基体裂纹复合材料层合板的静力问题，将式 (6-4) 代入 (6-20)，变分并分部积分可得控制方程

$$
K_{\alpha\beta\zeta\eta ke\kappa\iota}U_{\beta\eta e\iota} = F_{\alpha\zeta k\kappa} \tag{6-40}
$$

式中，$\kappa = m,s,h$；$\iota = n,g,f$；$m,n = 1,2,\cdots N_{\mathrm{E}}$；$s,g = 1,\cdots N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{P}}$；$h,f = 1,\cdots N_{\mathrm{E}}^{\mathrm{Q}}$；

$K_{\alpha\beta\zeta\eta ke\kappa\iota}$ 为单元刚度矩阵。将指标 κ 和 ι 展开

$$\boldsymbol{K}_{\alpha\beta\zeta\eta ke}=\begin{bmatrix} K_{\alpha\beta\zeta\eta kemn} & K_{\alpha\beta\zeta\eta kemg} & K_{\alpha\beta\zeta\eta kemf} \\ K_{\alpha\beta\zeta\eta kesn} & K_{\alpha\beta\zeta\eta kesg} & K_{\alpha\beta\zeta\eta kesf} \\ K_{\alpha\beta\zeta\eta kehn} & K_{\alpha\beta\zeta\eta kehg} & K_{\alpha\beta\zeta\eta kehf} \end{bmatrix} \tag{6-41}$$

单元刚度矩阵的子矩阵与无损伤复合材料层合板单元刚度矩阵 (6-39) 具有相同的形式，只是其中的形函数不一样，所以根据下标的含义取相应的形函数即可得到式 (6-41) 中子矩阵的具体表达式，例如：

$$\begin{aligned} K_{11\zeta\eta kemg} &= \psi_{m,x}A^{1}_{11\zeta\eta ke}\Lambda_{g,x}+\psi_{m,x}A^{1}_{16\zeta\eta ke}\Lambda_{g,y}+\psi_{m,y}A_{16\zeta\eta ke}\Lambda_{g,x}+ \\ &\quad \psi_{m,y}A^{1}_{66\zeta\eta ke}\Lambda_{g,y}+\psi_{m}A^{4}_{55\zeta\eta ke}\Lambda_{g} \\ K_{11\zeta\eta kemf} &= \psi_{m,x}A^{1}_{11\zeta\eta ke}\boldsymbol{\Pi}_{f,x}+\psi_{m,x}A^{1}_{16\zeta\eta ke}\boldsymbol{\Pi}_{f,y}+\psi_{m,y}A_{16\zeta\eta ke}\boldsymbol{\Pi}_{f,x}+ \\ &\quad \psi_{m,y}A^{1}_{66\zeta\eta ke}\boldsymbol{\Pi}_{f,y}+\psi_{m}A^{4}_{55\zeta\eta ke}\boldsymbol{\Pi}_{f} \end{aligned} \tag{6-42}$$

对于含多层分层和基体裂纹损伤复合材料层合板结构来说，从上式 (6-41) 中可以看出，扩展逐层理论中的单元刚度矩阵由九个子矩阵组成，其中 $K_{\alpha\beta\zeta\eta kemn}$、$K_{\alpha\beta\zeta\eta kesg}$ 和 $K_{\alpha\beta\zeta\eta kefh}$ 分别为标准自由度和扩充自由度的刚度矩阵，其它子矩阵为标准自由度和两种扩充自由度的耦合刚度矩阵，以及两种扩充自由度之间的耦合刚度矩阵。

6.5　数值算例

6.5.1　无损伤复合材料层合板

本算例首先以无损伤方板为研究对象，验证扩展逐层理论分析无损伤板结构静力响应的正确性，然后以无损伤复合材料层合板为对象验证扩展逐层理论分析无损伤复合材料层合板板结构静力响应的正确性。因为没有用于模拟分层和基体裂纹的附加自由度 $u_{\alpha lk}$，所以式 (6-38) 中的指标 ζ 和 η 取 i 和 r，而指标 k 和 e 的取值取决于指标 ζ，见式 (6-1)。

方板的边长和厚度分别为 10m 和 1m，受中心点上的单位集中载荷作用，边界条件为四边固支。为了验证本文方法，在有限元分析软件 MSC.Patran 中建立了方板的三维实体有限元模型，并利用 MSC.Nastran 求解。三维有限元模型中方板厚度方向有均匀的 9 个节点和 8 个单元，同样，在扩展逐层理论的

分析中方板在厚度方向上也被分为等厚度的 8 个数学层，方板的材料参数为：$E=52\,\mathrm{GPa}$，$v=0.3$。

扩展逐层方法和三维有限元模型分析得到的无损伤各向同性板最大位移对比见表6.1，从表中的对比结果可以看出本文方法的计算结果与三维实体有限元模型的计算结果吻合很好。

表 6.1　扩展逐层方法和三维实体有限元模型分析得到的无损伤各向同性板最大位移

节点数	$u_1\ (10^{-8}\,\mathrm{m})$		$u_2\ (10^{-8}\,\mathrm{m})$		$u_3\ (10^{-7}\,\mathrm{m})$	
	MSC	XLWM	MSC	XLWM	MSC	XLWM
21×21	1.68037	1.58880	1.68037	1.58880	1.58277	1.50245
31×31	1.68619	1.63989	1.68619	1.63989	1.62129	1.58718
41×41	1.68599	1.65891	1.68599	1.65891	1.64645	1.63178

无损伤复合材料层合板的几何尺寸、载荷以及边界条件与上面算例中无损伤各向同性板的一样，厚度方向分为 8 层，所有单层具有相同的厚度和材料参数，单层的材料参数为：$E_{11}=181\,\mathrm{GPa}$，$E_{22}=E_{33}=10.3\,\mathrm{GPa}$，$G_{12}=G_{13}=7.17\,\mathrm{GPa}$，$G_{23}=6.21\,\mathrm{GPa}$，$G_{12}=0.28$，$G_{13}=0.02$，$G_{23}=0.40$。为了对比，基于有限元分析软件 MSC.Patran 中建立了该复合材料层合板的三维实体有限元模型，并利用 MSC.Nastran 求解其静力结果。

扩展逐层方法和三维实体有限元模型分析得到的三种不同铺层方式无损伤复合材料层合板的最大位移见表6.2，三种铺层方式为：$[0]_8$、$[0/90/0/90]_s$ 和 $[90/0/90/0]_s$，从图中的结果对比可以看出扩展逐层理论分析得到的无损伤复合材料层合板板结构静力响应是正确的，与三维实体有限元模型的计算结果吻合很好。扩展逐层方法计算得到的三种不同铺层方式复合材料层合板变形如图6.2所示，从图中可以看出铺层方式对位移分布具有显著影响。

表 6.2　扩展逐层方法和三维实体有限元模型分析得到的无损伤复合材料层合板的最大位移

铺层方式	$u_1\ (10^{-8}\,\mathrm{m})$		$u_2\ (10^{-8}\,\mathrm{m})$		$u_3\ (10^{-7}\,\mathrm{m})$	
	MSC	XLWM	MSC	XLWM	MSC	XLWM
$[0]_8$	1.52625	1.53430	3.70238	3.65223	2.85375	2.92124
$[0/90/0/90]_s$	1.34785	1.36023	2.71320	2.61667	2.39536	2.45825
$[90/0/90/0]_s$	2.71320	2.61667	1.34785	1.36023	2.39536	2.45825

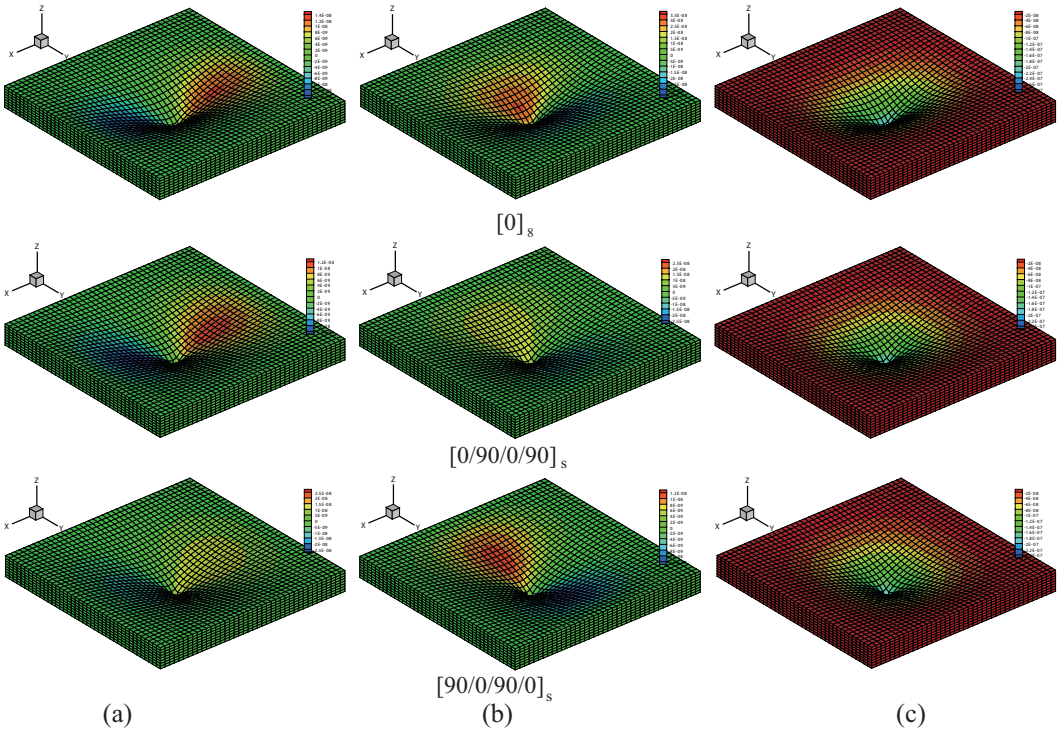


图 6.2　扩展逐层方法计算得到的变形图：(a) u_1；(b) u_2；(c) u_3

6.5.2　含多层分层损伤复合材料层合板

本算例基于扩展逐层理论研究含分层损伤复合材料层合板，首先利用含椭圆分层各向同性板验证扩展逐层理论的正确性，然后研究分层沿复合材料层合板厚度方向的位置对位移和应力的影响规律，最后研究含多层分层损伤复合材料层合板问题。

含椭圆分层复合材料层合板几何尺寸、分层区域以及网格划分如图6.3所示，椭圆分层的长轴沿矩形板的纵向，与矩形板的左边 ($x=0$) 重合，中心点与矩形板左边的中心重合。考虑三种不同的边界条件：1) 右边 ($x=6\,\text{mm}$) 固支，其它边自由，称为 CFFF；2) 上边 ($y=8\,\text{mm}$) 和下边 ($y=0$) 固支，其它边自由，称为 CCFF；2) 右边、上边和下边固支，其它边自由，称为 CCCF。分层区域上表面受单位均布载荷作用。

同样，为了验证需要，基于有限元分析软件 MSC.Patran 建立了含椭圆分层各向同性矩形板的三维实体有限元模型，并利用 MSC.Nastran 求解，矩形板的材料参数为：$E=52\,\text{GPa}$，$v=0.3$。在扩展逐层理论和三维实体有限元模型中，矩形板在厚度方向上被均匀地分为 8 个单层，矩形板的总厚度为 0.4m，所以每个单层的厚度均为 0.05m，两种方法在面内的网格划分是相同的。分层损伤在厚度方向上的位置可以表示为 $[\theta/\theta/\theta/\theta/\cap/\theta/\theta/\theta/\theta]$，即分层损伤位于第

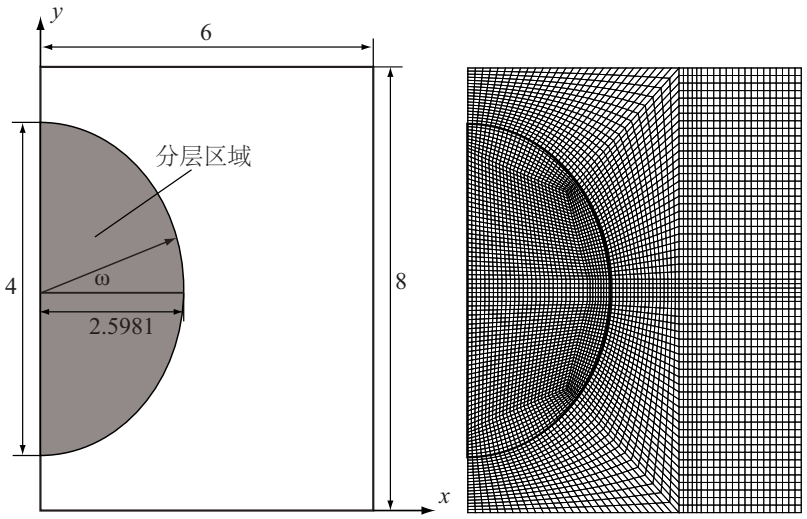


图 6.3　含椭圆分层复合材料层合板：(a) 几何尺寸；(b) 网格划分

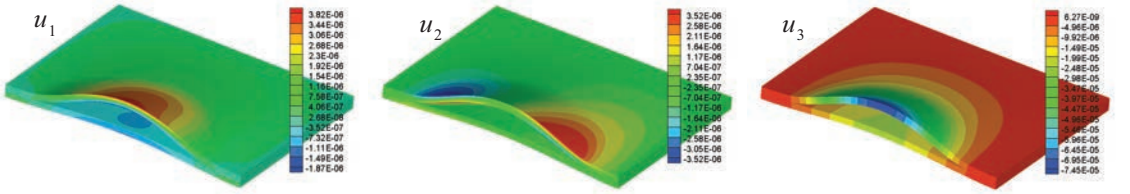
4 层和第 5 层之间的界面上。在 MSC 的三维有限元模型中，利用第 4 层和第 5 层之间重复节点来模拟分层损伤带来的位移不连续现象。

表 6.3　扩展逐层方法和三维实体有限元模型分析得到的含椭圆分层各向同性板的最大位移

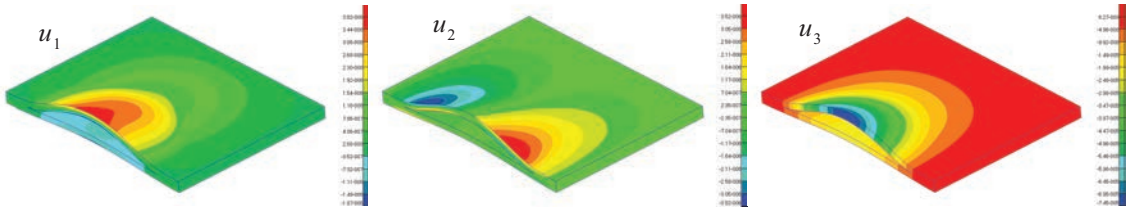
边界条件	u_1 (10^{-5} m)		u_2 (10^{-6} m)		u_3 (10^{-4} m)	
	MSC	XLWM	MSC	XLWM	MSC	XLWM
CFFF	1.4964320	1.45888	3.4431055	3.33837	3.2820858	3.20157
CCCF	0.3819504	0.371768	3.5224289	3.44705	0.7445696	0.726148
CCFF	0.3765311	0.366512	0.3581661	0.35042	0.7533940	0.734728

对于三种不同的边界条件，扩展逐层方法和三维实体有限元模型分析得到的含椭圆分层各向同性板的最大位移对比见表6.3，而变形和应力云图的对比分别如图6.4和图6.5所示。从表6.3、图6.4 和图6.5 可以看出，扩展逐层理论分析得到的含椭圆分层各向同性板的静力响应是正确的，与三维实体有限元模型的计算结果吻合很好。在分层损伤区域的前缘形成了明显的应力集中，对于应力 σ_{11} 和 σ_{22} 来说，应力集中分别在 $\omega = 0°$ 和 $\omega = \pm 90°$ 方向上，而对于应力 σ_{12} 来说，应力集中位于 $\omega = \pm 45°$ 附近，ω 的含义如图6.3所示。

含分层损伤复合材料层板的几何尺寸、分层区域和载荷都与含椭圆分层各向同性板的相同，如图6.3所示，边界条件为 CCCF，考虑三种铺层方式：$[0]_8$、$[0/90/0/90]_s$ 和 $[90/0/90/0]_s$，各单层具有相同的材料参数：$E_{11} = 181\,\text{GPa}$，$E_{22} = E_{33} = 10.3\,\text{GPa}$，$G_{12} = G_{13} = 7.17\,\text{GPa}$，$G_{23} = 6.21\,\text{GPa}$，$G_{12} = 0.28$，$G_{13} = 0.02$，

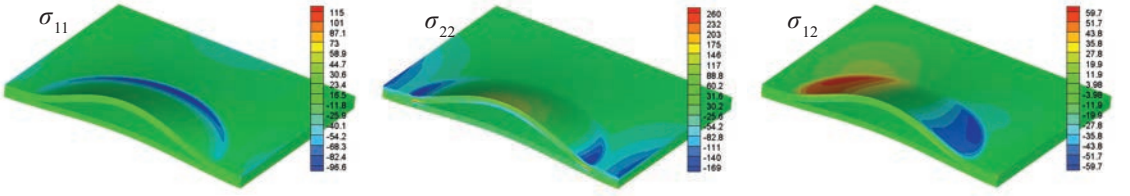


(a)

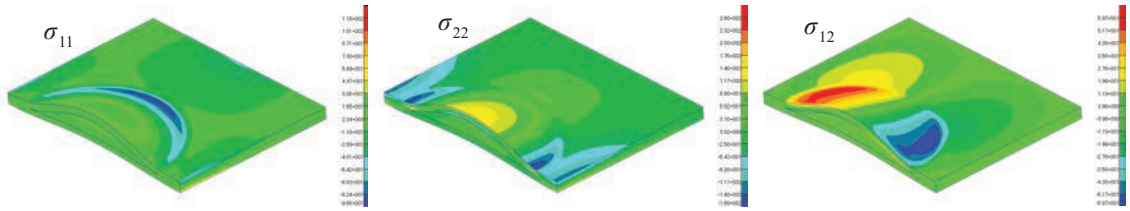


(b)

图 6.4　扩展逐层方法和三维实体有限元模型分析得到含椭圆分层各向同性板变形云图对比：(a) 扩展逐层理论结果；(b) MSC 结果



(a)



(b)

图 6.5　扩展逐层方法和三维实体有限元模型分析得到含椭圆分层各向同性板应力云图对比：(a) 扩展逐层理论结果；(b) MSC 结果

$G_{23} = 0.40$。

图6.6给出了分层损伤在复合材料层合板厚度方向上的位置对变形的影响，图中复合材料层合板的铺层方式为 $[0/90/0/90]_s$。从图中可以看出，分层损伤越靠近均布载荷作用的表面，层合板分层区域的局部变形就越明显，因此，对于飞机复合材料蒙皮来说，表面分层损伤对气动外形的影响比靠近内部的分层损伤要更为严重。

图6.7给出了分层损伤在复合材料层合板厚度方向上的位置对位移最大值的影响，随着分层损伤远离均布载荷作用的表面，层合板的最大位移首先快速下降然后缓慢减小，过了中性面之后位移最大值几乎不再随分层损伤沿厚

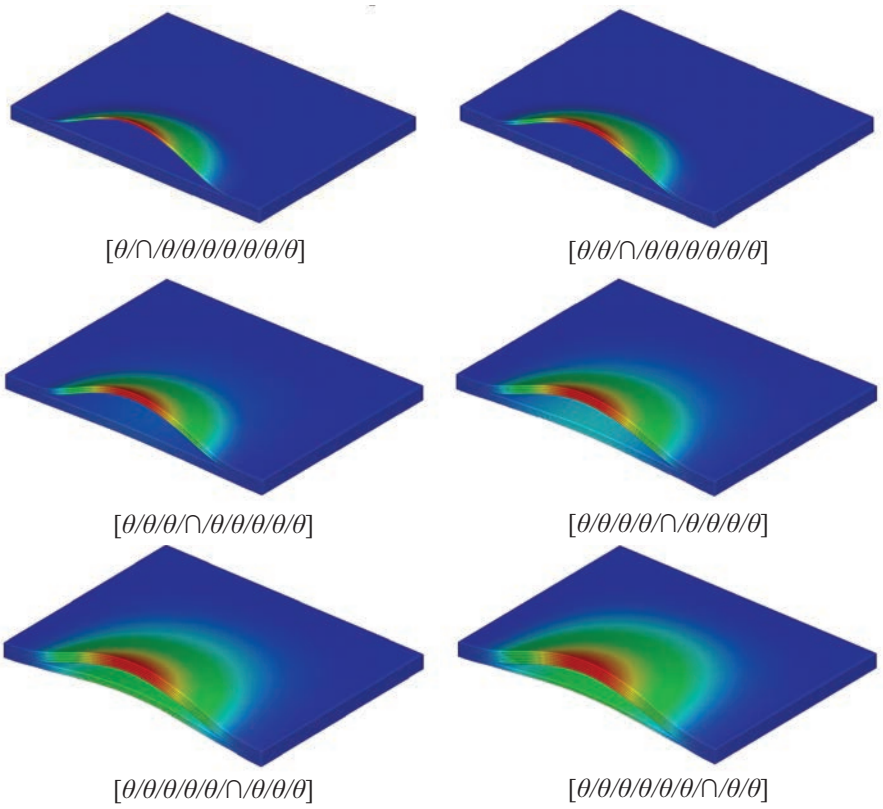


图 6.6　分层损伤在复合材料层合板 ($[0/90/0/90]_s$) 厚度方向上的位置对变形的影响

度方向上的位置的变化而变化，也就是说，当分层损伤位于均布载荷作用表面的反面时，分层损伤对层合板的最大位移没有明显影响。对于位移 u_1 和 u_2，分层损伤沿厚度方向上的位置对铺层方式为$[0/90/0/90]_s$ 和 $[90/0/90/0]_s$ 的层合板最大位移的影响规律相似，尤其是当分层损伤位于均布载荷作用表面的反面时。对于位移u_3，当分层损伤位置过了中性面之后，分层损伤沿厚度方向上的位置对三种铺层方式层合板最大位移的影响规律相似。从位移u_1 和 u_2的角度来看，铺层方式为$[90/0/90/0]_s$ 的层合板的局部变形对分层损伤沿厚度方向上的位置最为敏感，而从位移u_3的角度来看，铺层方式为$[0/90/0/90]_s$ 的层合板的局部变形对分层损伤沿厚度方向上的位置最为敏感。

图6.8给出了分层损伤沿复合材料层合板厚度方向上的位置对应力正负最大值的影响，与位移相似，随着分层损伤远离均布载荷作用的表面，层合板的应力正负最大值首先快速下降然后缓慢减小，过了中性面之后应力正负最大值几乎不再随分层损伤沿厚度方向上的位置的变化而变化。当分层损伤位置过了中性面之后，分层损伤沿厚度方向上的位置对三种铺层方式层合板应力正负最大值的影响规律相似，且会在分层前缘附近形成严重的应力集中现象。对于应力 σ_{33}、σ_{23} 和 σ_{12}，应力的正最大值与负最大值相等。

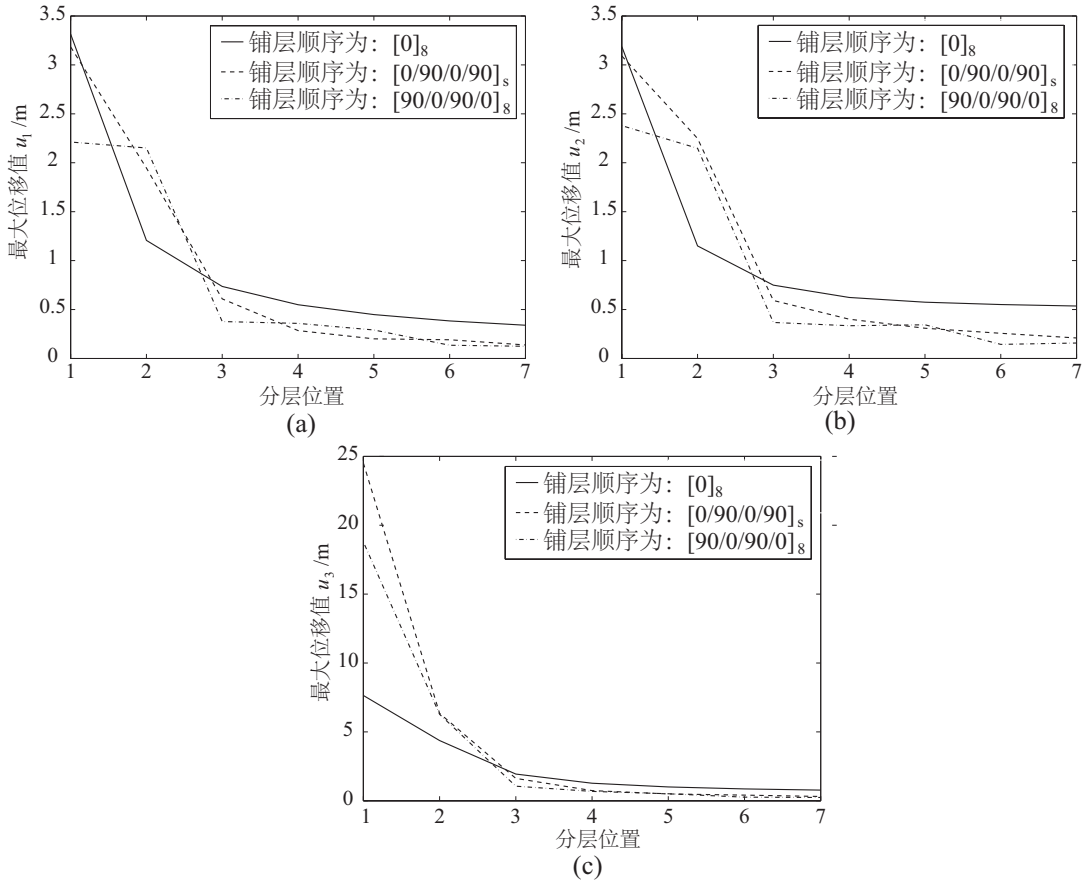


图 6.7　分层损伤沿复合材料层合板厚度方向上的位置对位移最大值的影响：(a) 位移 u_1；(b) 位移 u_2；(c) 位移 u_3

含多层椭圆分层损伤复合材料层合板的几何尺寸、分层损伤的面内区域以及载荷也都与含椭圆分层各向同性板的相同，如图6.3 所示。沿厚度方向上的两处分层损伤分别位于第 2 层间界面 (第 2 层合第 3 层之间) 和第 6 层间界面上 (第 6 层合第 7 层之间)，则多层分层损伤可表示为 $[\theta/\theta/\cap/\theta/\theta/\theta/\theta/\cap/\theta/\theta]$，层合板在椭圆分层损伤区域的上下表面分别受方向相反的单位均布载荷作用，铺层方式为 $[0/90/0/90]_s$，边界条件为 CCCF。扩展逐层理论计算得到的含多层椭圆分层损伤复合材料层板的位移和应力云图分别如图6.9 和图6.10所示，从图中的计算结果可以看出基于扩展逐层理论分析含多层分层复合材料层合板的静力响应是正确可靠的。

6.5.3　含基体裂纹复合材料层合板

本算例基于扩展逐层理论研究含基体裂纹损伤复合材料层合板问题，首先利用含基体裂纹损伤各向同性板验证扩展逐层理论的正确性，然后研究基体裂纹沿复合材料层合板厚度方向的尺寸对位移和应力的影响规律。

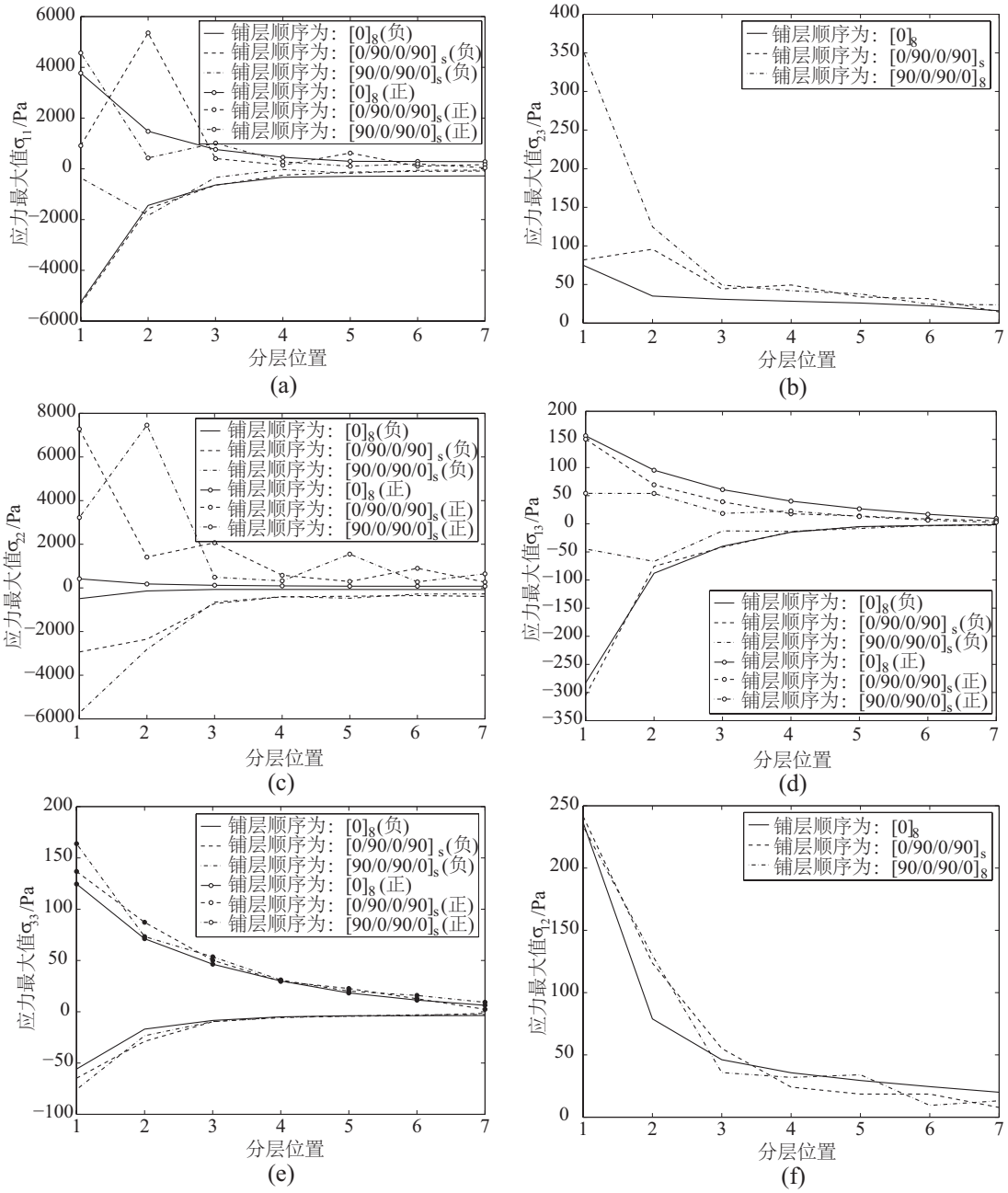
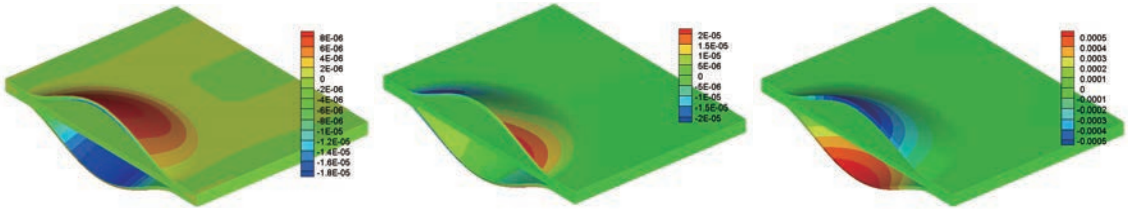
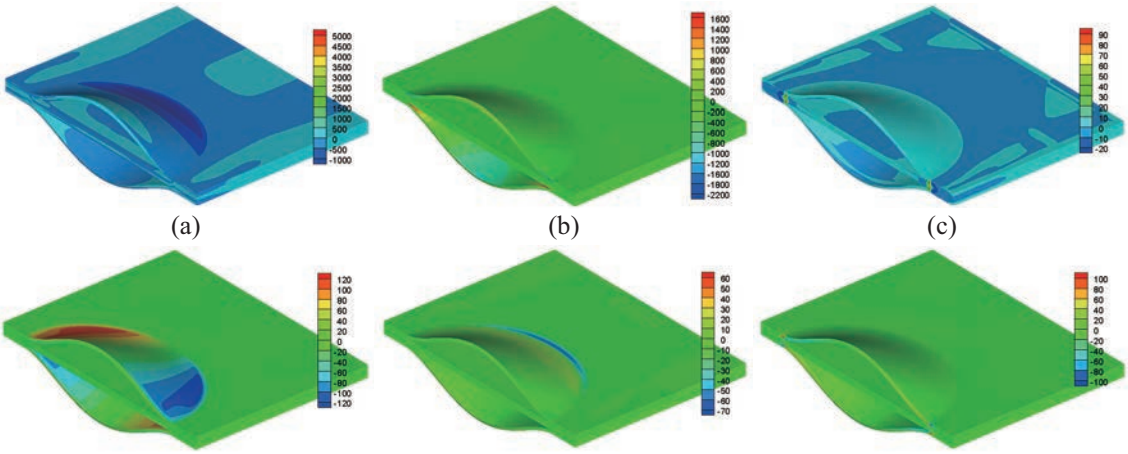


图 6.8　分层损伤沿复合材料层合板厚度方向上的位置对应力最大值的影响：(a) σ_{11}；(b) σ_{22}；(c) σ_{33}；(d)σ_{12}；(e) σ_{13}；(f) σ_{23}



(a)　(b)　(c)

图 6.9　含多层椭圆分层损伤复合材料层板的位移云图：(a) 位移 u_1；(b) 位移 u_2；(c) 位移 u_3



(a)　(b)　(c)

(d)　(e)　(f)

图 6.10　含多层椭圆分层损伤复合材料层板的应力云图：(a) σ_{11}；(b) σ_{22}；(c) σ_{33}；(d)σ_{12}；(e) σ_{13}；(f) σ_{23}

含基体裂纹损伤复合材料层合板几何尺寸、裂纹长度与位置以及网格划分如图6.11所示，矩形板的厚度为 0.4m，基体裂纹沿矩形板的横向中心线，此处的裂纹既可以是厚度方向贯穿的，也可以是非贯穿的。同样，为了验证需要，基于有限元分析软件 MSC.Patran 建立了含基体裂纹损伤各向同性矩形板的三维实体有限元模型，并利用 MSC.Nastran 求解，矩形板的材料参数为：$E=52\,\text{GPa}$，$v=0.3$，利用位于裂纹线上位置重合的节点来模拟裂纹面。在扩展逐层理论和三维实体有限元模型中，矩形板在厚度方向上被均匀地分为 8 个单层，每个单层的厚度均为 0.05m，两种方法在面内的网格划分是相同的。考虑三种不同的边界条件：CFFF、CCFF 和 CCCF，椭圆区域受上表面单位均布载荷作用，如图6.11(b) 所示。

对于三种不同边界条件，扩展逐层方法和三维实体有限元模型分析得到的含基体裂纹损伤各向同性板的最大位移对比见表6.4，变形和应力云图的对比分别如图6.12和图6.13所示，从结果对比情况可以看出，扩展逐层理论分析得到的含基体裂纹损伤各向同性板的静力响应是正确的，与三维实体有限元

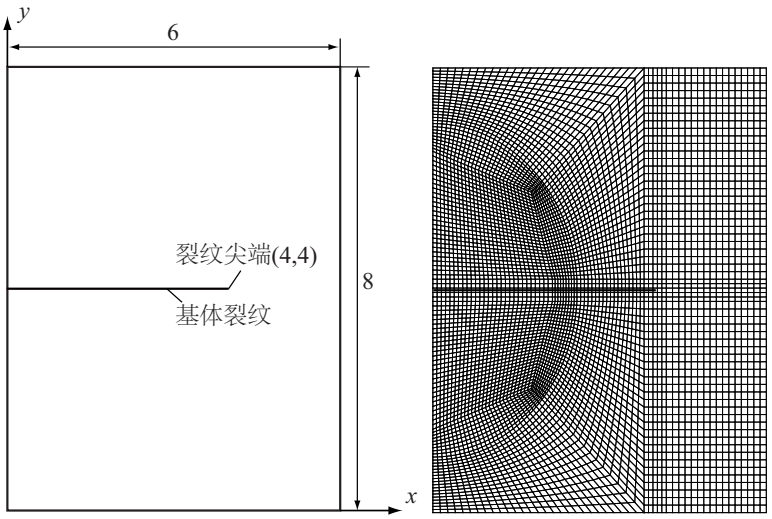


图 6.11　含基体裂纹损伤复合材料层合板：(a) 几何尺寸；(b) FE 网格划分

模型的计算结果吻合很好，在裂纹尖端附近区域形成了明显的应力集中。

表 6.4　扩展逐层方法和三维实体有限元模型分析得到的含基体裂纹损伤各向同性板的最大位移

边界条件	u_1 (10^{-6}m)		u_2 (10^{-6}m)		u_3 (10^{-5}m)	
	MSC	XLWM	MSC	XLWM	MSC	XLWM
CFFF	13.224681	12.9010	2.4910503	2.42031	29.374944	28.6310
CCCF	2.1830679	2.14423	3.0268336	2.97985	5.0892661	5.00548
CCFF	2.0369293	2.00772	3.3163162	3.26068	5.5112399	5.41431

含基体裂纹复合材料层合板的几何尺寸、裂纹长度与位置以及网格划分与含基体裂纹损伤各向同性板的相同，如图6.11所示。层合板有厚度相等的 8 层，每一层都具有相同的材料性能：$E_{11}=181\,\text{GPa}$，$E_{22}=E_{33}=10.3\,\text{GPa}$，$G_{12}=G_{13}=7.17\,\text{GPa}$，$G_{23}=6.21\,\text{GPa}$，$G_{12}=0.28$，$G_{13}=0.02$，$G_{23}=0.40$。考虑三种铺层方式：$[0]_8$、$[0/90/0/90]_s$ 和 $[90/0/90/0]_s$。表6.5对比了扩展逐层方法和三维实体有限元模型分析得到的含基体裂纹损伤复合材料层合板的最大位移，表中包含了三种边界条件和三种铺层方式，扩展逐层理论分析得到的结果与三维实体有限元模型的计算结果吻合很好。

对于 CCCF 边界，基体裂纹损伤沿复合材料层合板厚度方向上的尺寸对三种不同铺层方式层合板位移和应力最大值的影响分别如图6.14和图6.15 所示。裂纹在 x 方向上的长度为 4m，在厚度方向上的尺寸从 0 变化到 0.4m，0 表示无裂纹复合材料层合板，而 0.4m 表示裂纹在厚度方向上贯穿整个层合板。从

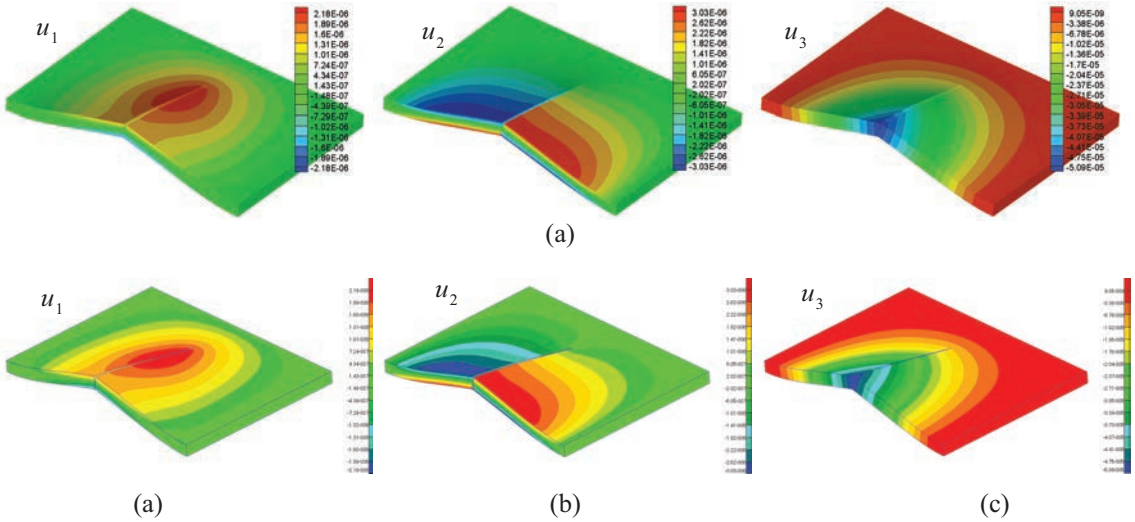


图 6.12　扩展逐层方法和三维实体有限元模型分析得到含基体裂纹损伤各向同性板变形云图对比：(a) 扩展逐层理论结果；(b) MSC 结果

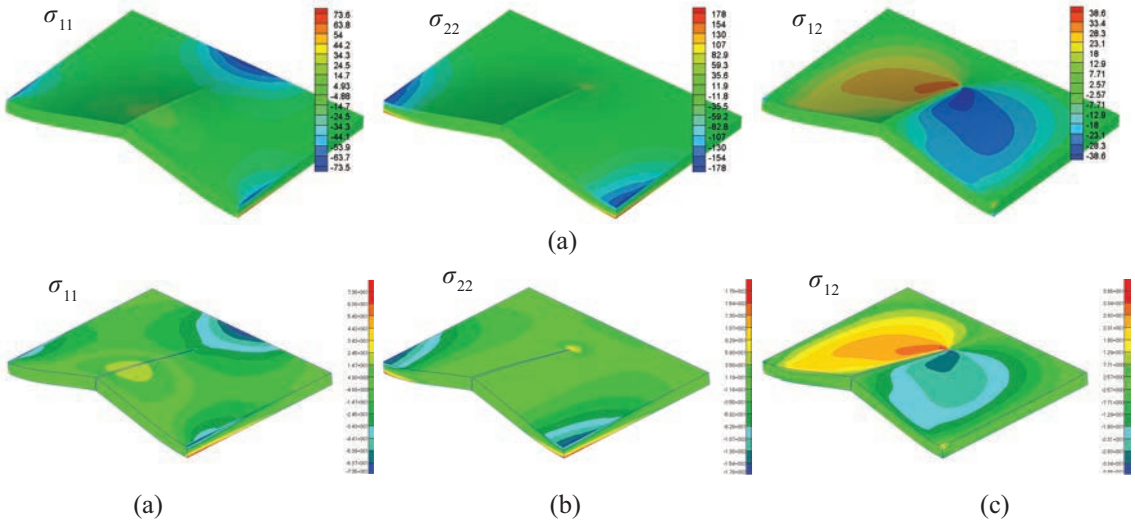


图 6.13　扩展逐层方法和三维实体有限元模型分析得到含基体裂纹损伤各向同性板应力云图对比：(a) 扩展逐层理论结果；(b) MSC 结果

图中的变化曲线可知，位移的最大值随基体裂纹损伤沿复合材料层合板厚度方向上的尺寸增加而增加，且当裂纹穿过层合板的中性面后，位移最大值增加的速度变得更大。应力 σ_{11}、σ_{22}、σ_{13} 和 σ_{23} 的最大值随基体裂纹损伤沿复合材料层合板厚度方向上的尺寸增加而增加，而应力 σ_{33} 的最大值则是先增加而后减小，直到再次与无裂纹层合板的最大值相等。

表 6.5　扩展逐层方法和三维实体有限元模型分析得到的含基体裂纹损伤复合材料层合板的最大位移

	边界条件	u_1 (10^{-6} m)		u_2 (10^{-5} m)		u_3 (10^{-4} m)	
		MSC	XLWM	MSC	XLWM	MSC	XLWM
$[0]_8$	CFFF	5.01844	4.99346	0.38525	0.38156	1.19114	1.18586
	CCCF	3.88164	3.84104	0.57331	0.56740	0.96525	0.9.5664
	CCFF	6.15848	6.06648	1.32531	1.29033	2.21315	2.15968
$[0/90/0/90]_s$	CFFF	6.75188	6.71632	0.38373	0.38006	1.58868	1.58058
	CCCF	2.45285	2.43959	0.34860	0.34687	0.59885	0.59565
	CCFF	2.75320	2.73721	0.42823	0.4256	0.72470	0.72024
$[90/0/90/0]_s$	CFFF	12.33980	12.2427	4.35336	4.28203	2.84058	2.81729
	CCCF	1.82849	1.82283	2.42813	2.41897	0.42132	0.419716
	CCFF	1.83708	1.83281	2.53723	2.52786	0.43750	0.435963

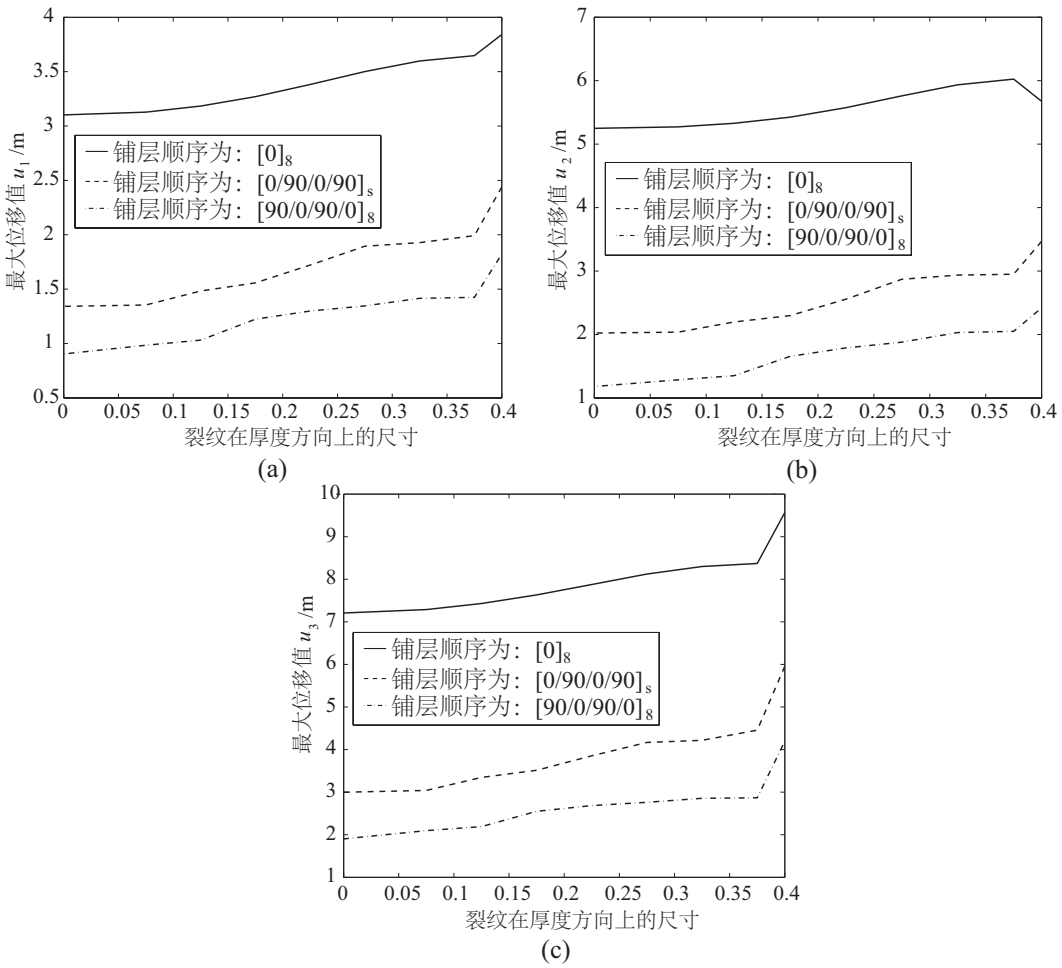


图 6.14　基体裂纹损伤沿复合材料层合板厚度方向上的尺寸对位移最大值的影响：(a) 位移 u_1；(b) 位移 u_2；(c) 位移 u_3

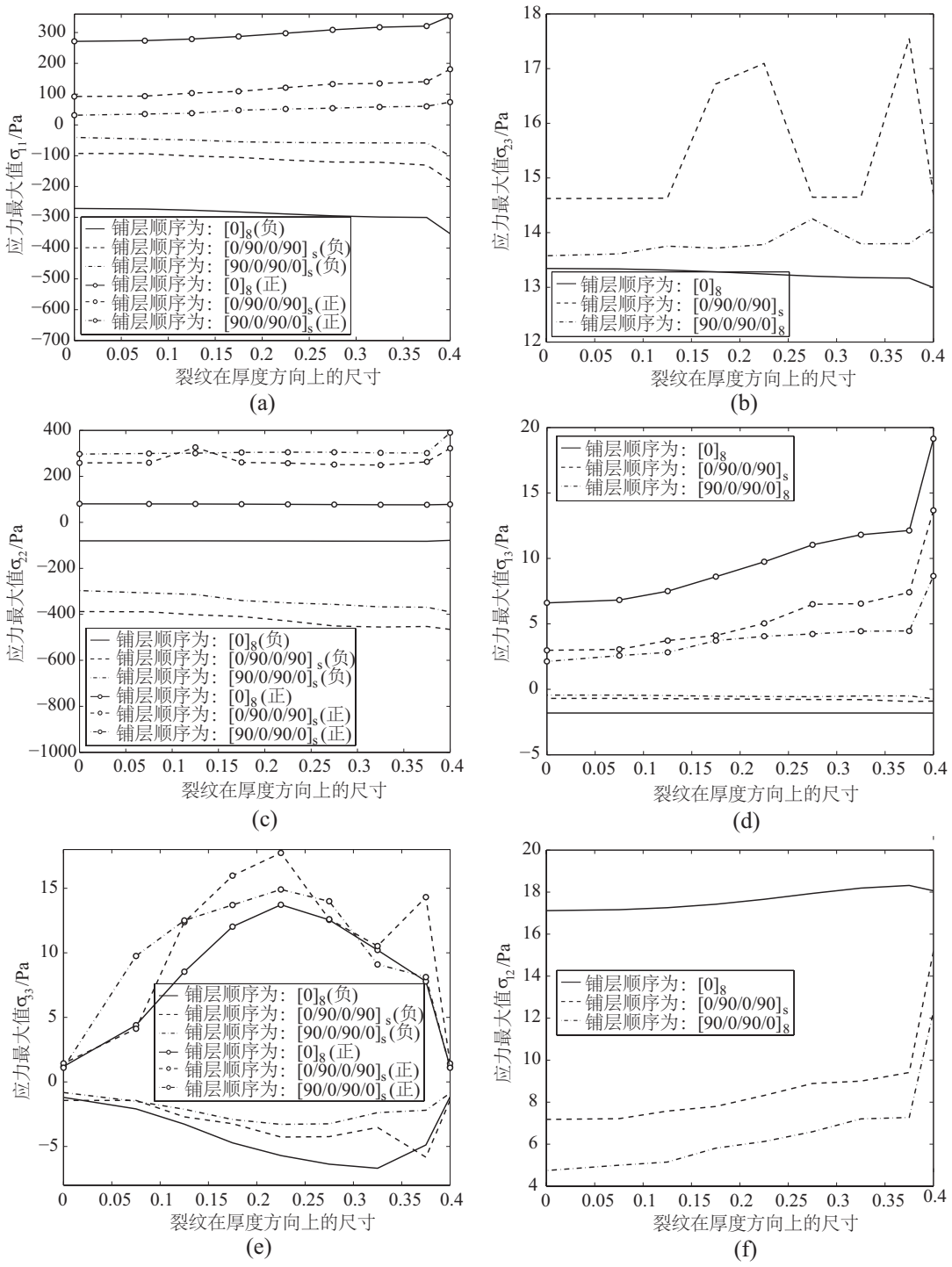


图 6.15　基体裂纹损伤沿复合材料层合板厚度方向上的尺寸对应力最大值的影响：(a) σ_{11}；(b) σ_{22}；(c) σ_{33}；(d)σ_{12}；(e) σ_{13}；(f) σ_{23}

6.5.4　含多层分层和基体裂纹复合材料层合板

本算例基于扩展逐层理论研究含多层椭圆分层和基体裂纹损伤复合材料层合板问题，首先利用各向同性板验证扩展逐层理论的正确性。含损伤层合板的几何尺寸、裂纹长度与位置、椭圆分层区域以及网格划分如图6.16所示。椭圆分层的长轴沿矩形板的纵向，与矩形板的左边重合，中心点与矩形板左边的中心重合，基体裂纹沿椭圆的短轴方向，即矩形板的横向。矩形板的厚度为 0.4m，考虑三种不同的边界条件：CFFF、CCFF 和 CCCF，椭圆区域受单位均布载荷作用。

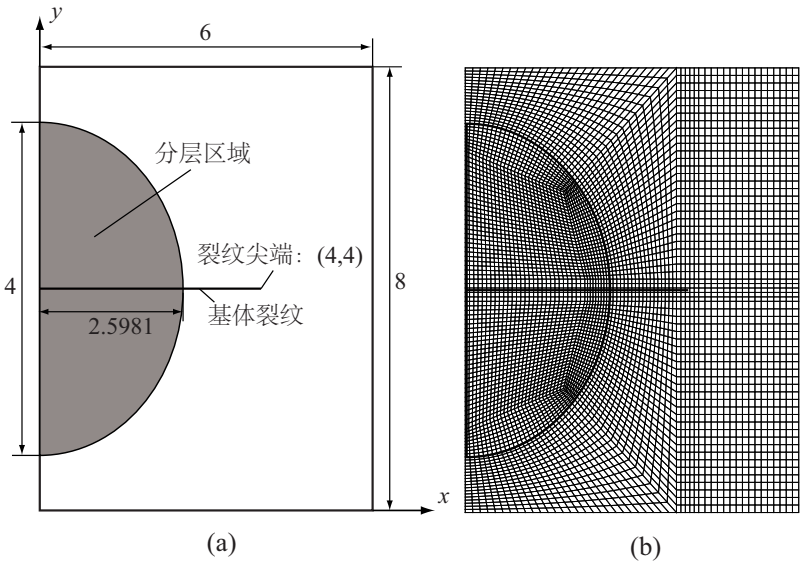


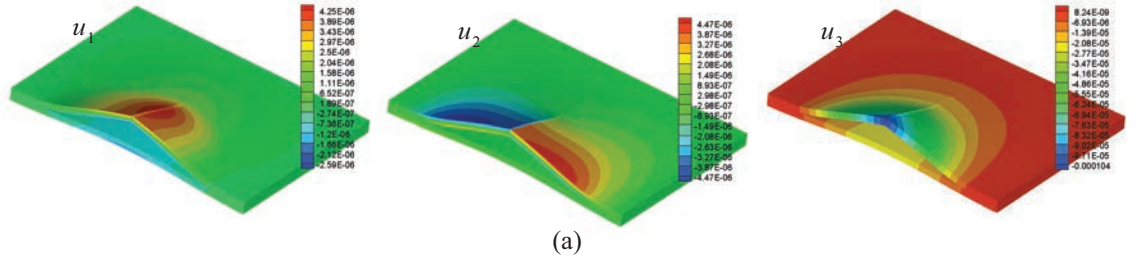
图 6.16　含椭圆分层和基体裂纹损伤复合材料层合板：(a) 几何尺寸；(b) FE 网格划分

含多层椭圆分层和基体裂纹损伤各向同性矩形板的材料参数为：$E=52\,\text{GPa}$，$v=0.3$，在厚度方向上均匀地分为 8 层。对于三种不同边界条件，扩展逐层方法和三维实体有限元模型分析得到的含椭圆分层和基体裂纹损伤各向同性板的最大位移对比见表6.6，位移云图和应力云图分别如图6.17和图6.18所示，扩展逐层理论分析得到的含椭圆分层和基体裂纹损伤各向同性板的静力响应是正确的，与三维实体有限元模型的计算结果吻合很好，在分层前缘和裂纹尖端附近区域形成了明显的应力集中。

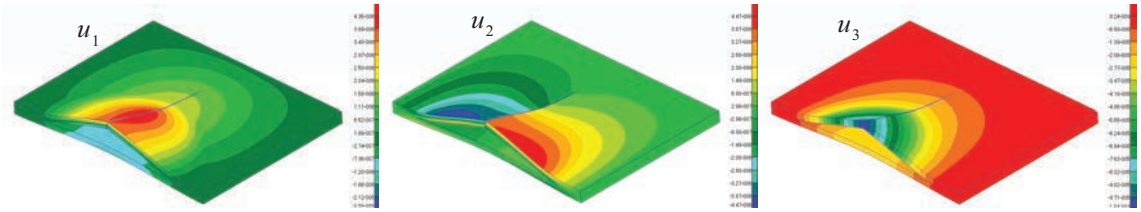
含多层椭圆分层和基体裂纹损伤复合材料层合板的单层材料参数为：$E_{11}=181\,\text{GPa}$，$E_{22}=E_{33}=10.3\,\text{GPa}$，$G_{12}=G_{13}=7.17\,\text{GPa}$，$G_{23}=6.21\,\text{GPa}$，$G_{12}=0.28$，$G_{13}=0.02$，$G_{23}=0.40$，铺层方式为 $[0/90/0/90]_s$，边界条件为 CCCF，两处椭圆分层分别位于第 2 层间界面和第 6 层间界面，即为 $[\theta/\theta/\cap/\theta/\theta/\theta/\theta/\cap/\theta/\theta]$。基体裂纹的尺寸和位置与上一算例中的相同。扩展逐层理论计算得到的位移

表 6.6　扩展逐层方法和三维实体有限元模型分析得到的含椭圆分层和基体裂纹损伤各向同性板的最大位移

边界条件	u_1 (10^{-6} m)		u_2 (10^{-6} m)		u_3 (10^{-4} m)	
	MSC	XLWM	MSC	XLWM	MSC	XLWM
CFFF	14.58864	14.2494	5.4291490	5.25124	3.5107255	3.42605
CCCF	4.354197	4.28484	4.4657822	4.37015	1.0405399	1.02144
CCFF	4.202824	4.14198	4.6557157	4.54863	1.0654494	1.04501

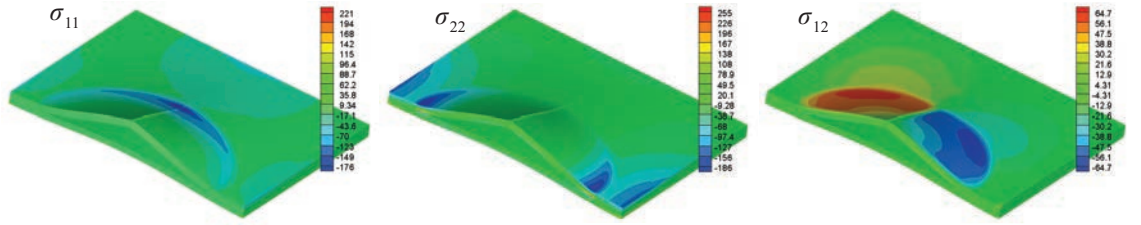


(a)

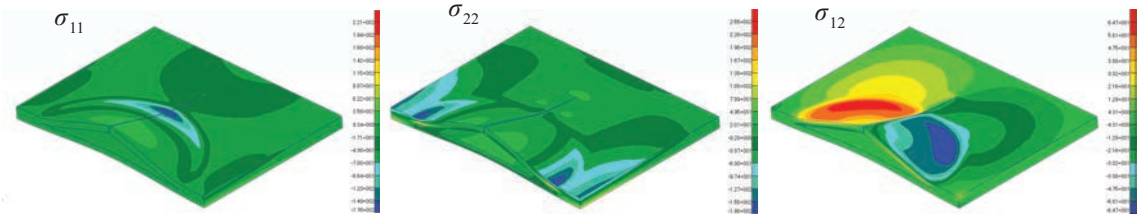


(b)

图 6.17　扩展逐层方法和三维实体有限元模型分析得到含椭圆分层和基体裂纹损伤各向同性板变形云图对比：(a) 扩展逐层理论结果；(b) MSC 结果



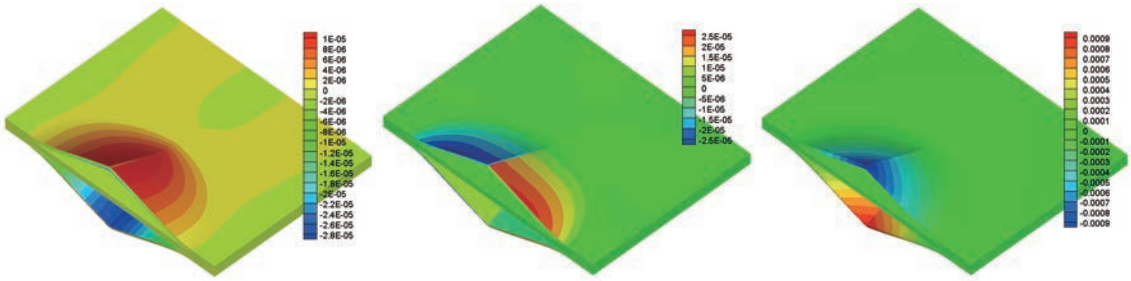
(a)



(b)

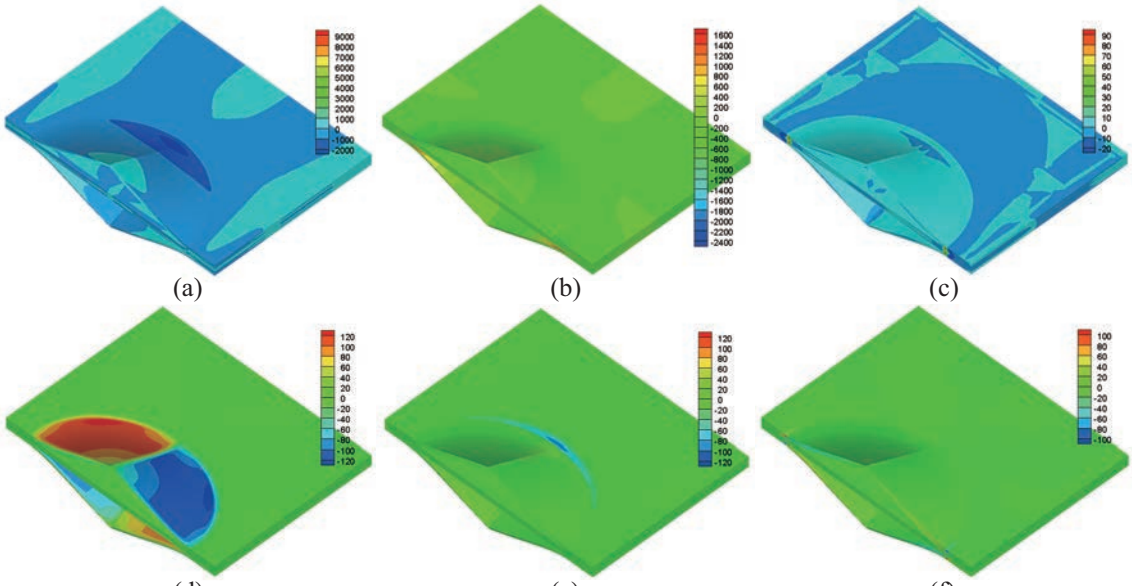
图 6.18　扩展逐层方法和三维实体有限元模型分析得到含椭圆分层和基体裂纹损伤各向同性板应力云图对比：(a) 扩展逐层理论结果；(b) MSC 结果

云图和应力云图分别如图6.19和图6.20所示。



(a)　(b)　(c)

图 6.19　含多层椭圆分层和基体裂纹损伤复合材料层板的位移云图：(a) 位移 u_1；(b) 位移 u_2；(c) 位移 u_3



(a)　(b)　(c)

(d)　(e)　(f)

图 6.20　含多层椭圆分层和基体裂纹损伤复合材料层板的应力云图：(a) σ_{11}；(b) σ_{22}；(c) σ_{33}；(d)σ_{12}；(e) σ_{13}；(f) σ_{23}

6.6　本章小结

本章将复合材料层合梁结构的扩展逐层理论推广应用到含多层分层和多处基体裂纹复合材料层合板问题上，结合各向同性和各向异性材料的裂纹尖端扩充函数，分别建立了各向同性材料板和复合材料层合板的扩展逐层理论。通过数值算例验证了该方法在对于无损伤、含多层分层和/或基体裂纹各向同性板和复合材料层合板静力响应分析的正确性。另外，重点研究了分层沿复合材料层合板厚度方向位置对复合材料层合板位移和应力的影响规律，以及

基体裂纹沿复合材料层合板厚度方向的尺寸对复合材料层合板位移和应力的影响规律。

对分层损伤的研究结果表明：分层损伤越靠近均布载荷作用的表面，层合板分层区域的局部变形越明显；当分层损伤位于均布载荷作用表面的反面时，分层损伤对层合板的最大位移没有明显影响；随着分层损伤远离均布载荷作用的表面，层合板的应力正负最大值首先快速下降然后缓慢减小。过了中性面之后，应力正负最大值几乎不再随分层损伤沿厚度方向上的位置的变化而变化。

对基体裂纹损伤的研究结果表明：位移的最大值随基体裂纹损伤沿复合材料层合板厚度方向上的尺寸增加而增加，且当裂纹穿过层合板的中性面后，位移最大值增加的速度变得更大。

第 7 章 复合材料层合板结构裂纹的任意扩展预测

本章将基于扩展逐层理论研究复合材料层合板结构裂纹应力强度因子的计算和裂纹任意扩展的预测问题，分别利用相互作用积分法和最大周向应力准则计算裂纹尖端的应力强度因子和裂纹扩展角度。由于扩展逐层理论是三维的，所以它可以得到应力强度因子在板厚度方向上的变化规律，进而预测得到的复合材料层合板裂纹扩展角在各单层上是不同的，这一分析结果是现有其它基于板壳理论和扩展有限元方法建立的复合材料裂纹预测模型无法得到的。

7.1 应力强度因子的计算

应力强度因子是表征裂纹尖端断裂性能最重要的参数之一，是裂纹尖端应力场强弱的标志，扩展有限元方法中通常采用相互作用积分法来计算。Kim 和 Paulino[173] 在研究功能梯度材料的静态裂纹问题时，提出了正交各向异性材料混合型应力强度因子的域积分方法，本文利用该方法计算复合材料层合板结构各单层裂纹尖端的应力强度因子。

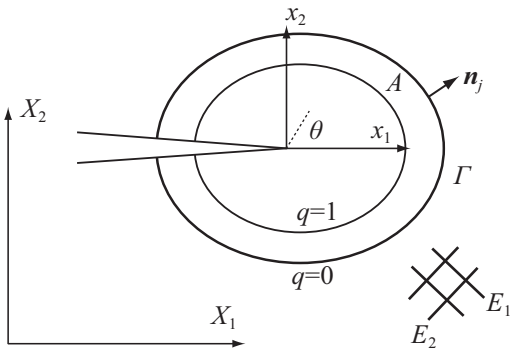


图 7.1 裂纹尖端应力强度因子的 J 积分

相互作用积分法是基于 J 积分建立的，如图7.1 所示，根据 Rice 和 Rosengren[174] 的定义，路径无关的 J 积分为

$$J = \int_{\Gamma} \left(w\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,x} \right) \boldsymbol{n}_j \mathrm{d}\Gamma \tag{7-1}$$

式中，δ_{1j} 为 Kronecker 符号；Γ 为包含裂纹尖端的封闭积分路径，在实际计算过程中 Γ 通常取中心位移裂纹尖端的圆形或矩形路径；$\boldsymbol{n}_j$ 为积分路径上弧元

素外法线的方向余弦；w 为线弹性材料的应变能密度

$$w=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{7-2}$$

对于有限元方法来说，直接依据式 (7-1) 计算应力强度因子是很不方便的，通过积分变换可以将式 (7-1) 转化为等效的域积分形式 (EDI)

$$J=\int_A\left(\sigma_{ij}u_{i,x}-w\delta_{1j}\right)q_{,j}dA+\int_A\left(\sigma_{ij}u_{i,x}-w\delta_{1j}\right)_{,j}q\mathrm{d}A \tag{7-3}$$

式中，A 为包围裂纹尖端的环形区域（路径 Γ 的内侧）；q 为在区域 A 内外侧之间光滑变化的连续函数，Dolbow 等[109] 为了简化计算过程提出了一种简单的 q 函数，从裂纹尖端的 1 线性变化为 A 外边界的 0。在有限元方法中，单元内部任意处的 q 函数可以通过单元结点插值得到

$$q(\boldsymbol{x})=\sum N_i(\boldsymbol{x})q_i \tag{7-4}$$

式中，$N_i(\boldsymbol{x})$ 为单元的形函数。

7.1.1　相互作用积分

相互作用积分法是基于真实和辅助两种位移场进行的，真实位移场是满足平衡方程和变形协调条件的实际位移应力场求解结果，而辅助位移场只需在 A 区域中的裂纹面上满足平衡方程和边界条件即可，辅助位移场的引入是为了找到混合型应力强度因子与相互积分之间的关系。两种位移场共同作用下的 J 积分为

$$J^s=J+J^{\mathrm{aux}}+M^l \tag{7-5}$$

式中，J 和 J^{aux} 分别为真实位移场和辅助位移场单独作用下的 J 积分；M^l 为两种位移场的相互作用下的局部 J 积分。

辅助位移场单独作用下的 J 积分为

$$J^{\mathrm{aux}}=\int_A\left(\sigma_{ij}^{\mathrm{aux}}u_{i,x}^{\mathrm{aux}}-w^{\mathrm{aux}}\delta_{1j}\right)q_{,j}dA+\int_A\left(\sigma_{ij}^{\mathrm{aux}}u_{i,x}^{\mathrm{aux}}-w^{\mathrm{aux}}\delta_{1j}\right)_{,j}q\mathrm{d}A \tag{7-6}$$

两种位移场的相互作用下的 J 积分

$$\begin{aligned}M^l=&\int_A\left[\sigma_{ij}u_{i,x}^{\mathrm{aux}}+\sigma_{ij}^{\mathrm{aux}}u_{i,x}-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ik}\varepsilon_{ik}^{\mathrm{aux}}+\sigma_{ik}^{\mathrm{aux}}\varepsilon_{ik}\right)\delta_{1j}\right]q_{,j}\mathrm{d}A+\\&\int_A\left[\sigma_{ij}u_{i,x}^{\mathrm{aux}}+\sigma_{ij}^{\mathrm{aux}}u_{i,x}-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ik}\varepsilon_{ik}^{\mathrm{aux}}+\sigma_{ik}^{\mathrm{aux}}\varepsilon_{ik}\right)\delta_{1j}\right]_{,j}q\mathrm{d}A\end{aligned} \tag{7-7}$$

对于各向同性材料和异性材料辅助场的构造将在下一小节中详细介绍。考虑关系

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{\mathrm{aux}}u_{i,xj}&=\sigma_{ik}^{\mathrm{aux}}\varepsilon_{ij,x}\\ \sigma_{ik}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{aux}}&=\sigma_{ik}^{\mathrm{aux}}\varepsilon_{ij}\\ C_{ijkl,x}\varepsilon_{ij}^{\mathrm{aux}}\varepsilon_{kl}&=C_{ijkl,x}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}^{\mathrm{aux}}\end{aligned}\tag{7-8}$$

式中，C_{ijkl} 刚度系数。

则两种位移场的相互作用下的全局积分 M_m^G 为

$$\begin{aligned}M_m^G=&\int_A\left[\sigma_{ij}u_{i,m}^{\mathrm{aux}}+\sigma_{ij}^{\mathrm{aux}}u_{i,m}-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ik}\varepsilon_{ik}^{\mathrm{aux}}+\sigma_{ik}^{\mathrm{aux}}\varepsilon_{ik}\right)\delta_{mj}\right]q_{,j}\mathrm{d}A+\\&\int_A\left[\sigma_{ij}\left(u_{i,mj}^{\mathrm{aux}}-\varepsilon_{ij,m}^{\mathrm{aux}}\right)-C_{ijkl,m}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}^{\mathrm{aux}}\right]q\mathrm{d}A\\&m=1,2\end{aligned}\tag{7-9}$$

局部积分 M^l 与全局积分 M_m^G 存在如下关系

$$M^l=M_1^G\cos\theta+M_2^G\sin\theta\tag{7-10}$$

对于各向同性材料，能量释放率与应力强度因子之间的关系为

$$G=J=\frac{1}{E^*}\left(K_{\mathrm{I}}^2+K_{\mathrm{II}}^2\right)\tag{7-11}$$

根据上式可以得到关系式

$$\boldsymbol{M}^l=\frac{2}{E^*}\left(K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{aux}}K_{\mathrm{I}}+K_{\mathrm{II}}^{\mathrm{aux}}K_{\mathrm{II}}\right)\tag{7-12}$$

所以，I 型和 II 型应力强度因子为

$$K_l=\frac{E^*}{2}\boldsymbol{M}^l\tag{7-13}$$

对于各向异性材料，能量释放率与应力强度因子之间的关系为

$$G=J=c_{11}K_{\mathrm{I}}^2+c_{12}K_{\mathrm{I}}K_{\mathrm{II}}+c_{22}K_{\mathrm{II}}^2\tag{7-14}$$

式中，

$$c_{11}=-\frac{a_{22}}{2}\mathrm{Im}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2}\right)$$

$$c_{12}=-\frac{a_{22}}{2}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\mu_1\mu_2}\right)+\frac{a_{11}}{2}\mathrm{Im}\left(\mu_1\mu_2\right)$$

$$c_{22}=\frac{a_{11}}{2}\mathrm{Im}\left(\mu_1+\mu_2\right)$$

根据文献[175]有

$$J^s = c_{11}\left(K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{aux}}+K_{\mathrm{I}}\right)^2+c_{12}\left(K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{aux}}+K_{\mathrm{I}}\right)\left(K_{\mathrm{II}}^{\mathrm{aux}}+K_{\mathrm{II}}\right)+c_{22}\left(K_{\mathrm{II}}^{\mathrm{aux}}+K_{\mathrm{II}}\right)^2 \tag{7-15}$$

$$J^{\mathrm{aux}} = c_{11}\left(K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{aux}}\right)^2+c_{12}K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{aux}}K_{\mathrm{II}}^{\mathrm{aux}}+c_{22}\left(K_{\mathrm{II}}^{\mathrm{aux}}\right)^2 \tag{7-16}$$

$$M^l = 2c_{11}K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{aux}}K_{\mathrm{I}}+c_{12}\left(K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{aux}}K_{\mathrm{II}}+K_{\mathrm{II}}^{\mathrm{aux}}K_{\mathrm{I}}\right)+2c_{22}K_{\mathrm{II}}^{\mathrm{aux}}K_{\mathrm{II}} \tag{7-17}$$

对于 I 型裂纹有 $K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{aux}}=1$，$K_{\mathrm{II}}^{\mathrm{aux}}=0$。对于 II 型裂纹有 $K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{aux}}=0$，$K_{\mathrm{II}}^{\mathrm{aux}}=1$。将这两种情况代入上式，则有

$$\begin{cases} M_1^l=2c_{11}K_{\mathrm{I}}+c_{12}K_{\mathrm{II}} & \left(K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{aux}}=1,K_{\mathrm{II}}^{\mathrm{aux}}=0\right) \\ M_2^l=c_{12}K_{\mathrm{I}}+2c_{22}K_{\mathrm{II}} & \left(K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{aux}}=0,K_{\mathrm{II}}^{\mathrm{aux}}=1\right) \end{cases} \tag{7-18}$$

求解上述方程组即可求得应力强度因子 K_{I}，K_{II}。

7.1.2　各向同性材料的辅助位移和应力场

对于各向同性材料，均匀受载含中心 I、II 型复合裂纹的无限大平板在裂纹尖端附近的辅助位移场为

$$\begin{aligned} u_1^{\mathrm{aux}} = & \frac{K_{\mathrm{I}}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(\kappa-1+2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+ \\ & \frac{K_{\mathrm{II}}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(\kappa+1+2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \\ u_2^{\mathrm{aux}} = & \frac{K_{\mathrm{I}}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(\kappa+1+2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \\ & \frac{K_{\mathrm{II}}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(\kappa-1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)- \end{aligned} \tag{7-19}$$

式中，

$$\mu = \frac{E}{2(1+v)}$$

$$\kappa = \begin{cases} \dfrac{3-v}{1+v} & \text{平面应力} \\ 3-4v & \text{平面应变} \end{cases}$$

对于各向同性材料，均匀受载含中心 I、II 型复合裂纹的无限大平板在裂纹尖端附近的辅助应力场为

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{\text{aux}} = & \frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)- \\ & \frac{K_{\text{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{12}^{\text{aux}} = & \frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)+ \\ & \frac{K_{\text{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{22}^{\text{aux}} = & \frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+ \\ & \frac{K_{\text{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \end{aligned} \tag{7-20}$$

通过直角坐标系与极坐标系之间的转换关系，从上述应力场可以得到裂纹尖端的周向拉应力

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[\frac{K_{\text{I}}}{2}(1+\cos\theta)-\frac{3K_{\text{II}}}{2}\sin\theta\right] \tag{7-21}$$

7.1.3　正交各向异性材料的辅助位移和应力场

根据 Sih 等[176] 基于复变函数解法对各向异性材料裂纹尖端应力场的研究成果，各向异性材料裂纹尖端辅助位移场可取为

$$\begin{aligned}
u_1^{\text{aux}} = \;& K_{\text{I}}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\text{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left(p_2\mu_1 g_2(\theta)-p_1\mu_2 g_1(\theta)\right)\right\}+ \\
& K_{\text{II}}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\text{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left(p_2 g_2(\theta)-p_1 g_1(\theta)\right)\right\} \\
u_2^{\text{aux}} = \;& K_{\text{I}}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\text{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left(q_2\mu_1 g_2(\theta)-q_1\mu_2 g_1(\theta)\right)\right\}+ \\
& K_{\text{II}}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\text{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left(q_2 g_2(\theta)-q_1 g_1(\theta)\right)\right\}
\end{aligned} \tag{7-22}$$

式中，

$$g_i(\theta) = \sqrt{\cos\theta+\mu_i\sin\theta},\ i=1,2$$

$$p_i = a_{11}\mu_i^2 + a_{12} - a_{16}\mu_i,\ i=1,2$$

$$q_i = a_{12}\mu_i + \frac{a_{22}}{\mu_i} - a_2,\ i=1,2$$

各向异性材料裂纹尖端辅助应力场可取为

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{\text{aux}} = \;& \frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\text{Re}\left\{\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\left(\frac{\mu_2}{g_2(\theta)}-\frac{\mu_1}{g_1(\theta)}\right)\right\}+ \\
& \frac{K_{\text{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\text{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left(\frac{\mu_2^2}{g_2(\theta)}-\frac{\mu_1^2}{g_1(\theta)}\right)\right\} \\
\sigma_{12}^{\text{aux}} = \;& \frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\text{Re}\left\{\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\left(\frac{1}{g_1(\theta)}-\frac{1}{g_2(\theta)}\right)\right\}+ \\
& \frac{K_{\text{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\text{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left(\frac{\mu_1}{g_1(\theta)}-\frac{\mu_2}{g_2(\theta)}\right)\right\} \\
\sigma_{22}^{\text{aux}} = \;& \frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\text{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left(\frac{\mu_1}{g_2(\theta)}-\frac{\mu_2}{g_1(\theta)}\right)\right\}+ \\
& \frac{K_{\text{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\text{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left(\frac{1}{g_2(\theta)}-\frac{1}{g_1(\theta)}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{7-23}$$

7.2　裂纹扩展准则

7.2.1　各向同性材料的最大周应力准则

最大周向拉应力强度因子理论的基本假设包括两点：1) 裂纹沿垂直最大周向拉应力的方向扩展；2) 当最大周向拉应力强度因子达到临界值时裂纹开始稳定扩展。

在极坐标系下，裂纹尖端区域的周向拉应力为式 (7-21)，假设周向拉应力强度因子 K_θ 为

$$K_\theta = \lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}\sigma_\theta = \cos\frac{\theta}{2}\left[\frac{K_{\mathrm{I}}}{2}(1+\cos\theta) - \frac{3K_{\mathrm{II}}}{2}\sin\theta\right] \tag{7-24}$$

则极坐标系下裂纹尖端区域的周向拉应力可重写为

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}K_\theta \tag{7-25}$$

由假设 1) 可知，裂纹扩展角 θ 应使上式取极大值，即

$$\left.\frac{\partial K_\theta}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} = 0 \tag{7-26}$$

$$\left.\frac{\partial^2 K_\theta}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\theta_0} < 0$$

则有

$$K_{\mathrm{I}}\sin\theta_0 - K_{\mathrm{II}}(3\cos\theta_0 - 1) = 0 \tag{7-27}$$

$$K_{\mathrm{I}}\cos\frac{\theta_0}{2}(1-3\cos\theta_0) + K_{\mathrm{II}}\sin\frac{\theta_0}{2}(9\cos\theta_0+5) < 0$$

由假设 2) 可知，裂纹扩展准则为

$$K_{\theta\max} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{K_{\mathrm{Ic}}}\cos^3\frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2}\frac{K_{\mathrm{II}}}{K_{\mathrm{Ic}}}\cos\frac{\theta_0}{2}\sin\theta_0 = K_\theta \tag{7-28}$$

7.2.2　各向异性材料的最大周应力准则

Saouma[177] 等于 1987 年将各向同性材料的最大周向应力准则进行了推广，并建立了各向异性材料的最大周向应力准则，各向异性材料裂纹尖端的全局坐标系和局部坐标系以及裂纹扩展角如图7.2所示，裂纹尖端周向应力与直角坐标系下的应力的关系为

$$\sigma_\theta = \sigma_{11}\sin^2\theta + \sigma_{22}\cos^2\theta - 2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta \tag{7-29}$$

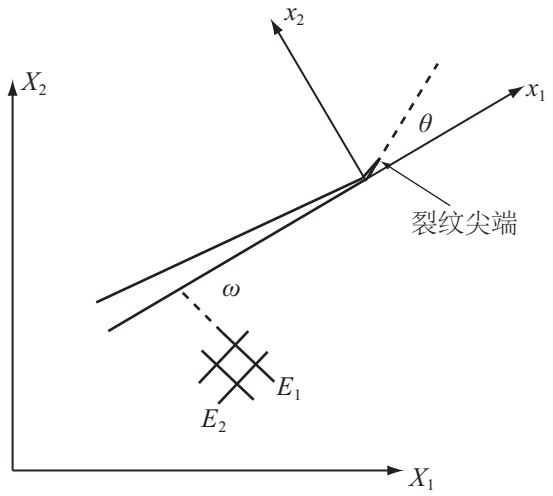


图 7.2　各向异性材料裂纹尖端的全局坐标系和局部坐标系

将正交各向异性材料的辅助应力场（式 (7-23)）代入上式

$$\sigma_\theta = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\mathrm{Re}\left[A\left(\mu_1 B_2 - \mu_2 B_1\right)\right] + \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\mathrm{Re}\left[A\left(B_2 - B_1\right)\right] \tag{7-30}$$

式中，$A = \dfrac{1}{\mu_1 - \mu_2}$ $B_i = \left(\cos\theta + \mu_i \sin\theta\right)^{1.5}$

对于与 x 方向夹任意角度的裂纹来说，$K_{\mathrm{Icr}}^{\theta}$ 与 K_{Icr}^{1} 和 K_{Icr}^{2} 之间的关系为[177]

$$K_{\mathrm{Icr}}^{\theta} = K_{\mathrm{Icr}}^{1}\cos^2\theta + K_{\mathrm{Icr}}^{2}\sin^2\theta \tag{7-31}$$

且

$$K_{\mathrm{Icr}}^{2} = K_{\mathrm{Icr}}^{1}\frac{E_1}{E_2} \tag{7-32}$$

裂纹的扩展角需要满足

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_\theta^{\max}} = \frac{K_{\mathrm{I}}\mathrm{Re}\left[A\left(\mu_1 B_2 - \mu_2 B_1\right)\right] + K_{\mathrm{II}}\mathrm{Re}\left[A\left(B_2 - B_1\right)\right]}{K_{\mathrm{Icr}}^{1}\cos^2\beta + K_{\mathrm{Icr}}^{2}\sin^2\beta} = 1 \tag{7-33}$$

式中，$\beta = \theta_0 + \omega$。

或

$$\mathrm{Max}\left\{\frac{\mathrm{Re}\left[A\left(\mu_1 B_2 - \mu_2 B_1\right)\right] + \dfrac{K_{II}}{K_{\mathrm{I}}}\mathrm{Re}\left[A\left(B_2 - B_1\right)\right]}{\cos^2\beta + \dfrac{K_{\mathrm{Icr}}^{1}}{K_{\mathrm{Icr}}^{2}}\sin^2\beta}\right\} \tag{7-34}$$

7.3　裂纹的任意扩展

在裂纹的任意扩展过程中，将不可避免地出现节点离裂纹面很近的情况，如图7.3(a) 所示，当单元被间断划分出一个面积相对其他部分非常小的区域时，高斯积分可能无法精确得到如此小区域的刚度矩阵，这将给整个结构的计算带来显著的误差，在裂纹转折处水平集函数计算不准确的极端情况下，甚至会使整个计算过程无法进行。为了克服这个问题，本文采取裂纹附近局部有限网格重分的方法，如图7.3(b) 所示，其中 $\boldsymbol{x}_O$ 为节点移动之前的位置坐标，$\boldsymbol{x}_{O'}$ 为节点移动之后的位置坐标，l_{gap} 为裂纹与单元边交点和节点之间距离的最小值，它的大小决定了是否需要对节点位置坐标进行修改。当出现节点离裂纹面很近的情况时，将该节点沿裂纹法向，向远离裂纹的方向移动适当距离，但移动的距离不能太大，以免出现网格畸变，节点移动位移的具体表达式为

$$\Delta\boldsymbol{x} = f l_e \boldsymbol{n} \tag{7-35}$$

式中，$\Delta\boldsymbol{x}$ 为节点移动位移；l_e 为裂纹与单元边交点和节点之间距离取最小值时，交点所在单元边的长度；f 为移动系数，根据网格的情况适当选取。

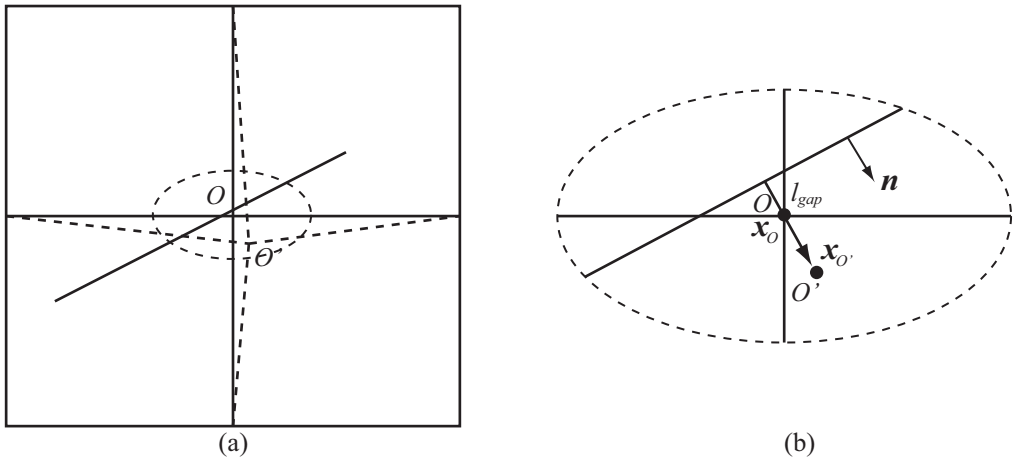
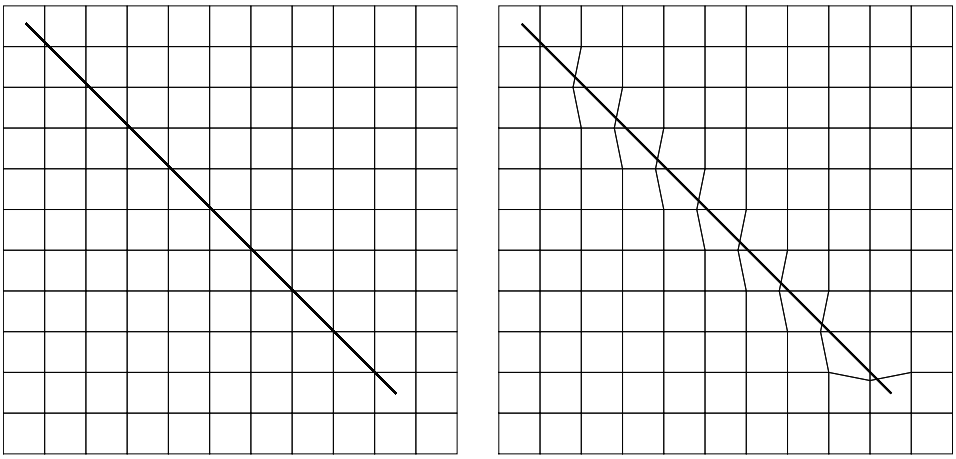


图 7.3　局部网格重分示意图

图7.4(a) 中有很多单元节点与裂纹面之间的距离很小，经过上述局部有限网格重分的方法进行处理之后的情况如图7.4(b) 所示，重分过程中 $f = 0.2$。从图中的对比情况可以看出，在没有过多影响网格划分质量的情况下，有效地避免了出现节点离裂纹面很近的现象。



(a)　　(b)

图 7.4　局部网格重分前后对比：(a) 重分前；(b) 重分后

7.4　数值算例

7.4.1　一侧具有贯穿裂纹的各向同性拉伸长方形板

本算例考虑有限长一侧具有贯穿裂纹的各向同性矩形板，几何尺寸和裂纹如图7.5(a) 所示，角度 ϕ 为裂纹与矩形板横向的夹角，矩形板的长度是宽度的两倍，裂纹位于长度方向上的中心，板的两端受均匀单位拉应力作用，材料参数为：$E=1.0\,\mathrm{GPa}$，$v=0.3$。矩形板的两种网格划分分别如图7.5(b) 和 (c) 所示。当 $\phi=0$ 时，裂纹应力强度因子 $K_{II}=0$，根据 Irwin 的理论应力强度因子 K_{I} 为

$$K_{\mathrm{I}}=\left[1.12-0.23\left(\frac{a}{b}\right)+10.56\left(\frac{a}{b}\right)^2-21.74\left(\frac{a}{b}\right)^3+30.42\left(\frac{a}{b}\right)^4\right]\sigma_0\sqrt{\pi a} \quad (7\text{-}36)$$

对于三种不同裂纹长度，不同方法计算得到的一侧具有贯穿裂纹的各向同性拉伸长方形板应力强度因子 K_{I} 结果对比见表7.1，从表中的对比情况可以看出，扩展逐层理论计算得到的应力强度因子结果与文献吻合较好。

表 7.1　一侧具有贯穿裂纹的各向同性拉伸长方形板应力强度因子 K_{I}

a/b	解析解	Mesh 20×40		Mesh 40×80		Mesh 50×100
		Mohammadi[178]	XLWM	Mohammadi[178]	XLWM	XLWM
0.30	1.660	1.630	1.478	1.646	1.586	1.608
0.45	2.420	2.362	2.155	2.396	2.325	2.437
0.60	4.027	3.876	3.549	3.961	3.828	3.884

由于扩展逐层理论是准三维的，可以精确地计算得到应力在厚度方向上

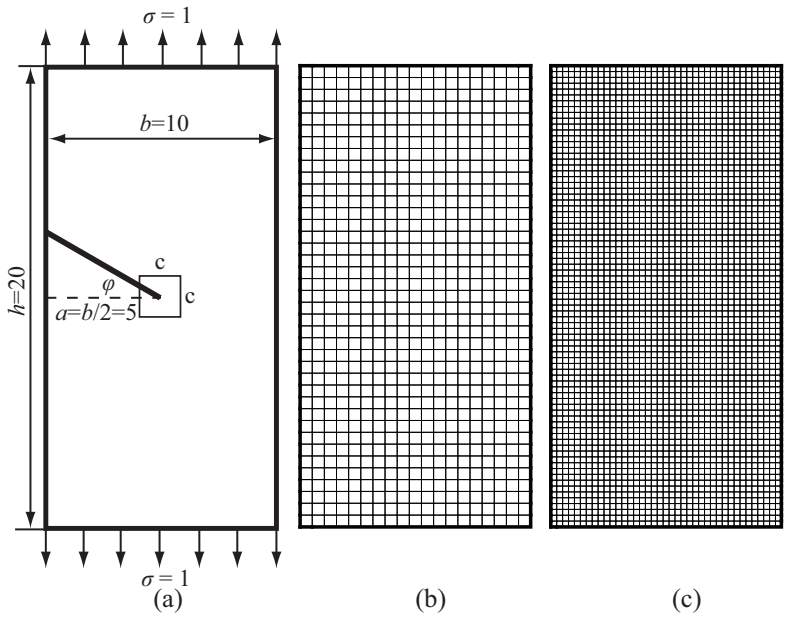


图 7.5　一侧具有贯穿裂纹的各向同性拉伸长方形板：(a) 几何示意图；(b) 20×40 网格；(c) 40×80 网格

的变化，且各层的基体裂纹也被完全描述，所以基于扩展逐层理论可以得到应力强度因子在厚度方向上的变化，这是扩展逐层理论相对现有板壳扩展有限元方法的一个重要优势。对于三种不同裂纹长度，一侧具有贯穿裂纹的各向同性拉伸长方形板应力强度因子 K_{I} 随厚度方向的变化如图7.6 所示，从图中可以看出，在矩形板宽度一定的情况下，裂纹长度对应力强度因子 K_{I} 随厚度方向的变化规律有显著影响。整体上看，表面上的应力强度因子要大于中性面上的，当裂纹长度与板宽之比接近 0.5 时，应力强度因子 K_{I} 从表面到中性面单调下降，而当裂纹长度与板宽之比大于或小于 0.5 时，应力强度因子 K_{I} 从表面到中性面先减小而后增加。应力强度因子 K_{I} 在沿厚度的变化曲线关于板的中性面对称。

一侧具有贯穿裂纹的各向同性拉伸长方形板位移和面内应力云图分别如图7.7 和7.8 所示，其中裂纹长度和板宽度之比 $a/b=0.45$。

下面将通过数值算例研究裂纹与板横向夹角 ϕ 对应力强度因子的影响情况，图7.9 给出了夹角 ϕ 对应力强度因子的影响，图中的应力强度因子为沿厚度方向上的均值。从图7.9 可以看出，K_{I} 随夹角 ϕ 的增加而减小，K_{II} 随夹角 ϕ 的增加先增加后减小，拐点处夹角 ϕ 约为 30°。

夹角 ϕ 不同时应力强度因子沿厚度方向上的变化如图7.10 所示，图中用沿厚度方向上的均值对应力强度因子进行了归一化。应力强度因子 K_{I} 沿厚度的变化幅度随夹角 ϕ 的增加先减小后增加，当夹角 ϕ 约为 18° 时 K_{I} 沿厚度几乎

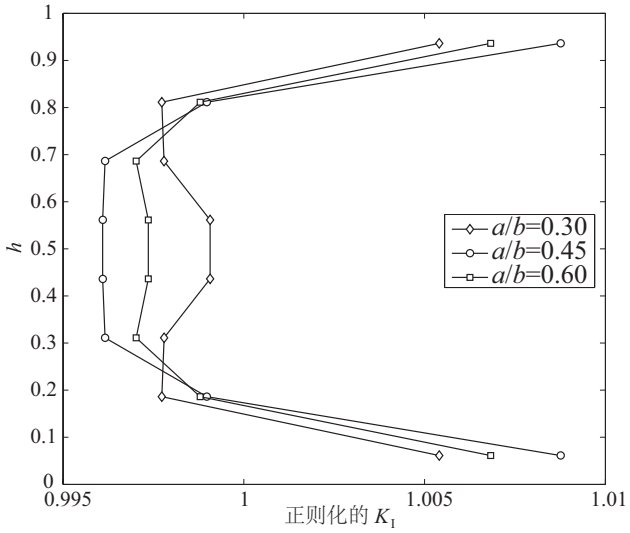


图 7.6　一侧具有贯穿裂纹的各向同性拉伸长方形板应力强度因子 K_{I} 随厚度方向的变化

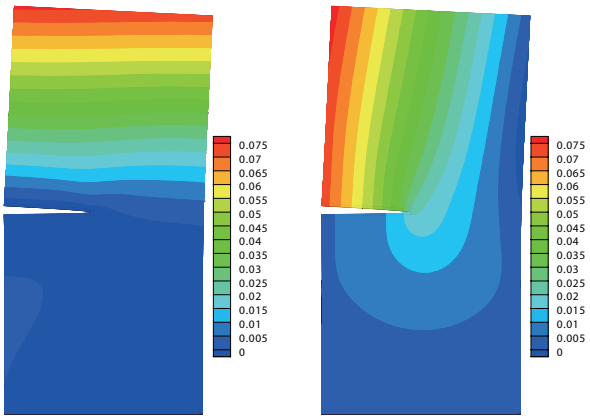
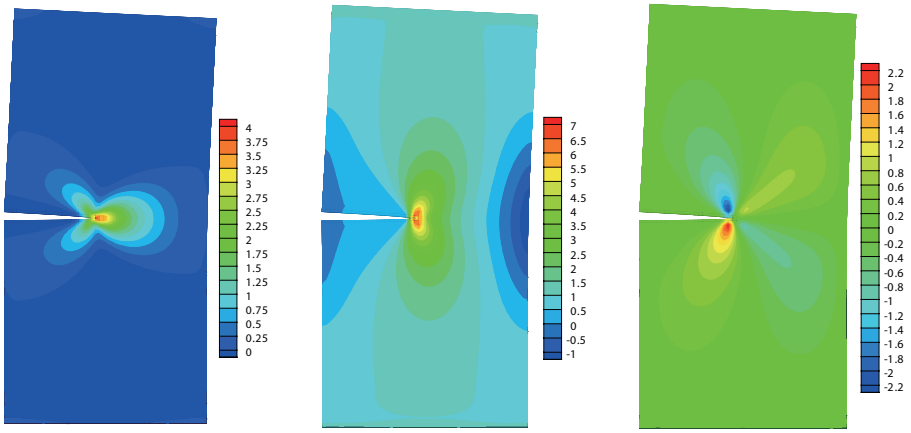


图 7.7　一侧具有贯穿裂纹的各向同性拉伸长方形板位移云图：(a) 位移 u_1；(b) 位移 u_2

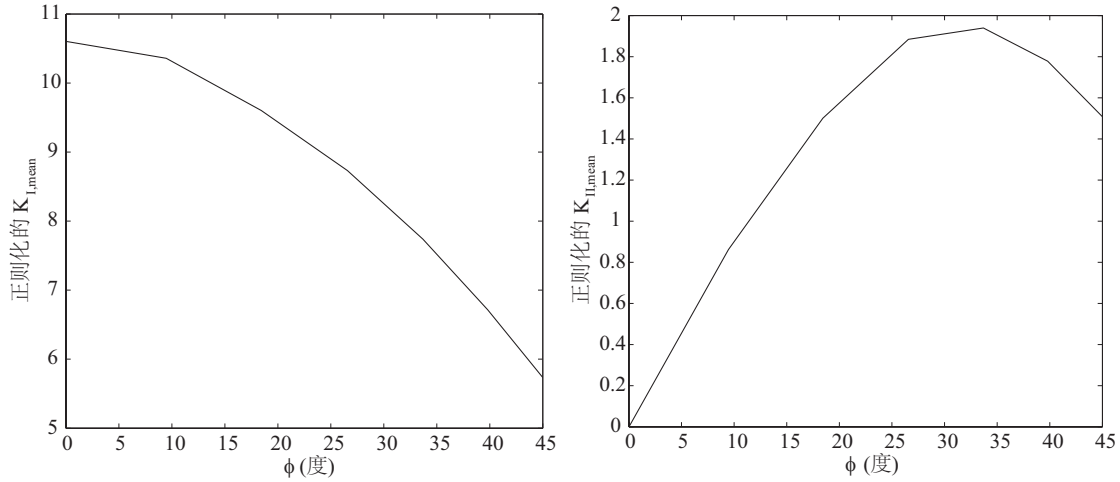
不变化。当夹角 ϕ 小于 18° 时应力强度因子 K_{I} 从表面到中性面单调下降，而当夹角 ϕ 大于 18° 时 K_I 从表面到中性面单调增加。也就是说，当 ϕ 大于 18° 时板中性面上的应力强度因子最大，而当 ϕ 小于 18° 时板上下表面上的应力强度因子最大。应力强度因子 K_{II} 沿厚度的变化幅度随夹角 ϕ 的增加先减小，当夹角 ϕ 约为 45° 时 K_{II} 沿厚度几乎不变化，且 K_{II} 从表面到中性面单调下降，即板上下表面上的应力强度因子 K_{II} 最大。应力强度因子 K_{I} 和 K_{II} 在沿厚度的变化曲线总是关于板的中性面对称，而且总是在 $z=0.2$ 和 $z=0.8$ 附近处等于沿厚度方向上的均值。

考虑一个各向同性板裂纹扩展问题，裂纹的初始长度为 1.5，夹角 $\phi=0$，



(a)　(b)　(c)

图 7.8　一侧具有贯穿裂纹的各向同性拉伸长方形板应力云图：(a) 应力 σ_{11}；(b) 应力 σ_{22}；(b) 应力 σ_{12}



(a)　(b)

图 7.9　裂纹与板横向夹角 φ 对应力强度因子的影响：(a) K_{I}；(b) K_{II}

该算例中取每一步裂纹扩展的均值更新裂纹尖端的位置。图7.11 给出了应力强度因子随裂纹长度变化曲线，图7.12 给出了面内应力随裂纹扩展的云图，图7.12 中的应力强度因子为 K_{I}。预测得到的裂纹扩展角度为零，与实际情况相符。在裂纹的扩展过程中，应力强度因子 K_{I} 随裂纹长度的增加先缓慢增加而后快速增加。

7.4.2　一侧具有贯穿裂纹的复合材料拉伸长方形板

本算例考虑的一侧具有贯穿裂纹的复合材料长方形板的几何尺寸、边界条件、载荷以及网格划分与 7.4.1 节中各向同性长方形板的相同，其材料参数为

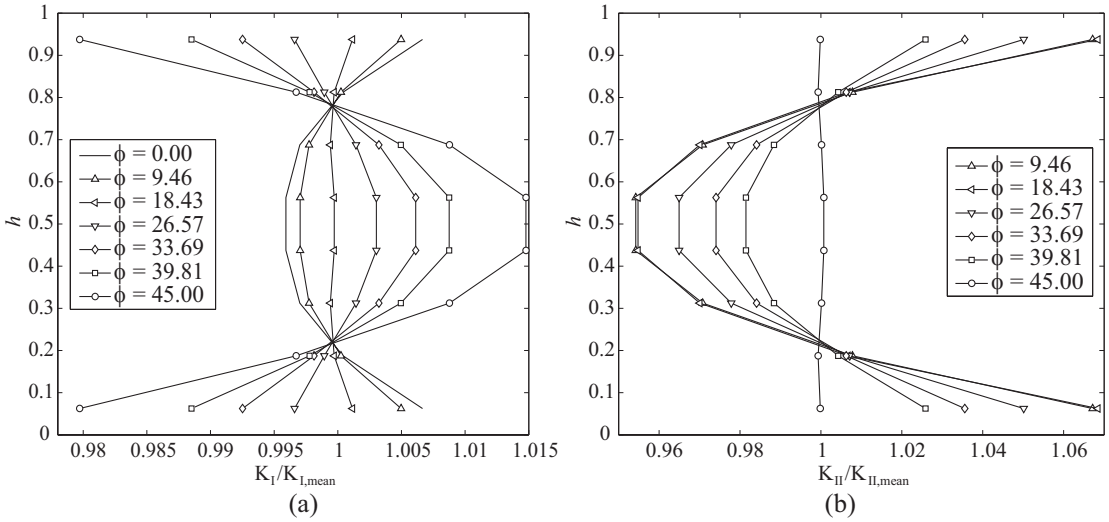


图 7.10　夹角 ϕ 不同时应力强度因子沿厚度方向上的变化：(a) K_{I}；(b) K_{II}

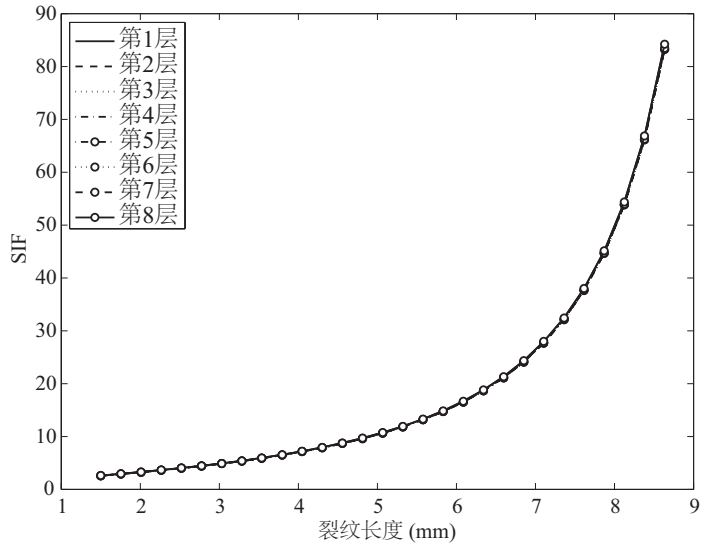


图 7.11　一侧具有贯穿裂纹的各向同性拉伸长方形板应力强度因子随裂纹长度变化曲线

$E_{11}=114.8\,\mathrm{GPa}$，$E_{22}=E_{33}=11.7\,\mathrm{GPa}$，$G_{12}=G_{13}=9.66\,\mathrm{GPa}$，$G_{23}=6.21\,\mathrm{GPa}$，$v_{12}=v_{13}=0.21$，$v_{23}=0.40$。

首先，利用文献[125,126,179,180] 中的应力强度因子计算结果验证扩展逐层理论在复合材料结构裂纹应力强度因子计算方面的正确性，其中 Asadpoure 等[125,126]、Aliabadi 和 Sollero[180] 以及 Ghorashi[179] 的结果是分别基于 XFEM、BEM 和 XEFG 计算得到的。对于 5 中不同的材料主方向（0°、30°、45°、60° 和 90°），图7.13 给出了扩展逐层理论得到的应力强度因子计算结果与文献的对比情况，从图中的对比可知，扩展逐层理论计算得到应力强度因子与文献结果吻合较好，验证了本文方法的正确性。

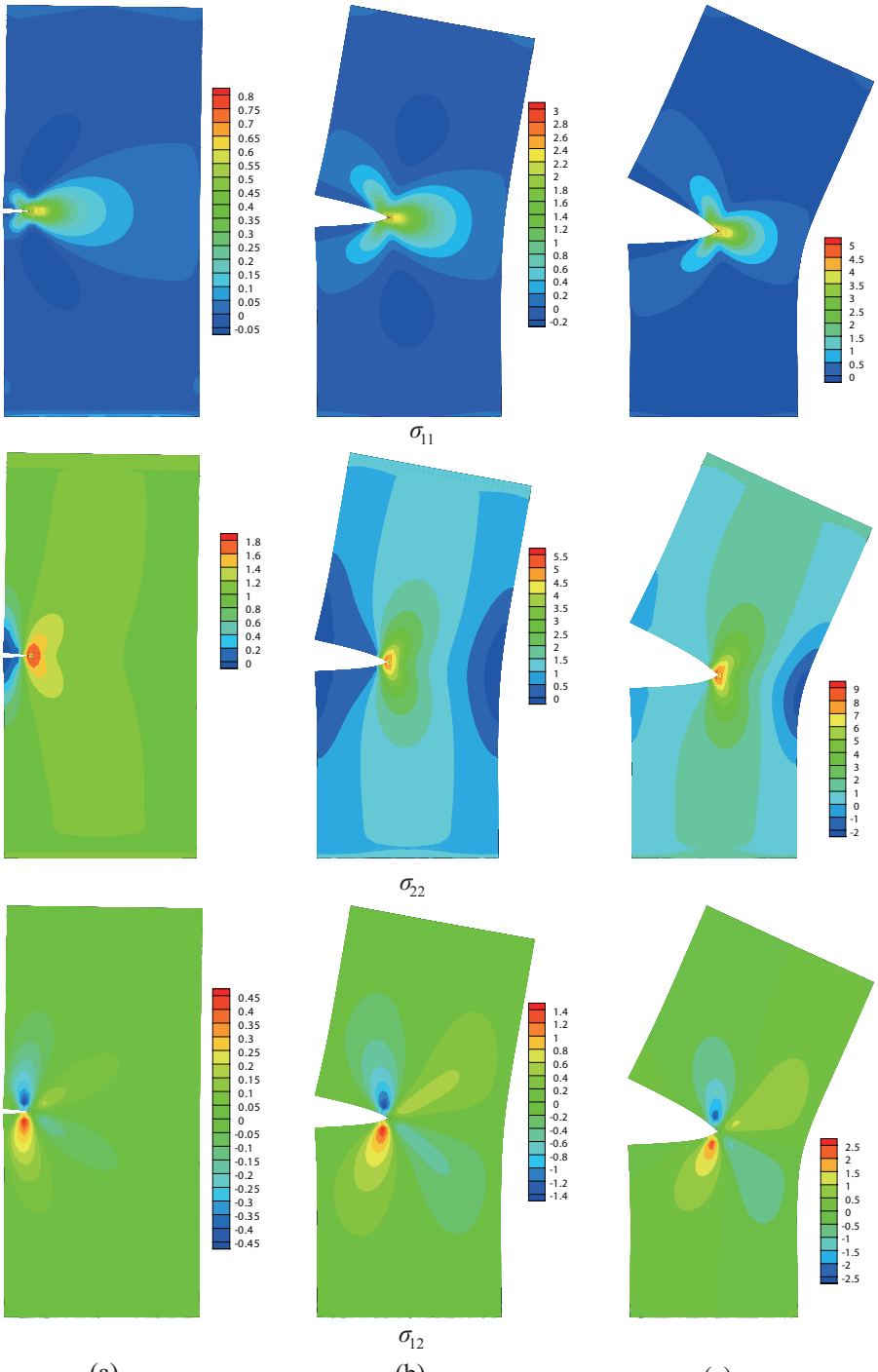


图 7.12　一侧具有贯穿裂纹的各向同性拉伸长方形板面内应力随裂纹扩展的云图

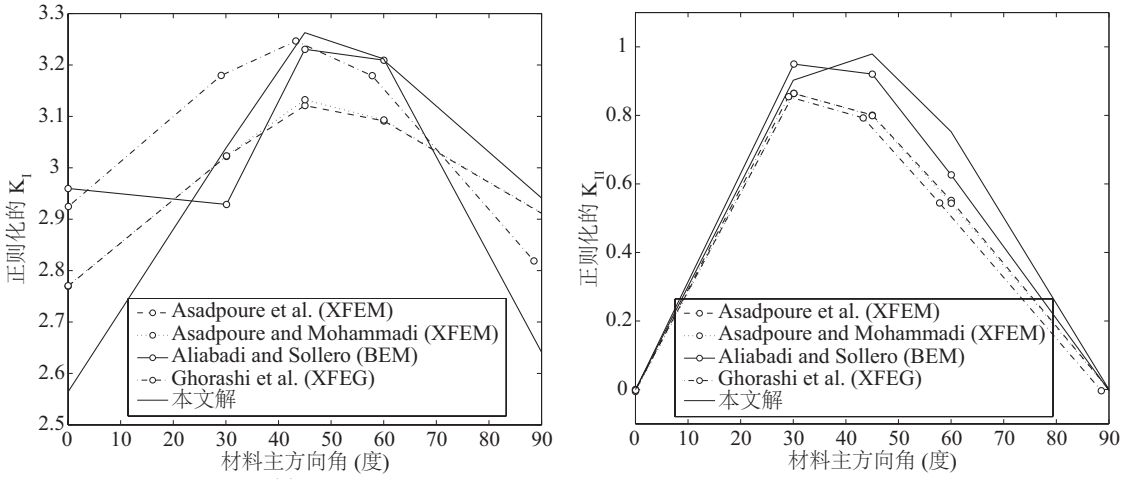


图 7.13　一侧具有贯穿裂纹的复合材料拉伸长方形板应力强度因子计算结果对比：(a) K_{I}；(b) K_{II}

图7.14 给出了应力强度因子在厚度方向上的变化，对于应力强度因子 K_{I} 沿厚度的变化幅度来说，材料主方向角 $\theta=45°$ 时最大，$\theta=0°$ 时次之，$\theta=90°$ 时最小，而应力强度因子 K_{II} 沿厚度的变化幅度随材料主方向角增加而减小。与各向同性材料长方形板一样，应力强度因子 K_{I} 和 K_{II} 沿厚度的变化曲线总是关于板的中性面对称，而且总是在 $z=0.2$ 和 $z=0.8$ 附近处等于沿厚度方向上的均值。

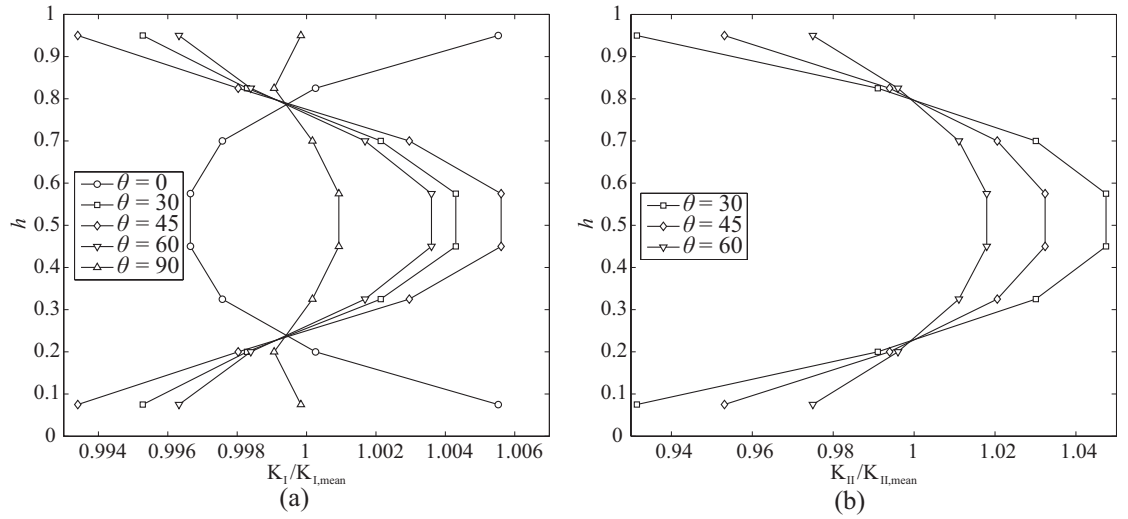


图 7.14　一侧具有贯穿裂纹的复合材料拉伸长方形板应力强度因子在厚度方向上的变化：(a) K_{I}；(b) K_{II}

图7.15 给出了复合材料拉伸长方形板应力 σ_{11}、σ_{22} 和 σ_{12} 的云图，从图中可以明显看出材料主方向角对裂尖应力分布的影响。

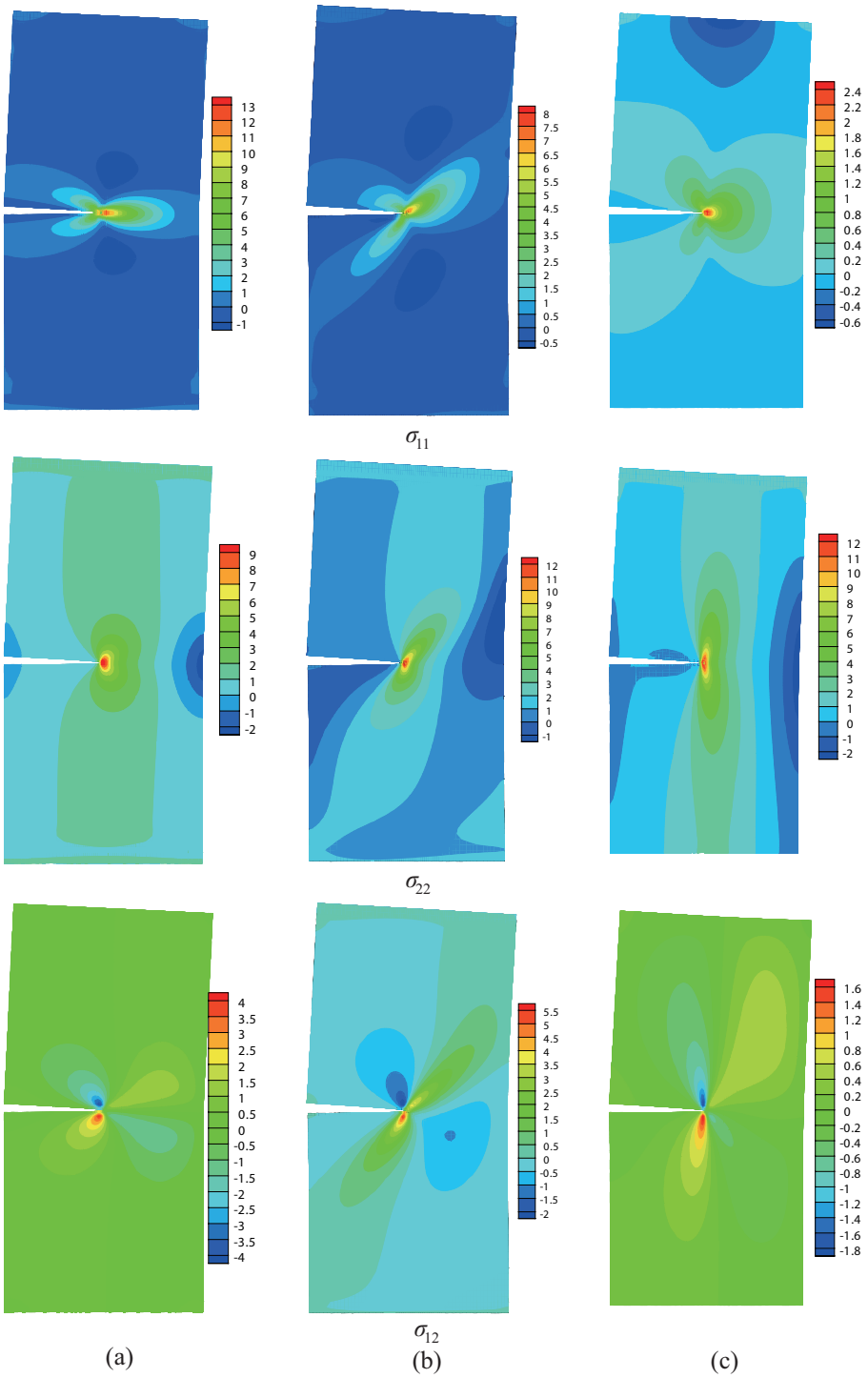


图 7.15　一侧具有贯穿裂纹的复合材料拉伸长方形板应力云图：(a) 0°；(b) 45°；(c) 90°

下面将通过数值算例研究裂纹与板横向的角度 ϕ 对复合材料拉伸长方形板应力强度因子的影响情况，裂纹与板横向的角度 ϕ 对复合材料层合板应力强度因子的影响如图7.16 所示。对于 5 种不同的材料主方向（0°、30°、45°、60° 和 90°），应力强度因子 K_{I} 随角度 ϕ 的增加而减小，而减小的幅度随材料主方向角的增加而下降，应力强度因子 K_{II} 随角度 ϕ 的增加而增加，材料主方向角为零时的增加幅度要明显大于其它材料主方向角的增加幅度。

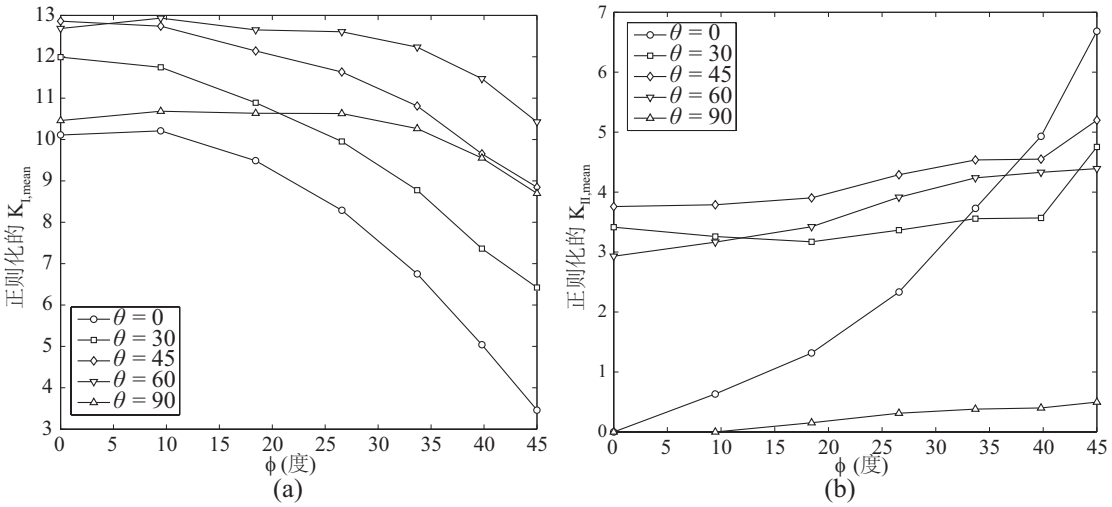


图 7.16　裂纹与板横向的角度 ϕ 对复合材料层合板应力强度因子的影响：(a) K_{I}；(b) K_{II}

对于不同的材料主方向角，图7.17-图7.21 给出了角度 ϕ 不同时复合材料层合板裂纹尖端应力强度因子随厚度方向的变化情况。对于不同材料主方向角和角度 ϕ，应力强度因子 K_{I} 和 K_{II} 沿厚度的变化曲线总是关于板的中性面对称，而且总是在 $z=0.2$ 和 $z=0.8$ 附近处等于沿厚度方向上的均值。

当材料主方向角为 0° 时，应力强度因子 K_{I} 和 K_{II} 沿厚度的变化幅度随角度 ϕ 先减小而后增加，角度 ϕ 约为 26° 时变化幅度最小。当材料主方向角为 30°、45° 和 60° 时，应力强度因子 K_{I} 和 K_{II} 沿厚度的变化幅度随角度 ϕ 增加而减小。当材料主方向角为 90° 时，应力强度因子 K_{I} 沿厚度的变化幅度随角度 ϕ 增加而增加，应力强度因子 K_{II} 则刚好相反。

考虑一个复合材料板裂纹扩展问题，裂纹的初始长度为 3.5，夹角 $\phi=0$。该算例中取每一步裂纹扩展的均值更新裂纹尖端的位置，因为在扩展逐层理论中不同单层的扩展角是不同的。图7.22 给出了应力强度因子 K_{I} 和 K_{II} 随裂纹长度变化曲线，图7.23 给出裂纹的扩展路径。在裂纹的扩展过程中，应力强度因子 K_{I} 随裂纹长度的增加而增加，K_{II} 随裂纹长度的增加，先增加而后减小。

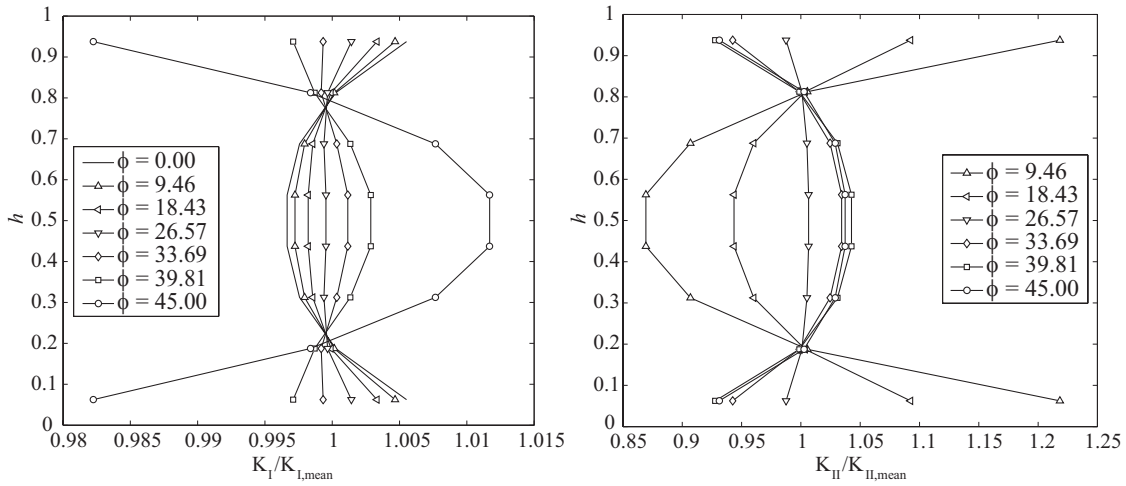


图 7.17　材料主方向角为 0° 时复合材料层合板裂纹尖端应力强度因子随厚度方向的变化：(a) K_{I}；(b) K_{II}

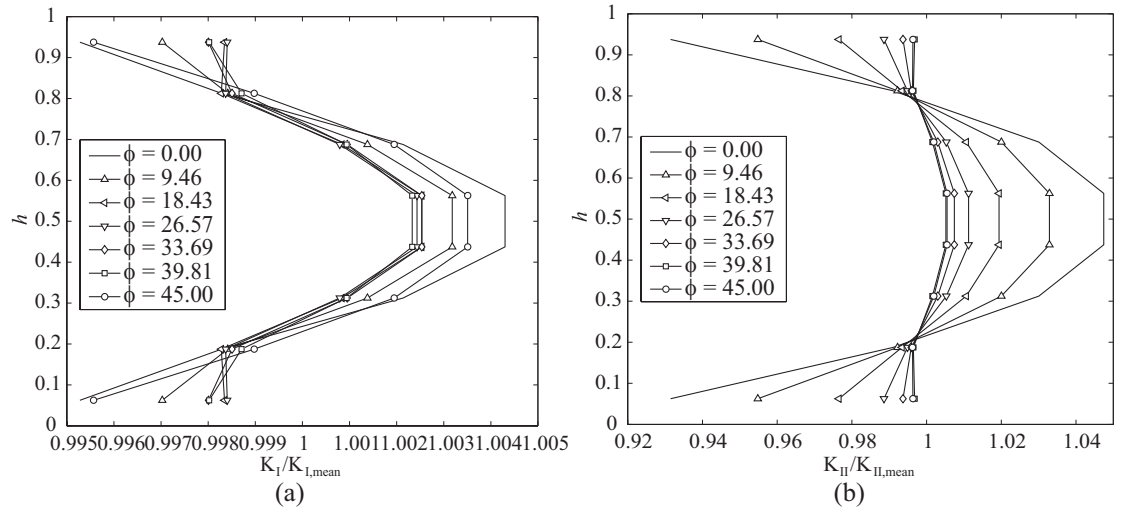


图 7.18　材料主方向角为 30° 时复合材料层合板裂纹尖端应力强度因子随厚度方向的变化：(a) K_{I}；(b) K_{II}

材料主方向角为 0° 和 90° 时，预测得到的裂纹扩展角度为零，与实际情况相符。文献[181] 提到，随着材料主方向角的增大，各向异性材料裂纹扩展角近似按照周期为 π 的正弦函数变化，材料主方向角为 35° 时取最大值，135° 时取最小值。在本文考虑的几种材料主方向角中，材料主方向角为 30° 时扩展角最大，其次是 45°，这些与文献中的结果相吻合。

7.4.3　含椭圆分层损伤拉伸长方形板的裂纹任意扩展

本算例考虑含分层损伤各向同性和复合材料层合板基体裂纹应力强度因子的计算和裂纹任意扩展的预测问题，研究对象的几何尺寸如图6.16 所示，初

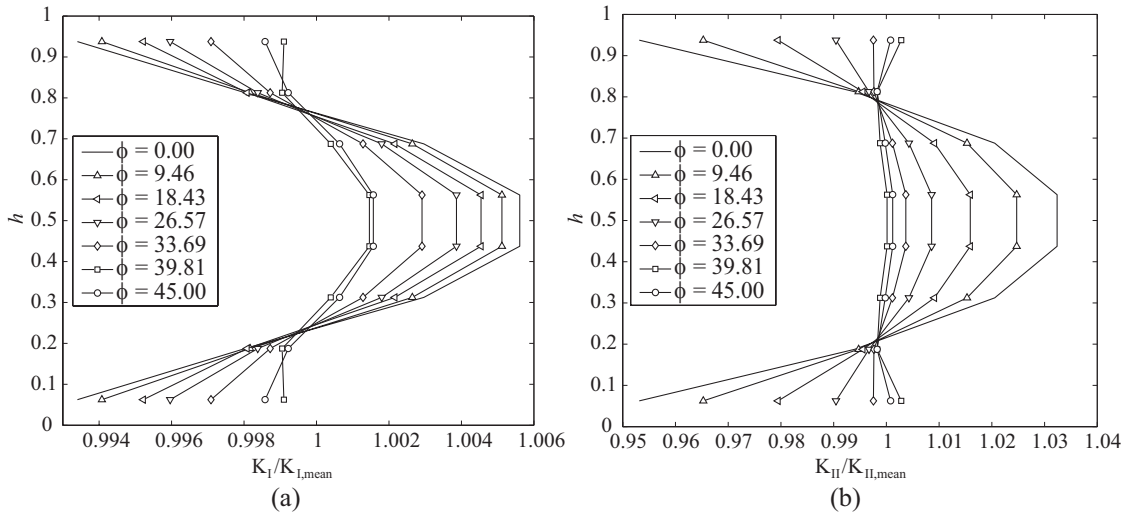


图 7.19　材料主方向角为 45° 时复合材料层合板裂纹尖端应力强度因子随厚度方向的变化：(a) K_{I}；(b) K_{II}

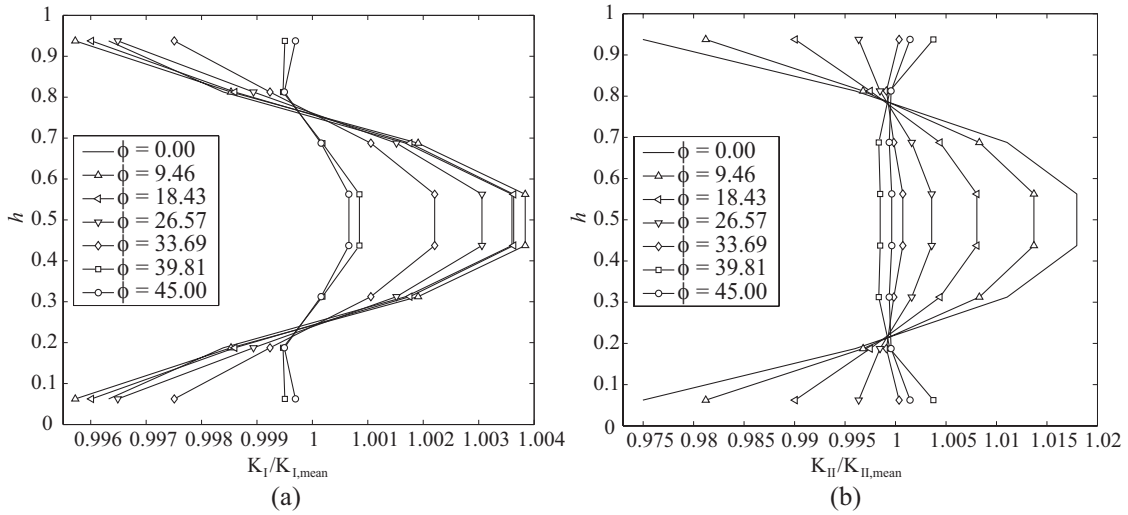


图 7.20　材料主方向角为 60° 时复合材料层合板裂纹尖端应力强度因子随厚度方向的变化：(a) K_{I}；(b) K_{II}

始裂纹长度为 3.02mm，椭圆分层区域受单位均布载荷作用，分层损伤位于板的中性面上。

首先研究含分层损伤各向同性板裂纹沿横向扩展问题，各向同性板的材料参数为：$E=52\mathrm{GPa}$，$v=0.3$。图7.24 和7.25 分别给出了应力强度因子随裂纹长度的变化曲线和裂纹扩展过程中应力强度因子沿厚度的变化曲线。从图7.24 可以看出，应力强度因子 K_{I} 随着裂纹长度的增加而增加。当基体裂纹尖端离分层前缘很近时，变化规律与基体裂纹尖端远离分层前缘时的完全不同，这说明分层前缘对基体裂纹尖端应力场具有显著影响。当基体裂纹尖端离分层

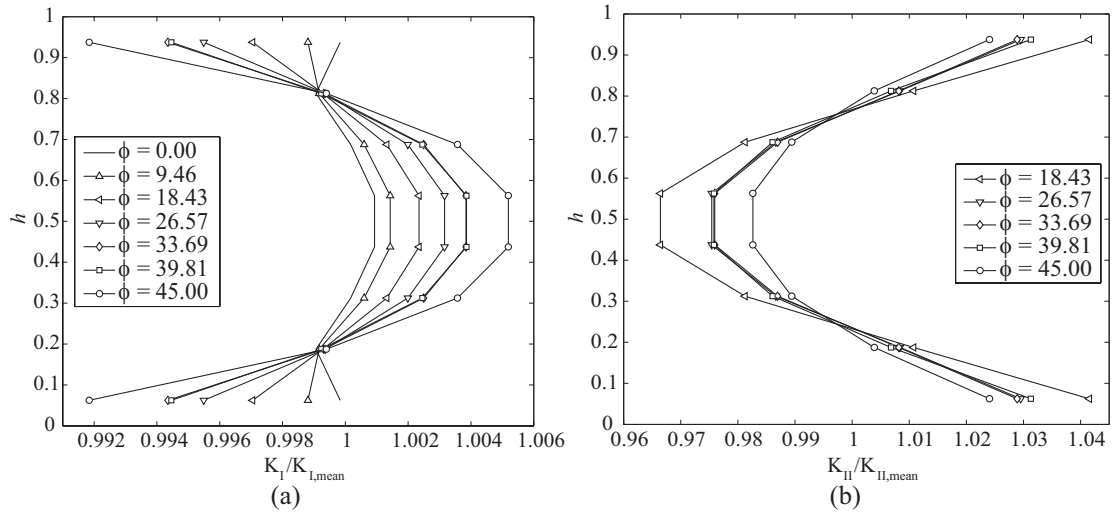


图 7.21　材料主方向角为 90° 时复合材料层合板裂纹尖端应力强度因子随厚度方向的变化：(a) K_{I}；(b) K_{II}

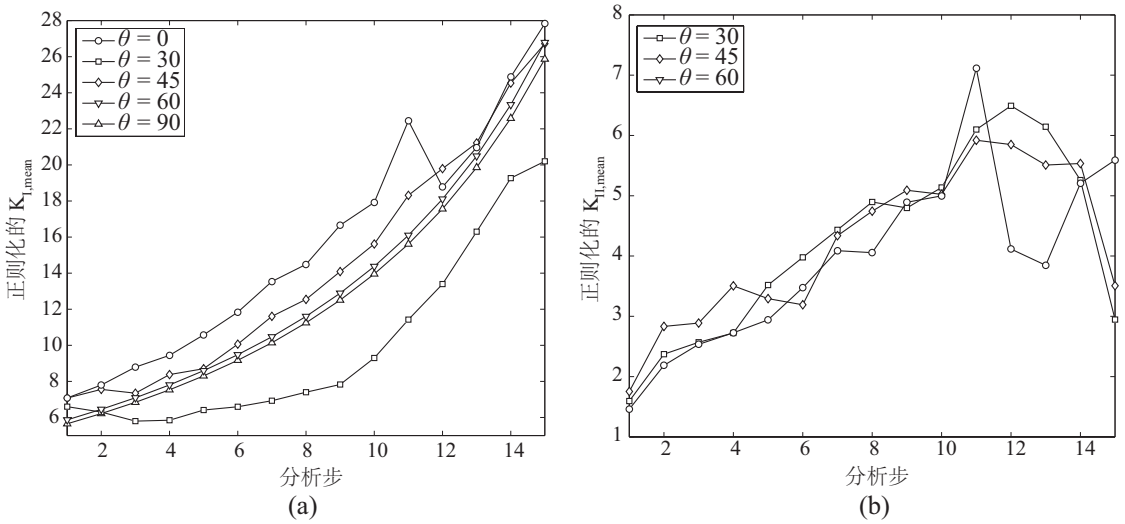


图 7.22　一侧具有贯穿裂纹的复合材料拉伸长方形板应力强度因子随裂纹长度变化曲线：(a) K_{I}；(b) K_{II}

前缘很近时，板的中性面上的应力强度因子最大，而当基体裂纹尖端远离分层前缘时板的，上下表面的应力强度因子最大。由于本算例的边界条件和载荷都关于中性面对称，所以应力强度因子 K_{I} 沿厚度的变化曲线关于板的中性面对称。

裂纹扩展最后的位移和面内应力云图分别如图7.26 和图7.27 所示。裂纹扩展过程中，在分层前缘和基体裂纹尖端形成了明显的应力集中。在分层前缘，对于应力 σ_{11} 和 σ_{22} 来说，应力集中分别在 $\omega = 0°$ 和 $\omega = \pm 90°$ 方向上，而对于应力 σ_{12} 来说，应力集中位于 $\omega = \pm 45°$ 附近，ω 的含义如图6.3 所示。

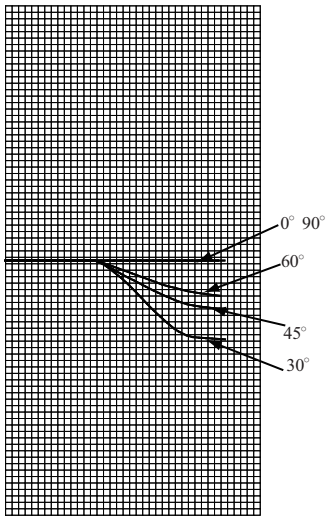


图 7.23　不同材料主方向裂纹的扩展路径

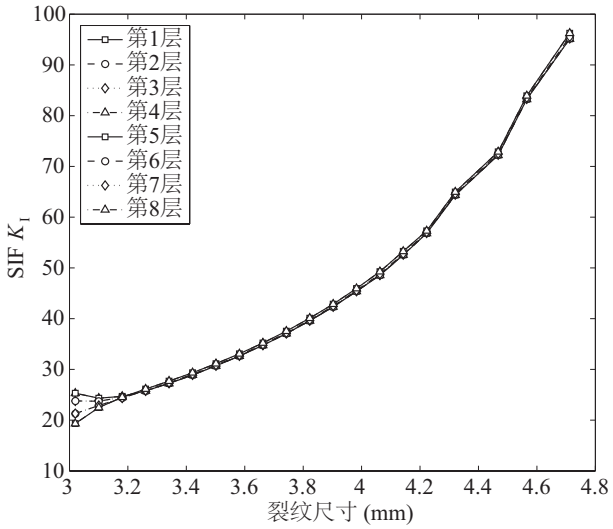


图 7.24　一侧具有贯穿裂纹的含分层损伤各向同性板应力强度因子随裂纹长度的变化和沿厚度的变化曲线

含椭圆分层和基体裂纹损伤复合材料层合板的单层材料参数为：$E_{11}=114.8\,\text{GPa}$，$E_{22}=E_{33}=11.7\,\text{GPa}$，$G_{12}=G_{13}=9.66\,\text{GPa}$，$G_{23}=6.21\,\text{GPa}$，$v_{12}=v_{13}=0.21$，$v_{23}=0.40$。考虑三种铺层方式：$[30]_8$、$[45]_8$ 和 $[60]_8$，边界条件和载荷与含分层损伤各向同性板的相同，椭圆分层分别位于第 4 层间界面上，即为 $[\theta/\theta/\theta/\theta/\cap/\theta/\theta/\theta/\theta]$。

图7.28 和图7.29 分别给出了应力强度因子随裂纹长度的变化曲线和裂纹扩展过程中沿厚度方向的变化曲线（材料的主方向为 45°），应力强度因子 K_{I} 随着裂纹长度的增加而增加，应力强度因子 K_{II} 随着裂纹长度增加，总体上是先增加而后减小，但变化过程中有较大震荡。与各向同性板类似的是，当基体

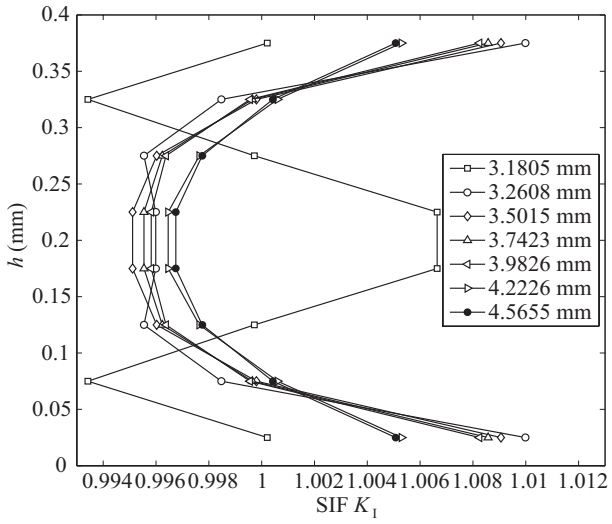


图 7.25　一侧具有贯穿裂纹的含分层损伤各向同性板应力强度因子厚度的变化曲线

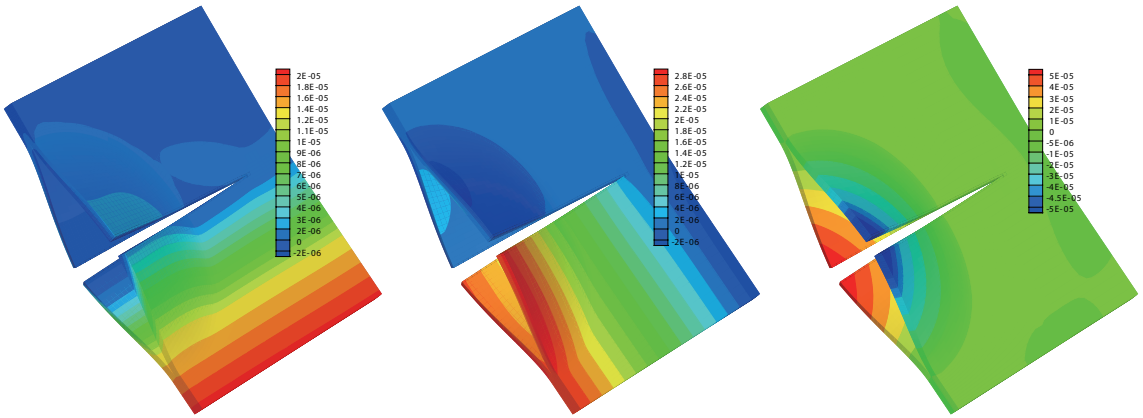
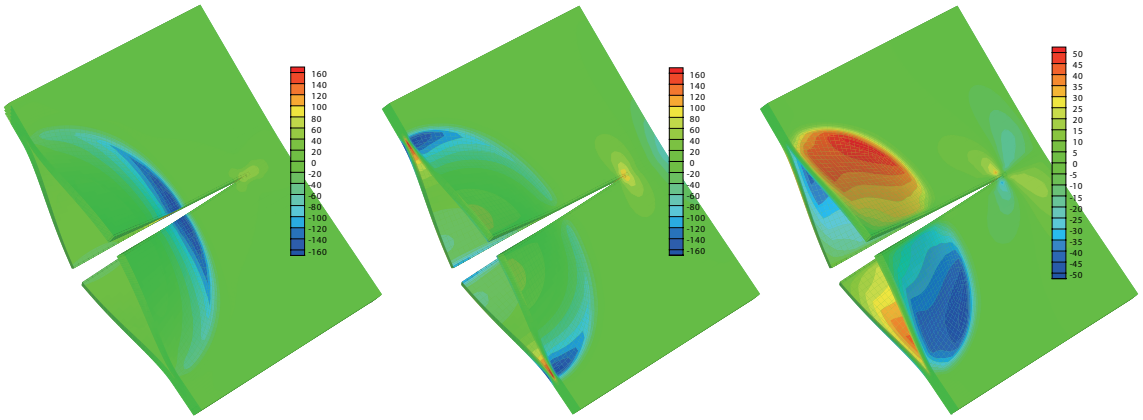


图 7.26　一侧具有贯穿裂纹的含分层损伤各向同性板裂纹扩展最后的位移云图：(a) 位移 u_1；(b) 位移 u_2；(c) 位移 u_3

裂纹尖端离分层前缘很近时，变化规律与基体裂纹尖端远离分层前缘时的完全不同，且当基体裂纹尖端离分层前缘很近时应力强度因子 K_{I} 和 K_{II} 沿厚度的变化幅度要明显大于基体裂纹尖端远离分层前缘时的。由于本算例的边界条件、载荷和纤维铺层角都关于中性面对称，所以应力强度因子 K_{I} 和 K_{II} 在沿厚度的变化曲线关于板的中性面对称。

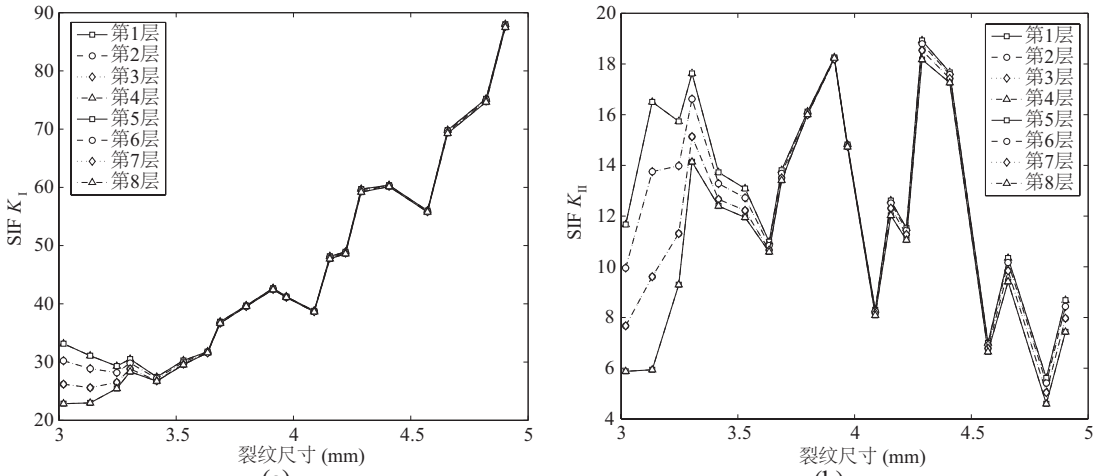
裂纹扩展到最后的位移和应力云图分别如图7.30和图7.31 所示。裂纹扩展过程中，在分层前缘和基体裂纹尖端形成了明显的应力集中。与各向同性板相比，可以看出纤维铺层角对位移和应力的分布有显著影响。在分层前缘，对于应力 σ_{11}，应力集中在 $\omega=-30^\circ$ 方向附近，对于应力 σ_{22}，应力集中在 $\omega=-45^\circ$ 和 $\omega=90^\circ$ 方向上，而对于应力 σ_{12} 来说，应力集中位于 $\omega=\pm45^\circ$ 附近。



(a)　(b)　(c)

图 7.27　一侧具有贯穿裂纹的含分层损伤各向同性板裂纹扩展最后的应力云图：(a) 应力 σ_{11}；(b) 应力 σ_{22}；(c) 应力 σ_{12}

三种不同材料主方向（$\theta = 30°$，$\theta = 45°$，$\theta = 60°$）裂纹的扩展路径如图7.32所示，材料主方向角为 30° 时扩展角最大，其次是 45°。



(a)　(b)

图 7.28　一侧具有贯穿裂纹的含分层损伤复合材料板应力强度因子随裂纹长度的变化曲线：(a) K_{I}；(b) K_{II}

7.5　本章小结

本章将扩展逐层理论应用于复合材料层合板结构裂纹应力强度因子的计算和裂纹的任意扩展问题，分别利用相互作用积分法和最大周向应力准则计算裂纹尖端的应力强度因子和裂纹扩展角度。通过数值算例验证了本文方法在应力强度因子和裂纹扩展角的计算方面的正确性，并研究了各向同性材料和各向异性材料裂纹与板横向夹角对应力强度因子的影响情况，以及应力强

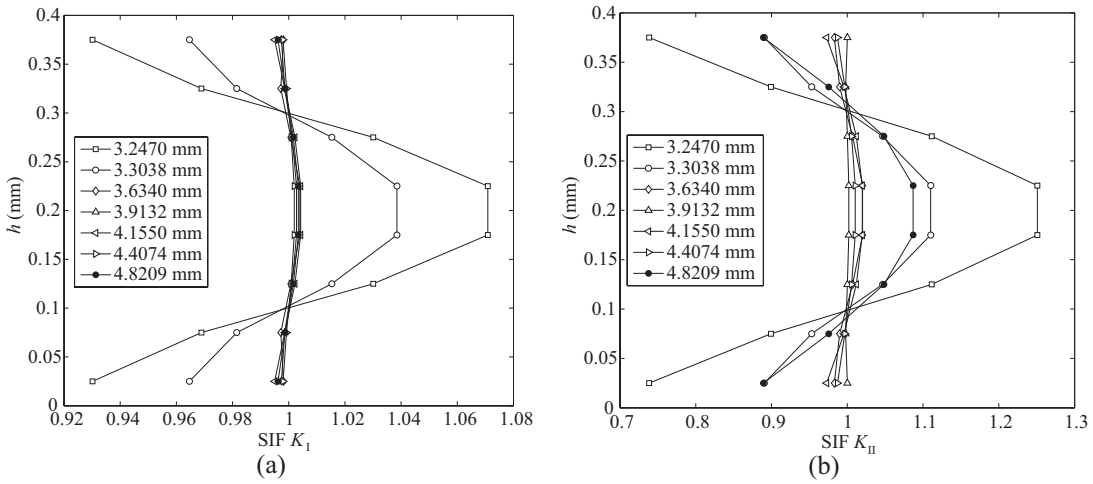


图 7.29　一侧具有贯穿裂纹的含分层损伤复合材料板应力强度因子厚度的变化曲线：(a) K_{I}；(b) K_{II}

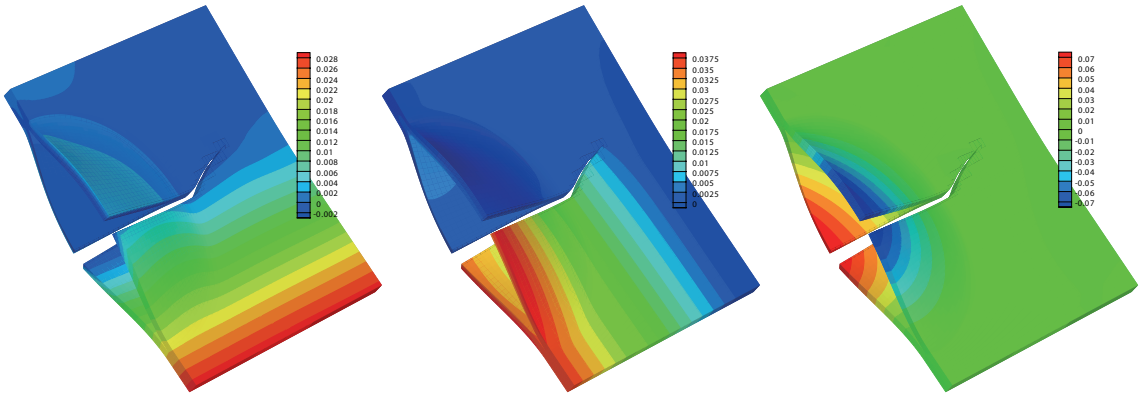
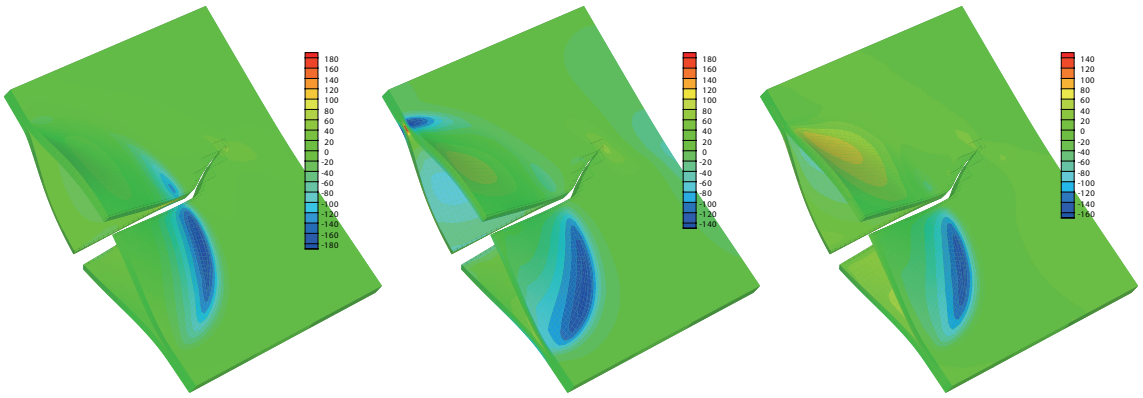


图 7.30　一侧具有贯穿裂纹的含分层损伤复合材料板裂纹扩展最后的位移云图：(a) 位移 u_1；(b) 位移 u_2；(c) 位移 u_3

度因子在板厚度方向上的变化规律。研究结果表明：

1. 基于扩展逐层理论计算得到的各向同性材料和各向异性材料的应力强度因子与文献结果吻合较好；
2. 基于扩展逐层理论和各向异性材料相互作用积分可以得到应力强度因子在板厚度方向上的变化规律，进而预测得到的复合材料层合板裂纹扩展角在各单层上是不同的，这是扩展逐层理论相对其它传统分析方法在板壳裂纹任意扩展预测方面的最大优势；
3. 无论是各向同性材料还是各向异性材料，应力强度因子 K_{I} 和 K_{II} 沿厚度的变化曲线总是关于板的中性面对称，而且总是在 $z=0.2$ 和 $z=0.8$ 附近处等于沿厚度方向上的均值；



(a)　　(b)　　(c)

图 7.31　一侧具有贯穿裂纹的含分层损伤复合材料板裂纹扩展最后的面内应力云图：(a) 应力 σ_{11}；(b) 应力 σ_{22}；(c) 应力 σ_{12}

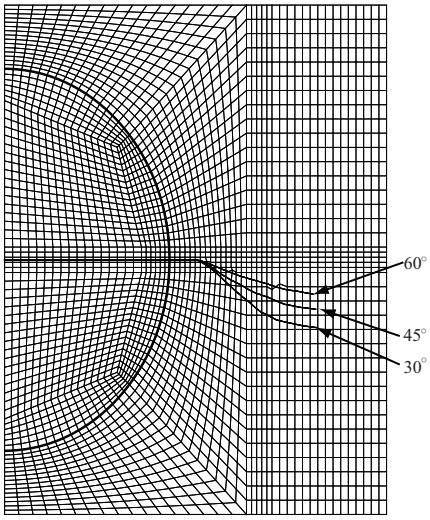


图 7.32　不同材料主方向裂纹的扩展路径

4. 基于扩展逐层理论和各向异性材料最大周向应力准则预测的复合材料裂纹扩展角与文献相吻合。
5. 当基体裂纹尖端离分层前缘很近时，变化规律与基体裂纹尖远端离分层前缘时的完全不同，这说明分层前缘对基体裂纹尖端应力场具有显著影响。

第 8 章 全文总结与展望

8.1 全文总结

随着设计水平和成型工艺的不断提高，整体成型复合材料的结构形式变得越来越复杂，对现有分析理论提出了严重挑战。且复合材料自身的复杂性导致了其损伤的复杂性和形式的多样性，能同时精确描述基体裂纹和层间分层的分析方法是通过数值方法提高结构抗冲击能力设计水平的关键。本文针对以上复合材料结构在工程应用中遇到的实际问题展开了理论与数值计算相结合的研究，主要研究成果如下：

1. 结合逐层理论应力分析精确高和三维实体元建模能力强的优点，建立了一种复合材料加筋板壳结构的逐层/实体元方法，并将该方法应用于复合材料加筋板壳结构静力和自由振动问题。该方法在没有任何有关加强筋假设的情况下，既可以得到板壳的精确应力应变解，又可以考虑任意复杂的加强筋结构，特别适合具有复杂加强筋的复合材料层合板结构。
2. 将复合材料加筋板壳结构的逐层/实体元方法推广应用于复合材料夹芯结构，建立了一种复合材料蜂窝夹芯结构的逐层/实体元方法，以及芯子结构的三种建模方法：全局模型、局部模型和等效模型，并基于逐层/实体元方法建立了复合材料夹芯结构的静动力半解析和有限差分灵敏度分析方法。通过静动力数值算例，验证了该方法及其灵敏度分析方法的正确性，并对比研究了三种芯子结构建模方法在静动力响应及其灵敏度分析中的表现。将逐层/实体元方法用于复合材料夹芯结构分析时，能够准确得到结构在集中载荷作用下的局部应力应变，模拟上下面板变形的不一致性，而且能避免或降低芯子较大厚度带来的分析误差。
3. 利用非线性 Heltz 接触律和渐进损伤分析模型，将复合材料加筋结构和夹芯结构的逐层/实体元方法应用于复合材料中低速冲击问题中，建立了复合材料加筋结构和夹芯结构的中低速冲击渐进损伤分析模型。该分析模型能准确得到冲击体和靶体结构的冲击响应，尤其是靶体结构的局部响应，能准确预测纤维断裂/屈曲、基体裂纹和层间分层损伤的起始和累积过程。
4. 结合逐层理论和扩展有限元方法的各自优点，将复杂的具有明显层特征的三维复合材料层合板裂纹解耦为两个二维裂纹（对于层合梁来说是两

个一维裂纹），建立了含多层分层和多处基体裂纹损伤复合材料层合梁和层合板结构的扩展逐层理论。扩展逐层理论不仅能同时精确描述复合材料层合结构中的多层分层和多处基体裂纹损伤，还能精确分析分层前缘和裂纹尖端的位移场和应力场，为复合材料层合结构冲击损伤的模拟提供了一种新的精确分析方法。

5. 利用各向同性材料和各向异性材料的相互作用积分和最大周向应力准则，将复合材料层合结构的扩展逐层理论应用于各向同性板和复合材料层合板的裂纹任意扩展问题上。并通过数值算例验证了该方法的正确性，得到了裂纹尖端应力强度因子在各向同性板和复合材料层合板厚度方向上的变化规律，以及层合结构各单层裂纹扩展时角度不同的现象。

本文主要有以下四个创新性成果：

1. 建立了适合分析具有任意复杂加强筋复合材料层合板壳结构的逐层/实体元方法，避免了加强筋结构等效方法给整体分析结果带来的误差，且在局部响应分析方面（尤其是板壳与加强筋连接处）比传统分析方更具有优势；
2. 建立了复合材料夹芯结构的逐层/实体元方法，针对实际工程应用，提出了芯子结构的三种建模方法：全局模型、局部模型和等效模型。逐层/实体元方法与三种建模方法联合使用，能降低或避免芯子结构等效算法带来的误差，也能避免芯子结构厚度给板壳分析理论带来的误差；
3. 提出了复合材料层合梁结构的扩展逐层理论，能同时精确描述复合材料层合结构中的多层分层和多处基体裂纹损伤，拓展了扩展有限元方法在复合材料结构损伤分析和预测问题上的应用，为复合材料层合结构的损伤模拟提供了一种精确的新方法；
4. 基于各向异性材料裂纹尖端扩充函数，将扩展逐层理论推广应用于复合材料材料层合板结构，能精确分析分层前缘和裂纹尖端的位移场和应力场。结合各向异性材料的相互作用积分，能精确预测裂纹尖端应力强度因子在层合板厚度方向上的变化。

8.2 展望

本文提出的两种复合材料层合结构分析方法的思想和应用范围可以进一步推广，今后可以在以下几个方面对其进行发展和推广应用：

1. 在分析大型复合材料加筋结构和夹芯结构的固有频率时，本文的逐层/实

体元方法可以与子结构方法相结合，达到缩减控制方程中的自由度的目的，提高逐层/实体元方法分析复杂结构的能力；

2. 现有逐层/实体元方法中基于位移协调和内力平衡条件进行连接面耦合的算法必须保证连接面单元和节点的一致性，这在实际工程应用中不是很方便，同时也加大了复杂结构的建模难度，对此可以结合一些已有的方法加以改进，如固连接触面方法；
3. 扩展逐层理论可以进一步推广应用于圆柱壳、球壳和扁壳等结构，以及压电、磁电等材料领域；
4. 如果在扩展逐层理论中考虑分层面和基体裂纹面的接触条件，并结合虚拟裂纹闭合技术 (VCCT)，扩展逐层方法可以很方便地应用于复合材料层合结构的低速冲击损伤预测问题。
5. 如果将本文中逐层/实体元方法和扩展逐层理论相结合，则可建立复合材料加筋结构和夹芯结构的扩展逐层理论。

参考文献

[1] 余寿文, 王建祥. 大飞机研制中的若干复合材料力学问题. 力学与实践, 2007, 29(5):1–6.

[2] Vlasov B. On the equations of Bending of plates. Dokla Ak. Nauk. Azerbeijanskoi-SSR, 1957, 3:955–979.

[3] Reddy J. A simple higher-order theory for laminated composite plates. J Appl Mech, 1984, 51(4):745–752.

[4] Koiter W. The Theory of Thin Elastic Shells: Proc. of Symposium. North-Holland, 1960.

[5] Hildebrand F, Reissner E, Thomas G. Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells. National Advisory Committee for Aeronautics, 1949.

[6] Demasi L. Partially Layer Wise Advanced Zig Zag and HSDT Models Based on the Generalized Unified Formulation. Engineering Structures, 2013, 53:63–91.

[7] Reddy J N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. CRC press, 2003.

[8] Lekhnitskii S. Strength calculation of composite beams. Vestnik inzhen i tekhnikov, 1935, 9.

[9] Ambartsumian S. On a general theory of anisotropic shells. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1958, 22(2):305–319.

[10] Ambartsumian S. Contributions to the theory of anisotropic layered shells. Appl. Mech. Rev., 1962, 15(4):245–249.

[11] Reissner E. On a certain mixed variational theorem and a proposed application. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1984, 20(7):1366–1368.

[12] Reissner E. On a mixed variational theorem and on shear deformable plate theory. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986, 23(2):193–198.

[13] Ren J. A new theory of laminated plate. Composites Science and Technology, 1986, 26(3):225–239.

[14] Ren J. Bending theory of laminated plate. Composites science and technology, 1986, 27(3):225–248.

[15] Whitney J. The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates. Journal of Composite Materials, 1969, 3(3):534–547.

[16] Murakami H. Laminated composite plate theory with improved in-plane responses. Journal of Applied Mechanics, 1986, 53(3):661–666.

[17] Murakami H, Reissner E, Yamakawa J. Anisotropic beam theories with shear deformation. Journal of applied mechanics, 1996, 63(3):660–668.

[18] Carrera E. Multilayered shell theories accounting for layerwise mixed description, Part 1: Governing equations. AIAA journal, 1999, 37(9):1107–1116.

[19] Carrera E. Multilayered shell theories accounting for layerwise mixed description, Part 2: Numerical evaluations. AIAA journal, 1999, 37(9):1117–1124.

[20] 钟万勰. 弹性力学求解新体系. 北京: 大连理工大学出版社, 1995.

[21] 范家让. 强厚度叠层板壳的精确理论. 北京: 科学出版社, 1996.

[22] Qing G, Qiu J, Liu Y. Free vibration analysis of stiffened laminated plates. International journal of solids and structures, 2006, 43(6):1357–1371.

[23] Qing G, Qiu J, Liu Y. A semi-analytical solution for static and dynamic analysis of plates with piezoelectric patches. International journal of solids and structures, 2006, 43(6):1388–1403.

[24] Li D, Liu Y. Three-dimensional semi-analytical model for the static response and sensitivity analysis of the composite stiffened laminated plate with interfacial imperfections. Composite Structures, 2012, 94(6):1943–1958.

[25] Jiarang F, Jianqiao Y. An exact solution for the statics and dynamics of laminated thick plates with orthotropic layers. International journal of solids and structures, 1990, 26(5):655–662.

[26] Jiarang F, Jianqiao Y. A series solution of the exact equation for thick orthotropic plates. International journal of solids and structures, 1990, 26(7):773–778.

[27] Zou G, Tang L. A semi-analytical solution for laminated composite plates in Hamiltonian system. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1995, 128(3):395–404.

[28] Kukreti A R, Rajapaksa Y. Analysis procedure for ribbed and grid plate systems used for bridge decks. Journal of Structural Engineering, 1990, 116(2):372–391.

[29] Kukreti A, Cheraghi E. Analysis procedure for stiffened plate systems using an energy approach. Computers & structures, 1993, 46(4):649–657.

[30] Brubak L, Hellesland J, Steen E. Semi-analytical buckling strength analysis of plates with arbitrary stiffener arrangements. Journal of Constructional Steel Research, 2007, 63(4):532–543.

[31] Mukhopadhyay M. Stiffened plates in bending. Computers & structures, 1994, 50(4):541–548.

[32] Siddiqi Z A, Kukreti A R. Analysis of eccentrically stiffened plates with mixed boundary conditions using differential quadrature method. Applied Mathematical Modelling, 1998, 22(4):251–275.

[33] Mukhopadhyay M, Mukherjee A. Finite element buckling analysis of stiffened plates. Computers & structures, 1990, 34(6):795–803.

[34] Deb A, Booton M. Finite element models for stiffened plates under transverse loading. Computers & Structures, 1988, 28(3):361–372.

[35] Palani G, Iyer N, Rao T. An efficient finite element model for static and vibration analysis of eccentrically stiffened plates/shells. Computers & structures, 1992, 43(4):651–661.

[36] Pengcheng S, Dade H, Zongmu W. Static, vibration and stability analysis of stiffened plates using B spline functions. Computers & Structures, 1987, 27(1):73–78.

[37] Rossow M, Ibrahimkhail A. Constraint method analysis of stiffened plates. Computers & Structures, 1978, 8(1):51–60.

[38] Sheikh A, Mukhopadhyay M. Analysis of stiffened plate with arbitrary planform by the general spline finite strip method. Computers & structures, 1992, 42(1):53–67.

[39] Biswal K, Ghosh A. Finite element analysis for stiffened laminated plates using higher order shear deformation theory. Computers & structures, 1994, 53(1):161–171.

[40] Guo Y L, Lindner J. Analysis of elastic-plastic interaction buckling of stiffened panels by spline finite strip method. Computers & structures, 1993, 46(3):529–536.

[41] Sadek E A, Tawfik S A. A finite element model for the analysis of stiffened laminated plates. Computers & Structures, 2000, 75(4):369–383.

[42] Peng L, Liew K, Kitipornchai S. Buckling and free vibration analyses of stiffened plates using the FSDT mesh-free method. Journal of sound and vibration, 2006, 289(3):421–449.

[43] Peng L, Kitipornchai S, Liew K. Analysis of rectangular stiffened plates under uniform lateral load based on FSDT and element-free Galerkin method. International journal of mechanical sciences, 2005, 47(2):251–276.

[44] Sapountzakis E, Katsikadelis J. Analysis of plates reinforced with beams. Computational Mechanics, 2000, 26(1):66–74.

[45] Tanaka M, Matsumoto T, Oida S. A boundary element method applied to the elastostatic bending problem of beam-stiffened plates. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2000, 24(10):751–758.

[46] Wen P, Aliabadi M, Young A. Boundary element analysis of shear deformable stiffened plates. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2002, 26(6):511–520.

[47] Oliveira Neto L, Paiva J B. A special BEM for elastostatic analysis of building floor slabs on columns. Computers & structures, 2003, 81(6):359–372.

[48] Tamijani A Y, Kapania R K. Buckling and Static Analysis of Curvilinearly Stiffened Plates Using Mesh-Free Method. AIAA journal, 2010, 48(12):2739–2751.

[49] Ng S, Cheung M, Tongyuan X. A combined boundary element and finite element solution of slab and slab-on-girder bridges. Computers & Structures, 1990, 37(6):1069–1075.

[50] Wang J, Hsu T. Discrete analysis of stiffened composite cylindrical shells. AIAA journal, 1985, 23(11):1753–1761.

[51] Jaunky N, Knight J N, Ambur D. Formulation of an improved smeared stiffener theory for buckling analysis of grid-stiffened composite panels. Composites Part B: Engineering, 1996, 27(5):519–526.

[52] Kidane S, Li G, Helms J, et al. Buckling load analysis of grid stiffened composite cylinders. Composites Part B: Engineering, 2003, 34(1):1–9.

[53] Reissner E. Finite deflections of sandwich plates. Journal of the Aeronautical Sciences (Institute of the Aeronautical Sciences), 2012, 15(7).

[54] Zenkert D. An introduction to sandwich construction. Engineering materials advisory services, 1997.

[55] Yang H, Saigal S, Masud A, et al. A survey of recent shell finite elements. Int J Numer Meth Eng, 2000, 47(1-3):101–127.

[56] Reddy J. A refined non-linear theory of plates with transverse shear deformation. Int J Solids Struct, 1984, 20(6):881–896.

[57] Reddy J. A General Non-Linear Third-Order Theory of Plates with Moderate Thickness. Int J of Non-Linear Mech, 1990, 25(6):677–686.

[58] Noor A, Burton W. Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates. Appl Mech Rev, 1989, 42(1):1–13.

[59] Whitney J. The Effect of Transverse Shear Deformation in the Bending of Laminated Plates. J Compos Mater, 1969, 3(3):534–547.

[60] Reissner E. Note on the Effect of Transverse Shear Deformation in Laminated Anisotropic Plates. Comput Methods Appl Mech Eng, 1979, 20(2):203–209.

[61] Noor A K, Scott Burton W. Stress and free vibration analyses of multilayered composite plates. Composite Structures, 1989, 11(3):183–204.

[62] Hu H, Belouettar S, Potier-Ferry M, et al. Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites. Compos Struct, 2008, 84(3):282–292.

[63] Ferreira A, Fasshauer G, Batra R, et al. Static deformations and vibration analysis of composite and sandwich plates using a layerwise theory and RBF-PS discretizations with optimal shape parameter. Compos Struct, 2008, 86(4):328–343.

[64] Ferreira A, Roque C, Jorge R, et al. Static deformations and vibration analysis of composite and sandwich plates using a layerwise theory and multiquadrics discretizations. Eng Anal with Bound Elem, 2005, 29(12):1104–1114.

[65] Roque C, Ferreira A, Jorge R. Modelling of composite and sandwich plates by a trigonometric layerwise deformation theory and radial basis functions. Compos Part-B Eng, 2005, 36(8):559–572.

[66] Plagianakos T, Saravanos D. High-order layerwise mechanics and finite element for the damped dynamic characteristics of sandwich composite beams. Int J Solids Struct, 2004, 41(24):6853–6871.

[67] Moreira R, Dias Rodrigues J. A layerwise model for thin soft core sandwich plates. Comput Struct, 2006, 84(19):1256–1263.

[68] Castro L, Ferreira A, Bertoluzza S, et al. A wavelet collocation method for the static analysis of sandwich plates using a layerwise theory. Composite structures, 2010, 92(8):1786–1792.

[69] Mantari J, Oktem A, Guedes Soares C. A new trigonometric layerwise shear deformation theory for the finite element analysis of laminated composite and sandwich plates. Comput Struct, 2012, 94-95:45–53.

[70] Ćetković M, Vuksanović D. Bending, free vibrations and buckling of laminated composite and sandwich plates using a layerwise displacement model. Composite Structures, 2009, 88(2):219–227.

[71] Gibson L, Ashby M. Cellular solids structure and properties-Second edition. University of Cambridge press, 1999.

[72] Diamanti K, Soutis C, Hodgkinson J. Non-destructive inspection of sandwich and repaired composite laminated structures. Composites Science and Technology, 2005, 65(13):2059–2067.

[73] Wu H, Chang F. Transient dynamic analysis of laminated composite plates subjected to transverse impact. Computers & Structures, 1989, 31(3):453–466.

[74] Wu H. Impact damage of composite[D]. Stanford University, 1986.

[75] Krishnamurthy K, Mahajan P, Mittal R. A parametric study of the impact response and damage of laminated cylindrical composite shells. Composites Science and Technology, 2001, 61(12):1655 – 1669.

[76] Gong S, Lam K. Transient response of stiffened composite plates subjected to low velocity impact. Composites Part B: Engineering, 1999, 30(5):473–484.

[77] Gong S, Toh S, Shim V. The elastic response of orthotropic laminated cylindrical shells to low-velocity impact. Composites Engineering, 1994, 4(2):247–266.

[78] Choi H, Chang F. A model for predicting damage in graphite/epoxy laminated composites resulting from low-velocity point impact. Journal of Composite Materials, 1992, 26(14):2134–2169.

[79] Choi H Y, Wu H Y T, Chang F K. A new approach toward understanding damage mechanisms and mechanics of laminated composites due to low-velocity impact: Part 2-analysis. Journal of Composite Materials, 1991, 25(8):1012–1038.

[80] Choi H Y, Downs R, Chang F K. A new approach toward understanding damage mechanisms and mechanics of laminated composites due to low-velocity impact: Part 1-Experiments. Journal of Composite Materials, 1991, 25(8):992–1011.

[81] Abrate S. Impact on laminated composite materials. Applied mechanics reviews, 1991, 44(4):155–190.

[82] Abrate S. Impact on laminated composites: recent advances. Applied Mechanics Reviews, 1994, 47(11):517.

[83] Richardson M, Wisheart M. Review of low-velocity impact properties of composite materials. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 1996, 27(12):1123–1131.

[84] Joshi S, Sun C. Impact induced fracture in a laminated composite. Journal of Composite Materials, 1985, 19(1):51–66.

[85] Hashin Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites. Journal of applied mechanics, 1980, 47(2):329–334.

[86] Hashin Z. Analysis of composite materials—a survey. Journal of Applied Mechanics, 1983, 50(3):481–505.

[87] Highsmith A L, Reifsnider K L. Stiffness-reduction mechanisms in composite laminates. Damage in composite materials, ASTM STP, 1982, 775:103–117.

[88] Laws N, Dvorak G J, Hejazi M. Stiffness changes in unidirectional composites caused by crack systems. Mechanics of Materials, 1983, 2(2):123–137.

[89] Laws N, Dvorak G J. Progressive transverse cracking in composite laminates. Journal of Composite Materials, 1988, 22(10):900–916.

[90] Wang A, Chou P, Lei S. A stochastic model for the growth of matrix cracks in composite laminates. Journal of Composite Materials, 1984, 18(3):239–254.

[91] Hashin Z. Analysis of cracked laminates: a variational approach. Mechanics of materials, 1985, 4(2):121–136.

[92] Hashin Z. Analysis of orthogonally cracked laminates under tension. Journal of Applied Mechanics, 1987, 54(4):872–879.

[93] Aboudi J. Stiffness reduction of cracked solids. Engineering Fracture Mechanics, 1987, 26(5):637–650.

[94] Lee J W, Allen D, Harris C. Internal state variable approach for predicting stiffness reductions in fibrous laminated composites with matrix cracks. Journal of Composite Materials, 1989, 23(12):1273–1291.

[95] Gudmundson P, Weilin Z. An analytic model for thermoelastic properties of composite laminates containing transverse matrix cracks. International Journal of Solids and Structures, 1993, 30(23):3211–3231.

[96] Barbero E, Reddy J. Modeling of delamination in composite laminates using a layer-wise plate theory. International Journal of Solids and Structures, 1991, 28(3):373–388.

[97] Chattopadhyay A, Gu H. New higher order plate theory in modeling delamination buckling of composite laminates. AIAA journal, 1994, 32(8):1709–1716.

[98] Williams T O. A generalized multilength scale nonlinear composite plate theory with delamination. International journal of solids and structures, 1999, 36(20):3015–3050.

[99] Williams T O, Addessio F L. A general theory for laminated plates with delaminations. International Journal of Solids and Structures, 1997, 34(16):2003–2024.

[100] Cho M, Kim J S. Higher-order zig-zag theory for laminated composites with multiple delaminations. Journal of applied mechanics, 2001, 68(6):869–877.

[101] Kim J S, Cho M. Buckling analysis for delaminated composites using plate bending elements based on higher-order zig-zag theory. International journal for numerical methods in engineering, 2002, 55(11):1323–1343.

[102] O'Brien T K. Analysis of local delaminations and their influence on composite laminate behavior. Delamination and debonding of materials, ASTM STP, 1985, 876:282–297.

[103] Dharani L, Tang H. Micromechanics characterization of sublaminate damage. International Journal of Fracture, 1990, 46(2):123–140.

[104] Nairn J, Hu S. The initiation and growth of delaminations induced by matrix microcracks in laminated composites. International Journal of Fracture, 1992, 57(1):1–24.

[105] Takeda N, Ogihara S. Initiation and growth of delamination from the tips of transverse cracks in CFRP cross-ply laminates. Composites science and technology, 1994, 52(3):309–318.

[106] Berthelot J M, Le Corre J F. A model for transverse cracking and delamination in cross-ply laminates. Composites Science and Technology, 2000, 60(7):1055–1066.

[107] Swindeman M J. A Regularized Extended Finite Element Method for Modeling the Coupled Cracking and Delamination of Composite Materials[D]. University of Dayton, 2011.

[108] Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. International journal for numerical methods in engineering, 1999, 45(5):601–620.

[109] Dolbow J, Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing. Int. J. Numer. Meth. Engng, 1999, 46(1):131–150.

[110] Dolbow J, Moës N, Belytschko T. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(51):6825–6846.

[111] Moës N, Gravouil A, Belytschko T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets—Part I: Mechanical model. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 53(11):2549–2568.

[112] Sukumar N, Chopp D, Moran B. Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation. Engineering Fracture Mechanics, 2003, 70(1):29–48.

[113] Areias P, Belytschko T. Non-linear analysis of shells with arbitrary evolving cracks using XFEM. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, 62(3):384–415.

[114] Dolbow J, Moës N, Belytschko T. Modeling fracture in Mindlin–Reissner plates with the extended finite element method. International Journal of Solids and Structures, 2000, 37(48):7161–7183.

[115] Zhuang Z, Cheng B. A novel enriched CB shell element method for simulating arbitrary crack growth in pipes. Science China Physics, Mechanics and Astronomy, 2011, 54(8):1520–1531.

[116] Remmers J J, Wells G N, Borst R d. A solid-like shell element allowing for arbitrary delaminations. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 58(13):2013–2040.

[117] Nagashima T, Suemasu H. Stress analyses of composite laminate with delamination using X-FEM. Int J Comput Methods, 2006, 3(4):521–543.

[118] Sukumar N, Huang Z, Prévost J H, et al. Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 59(8):1075–1102.

[119] Hettich T, Ramm E. Interface material failure modeled by the extended finite-element method and level sets. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195(37):4753–4767.

[120] Esna Ashari S, Mohammadi S. Modeling delamination in composite laminates using XFEM by new orthotropic enrichment functions. Proceedings of IOP Conference series: materials science and engineering, 2010.

[121] Esna Ashari S, Mohammadi S. Delamination analysis of composites by new orthotropic bimaterial extended finite element method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011, 86(13):1507–1543.

[122] Esna Ashari S, Mohammadi S. Fracture analysis of FRP-reinforced beams by orthotropic XFEM. Journal of Composite Materials, 2012, 46(11):1367–1389.

[123] Zhuang Z, Cheng B B. Development of X-FEM methodology and study on mixed-mode crack propagation. Acta Mechanica Sinica, 2011, 27(3):406–415.

[124] Asadpoure A, Mohammadi S, Vafai A. Modeling crack in orthotropic media using a coupled finite element and partition of unity methods. Finite Elements in analysis and Design, 2006, 42(13):1165–1175.

[125] Asadpoure A, Mohammadi S, Vafai A. Crack analysis in orthotropic media using the extended finite element method. Thin-Walled Structures, 2006, 44(9):1031 – 1038.

[126] Asadpoure A, Mohammadi S. Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method. Int J Numer Methods Engng, 2007, 69(10)(10):2150–2172.

[127] Motamedi D, Mohammadi S. Dynamic analysis of fixed cracks in composites by the extended finite element method. Engineering Fracture Mechanics, 2010, 77(17):3373 – 3393.

[128] Motamedi D, Mohammadi S. Fracture analysis of composites by time independent moving-crack orthotropic {XFEM}. International Journal of Mechanical Sciences, 2012, 54(1):20 – 37.

[129] Motamedi D, Mohammadi S. Dynamic crack propagation analysis of orthotropic media by the extended finite element method. International Journal of Fracture, 2010, 161(1):21–39.

[130] Ayhan A O. Three-dimensional mixed-mode stress intensity factors for cracks in functionally graded materials using enriched finite elements. International Journal of Solids and Structures, 2009, 46(3):796–810.

[131] Ayhan A O. Stress intensity factors for three-dimensional cracks in functionally graded materials using enriched finite elements. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44(25):8579–8599.

[132] Moghaddam A S, Alfano M, Ghajar R. Determining the mixed mode stress intensity factors of surface cracks in functionally graded hollow cylinders. Materials & Design, 2013, 43:475–484.

[133] Bayesteh H, Mohammadi S. XFEM fracture analysis of orthotropic functionally graded materials. Composites Part B: Engineering, 2013, 44(1):8–25.

[134] Hosseini S, Bayesteh H, Mohammadi S. Thermo-mechanical XFEM crack propagation analysis of functionally graded materials. Materials Science and Engineering: A, 2013, 561:285–302.

[135] Nagashima T, Suemasu H. X-FEM analyses of a thin-walled composite shell structure with a delamination. Computers & structures, 2010, 88(9):549–557.

[136] Curiel Sosa J, Karapurath N. Delamination modelling of GLARE using the extended finite element method. Composites Science and Technology, 2012, 72(7):788–791.

[137] Arora J, Haug E. Methods of design sensitivity analysis in structural optimization. AIAA Journal, 1979, 17(9)(9):970–974.

[138] Haftka R. Sensitivity calculations for iteratively solved problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1985, 21(8)(8):1535–1546.

[139] Choi K, Chang K. A study of design velocity field computation for shape optimal design. Finite Elements in Analysis and Design, 1994, 15(4)(4):317–341.

[140] 顾元宪, 赵红兵, 陈飚松, et al. 热 -应力耦台结构灵敏度分析方法. 力学学报, 2001, 33:685–691.

[141] Olhoff N, Rasmussen J, Lund E. A Method of “Exact” Numerical Differentiation for Error Elimination in Finite-Element-Based Semi-Analytical Shape Sensitivity Analyses. Journal of Structural Mechanics, 1993, 21(1):1–66.

[142] 钱令希, 程耿东, 隋允康, et al. 结构优化设计理论与方法的某些进展. 自然科学进展, 1995, 5(1):64–69.

[143] Pandey P, Bakshi P. Analytical response sensitivity computation using hybrid finite elements. Computers & structures, 1999, 71(5):525–534.

[144] Li D, Xu J, Qing G. Sensitivity analysis of composite laminated plates with bonding imperfection in Hamilton system. Applied Mathematics and Mechanics, 2010, 31:1549–1560.

[145] Zienkiewicz O, Campbell J. Shape optimization and sequential linear programming. Wiley, 1973: 109–127.

[146] Cheng G, Liu Y. A new sensitivity scheme for sensitivity analysis. Engineering Optimization, 1987, 12(3):219–34.

[147] Barthelemy B, Haftka R. Accuracy analysis of the semi-analytical method for shape sensitivity calculation. Mech. Struct. & Mach., 1990, 18(3):407–432.

[148] Park G. Accuracy tests for various sensitivity analysis methods with respect to shape variables in planar cantilever beams. Computers & Structures, 1993, 47(6):1057–1063.

[149] Cheng G, Gu Y, Zhou Y. Accuracy of semi-analytical sensitivity analysis. Finite Elements in Analysis and Design, 1989, 6(3):113–128.

[150] Olho N, Rasmussen J. Study of inaccuracy in semi-analytical analysis - a model problem. Structural Optimization, 1991, 3(4):203–213.

[151] Olho N, Rasmussen J, Lund E. A method of exact numerical dierentiation for erro elimination in finite element based semi-analytical shape sensitivity analysis. Mechanics of Structures and Machines, 1993, 21(1):1–66.

[152] Reddy J. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis (Second edition). Washington, D. C.: CRC press, 2003.

[153] Bakshi P, Pandey P. Semi-analytical sensitivity using hybrid finite elements. Computers and Structures, 2000, 77(2):201–213.

[154] Li D, Xu J, Qing G. Sensitivity Analysis of Composite Laminated Plates with Bonding Imperfection in Hamilton System. Applied Mathematics and Mechanics, 2010, 21(12):1549–1560.

[155] Afonso S, Hinton E. Free vibration analysis and shape optimization of variable thickness plates and shells- II, Sensitivity analysis and shape optimization, , 6(1): . Computing Systems in Engineering, 1995, 6(1):47–66.

[156] Li D, Liu Y, Zhang X. Linear statics and free vibration sensitivity analysis of the composite sandwich plates based on a layerwise/solid-element method. Composite Structures, 2013, 106:175–200.

[157] Krishnamurthy K, Mahajan P, Mittal R. Impact response and damage in laminated composite cylindrical shells. Composite Structures, 2003, 59(1):15 – 36.

[158] Yang S, Sun C. Indentation law for composite laminates. ASTM STP, 1982, 787:425–449.

[159] Hashin Z, Rotem A. A fatigue failure criterion for fiber reinforced materials. Journal of composite materials, 1973, 7(4):448–464.

[160] Sleight D W. Progressive failure analysis methodology for laminated composite structures. Citeseer, 1999.

[161] Wang Y, Tong M, Zhu S. Three dimensional continuum damage mechanics model of progressive failure analysis in fibre-reinforced composite laminates. Proceedings of 50th AIAA Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. California: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2009.

[162] Bazant Z, Oh B. Crack band theory for fracture of concrete. Materials and Structures, 1983, 16(3):155–177.

[163] Maimi P, Camanho P, Mayugo J, et al. A continuum damage model for composite laminates: Part 2 Computational implementation and validation. Mechanics of Materials, 2007, 39(10):909–919.

[164] Lapczyk I, Hurtado J. Progressive damage modeling in fiber-reinforced materials. Composites Part A: applied science and mannufacturing, 2007, 38(11):2333–2341.

[165] Sun C, Chen J. On the Impact of Initially Stressed Composite Laminates Composite Laminates. Journal of composite materials, 1985, 19(6):490–504.

[166] Cairns D, Lagace P. Transient response of Graphite/Epoxy and Kevlar/Epoxy laminated subjected to impact. AIAA Journal, 1989, 27(11)(11):1590–1596.

[167] Wang Y, Tong M, Zhu S. Three-Dimensional Nonlinear Progressive Damage Analysis on Composite Laminates Based on Continuum Damage Mechanics. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2009, 41(6):709–714.

[168] Amaro A, Reis P, Moura M, et al. Influence of multi-impacts on GFRP composites laminates. Composites Part B: Engineering, 2013..

[169] Kassegne S, Reddy J. A Layerwise Shell Stiffener and Stand-Alone Curved Beam Element. Asian Journal of Structural Engineering, 1997, 2(1):1–14.

[170] Stolarska M, Chopp D. Modeling thermal fatigue cracking in integrated circuits by level sets and the extended finite element method. International journal of engineering science, 2003, 41(20):2381–2410.

[171] Stolarska M, Chopp D, Moës N, et al. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. International journal for numerical methods in Engineering, 2001, 51(8):943–960.

[172] Lekhnitskii S G. Anisotropic plates. DTIC Document, 1968.

[173] Kim J H, Paulino G H. Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 53(8):1903–1935.

[174] Rice J, Rosengren G. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1968, 16(1):1–12.

[175] Wang S, Yau J, Corten H. A mixed-mode crack analysis of rectilinear anisotropic solids using conservation laws of elasticity. International Journal of Fracture, 1980, 16(3):247–259.

[176] Sih G, Paris P, Irwin G. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. International Journal of Fracture Mechanics, 1965, 1(3):189–203.

[177] Saouma V, Ayari M, Leavell D. Mixed mode crack propagation in homogeneous anisotropic solids. Engineering Fracture Mechanics, 1987, 27(2):171–184.

[178] Mohammadi S. XFEM fracture analysis of composites. John Wiley & Sons, 2012.

[179] Ghorashi S, Mohammadi S, Sabbagh-Yazdi S. Orthotropic enrichment element free Galerkin method for fracture analysis of composite. Engineeing Fracture Mechanics, 2011, 78(9):1906–1927.

[180] Aliabadi M, Sollero P. Crack growth analysis in homogeneous orthotropic laminates. Compos. Sci. Technol., 1998, 58(10):1697–1703.

[181] 师访, 高峰, 杨玉贵. 正交各向异性岩体裂纹扩展的扩展有限元方法研究. 岩土力学, 2014, 35(4):1203–1210.

致 谢

在攻读博士学位期间，要特别感谢的是我的导师张雄教授，他严肃的科学态度、严谨的治学精神和精益求精的工作作风对我影响深远，他的言传身教传递给我的治学为学的道理将让我终身受益。在此谨向张老师致以诚挚的谢意和崇高的敬意。

课题组刘岩副教授在论文期间给了极大的帮助，他严谨细致、一丝不苟的作风是我最好的学习榜样。另外还要感谢陆明万教授和邱信明教授对我的帮助。

实验室的同窗好友李金光、张帆、崔潇骁等的帮助为我的研究工作提供了方便，在此表示深深的感谢。

感谢我的父母在艰苦的条件下对我无私奉献，感谢我的兄长和小妹，是亲情给予了我最大的感情支撑。

谨以此文献给我的妻子和儿子，他们在身后的默默支持是我前进动力的源泉。

声　明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签　名：_____ 日　期：_____

附录 A 附录

A.1 Reddy 复合材料层合板壳逐层理论的控制矩阵

对于复合材料层合圆柱壳的非线性问题

$$\begin{aligned} K_{11kemn} = {} & \psi_{m,x}\left(A^1_{11ke}\psi_{n,x}+A^1_{16ke}\psi_{n,y}\right)+\psi_{m,y}\left(A^1_{16ke}\psi_{n,x}+A^1_{66ke}\psi_{n,y}\right) \\ & +\psi_m A^3_{55ke}\psi_n \end{aligned} \tag{A-1}$$

$$\begin{aligned} K_{12kemn} = {} & \psi_{m,x}\left(A^1_{12ke}\psi_{n,y}+A^1_{16ke}\psi_{n,x}\right)+\psi_{m,y}\left(A^1_{26ke}\psi_{n,y}+A^1_{66ke}\psi_{n,x}\right) \\ & +\psi_m\left(A^3_{45ke}\psi_n-A^2_{45ke}\frac{\psi_n}{R}\right) \end{aligned} \tag{A-2}$$

$$\begin{aligned} K_{12kemn} = {} & \psi_m\left(A^2_{45ke}\psi_{n,y}+A^2_{55ke}\psi_{n,x}\right)+\psi_{m,x}\left(A^1_{12ke}\frac{\psi_n}{R}+A^2_{13ke}\psi_n\right) \\ & +\psi_{m,y}\left(A^1_{26ke}\frac{\psi_n}{R}+A^2_{36ke}\psi_n\right) \\ & +\frac{1}{2}\psi_{m,x}\left(D^1_{11kep}w_{p,x}\psi_{n,x}+D^1_{12kep}w_{p,y}\psi_{n,y}\right. \\ & \left.+D^1_{16kep}w_{p,x}\psi_{n,y}+D^1_{16kep}w_{p,y}\psi_{n,x}\right) \\ & +\frac{1}{2}\psi_{m,y}\left(D^1_{16kep}w_{p,x}\psi_{n,x}+D^1_{26kep}w_{p,y}\psi_{n,y}\right. \\ & \left.+D^1_{66kep}w_{p,x}\psi_{n,y}+D^1_{66kep}w_{p,y}\psi_{n,x}\right) \end{aligned} \tag{A-3}$$

$$\begin{aligned} K_{21kemn} = {} & \psi_{m,y}\left(A^1_{12ke}\psi_{n,x}+A^1_{26ke}\psi_{n,y}\right)+\psi_{m,x}\left(A^1_{16ke}\psi_{n,x}+A^1_{66ke}\psi_{n,y}\right) \\ & +\psi_m A^3_{45ke}\psi_n-\frac{\psi_m}{R}A^2_{45ke}\psi_n \end{aligned} \tag{A-4}$$

$$\begin{aligned} K_{22kemn} = {} & \psi_{m,y}\left(A^1_{22ke}\psi_{n,y}+A^1_{26ke}\psi_{n,x}\right)+\psi_{m,x}\left(A^1_{26ke}\psi_{n,y}+A^1_{66ke}\psi_{n,x}\right) \\ & +\psi_m\left(A^3_{44ke}\psi_n-A^2_{44ke}\frac{\psi_n}{R}\right)-\frac{\psi_m}{R}\left(A^2_{44ke}\psi_n-A^1_{44ke}\frac{\psi_n}{R}\right) \end{aligned} \tag{A-5}$$

$$
\begin{aligned}
K_{13kemn} = \quad & \psi_m \left(A^2_{45ke}\psi_{n,y} + A^2_{55ke}\psi_{n,x}\right) + \psi_{m,x}\left(A^1_{12ke}\frac{\psi_n}{R} + A^2_{13ke}\psi_n\right) \\
& + \psi_{m,y}\left(A^1_{26ke}\frac{\psi_n}{R} + A^2_{36ke}\psi_n\right) \\
& + \frac{1}{2}\psi_{m,x}\left(D^1_{11kep}w_{p,x}\psi_{n,x} + D^1_{12kep}w_{p,y}\psi_{n,y}\right. \\
& \left. + D^1_{16kep}w_{p,x}\psi_{n,y} + D^1_{16kep}w_{p,y}\psi_{n,x}\right) \\
& + \frac{1}{2}\psi_{m,y}\left(D^1_{16kep}w_{p,x}\psi_{n,x} + D^1_{26kep}w_{p,y}\psi_{n,y}\right. \\
& \left. + D^1_{66kep}w_{p,x}\psi_{n,y} + D^1_{66kep}w_{p,y}\psi_{n,x}\right)
\end{aligned} \tag{A-6}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{23kemn} = \quad & \psi_{m,y}\left(A^1_{22ke}\frac{\psi_n}{R} + A^2_{23ke}\psi_n\right) + \psi_{m,x}\left(A^1_{26ke}\frac{\psi_n}{R} + A^2_{36ke}\psi_n\right) \\
& + \psi_m\left(A^2_{44ke}\psi_{n,y} + A^2_{45ke}\psi_{n,x}\right) - \frac{\psi_m}{R}\left(A^1_{44ke}\psi_{n,y} + A^1_{45ke}\psi_{n,x}\right) \\
& + \frac{1}{2}\psi_{m,x}\left(D^1_{16kep}w_{p,x}\psi_{n,x} + D^1_{26kep}w_{p,y}\psi_{n,y}\right. \\
& \left. + D^1_{66kep}w_{p,x}\psi_{n,y} + D^1_{66kep}w_{p,y}\psi_{n,x}\right) \\
& + \frac{1}{2}\psi_{m,y}\left(D^1_{12kep}w_{p,x}\psi_{n,x} + D^1_{22kep}w_{p,y}\psi_{n,y}\right. \\
& \left. + D^1_{26kep}w_{p,x}\psi_{n,y} + D^1_{26kep}w_{p,y}\psi_{n,x}\right)
\end{aligned} \tag{A-7}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{31kemn} = \quad & \frac{\psi_m}{R}\left(A^1_{12ke}\psi_{n,x} + A^1_{26ke}\psi_{n,y}\right) + \psi_{m,x}\left(A^1_{16ke}\psi_{n,x} + A^1_{66ke}\psi_{n,y}\right) \\
& + \psi_m\left(A^2_{13ke}\psi_{n,x} + A^2_{36ke}\psi_{n,y}\right) + \psi_{m,y}A^2_{45ke}\psi_n + \psi_{m,x}A^2_{55ke}\psi_n \\
& + \psi_{m,x}w_{p,x}\left(D^1_{11kep}\psi_{n,x} + D^1_{16kep}\psi_{n,y}\right) \\
& + \psi_{m,y}w_{p,y}\left(D^1_{12kep}\psi_{n,x} + D^1_{26kep}\psi_{n,y}\right) \\
& + \left(\psi_{m,x}w_{p,y} + \psi_{m,y}w_{p,x}\right)\left(D^1_{16kep}\psi_{n,x} + D^1_{66kep}\psi_{n,y}\right)
\end{aligned} \tag{A-8}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{32kemn} = \; & \frac{\psi_m}{R}\left(A^1_{22ke}\psi_{n,y} + A^1_{26ke}\psi_{n,x}\right) + \psi_m\left(A^2_{23ke}\psi_{n,y} + A^2_{36ke}\psi_{n,x}\right) \\
& + \psi_{m,y}\left(A^2_{44ke}\psi^n - A^1_{44ke}\frac{\psi_n}{R}\right) + \psi_{m,x}\left(A^2_{45ke}\psi^n - A^1_{45ke}\frac{\psi_n}{R}\right) \\
& + \psi_{m,x}w_{p,x}\left(D^1_{12kep}\psi_{n,y} + D^1_{16kep}\psi_{n,x}\right) \\
& + \psi_{m,y}w_{p,y}\left(D^1_{22kep}\psi_{n,y} + D^1_{26kep}\psi_{n,x}\right) \\
& + \left(\psi_{m,x}w_{p,y} + \psi_{m,y}w_{p,x}\right)\left(D^1_{26kep}\psi_{n,y} + D^1_{66kep}\psi_{n,x}\right)
\end{aligned} \tag{A-9}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{33kemn} = \; & \frac{\psi_m}{R}\left(A^1_{22ke}\frac{\psi_n}{R} + A^2_{23ke}\psi^n\right) + \psi_m\left(A^2_{23ke}\frac{\psi_n}{R} + A^3_{33ke}\psi^n\right) \\
& + \psi_{m,y}\left(A^1_{44ke}\psi_{n,y} + A^1_{45ke}\psi_{n,x}\right) + \psi_{m,x}\left(A^1_{45ke}\psi_{n,y} + A^1_{55ke}\psi_{n,x}\right) \\
& + \psi_{m,x}w_{p,x}\left(D^1_{12kep}\frac{\psi_n}{R} + D^2_{13kep}\psi_n\right) + \psi_{m,y}w_{p,y}\left(D^1_{22kep}\frac{\psi_n}{R} + D^2_{23kep}\psi_n\right) \\
& + \frac{1}{2}\frac{\psi_m}{R}\left(D^1_{12kep}w_{p,x}\psi_{n,x} + D^1_{22kep}w_{p,y}\psi_{n,y} + D^1_{26kep}w_{p,x}\psi_{n,y} + D^1_{26kep}w_{p,y}\psi_{n,x}\right) \\
& + \frac{1}{2}\psi_m\left(D^2_{13kep}w_{p,x}\psi_{n,x} + D^2_{23kep}w_{p,y}\psi_{n,y} + D^2_{36kep}w_{p,x}\psi_{n,y} + D^2_{36kep}w_{p,y}\psi_{n,x}\right) \\
& + \left(\psi_{m,x}w_{p,y} + \psi_{m,y}w_{p,x}\right)\left(D^1_{26kep}\frac{\psi_n}{R} + D^2_{36kep}\psi_n\right) \\
& + \frac{1}{2}\psi_{m,x}w_{p,x}\left(F_{11kepq}w_{q,x}\psi_{n,x} + F_{12kepq}\psi_{n,y}w_{q,y}\right. \\
& \left. + F_{16kepq}w_{q,x}\psi_{n,y} + F_{16kepq}w_{q,y}\psi_{n,x}\right) \\
& + \frac{1}{2}\psi_{m,y}w_{p,y}\left(F_{12kepq}w_{q,x}\psi_{n,x} + F_{22kepq}\psi_{n,y}w_{q,y}\right. \\
& \left. + F_{26kepq}w_{q,x}\psi_{n,y} + F_{26kepq}w_{q,y}\psi_{n,x}\right) \\
& + \frac{1}{2}\left(\psi_{m,x}w_{p,y} + \psi_{m,y}w_{p,x}\right)\left(F_{16kepq}w_{q,x}\psi_{n,y} + \right. \\
& \left. + F_{26kepq}\psi_{n,y}w_{q,y} + F_{66kepq}w_{q,x}\psi_{n,y} + F_{66kepq}\psi_{n,x}w_{q,y}\right)
\end{aligned} \tag{A-10}
$$

对于复合材料层合板的线性问题

$$
\begin{aligned}
K_{11kemn} = \; & \psi_{m,x}\left(A^1_{11ke}\psi_{n,x} + A^1_{16ke}\psi_{n,y}\right) + \psi_{m,y}\left(A^1_{16ke}\psi_{n,x} + A^1_{66ke}\psi_{n,y}\right) \\
& + \psi_m A^3_{55ke}\psi_n
\end{aligned} \tag{A-11}
$$

$$K_{12kemn} = \psi_{m,x}\left(A^1_{12ke}\psi_{n,y} + A^1_{16ke}\psi_{n,x}\right) + \psi_{m,y}\left(A^1_{26ke}\psi_{n,y} + A^1_{66ke}\psi_{n,x}\right) + \psi_m A^3_{45ke}\psi_n \tag{A-12}$$

$$K_{13kemn} = \psi_m\left(A^2_{45ke}\psi_{n,y} + A^2_{55ke}\psi_{n,x}\right) + \psi_{m,x}A^2_{13ke}\psi_n + \psi_{m,y}A^2_{36ke}\psi_n \tag{A-13}$$

$$K_{21kemn} = \psi_{m,y}\left(A^1_{12ke}\psi_{n,x} + A^1_{26ke}\psi_{n,y}\right) + \psi_{m,x}\left(A^1_{16ke}\psi_{n,x} + A^1_{66ke}\psi_{n,y}\right) + \psi_m A^3_{45ke}\psi_n \tag{A-14}$$

$$K_{22kemn} = \psi_{m,y}\left(A^1_{22ke}\psi_{n,y} + A^1_{26ke}\psi_{n,x}\right) + \psi_{m,x}\left(A^1_{26ke}\psi_{n,y} + A^1_{66ke}\psi_{n,x}\right) + \psi_m A^3_{44ke}\psi_n \tag{A-15}$$

$$K_{23kemn} = \psi_{m,y}A^2_{23ke}\psi_n + \psi_{m,x}A^2_{36ke}\psi_n + \psi_m\left(A^2_{44ke}\psi_{n,y} + A^2_{45ke}\psi_{n,x}\right) \tag{A-16}$$

$$K_{31kemn} = \psi_{m,x}\left(A^1_{16ke}\psi_{n,x} + A^1_{66ke}\psi_{n,y}\right) + \psi_m\left(A^2_{13ke}\psi_{n,x} + A^2_{36ke}\psi_{n,y}\right) + \psi_{m,y}A^2_{45ke}\psi_n + \psi_{m,x}A^2_{55ke}\psi_n \tag{A-17}$$

$$K_{32kemn} = \psi_m\left(A^2_{23ke}\psi_{n,y} + A^2_{36ke}\psi_{n,x}\right) + \psi_{m,y}A^2_{44ke}\psi^n + \psi_{m,x}A^2_{45ke}\psi^n \tag{A-18}$$

$$K_{33kemn} = \psi_m A^3_{33ke}\psi^n + \psi_{m,y}\left(A^1_{44ke}\psi_{n,y} + A^1_{45ke}\psi_{n,x}\right) + \psi_{m,x}\left(A^1_{45ke}\psi_{n,y} + A^1_{55ke}\psi_{n,x}\right) \tag{A-19}$$

A.2 扩展逐层理论刚度系数积分结果

式 (5-22) 沿厚度积分后可得等效刚度系数的具体表达式为

$$A^1_{pqii0e}=\begin{cases}\dfrac{h_1}{6}C^{(1)}_{pq} & \text{if } e=k=0\\ \dfrac{h_1}{12}C^{(1)}_{pq} & \text{if } e=k+1 \ (k=0)\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-20}$$

$$A^1_{pqii1e}=\begin{cases}\dfrac{2h_1+h_2}{6}C^{(1)}_{pq}+\dfrac{h_2^3}{6(h_1+h_2)^2}\left(C^{(2)}_{pq}-C^{(1)}_{pq}\right) & \text{if } e=k=1\\ \dfrac{h_1}{12}C^{(1)}_{pq} & \text{if } e=k-1\\ \dfrac{h_1^2(h_1+3h_2)}{12(h_1+h_2)^2}C^{(1)}_{pq}+\dfrac{h_2^2(3h_1+h_2)}{12(h_1+h_2)^2}C^{(2)}_{pq} & \text{if } e=k+1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \quad (k=1) \tag{A-21}$$

$$A^1_{pqiike}=\begin{cases}\dfrac{h_{k-1}^3C^{(k-1)}_{pq}}{6(h_{k-1}+h_k)^2}+\dfrac{h_k\left(3h_{k-1}^2+3h_{k-1}h_k+h_k^2\right)}{6(h_{k-1}+h_k)^2}C^{(k)}_{pq} & \text{if } e=k\\ \quad+\dfrac{h_k\left(3h_{k+1}^2+3h_{k+1}h_k+h_k^2\right)}{6(h_k+h_{k+1})^2}C^{(k)}_{pq}+\dfrac{h_{k+1}^3C^{(k+1)}_{pq}}{6(h_k+h_{k+1})^2} & \\ \dfrac{h_{k-1}^2(h_{k-1}+3h_k)}{12(h_{k-1}+h_k)^2}C^{(k-1)}_{pq}+\dfrac{h_k^2(3h_{k-1}+h_k)}{12(h_{k-1}+h_k)^2}C^{(k)}_{pq} & \text{if } e=k-1\\ \dfrac{h_k^2(h_k+3h_{k+1})}{12(h_k+h_{k+1})^2}C^{(k)}_{pq}+\dfrac{h_{k+1}^2(3h_k+h_{k+1})}{12(h_k+h_{k+1})^2}C^{(k+1)}_{pq} & \text{if } e=k+1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases}$$

$$(2\le k\le N-1) \tag{A-22}$$

$$A^1_{pqiiNe}=\begin{cases}\dfrac{h_{N-1}+2h_N}{6}C^{(N)}_{pq}+\dfrac{h^3_{N-1}}{6\left(h_{N-1}+h_N\right)^2}C^{(N-1)}_{pq} & \text{if } e=k=N\\ \quad+\dfrac{h_k\left(3h^2_{k-1}+3h_{k-1}h_k+h^2_k\right)}{6\left(h_{N-1}+h_N\right)^2}C^{(N)}_{pq} & \\ \dfrac{h^2_{N-1}\left(h_{N-1}+3h_N\right)}{12\left(h_{N-1}+h_N\right)^2}C^{(N-1)}_{pq}+\dfrac{h^2_N\left(3h_{N-1}+h_N\right)}{12\left(h_{N-1}+h_N\right)^2}C^{(N)}_{pq} & \text{if } e=k-1\\ \dfrac{h_N}{12}C^{(N)}_{pq} & \text{if } e=k+1\\ 0 & \text{if } e<k-1\end{cases}\qquad (k=N) \tag{A-23}$$

$$A^1_{pqii(N+1)e}=\begin{cases}\dfrac{h_N}{6}C^{(N)}_{pq} & \text{if } e=k=N+1\\ \dfrac{h_N}{12}C^{(N)}_{pq} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e<k-1\end{cases}\qquad (k=N+1) \tag{A-24}$$

$$A^2_{pqii0e}=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}C^{(1)}_{pq} & \text{if } e=k=0\\ -\dfrac{1}{2}C^{(1)}_{pq} & \text{if } e=k+1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases}\qquad (k=0) \tag{A-25}$$

$$A^2_{pqii1e}=\begin{cases}\dfrac{C^{(1)}_{pq}}{2}-\dfrac{h_1\left(h_1+2h_2\right)}{2\left(h_1+h_2\right)^2}C^{(1)}_{pq}-\dfrac{h^2_2}{2\left(h_1+h_2\right)^2}C^{(2)}_{pq} & \text{if } e=k=1\\ -\dfrac{h^2_1}{2\left(h_1+h_2\right)^2}C^{(1)}_{pq}-\dfrac{h_2\left(2h_1+h_2\right)}{2\left(h_1+h_2\right)^2}C^{(2)}_{pq} & \text{if } e=k+1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases}\qquad (k=1) \tag{A-26}$$

$$A^2_{pqiike}=\begin{cases}\dfrac{h_{k-1}^2}{2\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C_{pq}^{(k-1)}+\dfrac{h_k\left(2h_{k-1}+h_k\right)}{2\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k\\ \quad -\dfrac{h_k\left(h_k+2h_{k+1}\right)}{2\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k)}-\dfrac{h_{k+1}^2}{2\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k+1)} & \\ \dfrac{h_{k-1}\left(h_{k-1}+2h_k\right)}{2\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C_{pq}^{(k-1)}+\dfrac{h_k^2}{2\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k-1\\ -\dfrac{h_k^2}{2\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k)}-\dfrac{h_{k+1}\left(2h_k+h_{k+1}\right)}{2\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k+1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases}\quad(2\le k\le N-1) \tag{A-27}$$

$$A^2_{pqiiNe}=\begin{cases}-\dfrac{C_{pq}^{(N)}}{2}+\dfrac{h_{N-1}^2}{2\left(h_{N-1}+h_N\right)^2}C_{pq}^{(N-1)}+\dfrac{h_N\left(2h_{N-1}+h_N\right)}{2\left(h_{N-1}+h_N\right)^2}C_{pq}^{(N)} & \text{if } e=k=N\\ -\dfrac{h_{N-1}\left(h_{N-1}+2h_N\right)}{2\left(h_{N-1}+h_N\right)^2}C_{pq}^{(N-1)}-\dfrac{h_N^2}{2\left(h_{N-1}+h_N\right)^2}C_{pq}^{(N)} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e<k-1\end{cases}\quad(k=N) \tag{A-28}$$

$$A^2_{pqii(N+1)e}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}C_{pq}^{(N)} & \text{if } e=k=N+1\\ \dfrac{1}{2}C_{pq}^{(N-1)} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e<k-1\end{cases}\quad(k=N+1) \tag{A-29}$$

$$A^3_{pqii0e}=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}C_{pq}^{(1)} & \text{if } e=k=0\\ \dfrac{1}{2}C_{pq}^{(1)} & \text{if } e=k+1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases}\quad(k=0) \tag{A-30}$$

$$A^3_{pqii1e}=\begin{cases}\dfrac{C^{(1)}_{pq}}{2}-\dfrac{h_1\left(h_1+2h_2\right)}{2\left(h_1+h_2\right)^2}C^{(1)}_{pq}-\dfrac{h_2^2}{2\left(h_1+h_2\right)^2}C^{(2)}_{pq} & \text{if } e=k=1\\ \dfrac{h_1\left(h_1+2h_2\right)}{2\left(h_1+h_2\right)^2}C^{(1)}_{pq}+\dfrac{h_2^2}{2\left(h_1+h_2\right)^2}C^{(2)}_{pq} & \text{if } e=k+1\ (k=1)\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-31}$$

$$A^3_{pqiike}=\begin{cases}\dfrac{h_{k-1}^2}{2\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C^{(k-1)}_{pq}+\dfrac{h_k\left(2h_{k-1}+h_k\right)}{2\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C^{(k)}_{pq} & \text{if } e=k\\ \quad -\dfrac{h_k\left(h_k+2h_{k+1}\right)}{2\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C^{(k)}_{pq}-\dfrac{h_{k+1}^2}{2\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C^{(k+1)}_{pq} & \\ -\dfrac{h_{k-1}^2}{2\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C^{(k-1)}_{pq}+\dfrac{h_k\left(2h_{k-1}+h_k\right)}{2\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C^{(k)}_{pq} & \text{if } e=k-1\\ \dfrac{h_k\left(h_k+2h_{k+1}\right)}{2\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C^{(k)}_{pq}+\dfrac{h_{k+1}^2}{2\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C^{(k+1)}_{pq} & \text{if } e=k+1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-32}$$

$$(2\le k\le N-1)$$

$$A^3_{pqiiNe}=\begin{cases}-\dfrac{C^{(N)}_{pq}}{2}+\dfrac{h_{N-1}^2}{2\left(h_{N-1}+h_N\right)^2}C^{(N-1)}_{pq}+\dfrac{h_N\left(2h_{N-1}+h_N\right)}{2\left(h_{N-1}+h_N\right)^2}C^{(N)}_{pq} & \text{if } e=k=N\\ -\dfrac{h_{N-1}^2}{2\left(h_{N-1}+h_N\right)^2}C^{(N-1)}_{pq}-\dfrac{h_N\left(2h_{N-1}+h_N\right)}{2\left(h_{N-1}+h_N\right)^2}C^{(N)}_{pq} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e<k-1\end{cases}$$

$$(k=N) \tag{A-33}$$

$$A^3_{pqii(N+1)e}=\begin{cases}\dfrac{C^{(N)}_{pq}}{2} & \text{if } e=k=N+1\\ -\dfrac{C^{(N-1)}_{pq}}{2} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e<k-1\end{cases}\qquad (k=N+1) \tag{A-34}$$

$$A^4_{pqii0e}=\begin{cases}\dfrac{2}{h_1}C^{(1)}_{pq} & \text{if } e=k=0\\ -\dfrac{2}{h_1}C^{(1)}_{pq} & \text{if } e=k+1 \ \ (k=0)\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-35}$$

$$A^4_{pqii1e}=\begin{cases}\dfrac{2}{h_1}C^{(1)}_{pq}+\dfrac{2h_1}{(h_1+h_2)^2}C^{(1)}_{pq}+\dfrac{2h_2}{(h_1+h_2)^2}C^{(2)}_{pq} & \text{if } e=k=1\\ -\dfrac{2h_1}{(h_1+h_2)^2}C^{(1)}_{pq}-\dfrac{2h_2}{(h_1+h_2)^2}C^{(2)}_{pq} & \text{if } e=k+1 \ \ (k=1)\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-36}$$

$$A^4_{pqiike}=\begin{cases}\dfrac{2}{(h_{k-1}+h_k)^2}\left(h_{k-1}C^{(k-1)}_{pq}+h_kC^{(k)}_{pq}\right) & \text{if } e=k\\ \quad+\dfrac{2}{(h_k+h_{k+1})^2}\left(h_kC^{(k)}_{pq}+h_{k+1}C^{(k+1)}_{pq}\right) & \\ \dfrac{2}{(h_k+h_{k+1})^2}\left(h_kC^{(k)}_{pq}+h_{k+1}C^{(k+1)}_{pq}\right) & \text{if } e=k+1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-37}$$

$$(2\le k\le N-1)$$

$$A^4_{pqiiNe}=\begin{cases}\dfrac{2}{h_N}C^{(N)}_{pq}+\dfrac{2h_{N-1}}{(h_{N-1}+h_N)^2}C^{(N-1)}_{pq}+\dfrac{2h_N}{(h_{N-1}+h_N)^2}C^{(N)}_{pq} & \text{if } e=k=N\\ -\dfrac{2h_{N-1}}{(h_{N-1}+h_N)^2}C^{(N-1)}_{pq}-\dfrac{2h_N}{(h_{N-1}+h_N)^2}C^{(N)}_{pq} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e<k-1\end{cases} \tag{A-38}$$

$$(k=N)$$

$$A^4_{pqii(N+1)e}=\begin{cases}\dfrac{2}{h_N}C^{(N)}_{pq} & \text{if } e=k=N+1\\ -\dfrac{2}{h_N}C^{(N)}_{pq} & \text{if } e=k-1 \qquad (k=N+1)\\ 0 & \text{if } e<k-1\end{cases} \tag{A-39}$$

$$A^1_{pqrrke}=\begin{cases}\dfrac{h_{k-1}^3}{10\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C_{pq}^{(k-1)}+\dfrac{h_k\left(10h_{k-1}^2+h_k^2+5h_{k-1}h_k\right)}{60\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k\\ \quad+\dfrac{h_k\left(h_k^2+5h_kh_{k+1}+10h_{k+1}^2\right)}{60\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k)}+\dfrac{h_{k+1}^3}{10\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k+1)} & \\ \dfrac{h_k^2\left(h_k+5h_{k+1}\right)}{40\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k)}+\dfrac{h_{k+1}^2\left(5h_k+h_{k+1}\right)^3}{40\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k+1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases}$$

(A-40)

$$A^2_{pqrrke}=\begin{cases}\dfrac{h_{k-1}^2}{2\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}\left(C_{pq}^{(k-1)}-C_{pq}^{(k)}\right)+\dfrac{h_{k+1}^2}{2\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}\left(C_{pq}^{(k)}-C_{pq}^{(k+1)}\right) & \text{if } e=k\\ \dfrac{h_{k-1}\left(h_{k-1}+4h_k\right)}{6\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C_{pq}^{(k-1)}+\dfrac{h_k\left(-2h_{k-1}+h_k\right)}{6\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k-1\\ -\dfrac{h_k\left(h_k-2h_{k+1}\right)}{6\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k)}-\dfrac{h_{k+1}\left(4h_k+h_{k+1}\right)}{6\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k+1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases}$$

$$(2\le k\le N-1)$$

(A-41)

$$A^3_{pqrrke}=\begin{cases}\dfrac{h_{k-1}^2}{2\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}\left(C_{pq}^{(k-1)}-C_{pq}^{(k)}\right)+\dfrac{h_{k+1}^2}{2\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}\left(C_{pq}^{(k)}-C_{pq}^{(k+1)}\right) & \text{if } e=k\\ -\dfrac{h_{k-1}\left(h_{k-1}-2h_k\right)}{6\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C_{pq}^{(k)}-\dfrac{h_k\left(4h_{k-1}+h_k\right)}{6\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k-1\\ \dfrac{h_k\left(h_k+4h_{k+1}\right)}{6\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k)}+\dfrac{h_{k+1}\left(-2h_k+h_{k+1}\right)}{6\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k+1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases}$$

$$(2\le k\le N-1)$$

(A-42)

$$A^4_{pqrrke}=\begin{cases}\dfrac{8h_{k-1}}{3\left(h_{k-1}+h_i\right)^2}C^{(k-1)}_{pq}+\dfrac{2\left(3h^2_{k-1}+h^2_k\right)}{3h_k\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C^{(k)}_{pq} & \text{if } e=k\\ \quad+\dfrac{2\left(h^2_k+3h^2_{k+1}\right)}{3h_k\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C^{(k)}_{pq}+\dfrac{8h_{k+1}}{3\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C^{(k+1)}_{pq} & \\ -\dfrac{2\left(h_k-3h_{k+1}\right)}{3\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C^{(k)}_{pq}+\dfrac{2\left(3h_k-h_{k+1}\right)}{3\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C^{(k+1)}_{pq} & \text{if } e=k+1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-43}$$

$$A^1_{pqirke}=\begin{cases}\dfrac{h^3_{k-1}}{8\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C^{(k-1)}_{pq}+\dfrac{h_k\left(6h^2_{k-1}+h^2_k+4h_{k-1}h_k\right)}{24\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C^{(k)}_{pq} & \text{if } e=k\\ \quad+\dfrac{h_k\left(h^2_k+4h_kh_{k+1}+6h^2_{k+1}\right)}{24\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C^{(k)}_{pq}+\dfrac{h^3_{k+1}}{8\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C^{(k+1)}_{pq} & \\ \dfrac{h^2_k\left(h_k+4h_{k+1}\right)}{24\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C^{(k)}_{pq}+\dfrac{h^2_{k+1}\left(4h_k+h_{k+1}\right)^3}{24\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C^{(k+1)}_{pq} & \text{if } e=k+1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-44}$$

$$A^2_{pqirke}=\begin{cases}\dfrac{h^2_{k-1}}{3\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C^{(k-1)}_{pq}+\dfrac{h_k\left(3h_{k-1}+h_k\right)}{6\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C^{(k)}_{pq} & \text{if } e=k\\ \quad-\dfrac{h_k\left(h_k+3h_{k+1}\right)}{6\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C^{(k)}_{pq}-\dfrac{h^2_{k+1}}{3\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C^{(k+1)}_{pq} & \\ \dfrac{h_{k-1}\left(h_{k-1}+3h_k\right)}{6\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C^{(k-1)}_{pq}+\dfrac{h^2_k}{3\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C^{(k)}_{pq} & \text{if } e=k-1\\ -\dfrac{h^2_k}{3\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C^{(k)}_{pq}-\dfrac{h_{k+1}\left(3h_k+h_{k+1}\right)}{6\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C^{(k+1)}_{pq} & \text{if } e=k+1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-45}$$

$$(2\le k\le N-1)$$

$$A^3_{pqirke}=\begin{cases}\dfrac{2h_{k-1}^2}{3\left(h_{k-1}+h_i\right)^2}C_{pq}^{(k-1)}-\dfrac{\left(6h_{k-1}^2+3h_{k-1}h_k+h_k^2\right)}{6\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k\\ \quad+\dfrac{\left(h_k^2+3h_kh_{k+1}+6h_{k+1}^2\right)}{6\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k)}-\dfrac{2h_{k+1}^2}{3\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k+1)} & \\ -\dfrac{h_{k-1}\left(h_{k-1}-3h_k\right)}{6\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C_{pq}^{(k-1)}-\dfrac{h_k\left(3h_{k-1}+h_k\right)}{3\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k-1\\ \dfrac{h_k\left(h_k+3h_{k+1}\right)}{3\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k)}+\dfrac{h_{k+1}\left(-3h_k+h_{k+1}\right)}{6\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k+1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases}$$

$$(2\le k\le N-1) \tag{A-46}$$

$$A^4_{pqirke}=\begin{cases}\dfrac{2h_{k-1}}{\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}\left(C_{pq}^{(k-1)}-C_{pq}^{(k)}\right)+\dfrac{2h_{k+1}}{\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}\left(C_{pq}^{(k+1)}-C_{pq}^{(k)}\right) & \text{if } e=k\\ \dfrac{2h_k}{\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}\left(-C_{pq}^{(k)}+C_{pq}^{(k+1)}\right) & \text{if } e=k+1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-47}$$

$$A^1_{pqrike}=A^1_{pqirke} \tag{A-48}$$

$$A^2_{pqrike}=\begin{cases}\dfrac{2h_{k-1}^2}{3\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C_{pq}^{(k-1)}-\dfrac{\left(6h_{k-1}^2+3h_{k-1}h_k+h_k^2\right)}{6\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k\\ \quad+\dfrac{\left(h_k^2+3h_kh_{k+1}+6h_{k+1}^2\right)}{6\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k)}-\dfrac{2h_{k+1}^2}{3\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k+1)} & \\ \dfrac{h_{k-1}\left(h_{k-1}+3h_k\right)}{3\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C_{pq}^{(k-1)}+\dfrac{h_k\left(-3h_{k-1}+h_k\right)}{6\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k-1\\ -\dfrac{h_k\left(h_k-3h_{k+1}\right)}{6\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k)}-\dfrac{h_{k+1}\left(3h_k+h_{k+1}\right)}{3\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k+1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases}$$

$$(2\le k\le N-1)$$

(A-49)

$$A^3_{pqrike}=\begin{cases}\dfrac{h_{k-1}^2}{3\left(h_{k-1}+h_i\right)^2}C_{pq}^{(k-1)}+\dfrac{h_k\left(3h_{k-1}+h_k\right)}{6\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k\\ \quad-\dfrac{h_k\left(h_k+3h_{k+1}\right)}{6\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k)}-\dfrac{h_{k+1}^2}{3\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k+1)} & \\ -\dfrac{h_{k-1}^2}{3\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C_{pq}^{(k-1)}-\dfrac{h_k\left(3h_{k-1}+h_k\right)}{6\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k-1\\ \dfrac{h_k\left(h_k+3h_{k+1}\right)}{6\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k)}+\dfrac{h_{k+1}^2}{3\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k+1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases}$$

$$(2\le k\le N-1)$$

(A-50)

$$A^4_{pqrike}=\begin{cases}\dfrac{2h_{k-1}}{\left(h_{k-1}+h_k\right)^2}\left(C_{pq}^{(k-1)}-C_{pq}^{(k)}\right)+\dfrac{2h_{k+1}}{\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}\left(C_{pq}^{(k+1)}-C_{pq}^{(k)}\right) & \text{if } e=k\\ \dfrac{2h_{k+1}}{\left(h_k+h_{k+1}\right)^2}\left(C_{pq}^{(k)}-C_{pq}^{(k+1)}\right) & \text{if } e=k+1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases}$$

(A-51)

$$A^1_{pqllke} = \begin{cases} \frac{h_k}{6} C^{(k-1)}_{pq} + \frac{h_{k+1}}{6} C^{(k+1)}_{pq} & \text{if } e = k \\ 0 & \text{if } e = k+1 \\ 0 & \text{if } e > k+1 \end{cases} \tag{A-52}$$

$$A^2_{pqllke} = 0 \begin{cases} \frac{1}{2} C^{(k-1)}_{pq} - \frac{1}{2} C^{(k+1)}_{pq} & \text{if } e = k \\ 0 & \text{if } e = k+1 \\ 0 & \text{if } e = k-1 \\ 0 & \text{if } e > k+1 \end{cases} \tag{A-53}$$

$$A^3_{pqllke} = 0 \begin{cases} \frac{1}{2} C^{(k-1)}_{pq} - \frac{1}{2} C^{(k+1)}_{pq} & \text{if } e = k \\ 0 & \text{if } e = k+1 \\ 0 & \text{if } e = k-1 \\ 0 & \text{if } e > k+1 \end{cases} \tag{A-54}$$

$$A^4_{pqllke} = \begin{cases} \frac{2}{h_{k-1}} C^{(k-1)}_{pq} + \frac{2}{h_{k+1}} C^{(k+1)}_{pq} & \text{if } e = k \\ 0 & \text{if } e = k+1 \\ 0 & \text{if } e > k+1 \end{cases} \tag{A-55}$$

$$A^1_{pqlike}=\begin{cases}\dfrac{h_{k-1}^2}{6\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)}-\dfrac{h_{k+1}^2}{6\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k\\ -\dfrac{h_{k+1}\left(3h_k+h_{k+1}\right)}{12\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k+1\\ \dfrac{h_{k-1}\left(h_{k-1}+3h_k\right)}{12\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-56}$$

$$A^2_{pqlike}=\begin{cases}\dfrac{h_{k-1}}{2\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)}+\dfrac{h_{k+1}}{2\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k\\ \dfrac{\left(2h_k+h_{k+1}\right)}{2\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k+1\\ \dfrac{\left(h_{k-1}+2h_k\right)}{2\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-57}$$

$$A^3_{pqlike}=\begin{cases}\dfrac{h_{k-1}}{2\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)}+\dfrac{h_{k+1}}{2\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k\\ -\dfrac{h_{k+1}}{2\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k+1\\ -\dfrac{h_{k-1}}{2\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-58}$$

$$A^4_{pqlike}=\begin{cases}\dfrac{2}{\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)}-\dfrac{2}{\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k\\ \dfrac{2}{\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k+1\\ -\dfrac{2}{\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-59}$$

$$A^1_{pqilke}=\begin{cases}\dfrac{h_{k-1}^2}{6\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)}-\dfrac{h_{k+1}^2}{6\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k\\ \dfrac{h_k\left(h_k+3h_{k+1}\right)}{12\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k+1\\ -\dfrac{h_k\left(3h_{k-1}+h_k\right)}{12\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-60}$$

$$A^2_{pqilke}=\begin{cases}\dfrac{h_{k-1}}{2\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)}+\dfrac{h_{k+1}}{2\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k\\ -\dfrac{h_k}{2\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k+1\\ -\dfrac{h_k}{2\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-61}$$

$$A^3_{pqilke}=\begin{cases}\dfrac{h_{k-1}}{2\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)}+\dfrac{h_{k+1}}{2\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k\\ \dfrac{\left(h_k+2h_{k+1}\right)}{2\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k+1\\ \dfrac{\left(2h_{k-1}+h_k\right)}{2\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-62}$$

$$A^4_{pqilke}=\begin{cases}\dfrac{2}{\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)}-\dfrac{2}{\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k\\ -\dfrac{2}{\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k+1\\ \dfrac{2}{\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-63}$$

$$A^1_{pqlrke}=\begin{cases}\dfrac{h_{k-1}^2}{8\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)}-\dfrac{h_{k+1}^2}{8\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k\\ -\dfrac{h_{k+1}\left(4h_k+h_{k+1}\right)}{24\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k+1\\ \dfrac{h_{k-1}\left(h_{k-1}+4h_k\right)}{24\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-64}$$

$$A^2_{pqlrke}=\begin{cases}\dfrac{h_{k-1}}{3\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)}-\dfrac{h_{k+1}}{3\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k\\ \dfrac{\left(3h_k+h_{k+1}\right)}{6\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k+1\\ \dfrac{\left(h_{k-1}+3h_k\right)}{6\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-65}$$

$$A^3_{pqlrke}=\begin{cases}\dfrac{2h_{k-1}}{3\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)}+\dfrac{2h_{k+1}}{3\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k\\ \dfrac{\left(3h_k-h_{k+1}\right)}{6\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k+1\\ -\dfrac{\left(h_{k-1}-3h_k\right)}{6\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-66}$$

$$A^4_{pqlrke}=\begin{cases}\dfrac{2}{\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)}-\dfrac{2}{\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k\\ -\dfrac{2h_k}{\left(h_kh_{k+1}+h_{k+1}^2\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k+1\\ \dfrac{2h_k}{\left(h_{k-1}^2+h_{k-1}h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-67}$$

$$A^1_{pqrlke}=\begin{cases}\dfrac{h_{k-1}^2}{8\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)}-\dfrac{h_{k+1}^2}{8\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k\\ \dfrac{h_k\left(h_k+4h_{k+1}\right)}{24\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k+1\\ -\dfrac{h_k\left(4h_{k-1}+h_k\right)}{24\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-68}$$

$$A^2_{pqrlke}=\begin{cases}\dfrac{2h_{k-1}}{3\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)}+\dfrac{2h_{k+1}}{3\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k\\ -\dfrac{\left(h_k-3h_{k+1}\right)}{6\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k+1\\ \dfrac{\left(3h_{k-1}-h_k\right)}{6\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-69}$$

$$A^3_{pqrlke}=\begin{cases}\dfrac{h_{k-1}}{3\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)}+\dfrac{h_{k+1}}{3\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k\\ \dfrac{\left(h_k+3h_{k+1}\right)}{6\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k+1\\ -\dfrac{\left(3h_{k-1}+h_k\right)}{6\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-70}$$

$$A^4_{pqrlke}=\begin{cases}\dfrac{2}{\left(h_{k-1}+h_k\right)}C_{pq}^{(k-1)}-\dfrac{2}{\left(h_k+h_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k+1)} & \text{if } e=k\\ \dfrac{2h_{k+1}}{\left(h_k^2+h_kh_{k+1}\right)}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k+1\\ -\dfrac{2h_{k-1}}{\left(h_{k-1}h_k+h_k^2\right)}C_{pq}^{(k)} & \text{if } e=k-1\\ 0 & \text{if } e>k+1\end{cases} \tag{A-71}$$

个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果

个人简历

1983 年 10 月生于湖北通城。

2003 年 9 月考入中国民航大学，就读飞行器动力工程专业。2007 年 7 月本科毕业，获工学学士学位。

2007 年 9 月考入中国民航大学，就读人机环境与工程专业，攻读硕士学位，于 2009 年 6 月提前一年获得硕士学位。

2009 年 9 月中国民航大学航空工程学院飞机系任教，助教。

2012 年 9 月考入清华大学航天航空学院工程动力学研究所，攻读博士学位，从事复合材料结构力学相关研究至今。

发表的学术论文

[1] Dinghe Li, Yan Liu, Xiong Zhang. An extended Layerwise method for composite laminated beams with multiple delaminations and matrix cracks. Int. J. Numer. Meth. Engng., 2014, InPress.（SCI 源刊）

[2] Dinghe Li, Yan Liu, Xiong Zhang. Low-velocity impact responses of the stiffened composite laminated plates based on the progressive failure model and the layerwise/solid-elements method. Composite Structures, 2014, 110: 249-275.（SCI 收录，EI 收录）

[3] Dinghe Li, Yan Liu, Xiong Zhang. A layerwise/solid-element method of the linear static and free vibration analysis for the composite sandwich plates. Composites: Part B Engineering, 2013, 52: 187-198.（SCI 收录，EI 收录）

[4] Dinghe Li, Yan Liu, Xiong Zhang. Linear statics and free vibration sensitivity analysis of the composite sandwich plates based on a layerwise/solid-element method. Composite Structures, 2013, 106: 175-200.（SCI 收录，EI 收录）

[5] Dinghe Li, Guanghui Qing, Yan Liu. A layerwise/solid-element method for the composite stiffened laminated cylindrical shell structures. Composite Structures, 2013, 98: 215-227.（SCI 收录，EI 收录）

[6] 李顶河; 刘岩; 张雄. 复合材料开口加筋层合板壳结构的一种耦合分析方法. 2012 年中国计算力学大会, 重庆, 2012

[7] 李顶河; 刘岩; 张雄. 复合材料夹芯结构的 layerwise/solid-element 方法. 北京力学会第 20 届学术年会, 北京, 2014.

[8] Dinghe Li, Yan Liu, Xiong Zhang. A Layerwise-XFEM analysis method for the composite laminated beam with multiple delaminations and in-plane cracks. WCCM-ECCM-ECFD, Barcelona, Spain, 2014

研究成果

[1] 强冲击荷载下结构破坏过程的建模与关键算法，国家 973 项目子课题 (2010CB832701，参加人)。