局部化破坏问题的物质点法研究

（申请清华大学工学博士学位论文）

培 养 单 位：航天航空学院

学　　科：力学

研　究　生：杨 鹏 飞

指 导 教 师：张　　雄　教　授

二〇一三年四月

Material Point Method for Localized Failure Problems

Dissertation Submitted to

Tsinghua University

in partial fulfillment of the requirement

for the degree of

Doctor of Philosophy

in

Mechanics

by

Yang Pengfei

Dissertation Supervisor : Professor Zhang Xiong

April, 2013

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：

清华大学拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：（1）已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；（2）为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供校内师生阅读，或在校园网上供校内师生浏览部分内容；（3）根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》，向国家图书馆报送可以公开的学位论文。

本人保证遵守上述规定。

（保密的论文在解密后应遵守此规定）

作者签名：_____　　导师签名：_____

日　　期：_____　　日　　期：_____

摘 要

局部化破坏问题是结构安全设计以及武器毁伤效应评价中的重要研究内容，数值仿真在这类问题的研究有着重要应用。局部化破坏的特点是伴随非连续破坏面的产生材料发生局部大变形，这给传统数值方法带来了挑战。物质点法作为一种质点类无网格方法，采用欧拉网格和拉格朗日质点双重描述，能有效处理大变形问题，同时对于破坏面的描述不存在网格线的限制。本文基于物质点法，发展了适用于模拟局部化破坏问题的有效数值计算方法。

针对局部化破坏问题中变形局部化的特点，本文提出了基于悬点的多级背景网格物质法。在局部变形较大的区域使用高级别密网格及质点进行计算，而在远离局部大变形的区域使用低级别疏网格及质点进行计算。为了避免当粗质点运动到细网格中导致的数值断裂问题，本文还提出了与背景网格级别相适应的质点分裂方法。本文采用多级背景网格物质点法研究了弹性波传播，Taylor 杆碰撞以及弹体斜侵彻等问题。

冲击侵彻是引起材料局部化破坏的常见动载荷形式。为了捕捉弹体的运动过程，传统物质点法要求创建足够大的背景网格区域，极大地增加了不必要的计算消耗。针对此问题本文提出了多重移动背景网格物质点法，采用移动网格技术动态调整背景网格区域，允许在同一求解体系下同时存在多套背景网格，并可以在特定的情况下对物体的背景计算网格进行切换。本文应用多重移动背景网格物质点法研究了弹丸冲击薄板以及弹体对多层靶板的侵彻问题。

金属延性断裂的数值模拟一直是计算力学领域的难点之一。本文发展了三维脱聚模型描述材料失效界面的力学行为，将断裂行为的描述引入到本构方程中。本文结合多级背景网格物质点法成功预测了含孔金属试件的裂纹扩展，同时还应用脱聚模型研究了含初试缺陷试件的局部剪切带形成过程。

爆炸载荷下金属壳体首先在局部发生剪切拉伸混合失效，失效面扩展交汇后形成金属破片。本文基于 Gurson 模型和 Weibull 随机失效分别从宏观和微观角度研究了破片的产生过程。当使用 Gurson 模型时考虑材料的初始微观孔洞随机分布，并使用 Tepla-F 失效模型。当不考虑微观孔洞时，Gurson 流动退化为 J_2 流动，使用基于宏观材料应变的 Weibull 随机失效方案。本文同时提出了基于背景网格的碎片统计方法，结果显示金属壳体在高应变率效应下呈现脆性断裂的性质。

关键词：无网格法；物质点法；局部化；破坏；数值模拟

Abstract

The localized material failure is very important in the study of structural safety and military weapon performance. Numerical simulation is widely used in these areas. Discontinuity and large deformation are usually encountered in the localized failure problems, which results in a great challenge for numerical simulation. As a meshfree particle method, material point method (MPM) discretizes the domain with a set of Lagrangian particles and solves the momentum equation by Eulerian background grid. As a result, MPM is capable to solve large deformation problems and discontinuity is not constrained by grid lines. In this study, the effective numerical method for localized failure problems is developed based on MPM.

As the deformation is usually localized in the localized failure problems, the multi-level background grid MPM is proposed. In this method, the fine grid cells and particles are used in the area of local large deformation while the course grid cells and particles are used in the other area. To avoid the numerical fracture problem which may be encountered when course particles move into fine grid cells, a new particle splitting method is proposed. The multi-level background grid MPM is used to study the problems including the elastic wave propagation, Taylor bar impact and oblique penetration.

Impact and penetration are the common dynamic loads for localized failure problems. To capture the orbit of the projectile, a sufficiently large background grid is usually established in traditional MPM, which significantly increases the computational cost. To solve this problem, the multi-moving background grid MPM is proposed. In this method, an improved moving grid method is used to dynamically adjust the solution area. Meanwhile, multiple background grids are allowed in the framework of MPM. The multiple grids are solved independently and computational grid changing is allowed at certain condition. The multi-moving background grid MPM is used to study problems such as steel ball impacting a thin plate and multilayer penetration.

Ductile fracture is always one of the difficulties in computational mechanics. In this study a 3D decohesion model is developed to describe the mechanical behavior of the failure interface. The fracture mechanism is considered to be a part of the constitutive model in this model. Based on the decohesion model, the crack growth of the metallic specimen

with asymmetric imperfection is successfully predicted by multi-level background grid MPM. The decohesion model is also applied to study localized shear band growth of the metallic plates with different imperfections.

The mixed tensile-shear failure usually first grow up in the local areas of the metallic shells driven by detonation. As the failure interfaces develop and mixed, the shell is fragmented into pieces. In this study, the fragmentation is modeled based on Gurson model and Weibull random failure, from the microscopic and macroscopic aspects respectively. When considering microscopic damage of material, the plastic behavior is described by Gurson model with randomly-distributed initial void of material points. Gurson model degenerates to J_2 plastic theory while the microscopic void is ignored, in which situation the Weibull random failure scheme will be used based on macroscopic strain. Meanwhile, a background-grid-based searching method is proposed to capture the statistical feature of the fragmentation. The result reveals that metallic shells tend to fracture in a brittle manner under high strain rate.

Key words: meshfree methods; material point method; localization; failure; numerical simulation

目 录

第 1 章 引言 1
1.1 研究背景和意义 1
1.2 材料破坏行为 3
1.2.1 材料破坏形式 3
1.2.2 断裂力学基础 3
1.2.3 材料的动力学行为 5
1.3 材料破坏行为的数值模拟方法现状 5
1.3.1 拉格朗日方法 6
1.3.2 欧拉方法 7
1.3.3 任意拉格朗日 -欧拉方法 8
1.4 无网格法研究进展 9
1.4.1 移动最小二乘（MLS）近似 9
1.4.2 核近似 10
1.4.3 径向基函数（RBF）近似 11
1.4.4 单位分解近似 12
1.5 物质点法研究进展 12
1.6 本文主要内容 16
第 2 章 物质点法 18
2.1 控制方程 18
2.2 方程离散 19
2.3 时间积分 20
2.4 计算流程 21
2.5 应力更新 22
2.6 本构关系 24
2.6.1 弹性模型 24
2.6.2 Mises 塑性流动 25
2.6.3 Johnson-Cook 模型 26
2.7 状态方程 26
2.7.1 Mie-Grüneisen 状态方程 26

2.7.2 JWL 状态方程 27
2.8 插值函数 27
2.9 接触算法 29
2.10 物质点法前后处理技术 30
2.10.1 基于背景网格的前处理建模 31
2.10.2 基于背景网格的后处理技术 32
2.11 本章小结 36
第 3 章 局部化问题的多级背景网格物质点法 37
3.1 多级背景网格物质点法 37
3.2 质点分裂方案 39
3.3 网格块 43
3.4 悬点类型的确定 44
3.5 计算过程 45
3.6 数值算例 46
3.6.1 弹性杆单轴压缩 46
3.6.2 Taylor 杆问题 47
3.6.3 卵形钢弹斜侵彻铝靶 51
3.7 本章小结 55
第 4 章 冲击侵彻问题的多重移动网格物质点法 57
4.1 移动网格 58
4.1.1 基本原理 58
4.1.2 算法实现 59
4.2 多重网格 60
4.2.1 基本原理 60
4.2.2 算法实现 61
4.3 数值算例 61
4.3.1 钢珠侵彻薄钢板 61
4.3.2 多层侵彻问题 64
4.4 本章小结 67

第 5 章 金属延性断裂的物质点法研究 70
5.1 基本思路 70
5.2 脱聚模型 71
5.3 模型实现 76
5.4 数值算例 78
5.4.1 杆单向拉伸 78
5.4.2 多孔金属试件的延性断裂模拟 79
5.4.3 含孔试件局部剪切带模拟 83
5.5 本章小结 86
第 6 章 金属破碎行为的物质点法研究 87
6.1 Gurson 模型 88
6.2 状态方程 90
6.3 应力更新步骤 91
6.4 裂纹模拟 93
6.4.1 失效模型 93
6.4.2 接触算法 95
6.5 基于背景网格的碎片统计方法 95
6.6 数值算例 97
6.6.1 局部剪切带分析 97
6.6.2 圆柱壳的破碎模拟 98
6.6.3 球壳的碎片模拟 103
6.7 本章小结 104
第 7 章 全文总结 106
7.1 研究成果 106
7.2 工作展望 108
参考文献 110
致 谢 121
声 明 122
个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果 123

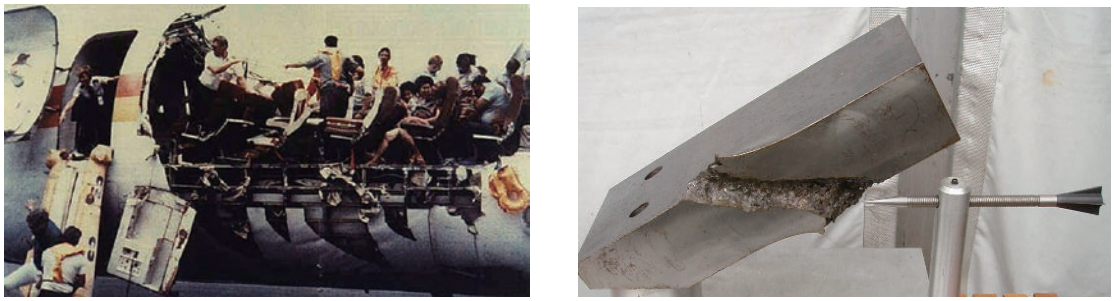
主要符号对照表

MPM	物质点法 (Material Point Method)
FEM	有限单元法 (Finite Element Method)
GIMP	广义物质点法 (Generalized Interpolation Material Point method)
COD	裂纹张开位移 (Crack Opening Displacement)
ρ	密度
ν	泊松比
E	弹性模量
K	体积模量
G	剪切模量
$\boldsymbol{\sigma}$	应力张量
$\boldsymbol{\varepsilon}$	应变张量
$\boldsymbol{S}$	偏应力张量
$\boldsymbol{D}$	变形率张量
$\boldsymbol{\Omega}$	旋率张量
p	压力
s	Mises 等效应力
ε^p	等效塑性应变

第 1 章 引言

1.1 研究背景和意义

材料的破坏是人类生产生活中常见的物理现象。不同环境下材料承受的载荷不同，当材料发生破坏后，将丧失其承载能力。某些情况下人们希望材料能够承受足够的载荷而不至于破坏失效。比如大飞机设计中机翼需要在减轻重量的同时，保持足够的强度和刚度来承受气动载荷。现代高层建筑要求能抵御一定风载荷而不至于产生过大的偏移。这种情况下材料的破坏往往是在结构设计之初所不愿看到的，它们会对社会经济和公共安全造成巨大威胁。1988 年 4 月 28 日，阿罗哈航空 243 号航班在飞行中由于爆裂性失压致使其头等舱上半部分外壳破裂，一名机组人员被抛出机舱死亡，幸于及时安全迫降才避免了更大的损失。2001 年 9 月 11 日，美国遭受恐怖袭击，世贸大厦在受到飞机撞击后其撞击处钢结构遭到破坏，火势进一步将钢结构软化进而导致整体结构的垮塌。另外一些情况下人们希望能利用材料的破坏造成对目标物的毁伤，比如在国防工业中穿甲弹通过其强度、质量和速度穿透并破坏敌方的装甲，破碎战斗部利用其战斗部材料的破坏产生的高速碎片对敌方进行杀伤。图1.1给出了两种材料破坏的实例。



(a) 阿罗哈航空243号航班事故　　(b) 脱壳穿甲弹穿透靶板

图 1.1 材料破坏实例

从以上材料破坏的例子可以看出，材料破坏往往从局部区域开始发生，有些情况下破坏仅发生在局部区域，有些情况下破坏由局部向整体区域扩展，从而导致整体结构的失效。在弹体侵彻过程中，靶体受到弹体的局部冲击，在与弹体接触的周边区域发生局部大变形并导致靶体材料局部破坏，虽然靶体整体结构并未失效，但强冲击载荷下发生的局部破坏便可以使得弹体贯穿靶体

从而形成对内部空间的毁伤作用。结构体在几何形状或特征尺寸发生突变的地方往往会发生应力集中，或者在局部材料较为薄弱，其极限承载能力偏低的情况下，当局部应力超过材料的极限应力时，裂纹便在局部区域触发，如果载荷得不到有效释放，裂纹将从局部区域扩展，导致结构整体丧失承载能力。连续的断裂，局部多条裂纹的交互，使得整体材料在局部区域形成独立块体，当整体材料被分解成相互独立的许多块体时便发生了材料的破碎现象。冲击爆炸是常见的使材料破碎的载荷形式。因此研究材料的局部化破坏行为具有重要意义，这有助于我们更安全高效地完成结构的设计、制造、监测等环节，以预防结构材料在整个寿命周期的破坏失效，也有助于我们充分利用材料的破坏行为以提高武器的毁伤效应。

现代科学技术研究方法主要包括理论研究、实验研究和数值仿真三个方面[1]。数值仿真技术是指利用数值计算方法模拟实际物理场景的过程，随着电子计算机技术的发展，数值仿真在科学研究以及建筑、车辆、航空、船舶、国防等工程领域中扮演着越来越重要的角色[2]。近年来在工程设计领域发展起来的 CAE（Computer Aided Engineering）技术便是以数值仿真技术为基础的，它借助于计算机分析复杂产品的力学性能，并以此优化产品的结构性能。数值仿真技术的应用价值在于其经济性、便捷性以及全面性的优势。人们只要对计算设备和软件系统的一次性投资便可以进行不同的数值仿真实验，省去了昂贵的真实实验费用；用户也省去了进行真实实验前复杂的准备程序和实验结束后数据处理过程，并可以在数值仿真后处理过程中方便直接地提取需要的数据；数值仿真还可以给出系统、细致的全过程计算结果，一些比较危险的实验过程也可以方便地在计算机上虚拟实现。

材料的局部化破坏过程往往伴随着大变形、断裂、破碎等复杂物理现象，涉及材料、几何和边界等多重非线性，给数值计算带来了很大的挑战。传统基于网格的有限元法在处理与原网格线分布不一致的大变形或间断时会面临一定的困难。大变形会导致网格畸变，需要进行网格重构，而显式积分的时间步长由于网格扭曲而变得过小，大幅增加计算量的同时也降低了求解精度。在模拟材料破坏问题时，裂纹动态扩展方向也受到有限元网格线的限制。欧拉方法容易处理大变形问题，却很难处理复杂界面问题。无网格法不存在网格畸变，同时也很容易处理界面，很适合处理材料大变形问题，得到了不断发展[3,4]。物质点法作为一种无网格方法近年来得到了广泛关注并取得了很多有意义的研究成果。针对局部化破坏问题的研究，物质点法仍然存在着计算效率不高、局部破坏模型描述不够准确等问题。因此本文以物质点法为基础，

从算法和模型两方面着手，以期能更准确更高效地模拟材料的局部破坏行为。

1.2 材料破坏行为

1.2.1 材料破坏形式

材料的破坏失效主要包括机械力破坏、化学腐蚀性破坏以及热力破坏[5]。引起机械力破坏的载荷可以是准静态、瞬态或是循环载荷等。破坏的表现形式有延性断裂、准解理断裂以及脆性断裂破坏等。

材料晶体结构中一般存在位错缺陷。材料在载荷作用下应力达到屈服应力时位错发生移动，从而导致永久塑性变形的产生。延性破坏前材料经历了较大的塑性变形，而脆性断裂前材料经历极少或不经历塑性变形。所以，塑性变形是发生延性断裂的前奏和必要因素，而准解理断裂破坏行为介于延性断裂和脆性断裂之间。同样的材料在不同的环境下发生破坏的形式往往不同。在高应变率和低温状态下，材料更倾向于发生脆性断裂。另外局部剪切作用下材料塑性变形在局部区域集中，产生局部剪切带破坏。在冲击爆炸等强载荷作用下，材料局部发生较大塑性变形而引起材料局部范围内的失效，导致穿孔、成坑、层裂等破坏现象。强动载荷还可以提供充足的动能，使得新表面卸载受到阻碍，从而局部裂纹大量成核，进而扩展、分叉以及交汇，材料以破碎的形式发生破坏[6]。

1.2.2 断裂力学基础

断裂力学是一门上世纪 70 年代兴起的学科，它研究含缺陷材料的破坏问题。断裂力学的研究最早从脆性断裂问题开始，早在 20 世纪初，Griffith 应用能量法[7] 解释了玻璃的理论强度远高于实际强度的现象。他指出材料中存在微观缺陷，在一定外载荷作用下缺陷扩展导致材料破坏，并得到了脆性断裂强度与裂纹尺寸关系。但 Griffith 的研究基于玻璃材料，而金属材料这种尺寸效应并不明显。在此基础上 Irwin 发展了线弹性断裂力学（LEFM：Linear Elastic Fracture Mechanics），指出当材料的能量释放率 G[8] 达到临界能量释放率 G_c 时，裂纹将扩展。Irwin 随后进一步考虑了裂纹尖端应力场的影响，引入了应力强度因子[9] 的概念 $K_i = \sqrt{GE}$，其中 E 为弹性模量，$i = \mathrm{I}$，II，III 分别对应不同的断裂破坏模式（如图1.2所示）。当 K_i 达到临界应力强度因子 K_{ic} 时裂纹扩展[8]。由于 LEFM 基于线弹性理论，只能处理线弹性断裂问题，在小范围的屈服情况下可以根据塑性区的形状尺寸对 K_i 进行修正。但如果 LEFM 考虑了塑性变形的路

径依赖性，将失去其单参数描述的简单性。为求解弹塑性断裂问题，Wells[10]提出了 COD（Crack Opening Displacement）准则 $\delta = \delta_c$，其中 δ 为裂纹张开位移，δ_c 为临界裂纹张开位移，当 $\delta > \delta_c$ 时裂纹扩展。COD 准则可以方便应用到焊接结构等工程问题中，但其理论基础较为薄弱[11]。Rice 随后提出 J 积分[12]并被广泛应用到弹塑性断裂力学（EPFM：Elastic-Plastic Fracture Mechanics）中。J 积分是 EPFM 中从裂纹尖端奇异场获得的能量，相当于 LEFM 中的能量释放率 G。J 积分具有守恒性，它与路径无关，但其前提条件是全量理论、单调加载条件、小变形理论以及忽略守恒方程中的体积力等[11]。Hutchinson[13]、Rice 和 Rosengren[14] 于 1968 年建立了 HRR 理论，该理论假设非比例加载的区域包含在 J 奇异的控制范围内，则存在一环形区域其应力场为 HRR 解。当试件的破坏区域相比内部非比例加载核心区域足够大时，J 积分控制裂纹的扩展。HRR 解为裂尖近场解，同样也基于全量理论。

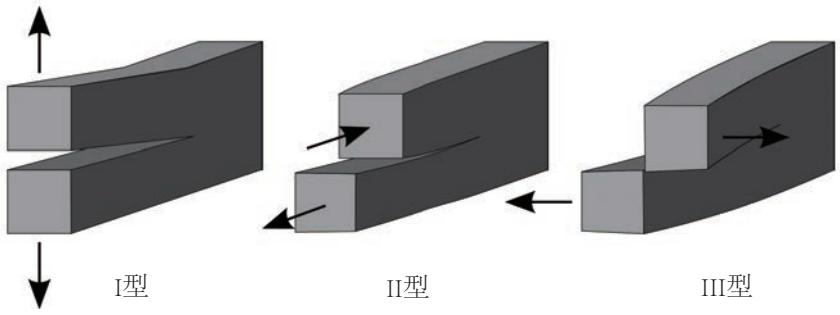


图 1.2 断裂模式

断裂力学理论虽然得到了一定的发展，但现有理论在实际应用中仍然存在一定的局限性。对于断裂本质的研究仍然是一公认难题，特别是对于大变形塑性破坏问题，其理论尚不成熟。对于复杂断裂问题的研究往往借助于数值算法，主要包括连续介质力学方法、自底向上原子类方法以及多尺度方法[15]。连续介质力学方法基于连续性假设，借助连续体材料模型描述变形行为，无法刻画材料破坏时微观原子结构发生的变化。而原子类方法在计算时会受到计算规模的限制。分子动力学（MD：Molecular Dynamics）方法是典型的原子类方法，Holian 等[16] 使用大规模并行 MD 研究了断裂问题。多尺度方法是对宏微观方法的结合，主要存在如下两类多尺度方法：一类将求解区域进行划分，裂纹尖端附近使用原子类方法，而远场使用连续介质力学方法，比如 MAAD（Macroscopic-Atomistic-*ab initio* Dynamics）方法[17]；另一类方法的基本思想是缩减系统整体自由度，比如准连续介质（QC：Quasicontinuum）方法[18]。多尺

度方法的难点之一在于不同方法过渡区的处理，另外其对于实际复杂问题的模拟仍然比较困难。本文的研究基于连续介质力学方法，材料破坏的连续介质力学方法将在下文介绍。

1.2.3 材料的动力学行为

材料动态响应研究在装甲与反装甲、爆炸加工、油井钻探、航天器防护等应用领域有着重要意义。在军用领域，材料动态力学行为的应用着重在破坏和防护两个方面。弹道冲击、聚能射流、爆炸破片等都涉及材料在动态载荷下的破坏问题[6]。材料动力学行为首先要考虑应力波的传播问题，连续介质中的应力波可以分为弹性波和塑性波，当应力波幅值超过弹性极限，材料即发生塑性变形，塑性波波速要比弹性波小。当材料的横向流动被限制时，波阵面趋于陡峭，产生冲击波。冲击波产生的高压往往远大于材料流动应力，其数学描述可以通过 Rankine-Hugoniot 方程和状态方程描述[6]。早期模拟冲击动力学问题时只考虑了由状态方程更新的压力，所使用的程序称之为流体动力学程序（Hydrocodes）。为了较好的模拟中低速冲击问题，流体动力学程序后来基本都考虑了材料的偏应力所反映的固体强度。与静载荷作用不同的是，材料的动态响应往往需考虑应变率的影响。应变率的增加导致金属屈服应力的上升，从而使得材料在达到应力极限时无法产生足够的塑性变形，最终趋于发生脆性破坏。另外温度的下降也会导致材料屈服应力的上升。高应变率下金属材料容易发生塑性变形的局部化，从而产生局部剪切带。局部剪切带往往是材料破裂的前兆。剪切带在材料动态响应中非常重要，局部剪切改变了塑性变形的分配，形成后期的材料剪切破坏路径。如图1.3所示在弹体冲击造成靶板冲塞以及爆炸载荷下金属圆环破碎的过程中，局部剪切带对最后的破坏形式起着决定性作用。

1.3 材料破坏行为的数值模拟方法现状

数值计算方法根据其运动描述的不同可以分为拉格朗日方法、欧拉方法以及混合方法。基于这些方法，相应的也有拉格朗日程序、欧拉程序以及混合拉格朗日欧拉程序[19]。针对材料破坏效应的研究，国内杨秀敏院士团队[20]研制了一套综合化的三维数值模拟平台，提供了欧拉型的有限差分和有限体积法、拉格朗日动力有限元法以及耦合方法求解模块，为研究破坏效应提供了有力的数值仿真工具。不同的数值模拟方法都有各自的优缺点，下面逐一

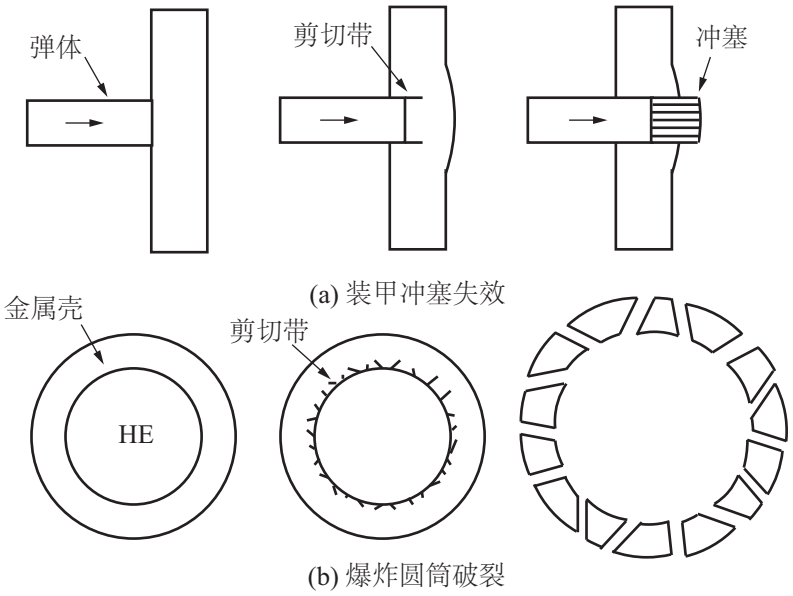


图 1.3　剪切带作用

介绍。

1.3.1　拉格朗日方法

拉格朗日方法的速度场为物质坐标的函数，采用与物体固定的计算网格，通过网格离散物体，每个物体对应各自独立的网格，当物体变形时网格伴随物体一同运动。拉格朗日方法的主要优点是：求解中不存在物质与网格的相对运动，因此拉格朗日框架下动量守恒方程不存在对流项，使得方程求解更加简单。每个单元对应于一种独立的材料，因此本构模型比较容易实施。由于网格和物体一起运动，物质界面在运动过程中得到了很好的保持，物质边界容易追踪。比较著名的拉格朗日程序有基于有限差分法的 HEMP[21]，基于有限元法的 DYNA[22]、PRONTO[23] 和 EPIC[24] 等。

拉格朗日方法本身不能阻止相向运动的物体网格发生相互穿透，因此接触算法在模拟不同物体相互作用的过程中特别重要。拉格朗日乘子法和罚函数法是两种不同的接触计算方法。拉格朗日乘子法对非接触面上的节点不做特殊处理，而要求位于接触面上的节点需满足非嵌入条件。拉格朗日乘子法接触方程弱形式为一不等式，这给积分带来了一定困难。罚函数法允许不同物体网格接触时发生一定的穿透，非嵌入条件不严格满足，实现中相当于在物体接触界面施加一法向压力，此压力大小和穿透量成正比，并由罚数调节，实现上比拉格朗日乘子法更简单。另外接触算法实现时需要事先进行接触面搜索，这在许多接触算法中占据主要的计算消耗[25]。

当物体发生较大变形时，拉格朗日单元容易发生畸变，导致显式积分时间步长减小，求解精度降低。常用的解决方法是进行网格重划分[26]，在网格畸变导致计算无法正常进行前抛弃原来变形的网格，重新划分未变形的网格，并将信息映射到新的网格上，映射过程需保证相关量的守恒。网格重划分技术实现过程复杂，在增加很多额外计算量的同时也在一定程度上降低了求解精度。

一种简单处理材料破坏的方法是引入单元侵蚀算法，即当单元变形过大，材料的应变或应力达到一定阈值时，将单元删除。这种方法会造成系统的质量不守恒，破坏的材料无法继续提供作用等问题。Espinosa 等[27] 基于拉格朗日有限元模拟了多层陶瓷/钢靶的的冲击侵彻响应，并研究了不同单元侵蚀参数对结果的影响。另外模拟材料破坏中出现的断裂、剪切带等现象，还需要能较好的处理不连续和间断。常见的方法是单元间的分裂模型，Xu 和 Needleman[28] 使用内聚面来描述间断，定义了内聚面上力和位移的关系，允许连续体新自由面的产生。Camacho 和 Ortiz[29] 基于拉格朗日有限元，使用内聚模型（Cohesive Law）模拟了脆性材料的断裂和破碎。Zhou 等[30] 发展了强度服从最弱链 Weibull 分布的内聚单元，该方法具备较小的网格依赖性。Ren 和 Li[31] 使用随机分布的 Delaunay 三角形单元离散求解区域，结合内聚模型来模拟动态裂纹的扩展。此类处理不连续的方法限制了裂纹或者局部剪切破坏只能沿着单元界面扩展，当实际破坏面不沿着单元界面时可能导致断裂耗散能量被高估。

由 Belytschko 等[32–34] 发展起来的扩展有限元方法（XFEM: eXtended Finite Element Method）可以允许裂纹或剪切带自由扩展。扩展有限元法基于局部单位分解的思想[35]，对被裂纹切断单元的节点插值函数进行改进，增加了能描述间断位移场的额外自由度。XFEM 被成功地应用于静态[36] 和动态[37] 裂纹问题。庄茁等[38] 进一步发展了 XFEM 理论，并应用于连续体壳的裂纹扩展、非均质复合材料以及两相流的模拟中。然而，XFEM 需要对不连续面进行显式表达，常用的是基于水平集（Level Set）的方法。对于三维复杂模型，或者裂纹发生分叉、材料发生破碎时，水平集的更新会很复杂。另外，在延性断裂等塑性问题的模拟中，XFEM 的研究还有待进一步深入。

1.3.2 欧拉方法

欧拉方法的速度场为空间导数的函数，采用与空间固定的计算网格。欧拉网格不发生变形，物体的运动通过固定空间点上的相应变量值的改变来反映，物体大变形引起的物质流进流出不会直接改变时间步长的大小。因此欧

拉方法没有拉格朗日方法的网格畸变现象，比较适合模拟大变形问题。同时欧拉方法只有一套网格，因此不需要处理接触问题。欧拉方法在模拟由冲击爆炸等引起的材料破坏问题中得到了广泛应用。欧拉方法的计算多采用算子分裂格式，分为拉格朗日步和欧拉步两步进行。首先进行拉格朗日步，网格随物体一同变形，然后是欧拉步进行物质输运，对物质质量、动量和能量在初始规则网格上进行重分配。具有代表性的欧拉程序有源于 Sandia 国家实验室、基于有限体积法的 CTH 程序[39]，北京理工大学宁建国教授课题组开发的基于有限差分法的 EXPLOSION 程序[40] 等。

欧拉方法在求解时需要处理动量守恒方程中非线性对流项，因此非线性方程往往需要更复杂的数值算法，并可能引起求解过程的中数值耗散问题。欧拉方法的另一个难点是界面的捕捉问题，这是由于使用一套网格求解引起的。当处理多物质问题时，同一个网格中可能存在不同的材料，因此计算中需要确定每个材料的组分。界面处理过程往往在欧拉法计算中占据很多时间，界面处理精度不高则容易产生数值震荡、非物理物质扩散等问题。常用的界面处理方法有标志网格法（MAC: Marker and Cell）[41]、VOF（Volume of Fluid）方法[42]、Youngs 技术[43] 以及水平集方法[44] 等。

Silling 等[45] 基于 CTH 程序，引入边界层算法（BLINT）以处理滑移界面，并以此分析了穿甲侵彻问题。Scheffler 等[46] 应用 CTH 程序研究了斜侵彻问题。陈龙伟等[47] 基于欧拉网格的有限差分结合 Youngs 界面技术研究了动能弹对混凝土靶板的侵彻破坏作用。

1.3.3 任意拉格朗日 -欧拉方法

为结合拉格朗日和欧拉方法的优点，产生了一些混合方法，其中具有代表性是任意拉格朗日 -欧拉方法（ALE）[48]。在欧拉方法中，每一个或每隔几个拉格朗日步后都需要将物理量重新映射到空间固定的欧拉网格上计算。而 ALE 方法中不必频繁对拉格朗日步的计算结果重新映射，且进行映射时是将结果映射到与物体运动独立的不同网格上。拉格朗日方法和欧拉方法都可以视为 ALE 的特例。ALE 算法已经被 LS-DYNA、AUTODYN 以及 ABAQUS 等商业软件采用。

ALE 适合处理大变形问题，但由于网格的不固定性及任意性，ALE 重映射过程往往比欧拉方法更费时，新网格上历史变量的追踪也更复杂。另外 ALE 方法同样需要处理欧拉方法中遇到的材料界面捕捉问题。另外三维空间网格的重构也是 ALE 算法的难点。总的来讲，ALE 计算量比严格的拉格朗日方法

和欧拉方法要大。Gadala 总结了 ALE 在裂纹扩展、金属切削等涉及材料破坏的非线性问题中的应用[49]。邓荣兵等[50] 应用多物质 ALE 有限元研究了爆炸冲击波对玻璃幕墙的破坏作用。

1.4 无网格法研究进展

无网格法的研究兴起于上世纪 90 年代[3]，其特点是将物质区域用一组点来离散，其近似函数也基于这些离散点进行构造并具有紧支性。即对于空间任一点 $\boldsymbol{x}$，其场变量 u 可以表述为

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\boldsymbol{x}) u_i \tag{1-1}$$

式中 n 为支持域中的节点数，N_i，u_i 分别为节点 i 的插值函数和场变量值。因此无网格法可以部分甚至彻底消除网格，大大提高了处理大变形问题的能力。光滑质点流体动力学法（SPH：Smooth Particle Hydrodynamics）[51,52] 是最早发展的无网格法，它最初被应用于天体物理的研究。近年来无网格法受到了国内外学者的广泛关注，得到了广泛的发展[53,54]。由于采用点来离散，无网格法很容易处理不连续问题，不存在拉格朗日网格的畸变问题并且容易处理物质界面，因此无网格法被广泛应用于材料破坏问题的研究。加权余量法是固体力学领域求解微分方程的重要方法，它要求微分方程和边界条件上的余量在求解域和边界上的加权积分为 0，通过建立微分方程和边界条件的等效弱积分求得系统的近似解[55]。加权余量法中不同的权函数和试函数选择可以得到不同的无网格法[25]，按加权余量法的不同分类有配点法、Galerkin 法以及 Petrov-Galerkin 法等，按试函数的不同分类有移动最小二乘近似、核近似、径向基函数近似以及单位分解近似等[54]。下面根据近似函数的分类，介绍几类有代表性的无网格法。

1.4.1 移动最小二乘（MLS）近似

构造 $u^h(\boldsymbol{x})$ 为待求函数 $u(\boldsymbol{x})$ 在全局的近似函数，$u(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 邻域内空间各点 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的局部近似为

$$u^h(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) = \sum_{i=1}^{m} p_i(\bar{\boldsymbol{x}}) a_i(\boldsymbol{x}) \tag{1-2}$$

式中 $p_i(\bar{\boldsymbol{x}})$ 为基函数，m 为其个数，$a_i(\boldsymbol{x})$ 为待求系数。MLS 要求 $a_i(\boldsymbol{x})$ 的选择需使得 $u^h(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}$ 邻域内是 $u(\boldsymbol{x})$ 在最小二乘下的最佳近似，误差在点 $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_i$ 处

的加权平方和为

$$J=\sum_{i=1}^{n}w_i(\boldsymbol{x})\left[u^h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i)-u(\boldsymbol{x}_i)\right]^2 \tag{1-3}$$

式中 n 为 $\boldsymbol{x}$ 邻域内的节点数，$w_i(\boldsymbol{x})$ 为权函数，由 J 取最小值求得 $a_i(\boldsymbol{x})$，代入式 (1-2) 便求得最小二乘近似下的形函数。

扩散元法（DEM: Diffuse Element Method）是首先利用 MLS 得到的方法[56]。Belyschko[57] 和 Atluri 等[58] 人先后基于 MLS 发展了无单元法（EFG: the Element-Free Galerkin method）和无网格局部法（MLPG: Meshless Local Petrov-Galerkin method）。EFG 的本质边界条件通过拉格朗日乘子法引入，一般需借助全局背景网格进行积分。虽然其计算精度高于 FEM，但基于 MLS 构造形函数带来了额外的节点搜索工作量和更大带宽的系统矩阵，导致了 EFG 较 FEM 计算成本更高。MLPG 基于局部弱形式，避免了采用全局背景网格积分。与基于全局弱形式的 EFG 相比，MLPG 的系统矩阵不具备对称性，并需增加积分域大小等额外参数，增加了计算消耗。

EFG 被广泛应用于断裂失效问题的模拟[59–61]，避免了有限元在模拟不连续问题时需要重划分网格的问题。Rabczuk 和 Belyschko[62] 基于 EFG 框架，改造了节点的插值函数以考虑不连续自由度，形成 EFG-P 方法，该方法由断裂质点形成裂纹路径，消除了裂纹面的显式表达。结合内聚模型，EFG-P 还被应用于剪切带的模拟[63]。Lee 等[64] 基于自适应 EFG 方法分析了准静态裂纹的扩展。EFG 还被国内外学者应用于弹体侵彻引起材料破坏问题的研究[65,66]。Liu 和 Gao[67] 使用改进的 MLS 近似来简化 MLPG 中本质边界条件的处理，并结合可视准则（visibility criterion）和最大环向应力准则（maximum hoop stress criterion）研究了动态裂纹扩展问题。Liu 等[68] 应用 MLPG 研究了冲击作用下陶瓷材料的破坏问题。Han 等[69] 基于三维 MLPG 动力学程序研究了高速冲击和侵彻问题，并和有限元程序 Dyna3D 进行了比较。

1.4.2 核近似

采用核近似的近似函数可以表达为

$$u^h(\boldsymbol{x})=\int_{\Omega}u(\bar{\boldsymbol{x}})w(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})\,d\Omega_{\bar{\boldsymbol{x}}} \tag{1-4}$$

式中 $w(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})$ 为核函数，它具有半正定性、紧支性和归一性[54]。式 (1-4) 的离散格式为

$$u^h(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{n}w_j(\boldsymbol{x})u_j\triangle V_j=\sum_{j=1}^{n}N_j(\boldsymbol{x})u_j \tag{1-5}$$

式中 n 为节点个数，$\triangle V_j$ 为节点 j 对应区域的体积，$N_j(\boldsymbol{x})$ 即为形函数。

式 (1-4) 的核函数 $w(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})$ 在接近求解域边界时容易被截断，导致核近似在边界附近不满足一致性要求[54]。基于以上考虑，Liu 等人[70] 对式 (1-4) 进行了修正，得到了所谓的重构核近似

$$u^h(\boldsymbol{x})=\int_{\Omega}C(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})w(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})u(\bar{\boldsymbol{x}})d\Omega_{\bar{\boldsymbol{x}}} \tag{1-6}$$

式中 $C(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})$ 为校正函数，它使得式 (1-6) 满足一致性要求。

具有代表性的核近似无网格法有 SPH 方法和重构核近似质点方法（RKPM：Reproducing Kernel Particle Method），它们分别基于式 (1-4) 和式 (1-6) 进行构造。刘桂荣和刘谋斌等[71] 出版了关于 SPH 的专著，SPH 被广泛应用于高速冲击爆炸等问题的研究中，并被加入商业软件 LS-DYNA 和 AUTODYN 中。Randles 等[72] 使用 SPH 研究了冲击成坑，爆炸载荷下材料破碎等问题，同时也指出 SPH 发展中遇到的拉伸不稳定以及边界条件处理困难等问题。Johnson 和 Beissel[73] 基于轴对称正交化公式对 SPH 进行了改进。Dilts[74] 发展了移动最小二乘 SPH（MLSPH）。Rabczuk 等[75] 分别基于 SPH 和 MLSPH 研究了冲击作用下混凝土的破坏行为。RKPM 也被广泛应用于材料破坏等大变形问题的研究中。Liu 等[76,77] 基于小波分析实现了多尺度重构核近似，并应用多尺度 RKPM 对剪切带、断裂损伤等涉及大变形的问题进行了模拟。Wang[78] 使用 RKPM 研究了冲击载荷作用下钢板延脆性破坏模式转变的问题。王东东等[79] 发展了界面加强型 RKPM（interface-enriched RKPM），有效地处理了材料界面的不连续问题。

1.4.3 径向基函数（RBF）近似

采用径向基函数近似的近似函数可以表达为

$$u^h(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}a_i(\boldsymbol{x})\phi_i(r_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i(\boldsymbol{x})\phi_i(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i\|) \tag{1-7}$$

式中 n 是节点数，$\phi_i(r_i)=\phi_i(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i\|)$ 为径向基函数，通过在 n 个节点上均需满足式 (1-7) 的插值条件可以求得系数 $a_i(\boldsymbol{x})$。

径向基函数虽然具有较高的求解精度，但是它为基于全域的方法，求解时需处理满秩的代数矩阵，求解效率不高。相关学者对传统径向基函数近似

做了改进，Wendland[80] 提出紧支径向基函数，Liu[81] 提出径向基点插值方法。Djeukou 和 Estorff[82] 应用径向基函数插值方法研究了压层复合材料剪切破坏问题。Xu 和 Belytschko[83] 基于阶跃函数和 Shepard 函数改造了径向基函数，引入不连续性，并结合水平集方法研究了弹性裂纹等问题。Wen 和 Aliabadi[84] 基于径向基函数近似得到了完整的边界积分完备形式，并研究了动态裂纹扩展问题。

1.4.4 单位分解近似

采用单位分解近似的近似函数可以表达为

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\boldsymbol{x}) \left[u_i + \sum_{j=1}^{m} q_{ij}(\boldsymbol{x}) b_{ij} \right] \tag{1-8}$$

式中 $\phi_i(\boldsymbol{x})$ 为单位分解函数，可以选择有限单元法的形函数、Shepard 函数和 MLS 形函数等进行构造，n 为子域的个数，$q_{ij}(\boldsymbol{x})$ 为多项式基函数，u_i 和 b_{ij} 为待求系数。Melenk 等[35] 取有限元形函数为单位分解函数，构造单位分解有限元法。Duarte 和 Oden[85] 取 MLS 形函数构造单位分解函数，得到 hp 云团法。Duarte 等[86] 基于 hp 云团和单位分解有限元发展了三维动态断裂的模拟方法。Rabczuk 等[87] 基于单位分解近似考虑断裂引起的不连续，使用浸没粒子法（IPM）研究爆炸载荷冲击下壳体的破裂问题。

1.5 物质点法研究进展

物质点法（MPM：Material Point Method）作为一种质点类无网格方法近年来得到了广泛的关注。它最早由 Sulsky 等[88,89] 于 1994 年基于 PIC（Paritcle In Cell）方法[90,91] 发展而来。它与 PIC 方法的区别在于 PIC 方法仅仅使用物质点来跟踪物质界面，相关物理量在欧拉网格上求解。而 MPM 中物质点携带了质量、速度、位置、动量、能量以及应力应变等历史变量，并且材料本构方程也在质点上进行计算。Sulsky 等[88,89] 还基于等效积分弱形式重新推导了离散方程，并采用了显式积分。MPM 本质上是一种 Galerkin 无网格法，同时它采用有限元形函数作为近似函数。最近，廉艳平等[92] 总结了物质点法的理论和应用。

物质点法采用一组质点离散求解区域，动量方程在欧拉背景网格上进行积分，如图1.4所示。每一计算步中，首先物质点和网格一起运动，动量在背景网格节点积分后再映射到物质点上，然后抛弃变形后的网格并重新使用未变

形的网格，进行下一步计算。前者为拉格朗日步，后者为输运步。MPM 不存在拉格朗日有限元网格畸变问题，也不必处理对流项，很适合大变形问题的研究。下面首先介绍物质点法在算法方面的研究进展。

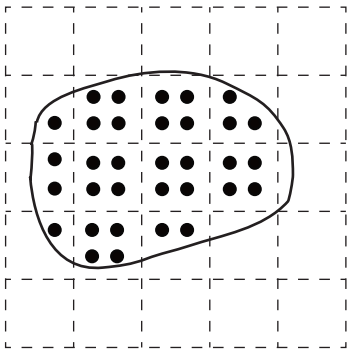


图 1.4 MPM 离散示意图

MPM 最早使用显式积分，为减少计算量，Cummins[93]、Guilkey 等[94] 以及 Sulsky 等[95] 先后发展了 MPM 的隐式算法。MPM 最初采用具有 C^0 连续性的标准 FEM 形函数，当质点跨越背景网格时，形函数导数的不连续性导致跨网格噪音产生。Bardenhagen 等[96] 基于 Petrov-Galerkin 法发展了具有 C^1 连续性的广义物质点法（GIMP：Generalized Interpolation Material Point method）。2012 年 Nair 和 Roy[97] 发展了隐式积分的 GIMP，并应用于超弹性体变形问题的研究。

MPM 由于使用单值速度场，本身具有无滑移接触条件。York 等[98] 提出了一种允许分离的接触算法。Bardenhagen 等[99] 在此基础上考虑了滑动和摩擦，实现了接触、滑移以及分离的全过程描述，并研究了颗粒材料的接触问题。Hu 和 Chen[100] 在分析齿轮啮合接触问题时发展了基于多重网格环境的接触算法。黄鹏等[101,102] 解决了 Bardenhagen 等[99] 的接触算法中接触法向量不共线进而容易造成动量计算不守恒的问题。Ma 等[103] 对 Hu 和 Chen[100] 的接触算法做了改进，发展了局部多重网格的物质点接触算法，有效提高了计算效率；他们同时还改进了物质点法接触判断条件。

MPM 自适应算法也得到了初步发展，Tan 等人[104] 首先提出了二维层级自适应物质点方法，求解了断裂问题中的能量释放率。他们通过改变自适应网格形函数使得背景网格格子允许含有 4~8 个网格节点，但文中并未详细说明其实现方法。Ma 等人[105] 采用结构化自适应网格加密应用框架（SAMRAI：Structured Adaptive Mesh Refinement Application Infrastructure）[106]，通过在粗网格和细网格的过渡区域增加重叠的 ghost 区域来进行信息交互，实现了对背景网格的分级细化，并在此基础上应用 GIMP 研究了纳米压痕问题。Ma 等人[107]

还基于 GIMP，通过结构化网格加密来研究拉伸、应力集中、I 型裂纹附近应力场等问题，他们改变过渡背景网格格子节点的影响域以实现多级背景网格的计算。马上等[108,109] 为了防止极大变形问题中引起的数值断裂问题发展了自适应质点分裂算法。

基于物质点法，国内外学者也发展了一些耦合算法。有限元法相比物质点法在模拟小变形问题时具有较高精度和效率优势。Zhang 等[110] 基于显式有限元，将变形比较大的求解区域覆盖背景网格，其中的有限元节点作为物质点处理，模拟了超高速碰撞问题。廉艳平等[111–114] 继续发展了有限元和物质点的耦合算法，陆续提出了杂交物质点有限元法[111]、耦合物质点有限元法[112]以及自适应物质点有限元法[113]，较好的结合了有限元法模拟小变形问题以及物质点法模拟大变形问题的优势。Guilkey 等[115] 发展了欧拉方法和物质点法的耦合算法，模拟了含能容器的爆炸问题。Guo 和 Yang[116] 发展了 MD 和 MPM 的耦合算法，较好的解决了 MD 和 MPM 握手区的应力波反射问题。

算法的不断完善使得物质点法的应用越来越广泛，目前为止物质点法已经被运用于冲击爆炸[102,109,117–120]、裂纹扩展[121–126]、材料成型[127,128]、边坡稳定[101,129]、多孔介质[130,131]、流固耦合[115,132]、纳米材料[133,134] 以及生物力学[135–137] 等问题和领域的研究中。下面主要介绍物质点法在材料断裂破坏领域的研究进展。

断裂破坏是一种不连续问题，物质点法不存在传统有限元法在模拟此类问题时需要重划分网格的困扰，并且裂纹扩展方向也不会受到网格线的束缚。断裂问题的数值模拟方法可以分为通过计算裂纹尖端特征断裂参数和在连续体本构中引入失效过程来进行[138]。物质点法的断裂问题研究也可以分为这两个方面。

Nairn 及其合作者提出了 CRAMP（CRAcks with Material Points）方法[121,123]，通过在裂纹面两侧施加多重速度场来模拟裂纹的扩展。CRAMP 需要进行裂纹面描述，Nairn 等通过添加额外的无质量质点来描述裂纹。在二维情况下，裂纹对应一连串线段[121]；三维情况下，裂纹由一系列三角形面片构成[123]。CRAMP 通过物质点相对裂纹面的位置来决定其对应的速度场，这是 CRAMP 算法中最耗时的计算部分，特别在三维情况下这种方法显得更加复杂[123]。Nairn 等应用 CRAMP 研究了二维、三维下初始含裂纹试件的裂纹扩展问题，并计算了裂纹尖端应力强度因子 K、J 积分等参数[122,123]。另外，Wang 等[124] 发展了便于和原子方法耦合的非规则物质点法背景计算网格，研究了二维混合型裂纹问题，计算了能量释放率 G 和应力强度因子 K，并与有限元计算结果进行

了比较。Bardenhagen 等[139] 基于 J 积分和内聚模型模拟了动态断裂问题，其裂纹扩展时需要不断插入新的质点以描述裂纹尖端。以上基于裂尖参数计算的方法中，模拟裂纹扩展时材料的变形均相对局限，以此保证了裂纹面描述的简单性和断裂参数计算的有效性。

另一类使用物质点研究材料断裂破坏的方法是以 Sulsky 等[140] 发展起来的脱聚（decohesion）模型为基础的。这种方法不需要裂纹面的显式表达，将不连续性的描述引入到本构方程中，材料破坏面上的界面力通过脱聚模型卸载，卸载结束后的界面质点完全失效并自动构成裂纹面。此方法中，失效质点需同时满足脱聚和连续体本构模型以保证面力平衡条件。Chen 等[141,142] 首先基于脱聚模型应用物质点法研究了脆性材料在冲击作用下的动态破坏问题。Sulsky 和 Schreyer[143] 接着基于同样的方法研究了脆性材料层裂问题。Chen 等[144,145] 接着引入非连续分岔分析作为材料失效的判据并以此计算脱聚面方向，他们基于此方法模拟了薄膜材料脱层的问题。Shen[146] 基于率相关的损伤模型以及脱聚模型模拟了冲击作用下玻璃的破碎问题。以上问题的研究仅仅局限于二维问题，三维情况下脱聚方向的计算较为复杂，模型实现也更为困难。

冲击爆炸是材料发生动态破坏的主要载荷形式，MPM 在冲击爆炸领域也得到了较好的应用。Sulsky 等[89,147] 应用 MPM 研究了 Taylor 杆撞击、钢球对铝靶的侵彻问题。Huang 等[102] 使用接触物质点法模拟了钢弹斜侵彻铝靶以及金属球壳对岩土的侵彻问题。王晓军[118] 在 MPM 中引入 JH2、HJC 和 RHT 材料模型，研究了冲击作用下陶瓷和混凝土的损伤问题。Lian 等[148] 使用 MPM 对爆炸驱动飞片进行了研究，并基于模拟结果对 Gurney 公式进行了修正。Hu 和 Chen[119] 基于 MPM 研究了爆炸作用下混凝土的破坏行为。王宇新[120] 进行了多相介质爆炸冲击响应的物质点法分析。Ma 等[108] 基于自适应质点分裂方案模拟了聚能射流问题。张忠等[149] 使用 MPM 研究了非均质固体炸药的冲击起爆行为。

MPM 的不断发展也促使了一些以 MPM 为计算核心的数值仿真软件的形成，比如 Uintah、NairnFEAMPM 以及 MPM3D 等。Uintah 是美国犹他大学 C-SAFE 研究中心开发的应用于爆炸、燃烧等极端载荷环境模拟的大规模并行化数值仿真软件。NairnFEAMPM 是 Nairn 教授研究组基于 CRAMP 的相关工作开发的有限元、物质点法仿真平台。MPM3D 是清华大学张雄教授课题组基于 C++ 开发的三维显式并行化物质点法数值仿真软件[150]。本文的工作是以 MPM3D 为基础进行的。

综上可以看出物质点法结合了拉格朗日和欧拉描述的优点，适合于材料

破坏等涉及大变形的问题研究。但材料局部化破坏的物质点法研究还有待完善，包括物质点法计算效率以及破坏模型描述等方面，相关研究工作还有待进一步开展。

1.6 本文主要内容

本文的工作主要针对以下两个方面的问题：（1）在局部冲击等引起的材料破坏中，材料的大变形局限在冲击碰撞区域，为提高局部描述精度往往需要整体加密计算网格从而导致计算效率迅速下降。另外单一固定的背景网格在这类动态问题模拟中存在较多空置的网格格子，造成了计算资源的浪费。（2）目前基于物质点法的断裂问题分析局限在二维简单问题，特别是对于三维延性断裂以及涉及大变形的破碎等问题，其模型描述还不够准确。

本文的主要内容安排如下：

第一章引言，介绍研究背景与意义。介绍了材料破坏行为的基本概念以及相关数值算法的研究现状。介绍了无网格法的分类。重点介绍了物质点法的研究进展及其在材料破坏问题中的应用。

第二章物质点法，介绍了物质点法的基本理论，包括控制方程、离散格式、时间积分、计算流程、应力更新、插值函数以及接触算法等。介绍了 Mises 塑性流动理论以及几种本文中涉及的本构模型。提出了基于背景网格的物质点前后处理方法。

第三章局部化问题的多级背景网格物质点法，为提高局部破坏问题的计算效率，提出了基于悬点的多级背景网格物质点法，并提出与之相适应的质点分裂方案。在局部破坏区域使用高密度的网格和质点计算，而远端则使用较粗的网格和质点。基于多级背景网格物质点法研究了弹性波传播、Taylor 杆撞击以及斜侵彻等问题。

第四章冲击侵彻问题的多重移动网格物质点法，为解决此类问题模拟中空间网格利用率不高的问题，提出了多重移动网格物质点法，模拟时允许在同一体系下存在多套计算网格，结合改进的移动网格技术，增强了物质点法背景网格的灵活性。基于多重移动背景网格物质点法研究了弹丸侵彻薄板，弹体侵彻多层薄板的问题。

第五章金属延性断裂的物质点法模拟，发展了三维脱聚模型，结合多级背景网格物质点法研究了三维延性断裂问题，比较了 I 型、II 型以及 I 型 II 型混合失效模式对裂纹扩展方式的影响。另外本章还基于脱聚模型研究了局部

剪切带的形成和扩展。

第六章金属破碎行为的物质点法模拟，基于考虑初始随机微观缺陷的 Gurson 模型和 Weibull 随机失效研究了爆炸载荷下材料的破碎行为，给出了局部裂纹形成、扩展、分叉、交汇直至产生碎片的过程。同时提出了基于背景网格的高效碎片统计方案。

第七章全文总结。对全文工作进行总结，提炼出创新点并指出进一步研究的方向。

第 2 章 物质点法

物质点法采用拉格朗日质点离散连续体，采用欧拉网格积分动量方程和求解空间导数，采用基于背景网格的有限元插值函数，其本构关系在质点上进行计算。物质点法可以看做是采用物质点积分的特殊有限元法。本章以更新拉格朗日格式为基础系统介绍了物质点法并提出了基于背景网格的物质点前后处理方法。

2.1 控制方程

拉格朗日方法包括完全的和更新的拉格朗日格式。两者主要区别在于前者的参考构形为初始构形，而后者的参考构形为现时构形。更新的拉格朗日格式在现时构形上积分虚功方程并且物理量导数均为空间坐标导数[25]。更新拉格朗日格式下的控制方程首先包含质量、动量以及能量三大守恒方程，分别如下：

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{2-1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\boldsymbol{b}=\rho\boldsymbol{a} \tag{2-2}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D} \tag{2-3}$$

式中 ρ 为密度， $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 分别是速度和加速度矢量， $\boldsymbol{b}$ 为体力矢量， e 为物体单位内能， $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 分别为 Cauchy 应力和变形率张量。 $\boldsymbol{\sigma}$ 可以分为偏量和球量部分

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{S}-p\boldsymbol{I} \tag{2-4}$$

式中 $\boldsymbol{S}$ 为偏应力张量， $p=-\sigma_m$ 为压力， $\sigma_m=\frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{I}$ 为平均应力。 $\boldsymbol{D}$ 在更新的拉格朗日格式下即为应变率张量

$$\boldsymbol{D}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\nabla+\nabla\boldsymbol{v}) \tag{2-5}$$

本构关系方程为：

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla}=\boldsymbol{\sigma}^{\nabla}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}},\boldsymbol{\sigma},\mathrm{etc.}) \tag{2-6}$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla}$ 为 Jaumann 应力率张量。

边界条件方程为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}|_{\Gamma_t} = \bar{\boldsymbol{t}} \\ \boldsymbol{v}|_{\Gamma_u} = \bar{\boldsymbol{v}} \end{cases} \tag{2-7}$$

式中 Γ_t 和 Γ_u 分别为面力边界以及速度边界，$\boldsymbol{n}$ 是面力边界外法线方向。

初始条件方程为：

$$\boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0, \quad \boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0 \tag{2-8}$$

2.2 方程离散

物质点法通过一系列质点离散求解区域 Ω，质点在运动过程中所携带的质量不变，因此质量守恒方程 (2-1) 自动满足。取虚位移 $\delta\boldsymbol{u}$ 为权函数，采用加权余量法建立动量方程 (2-2) 的等效积分弱形式

$$\delta\Pi = \int_\Omega \rho\boldsymbol{a}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}:\nabla\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \rho\boldsymbol{b}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t}\rho\bar{\boldsymbol{t}}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{2-9}$$

质点 p 的变量可以由网格节点 i 的变量插值得到，质点 p 的位移 $\boldsymbol{u}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$ 可以表达为

$$\boldsymbol{u}_p = N_{ip}\boldsymbol{u}_i \tag{2-10}$$

$$\boldsymbol{v}_p = \dot{\boldsymbol{u}}_p = \nabla N_{ip}\boldsymbol{u}_i \tag{2-11}$$

式中 N_{ip} 为背景网格 i 节点形函数在质点 p 处的值。物质点法中使用标准有限元形函数即

$$N_{ip} = \frac{1}{8}(1+\xi_p\xi_i)(1+\eta_p\eta_i)(1+\zeta_p\zeta_i); \quad i = 1,2,\cdots 8 \tag{2-12}$$

式中 (ξ_p,η_p,ζ_p) 为质点 p 在网格格子中的自然坐标，ξ_i，η_i 和 ζ_i 在网格节点上取 ±1。

使用质点离散后，物体的密度可以表示为

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \sum_{p=1}^{n_p} m_p\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_p) \tag{2-13}$$

式中 n_p 为质点个数，m_p 为质点质量，$\boldsymbol{x}_p$ 为质点位置。将式 (2-10)，(2-11) 和 (2-13) 代入弱形式 (2-9)，使用集中质量阵并由 $\delta\boldsymbol{u}$ 的任意性得到

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{int}} + \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{ext}} \tag{2-14}$$

式中 $\boldsymbol{p}_i$ 为节点 i 的动量， $\boldsymbol{f}_i^{\text{int}}$ 和 $\boldsymbol{f}_i^{\text{ext}}$ 分别为节点内力和节点外力。

$$\boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{ip} \boldsymbol{v}_p \tag{2-15}$$

$$\boldsymbol{f}_i^{\text{int}} = -\sum_{p=1}^{n_p} \nabla N_{ip} \cdot \boldsymbol{\sigma}_p \frac{m_p}{\rho_p} \tag{2-16}$$

$$\boldsymbol{f}_i^{\text{ext}} = \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{ip} \boldsymbol{b}_p + \sum_{p=1}^{n_p} N_{ip} h^{-1} \bar{\boldsymbol{t}}_p^s \frac{m_p}{\rho_p} \tag{2-17}$$

式 (2-15) 中 m_i 为网格节点质量

$$m_i = \sum_{j=1}^{n_g} \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{ip} N_{jp} = \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{ip} \tag{2-18}$$

其中 n_g 为网格节点个数，式 (2-17) 中 h 为积分转化时引入的边界厚度。

2.3 时间积分

本文基于显式时间积分，在材料局部破坏问题中，特别是冲击波引起的动态破坏中，显式积分有助于捕捉应力波。MPM3D 采用可变时间步长的中心差分法进行积分，如图2.1所示，有 $\Delta t^{n+1/2} = t^{n+1} - t^n$， $\Delta t^n = t^{n+1/2} - t^{n-1/2} = \frac{1}{2}(\Delta t^{n-1/2} + \Delta t^{n+1/2})$。

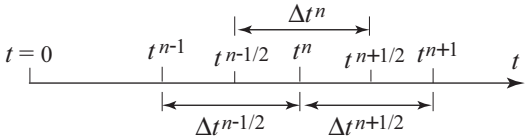


图 2.1 中心差分法时间步长示意

动量方程 (2-14) 积分可以表达为

$$\boldsymbol{p}_i^{n+1/2} = \boldsymbol{p}_i^{n-1/2} + \left(\boldsymbol{f}_i^{\text{int},n} + \boldsymbol{f}_i^{\text{ext},n} \right) \triangle t^n \tag{2-19}$$

式中上标 $n-1/2$， n 和 $n+1/2$ 分别表示相应变量在 $t^{n-1/2}$， t^n 和 $t^{n+1/2}$ 时刻的值。

物质点的速度和位置分别由背景网格节点的加速度和速度来更新

$$\boldsymbol{v}_p^{n+1/2} = \boldsymbol{v}_p^{n-1/2} + \sum_{i=1}^{n_g} N_{ip} \left(\boldsymbol{f}_i^{\text{int},n} + \boldsymbol{f}_i^{\text{ext},n} \right) \triangle t^n / m_i \tag{2-20}$$

$$\boldsymbol{x}_p^{n+1} = \boldsymbol{x}_p^n + \sum_{i=1}^{n_g} N_{ip} \boldsymbol{p}_i^{n+1/2} \triangle t^{n+1/2} / m_i \tag{2-21}$$

式中 n_g 为网格节点数。

为保证显式积分的稳定性，临界时间步长 Δt_{cr} 由 CFL（Courant-Friedrichs-Lewy）条件确定

$$\Delta t_{\mathrm{cr}} = \min_e \frac{d_e}{c + |\boldsymbol{v}_p|} \tag{2-22}$$

式中 d_e 为背景网格格子的尺寸， c 为声速。这里考虑了质点速度 $\boldsymbol{v}_p$ 的影响，在冲击爆炸载荷下的材料破坏过程中质点速度往往比较大而不应当被忽略，这一点和有限单元法不同。对于线弹性材料，声速表达式为

$$c = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} \tag{2-23}$$

而其他材料声速可以结合状态方程，根据压力及密度的关系计算[151]。

2.4 计算流程

物质点法的计算流程根据应力更新与动量方程计算的先后顺序可以分为 USF（Update Stress First）、USL （Update Stress Last）以及 MUSL（Modified Update Stress Last）三种形式，Bardenhagen 和 Nairn[121,152] 比较了这三种不同的方法，结果表明在节点动量更新前更新应力的 USL 格式较不稳定，其数值耗散较强，而在节点动量更新后更新应力的 USF 和 MUSL 的能量守恒性较好。本文的工作都是基于 MUSL 格式进行的。下面以 MUSL 格式介绍物质点法的计算流程。

1. 在重新定义的规则未变形背景网格上求解节点质量和节点动量

$$m_i^n = \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{ip}^n \tag{2-24}$$

$$\boldsymbol{p}_i^{n-1/2} = \sum_{p=1}^{n_p} m_p \boldsymbol{v}_p^{n-1/2} N_{ip}^n \tag{2-25}$$

2. 施加本质边界条件，令固定边界上的节点 $\boldsymbol{p}_i^{n-1/2} = \boldsymbol{0}$。
3. 计算背景网格节点力 $\boldsymbol{f}_i^n$，由式 (2-16) 和 (2-17) 分别更新节点内力 $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{int},n}$ 和外力 $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{ext},n}$

$$\boldsymbol{f}_i^n = \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{int},n} + \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{ext},n} \tag{2-26}$$

对于固定边界上的节点，令 $\boldsymbol{f}_i^n = 0$。

4. 积分背景网格节点动量方程

$$\boldsymbol{p}_i^{n+1/2} = \boldsymbol{p}_i^{n-1/2} + \boldsymbol{f}_i^n \Delta t^n \tag{2-27}$$

5. 更新物质点的速度和位置

$$\boldsymbol{v}_p^{n+1/2} = \boldsymbol{v}_p^{n-1/2} + \sum_{i=1}^{n_g} \frac{\boldsymbol{f}_i^n N_{ip}^n}{m_i^n} \Delta t^n \tag{2-28}$$

$$\boldsymbol{x}_p^{n+1} = \boldsymbol{x}_p^n + \sum_{i=1}^{n_g} \frac{\boldsymbol{p}_i^{n+1/2} N_{ip}^n}{m_i^n} \Delta t^{n+1/2} \tag{2-29}$$

6. 通过更新后的质点速度再次修正背景网格节点动量并施加边界条件

$$\boldsymbol{p}_i^{n+1/2} = \sum_{p=1}^{n_p} m_p \boldsymbol{v}_p^{n+1/2} N_{ip}^n \tag{2-30}$$

7. 更新背景网格节点速度和质点应力

(a) 更新背景网格节点速度 $v_i^{n+1/2}$

$$\boldsymbol{v}_i^{n+1/2} = \boldsymbol{p}_i^{n+1/2} / m_i^n \tag{2-31}$$

(b) 计算物质点应变增量 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p^{n+1/2}$ 以及旋量增量 $\Delta\boldsymbol{\Omega}_p^{n+1/2}$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_i^{n+1/2} \nabla N_{ip}^n + \nabla N_{ip}^n \boldsymbol{v}_i^{n+1/2}) \Delta t^{n+1/2} \tag{2-32}$$

$$\Delta\boldsymbol{\Omega}_p^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_i^{n+1/2} \nabla N_{ip}^n - \nabla N_{ip}^n \boldsymbol{v}_i^{n+1/2}) \Delta t^{n+1/2} \tag{2-33}$$

(c) 更新物质点密度

$$\rho_p^{n+1} = \rho_p^n / (1 + \mathrm{tr}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p^{n+1/2}\right)) \tag{2-34}$$

(d) 由 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p^{n+1/2}$、$\Delta\boldsymbol{\Omega}_p^{n+1/2}$ 以及相应的本构关系更新应力，见第2.5节。

8. 此时丢弃变形后的背景网格，进入下一时间步更新。

2.5 应力更新

应力的更新主要包偏应力更新和压力更新两部分，在冲击爆炸等强载荷作用下材料的压力比强度大很多，压力可以通过状态方程描述，偏应力则可以通过本构关系来描述。

t^{n+1} 时刻的应力更新为

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{n} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathrm{d}t \tag{2-35}$$

式中 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 为 Cauchy 应力物质导数，$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 不是客观张量，在本构关系中需使用 Jaumann 应力率 $\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{\nabla}$，它们的关系是

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^{\nabla} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\Omega} \tag{2-36}$$

其中 $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\nabla - \nabla\boldsymbol{v})$ 是旋率张量。

t^{n+1} 时刻的应力 $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$ 更新为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}^{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}^{n} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{n+1/2}\Delta t^{n+1/2} \\
&= \boldsymbol{\sigma}^{R^n} + \boldsymbol{\sigma}^{\nabla n+1/2}\Delta t^{n+1/2} \\
&= \boldsymbol{\sigma}^{R^n} + \boldsymbol{C} : \boldsymbol{D}^{e^{n+1/2}}\Delta t^{n+1/2} \\
&= \boldsymbol{\sigma}^{t^{n+1}} - \boldsymbol{C} : \boldsymbol{D}^{p^{n+1/2}}\Delta t^{n+1/2}
\end{aligned} \tag{2-37}$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}^{R^n}$ 为 t^n 时刻旋转后的应力张量

$$\boldsymbol{\sigma}^{R^n} = \boldsymbol{\sigma}^{n} + (\boldsymbol{\Omega}^{n+1/2}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{n} - \boldsymbol{\sigma}^{n}\cdot\Omega^{n+1/2})\Delta t^{n+1/2} \tag{2-38}$$

$\boldsymbol{C}$ 为弹性张量，$\boldsymbol{D}^{e}$ 和 $\boldsymbol{D}^{p}$ 分别为弹性应变率张量和塑性应变率张量，且 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^{e} + \boldsymbol{D}^{p}$，$\boldsymbol{\sigma}^{t^{n+1}}$ 为 t^{n+1} 时刻的弹性试探应力

$$\boldsymbol{\sigma}^{t^{n+1}} = \boldsymbol{\sigma}^{R^n} + \boldsymbol{C} : \boldsymbol{D}^{n+1/2}\Delta t^{n+1/2} \tag{2-39}$$

在冲击爆炸引起的材料破坏问题中，往往偏应力 $\boldsymbol{S}$ 和压力 p 分别使用本构关系和状态方程（EOS：equation of state）单独进行更新。由式 (2-37) 得 $\boldsymbol{S}$ 的更新格式如下

$$\boldsymbol{S}^{n+1} = \boldsymbol{S}^{R^n} + \boldsymbol{S}^{\nabla n+1/2}\Delta t^{n+1/2} \tag{2-40}$$

其中

$$\boldsymbol{S}^{R^n} = \boldsymbol{S}^{n} + (\boldsymbol{\Omega}^{n+1/2}\cdot\boldsymbol{S}^{n} - \boldsymbol{S}^{n}\cdot\boldsymbol{\Omega}^{n+1/2})\Delta t^{n+1/2} \tag{2-41}$$

压力 p 通过 EOS 更新，EOS 可以表达成相对体积 V、单位初始体积内能 E（或者温度 T）的形式

$$p = p(V,E) = p(V,T) \tag{2-42}$$

在计算压力 p 前，首先要由式 (2-3) 更新能量

$$\begin{aligned} e^{n+1} &= e^n + V_0 \dot{E}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \\ &= e^n + \left[V^{n+1/2} S^{n+1/2} : \boldsymbol{D}^{n+1/2} - V^{n+1/2} (p^{n+1/2} + q^{n+1/2}) \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{D}^{n+1/2} \right) \right] \Delta t^{n+1/2} \end{aligned} \tag{2-43}$$

其中 V_0 和 V^n 分别为质点初始时刻和 t^n 时刻的体积，且

$$V^{n+1/2} = \frac{1}{2}(V^n + V^{n+1}) \tag{2-44}$$

$$\boldsymbol{S}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{S}^n + \boldsymbol{S}^{n+1}) \tag{2-45}$$

$$p^{n+1/2} = (p^n + p^{n+1})/2 \tag{2-46}$$

$$V^{n+1/2} \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{D}^{n+1/2} \right) \Delta t^{n+1/2} = V^{n+1} - V^n = \Delta V \tag{2-47}$$

则 e^{n+1} 可进一步表述为

$$e^{n+1} = e^{*n+1} - \frac{1}{2} \Delta V p^{n+1} \tag{2-48}$$

其中 e^{*n+1} 为内能 t^{n+1} 时刻的试探值

$$e^{*n+1} = e^n + V^{n+1/2} \boldsymbol{S}^{n+1/2} : \boldsymbol{D}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} - \frac{1}{2} \Delta V p^n - \Delta V q^{n+1/2} \tag{2-49}$$

2.6 本构关系

2.6.1 弹性模型

弹性材料 Jaumann 应力率 $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla}$ 和应变率 $\boldsymbol{D}$ 的关系为

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{D} \tag{2-50}$$

式中 $\boldsymbol{C}$ 为弹性张量

$$\boldsymbol{C} = 2G\boldsymbol{I} + \left(K - \frac{2}{3} G \right) \boldsymbol{\delta\delta} \tag{2-51}$$

$G = E/2(1+\nu)$， $K = E/3(1-2\nu)$ 分别为材料的剪切模量和体积模量。

应变率张量 $\boldsymbol{D}$ 可以分解为

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_s + D_m \boldsymbol{I} \tag{2-52}$$

其中 $D_m = \frac{1}{3}\boldsymbol{D}:\boldsymbol{I}$，由于不存在塑性变形，则式 (2-39) 的试探应力即为弹性模型的更新应力，即

$$\boldsymbol{S}^{n+1} = \boldsymbol{S}^{R^n} + 2G\boldsymbol{D}_s^{n+1/2}\Delta t^{n+1/2} \tag{2-53}$$

$$\sigma_m^{n+1} = \sigma_m^n + 3KD_m^{n+1/2}\Delta t^{n+1/2} \tag{2-54}$$

2.6.2 Mises 塑性流动

Von Mises 流动又称作 J_2 流动，J_2 流动理论常用来描述金属的塑性行为，其屈服函数表达式为

$$f = \sqrt{3J_2} - \sigma_y(\varepsilon^p) = 0 \tag{2-55}$$

式中 $J_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{S}:\boldsymbol{S} = \frac{1}{3}s^2$，$s$ 为 Mises 等效应力，应力 σ_y 为屈服应力，ε^p 为等效塑性应变。J_2 流动理论的内变量为 ε^p。

由相关联塑性流动得塑性应变率为

$$\boldsymbol{D}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda}\sqrt{\frac{3}{2}}\boldsymbol{N} \tag{2-56}$$

式中 $\boldsymbol{N} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\boldsymbol{s}}{s}$ 为 J_2 流动屈服面法向的单位张量。由于 J_2 流动理论与压力无关，$\boldsymbol{D}^p$ 即为塑性应变率的偏量。J_2 流动屈服面为主应力空间的一圆柱面，其轴线为 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$。因此屈服面的法向即为径向，这里采用径向返回法[25] 进行应力更新。

由式 (2-56) 和 (2-37) 得，偏应力的更新公式为

$$\boldsymbol{S}^{n+1} = \boldsymbol{S}^{t^{n+1}} - \sqrt{6}G\Delta\lambda^{n+1}\boldsymbol{N}^{n+1} \tag{2-57}$$

式中 $\boldsymbol{S}^{t^{n+1}}$ 为 t^{n+1} 时刻的弹性试探偏应力张量，由式 (2-53) 求得。在式 (2-57) 两边同时双点积 $\boldsymbol{N}^{n+1}$ 后可得到等效应力 s 的更新公式为

$$s^{n+1} = s^{t^{n+1}} - 3G\Delta\lambda^{n+1} \tag{2-58}$$

式中弹性试探等效应力 $s^{t^{n+1}} = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{S}^{t^{n+1}}:\boldsymbol{S}^{t^{n+1}}}$。

将式 (2-58) 代入式 (2-55) 中得

$$f\left(\Delta\lambda^{n+1}\right) = s^{t^{n+1}} - 3G\Delta\lambda^{n+1} - \sigma_y(\varepsilon^{p^{n+1}}) = 0 \tag{2-59}$$

由上式的一阶泰勒展开可以求得 $\Delta\lambda^{n+1}$

$$\Delta\lambda^{n+1} = -f^{t^{n+1}} \Big/ \frac{\partial f\left(\Delta\lambda^{n+1}\right)}{\partial\Delta\lambda^{n+1}} = \frac{f^{t^{n+1}}}{3G + E^p\left(\varepsilon^{p^{n+1}}\right)} \tag{2-60}$$

式中 $E^p = \frac{d\sigma_y}{d\varepsilon^p}|_{\varepsilon^p=\varepsilon^{p^{n+1}}}$ 为材料的塑性模量，对于线性强化弹塑性模型，E^p 为一常数。

等效塑性应变率 $\dot{\varepsilon}^p$ 可表示为

$$\dot{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{D}^p : \boldsymbol{D}^p} = \dot{\lambda} \tag{2-61}$$

则等效塑性应变增量更新为 $\triangle\varepsilon^p = \Delta\lambda^{n+1}$。

对于非线性强化弹塑性模型，应进行迭代求解。

2.6.3 Johnson-Cook 模型

金属材料的屈服强度具有应变率强化以及热软化效应，Johnson-Cook 模型[153] 考虑了应变率和温度对屈服强度的影响，其屈服应力表示为

$$\sigma_y = (A + B\varepsilon^{pn})(1 + C\ln\dot{\varepsilon}^*)(1 - T^{*m}) \tag{2-62}$$

式中 ε^p 为等效塑性应变。$\dot{\varepsilon}^*$ 为无量纲化的等效塑性应变率

$$\dot{\varepsilon}^* = \dot{\varepsilon}^p / \dot{\varepsilon}_0 \tag{2-63}$$

其中 $\dot{\varepsilon}_0$ 为参考应变率，取 $1\mathrm{s}^{-1}$。T^* 为无量纲化的温度

$$T^* = (T - T_r)/(T_m - T_r) \in [0, 1] \tag{2-64}$$

其中 T_r 和 T_m 分别是室温和金属材料熔化温度。A，B，n，C，m 为材料常数，可以通过扭转实验、Hopkinson 杆实验、准静态拉伸实验以及 Taylor 杆碰撞实验来确定。

2.7 状态方程

2.7.1 Mie-Grüneisen 状态方程

Mie-Grüneisen 状态方程常用来描述金属材料在冲击爆炸载荷下的热力学行为，它可以通过统计力学以及热力学的方法得到[6]

$$p = p_H(1 - \frac{\gamma\mu}{2}) + \gamma_0 E \tag{2-65}$$

式中 $E = \rho_0 e$，ρ_0 为初始密度，e 为单位质量内能，γ 为 Grüneisen 常数，且满足 $\gamma\rho = \gamma_0\rho_0$，$\mu = \rho/\rho_0 - 1$ 为压缩系数。p_H 为 Hugoniot 曲线上点的压力，可

以表达为

$$p_H = \frac{\rho_0 c_0^2 \mu(1+\mu)}{[1-(s-1)\mu]^2} \tag{2-66}$$

c_0， s 以及 γ_0 即为 Mie-Grüneisen 状态方程参数。

2.7.2 JWL 状态方程

JWL（Jones-Wilkins-Lee）状态方程[154] 被广泛用于爆炸力学中计算爆轰产物压力 p， p 与爆轰产物内能以及体积有如下的关系：

$$p = A(1-\frac{\omega}{R_1 V})e^{-R_1 V} + B(1-\frac{\omega}{R_2 V})e^{-R_2 V} + \frac{\omega E}{V} \tag{2-67}$$

其中 ω， A， B， R_1 和 R_2 为材料参数，可以通过圆筒试验获得。

2.8 插值函数

MPM3D 中实现了两种插值函数，一种是有限元线性插值函数，如式2-12所示；另一种是 Bardenhagen 等[155] 基于 Petrov-Galerkin 方法得到的 GIMP 插值函数，它考虑了质点支撑域的影响，令质点的特征函数为 $\chi_p(x)$，物理量 f 可以近似为

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_p f_p \chi_p(\boldsymbol{x}) \tag{2-68}$$

式中 f_p 为质点 p 处的物理量值。

GIMP 选取的试探函数为特征函数 $\chi_p(\boldsymbol{x})$，而测试函数为背景网格形函数 $N_i(\boldsymbol{x})$，则 MPM 中原来的 N_{ip} 被替代为

$$S_{ip} = \frac{1}{V_p}\int_{\Omega_p \cap \Omega} \chi_p(\boldsymbol{x}) N_i(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\Omega \tag{2-69}$$

式中 V_p 为质点 p 的体积

$$V_p = \int_{\Omega_p \cap \Omega} \chi_p(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}V \tag{2-70}$$

GIMP 形函数 S_i 与背景网格形函数 N_i 相比，拥有更大的支持域且更为光滑。当 GIMP 满足如下条件时便退化为原始 MPM：

$$\chi_p(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_p)V_p \tag{2-71}$$

背景网格形函数 $N_i(x)$ 一般取为线性函数，在一维情况下

$$N_i(x)=\begin{cases}0 & |x-x_i|\geqslant L\\ 1+(x-x_i)/L & -L<x-x_i\leqslant 0\\ 1-(x-x_i)/L & 0<x-x_i<L\end{cases} \tag{2-72}$$

式中 L 为背景网格格子长度。特征函数 $\chi_p(x)$ 取最简单的形式

$$\chi_p(x)=\begin{cases}1 & x\in\Omega_p\\ 0 & x\notin\Omega_p\end{cases} \tag{2-73}$$

将式2-72和2-73代入到式2-69中可以求得

$$S_{ip}=\begin{cases}0 & |x_p-x_i|\geqslant L+l_p\\ \frac{(L+l_p+(x_p-x_i))^2}{4Ll_p} & -L-l_p<x_p-x_i\leqslant -L+l_p\\ 1+\frac{x_p-x_i}{L} & -L+l_p<x_p-x_i\leqslant -l_p\\ 1-\frac{(x_p-x_i)^2+l_p^2}{2Ll_p} & -l_p<x_p-x_i\leqslant l_p\\ 1-\frac{x_p-x_i}{L} & l_p<x_p-x_i\leqslant L-l_p\\ \frac{(L+l_p-(x_p-x_i))^2}{4Ll_p} & L-l_p<x_p-x_i\leqslant L+l_p\end{cases} \tag{2-74}$$

式中 $2l_p$ 为质点 p 的特征长度。S_{ip} 具有 C^1 连续性，其形状与 MPM 形函数的比较如图2.2所示。

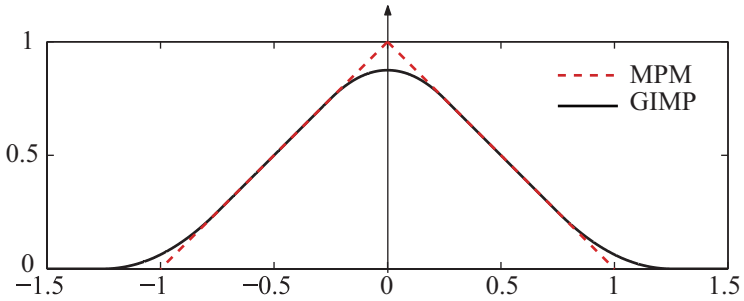


图 2.2　MPM 与 GIMP 的形函数比较

在三维问题情况下，S_{ip} 可取

$$S_{ip}(\boldsymbol{x})=S_{ip}(\xi)S_{ip}(\eta)S_{ip}(\zeta) \tag{2-75}$$

式中 $\xi=|(x_p-x_i)/L|$，$\eta=|(y_p-y_i)/L|$，$\zeta=|(z_p-z_i)/L|$。

2.9 接触算法

MPM 在质点和网格节点间使用单值映射函数，因此标准 MPM 自动满足无滑移接触条件。但这种作用往往过于黏着，导致接触力计算失真，在计算冲击侵彻问题时相当于给撞击体增加了额外的人工阻力[89]。本文采用的接触算法基于 Pan 等人[156] 以及 Huang 等人[102] 工作，并使用了 Ma 等人[103] 提出的局部多重网格接触算法。

当两个物体的动量投影到同一个网格节点上时，接触即发生，如图所示。设可能发生接触的两个物体 I 和 II 的投影节点速度分别为 $\boldsymbol{v}_i^1$ 和 $\boldsymbol{v}_i^2$，则物体 I 和 II 的接触探测判据为

$$\left(\boldsymbol{v}_i^1-\boldsymbol{v}_i^2\right)\cdot\boldsymbol{n}_i^1>0 \tag{2-76}$$

式中 $\boldsymbol{n}_i^1$ 为物体 I 的在边界节点 i 处的单位外法线向量。

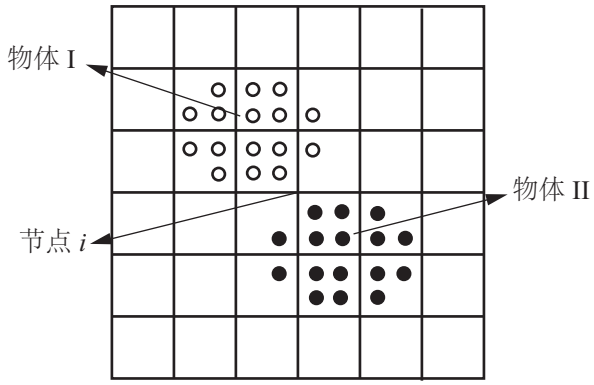


图 2.3 物质点法接触判断

由动量守恒条件，接触物体的节点动量更新为

$$\bar{\boldsymbol{p}}_i^1 = \boldsymbol{p}_i^1-\frac{m_i^2\boldsymbol{p}_i^1-m_i^1\boldsymbol{p}_i^2}{m_i^1+m_i^2}\cdot\boldsymbol{n}_i^1\boldsymbol{n}_i^1 \tag{2-77}$$

$$\bar{\boldsymbol{p}}_i^2 = \boldsymbol{p}_i^2+\frac{m_i^2\boldsymbol{p}_i^1-m_i^1\boldsymbol{p}_i^2}{m_i^1+m_i^2}\cdot\boldsymbol{n}_i^1\boldsymbol{n}_i^1 \tag{2-78}$$

接触过程中物体 I 和物体 II 的法向加速度需相等，则节点力可以更新为

$$\bar{\boldsymbol{f}}_i^1 = \boldsymbol{f}_i^1-f_i^{\mathrm{nor}}\boldsymbol{n}_i^1-f_i^{\mathrm{fric}}\boldsymbol{s}_i^1 \tag{2-79}$$

$$\bar{\boldsymbol{f}}_i^2 = \boldsymbol{f}_i^2+f_i^{\mathrm{nor}}\boldsymbol{n}_i^1+f_i^{\mathrm{fric}}\boldsymbol{s}_i^1 \tag{2-80}$$

式中

$$f_i^{\text{nor}} = \frac{m_i^2 \boldsymbol{f}_i^{1,\text{int}} - m_i^1 \boldsymbol{f}_i^{2,\text{int}}}{m_i^1 + m_i^2} \cdot \boldsymbol{n}_i^1 \tag{2-81}$$

$$f_i^{\text{fric}} = \min\left(\mu f_i^{\text{nor}}, f_i^{\text{tan}}\right) \tag{2-82}$$

$$f_i^{\text{tan}} = \frac{\left(m_i^2 \boldsymbol{p}_i^1 - m_i^1 \boldsymbol{p}_i^2 + \left(m_i^2 \boldsymbol{f}_i^{1,\text{int}} - m_i^1 \boldsymbol{f}_i^{2,\text{int}}\right) \Delta t\right) \cdot \boldsymbol{s}_i^1}{\left(m_i^1 + m_i^2\right) \Delta t} \tag{2-83}$$

其中 $\boldsymbol{s}_i^1$ 为物体 I 的在边界节点 i 处的单位切线向量，μ 是摩擦系数。

接触面单位外法线方向向量可以通过相应物体的节点质量梯度求得[157]

$$\hat{\boldsymbol{n}}_i^b = \frac{1}{|\sum_p \nabla N_{ip} m_p^b|} \sum_p \nabla N_{ip} m_p^b \quad b = 1,2 \tag{2-84}$$

式中 m_p^b 为物体 b 中质点 p 的质量。为保证接触算法的动量守恒，接触面外法线方向需满足共线条件

$$\sum_{b=1}^{2} \boldsymbol{n}_i^b = 0 \tag{2-85}$$

实施过程中常用以下方法来保证式 (2-85) 得到满足[101]：

1. 当物体 I 的刚度比物体 II 的刚度大很多时，令 $\boldsymbol{n}_i^1 = -\boldsymbol{n}_i^2 = \hat{\boldsymbol{n}}_i^1$。
2. 当物体 I 的接触面为平面或凸面，而物体 II 的接触面为凹面时，令 $\boldsymbol{n}_i^1 = -\boldsymbol{n}_i^2 = \hat{\boldsymbol{n}}_i^1$。

2.10 物质点法前后处理技术

MPM3D[150] 提供了丰富的实体建模功能，用户可以方便的离散长方体、圆柱体、球、圆台、卵形体、三棱柱等实体模型，但是对于复杂结构的建模质点类方法将遇到一定的困难。宫伟伟等[158] 基于微型 -CT 扫描建立了复杂的泡沫物质点模型，但对于一些由基本体构成的结构，其理想的建模方案是直接通过基本体之间的布尔运算进行。实体建模在 CAD/CAE/CAM 的中发挥着重要的作用，而几乎所有的实体建模都支持并（union），交（intersection）以及差（difference）的布尔运算。布尔运算通过所谓的界面评定和界面合并的程序来表征新物体的边界，这是实体建模程序中最复杂的模块[159]。但对于物质点等质点类方法来说，传统的布尔运算算法不能直接应用，需要提出相应的质点布尔运算算法，使得数值模拟方法能够分析更为复杂的结构，拓展其应用范围。

本文从物质点法出发，提出了基于虚拟背景网格的布尔运算算法，通过虚拟背景网格寻找不同物体的交界面，标记出需要删除和保留的质点，从而完成并、交和差的操作。物质点布尔运算建模方法避免了质点之间的比较，实现中将质点定位到虚拟背景网格中的某个格子中，从而提高建模效率。

物质点法中，物质点携带了应力、变形、能量等历史信息，结果可视化时通过将这些历史信息输出到物质点上来完成。由于无网格方法是一种基于点的数值计算方法，各离散点之间没有联结信息，其数值结果的可视化后处理较为困难。基于质点的后处理方法容易造成空间信息的间断，形成散乱的感觉。史宝军等人[160]应用 Delaunay 三角化的原理，实现了具有散乱数据分布的无网格方法数值结果的可视化表示。而另一方面，由于标准物质点法背景网格采用一阶线性形函数，导致其空间导数不连续，当物质点跨越背景网格时会产生数值噪声。后处理时直接显示质点的历史变量值，相比于商用有限元程序少了类似于应力抹平的过程，后处理时容易会出现噪点。本文提出基于背景网格的后处理技术，将质点的历史信息映射到背景网格节点上输出，有效抑制了噪声。

2.10.1 基于背景网格的前处理建模

这里通过虚拟背景网格来确定粒子的位置，建立格子间距为质点大小的虚拟背景网格来搜索定位粒子。在正交布点的情况下，每个质点对应唯一的背景网格格子。对于物体 A 和 B，如果进行 A-B 操作，当 B 的质点和 A 的质点位于同一个虚拟背景网格格子时，则不创建该格子处的 B 物体质点。如图2.4(a)所示，物体 A 和 B 的质点分别用三角和圆圈表示，图2.4(b) 为 A 与 B 做并运算（A⋃B）的离散结果，图2.4(c) 为 A 与 B 做差运算（A-B）的离散结果，图2.4(d) 是 A 与 B 做交运算（A⋂B）的离散结果。虚拟背景网格只保存了起点位置坐标以及格子间距的信息，并只在建模时创建使用，建模结束后删除。以二维为例，设虚拟背景网格起点坐标为 (x_0,y_0)，x 和 y 方向虚拟背景网格格子间距分别为 d_x，d_y。格子的编号顺序从 0 开始，先按照 x 坐标增加方向，再按照 y 坐标增加方向依次增加，x 坐标方向格子数为 n_x，y 坐标方向格子数为 n_y。则坐标为 (x_p,y_p) 的质点所在的格子编号 n 为

$$n = n_x(y_p - y_0)|d_y + (x_p - x_0)|d_x \tag{2-86}$$

以此便可以确定每个质点在虚拟背景网格中的位置。另外需要说明的是由于物质点法的无滑移接触条件，当紧邻着创建两个物体时，物质点法将自

动把他们视作同一个物体进行计算，相当于做了并运算，不需要使用本章中提出的布尔运算方法进行建模。

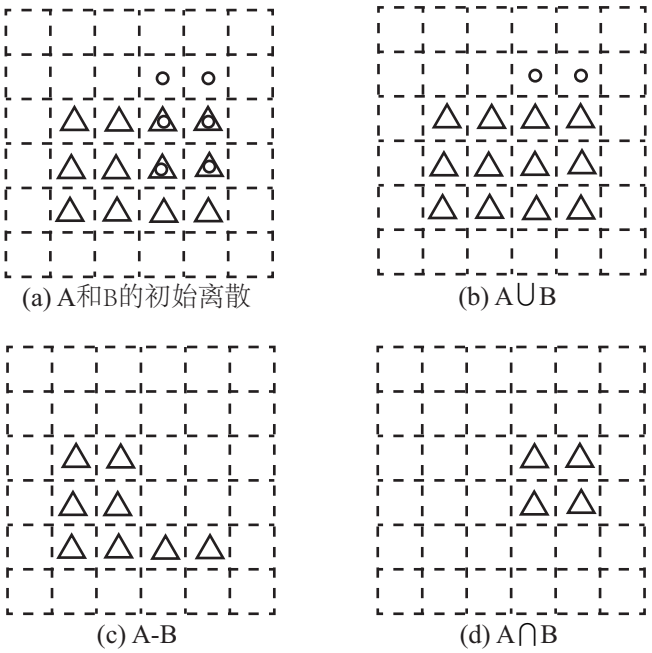


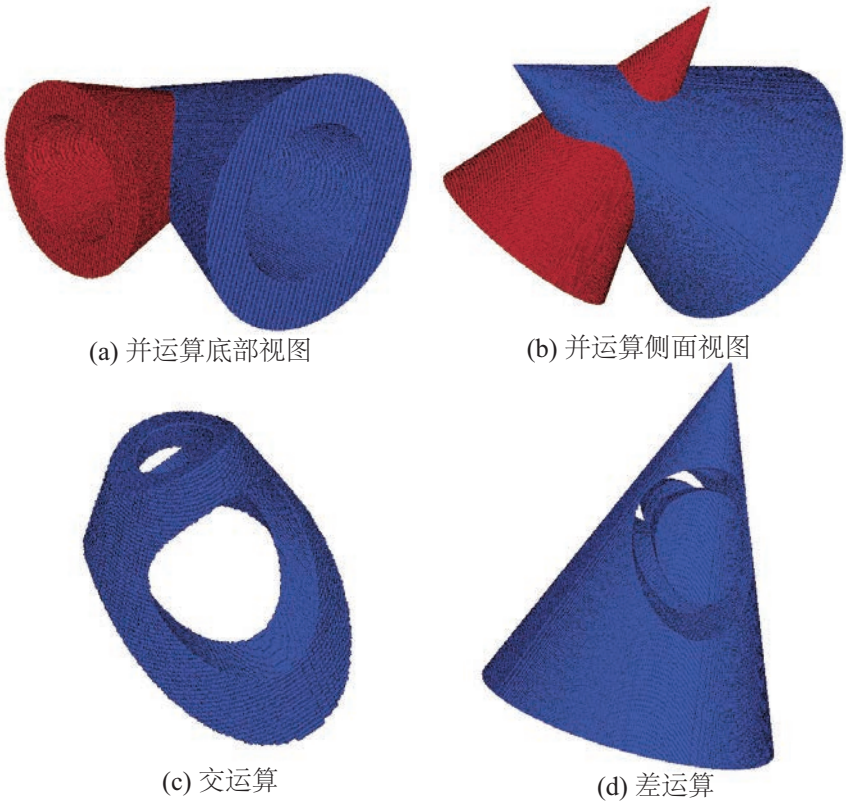
图 2.4 Bool 运算原理

图2.5为应用虚拟背景网格建模技术对两个空心椎体进并、交和差运算的结果，图2.5(a) 和2.5(b) 分别为并运算所得模型的底部和侧面视图，图2.5(c) 和图2.5(d) 分别为交和差运算的结果，可见两椎体的交接处形成了光滑的界面，具有较高的离散精度。

本算法同时可以方便的对多个物体进行 Bool 运算处理，图2.6是通过 5 个圆环间的减和并运算操作生成的奥运五环模型，图2.7是图2.6中虚线方框中的局部放大图，可以看到质点的排列方式。图2.7中蓝色圆环穿过橙色圆环，与蓝色圆环重叠部分的橙色圆环质点被删除，而橙色圆环穿过黑色圆环，与橙色圆环重叠部分的黑色圆环质点被删除。

2.10.2 基于背景网格的后处理技术

该后处理技术的基本思想是将质点携带的历史变量在背景网格节点上进行体积加权平均，在背景网格上显示物理量，可以有效光滑空间物理场，过滤噪声。如图2.8所示，背景网格节点 i 处的物理量 H_i 由含有节点 i 的背景网格



(a) 并运算底部视图　(b) 并运算侧面视图

(c) 交运算　(d) 差运算

图 2.5　物质点法 Bool 运算示例

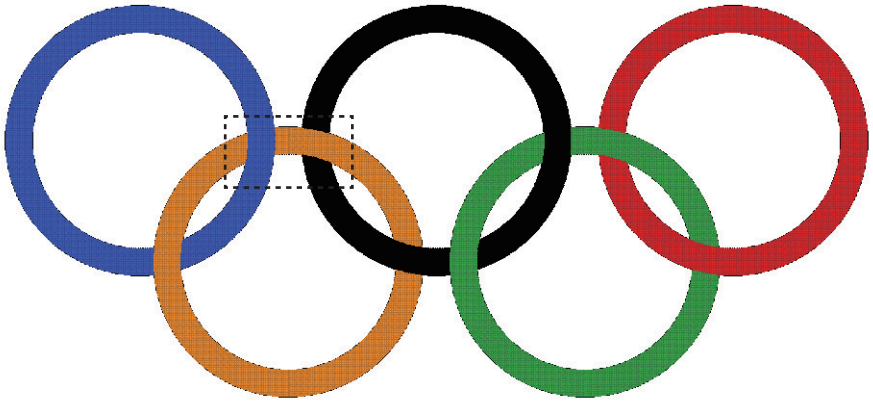


图 2.6　五环的物质点法建模

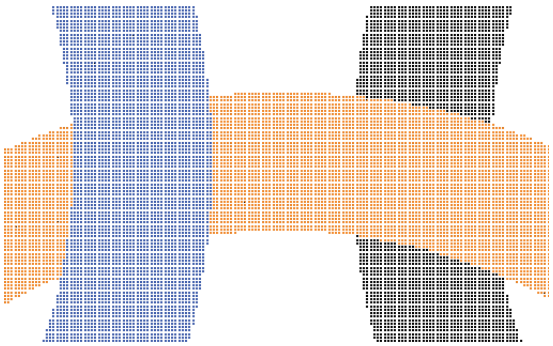


图 2.7　五环局部放大图

格子中质点上的物理量 H_p 体积加权求得，即

$$H_i = \frac{\sum\limits_n H_p N_p V_p}{\sum\limits_n V_p} \tag{2-87}$$

式中 n 是含有节点 i 的背景网格格子中质点的个数，V_p 是质点 p 的体积。

当获得网格节点的物理量后，便可以方便插值获得空间任意一点的物理量，在某些情况下可以利用本方法提取出沿空间某一直线的物理量分布。

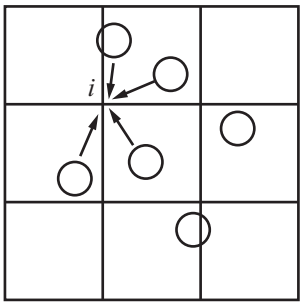
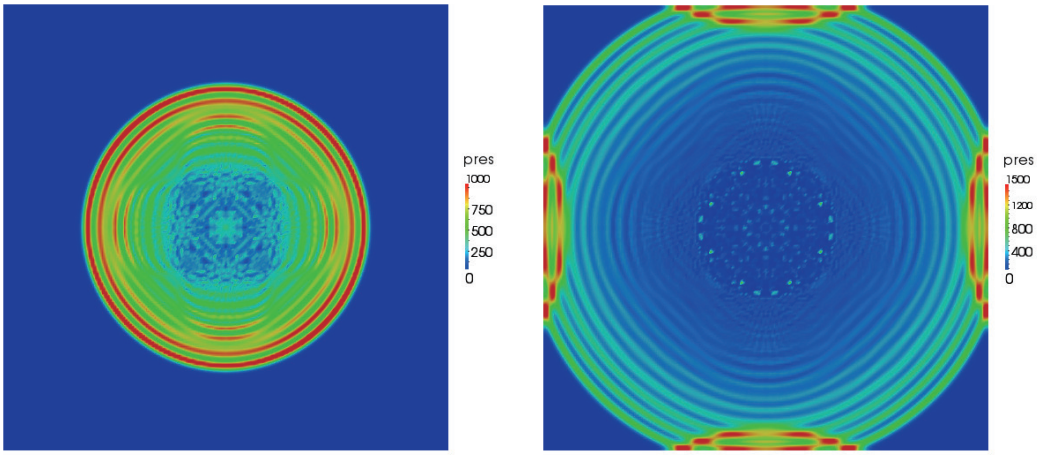
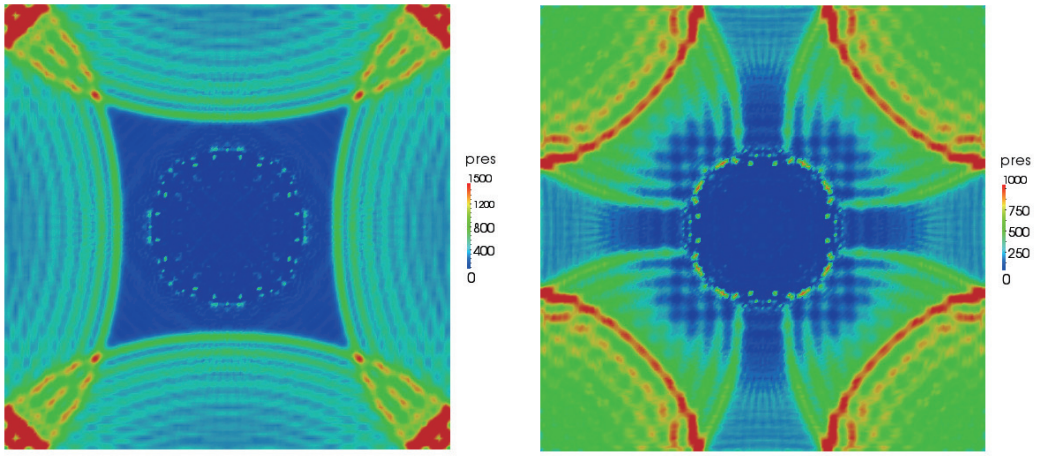


图 2.8　背景网格节点物理量获取示意图

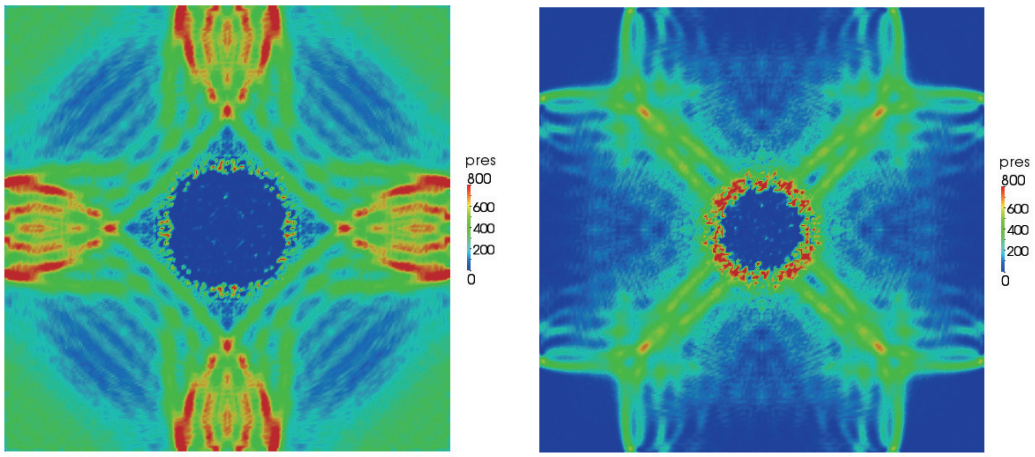
下面以二维水下爆炸问题为例说明基于背景网格后处理技术的效果，边长 0.1m 正方形 TNT 炸药在边长 1m 的正方形水域正中央起爆。本算例采用四周固壁边界条件，背景网格采用 GIMP 插值函数。TNT 炸药密度 $\rho = 1.63\text{g/cm}^3$，爆速 $D = 6930\text{m/s}$，采用 JWL 状态方程，相关参数见表2.1。水的密度 $\rho = 1.0\text{g/cm}^3$，采用 Grüneisen 状态方程，相关参数见表2.2。图2.9为起爆后不同时刻基于背景网格后处理得到的压力云图。炸药起爆后，产生冲击波向外传播，同时爆炸气体膨胀，当冲击波达到壁面后反射向内传播，进而压缩爆炸气体。图2.10是 0.1ms 时刻压力云图的局部放大图，可见基于质点的后处理粗糙且包含锯齿，这与质点和背景网格的正交布置有关，经过背景网格平均后，空间物理场分布更为光滑合理。



t=0.1ms　　*t*=0.2ms



t=0.3ms　　*t*=0.4ms



t=0.5ms　　*t*=0.6ms

图 2.9　不同时刻压力分布云图

表 2.1　TNT 炸药 JWL 状态方程参数

E_0(mJ/mm^3)	A(MPa)	B(MPa)	R_1	R_2	ω
7000	371200	3230	4.15	0.95	0.30

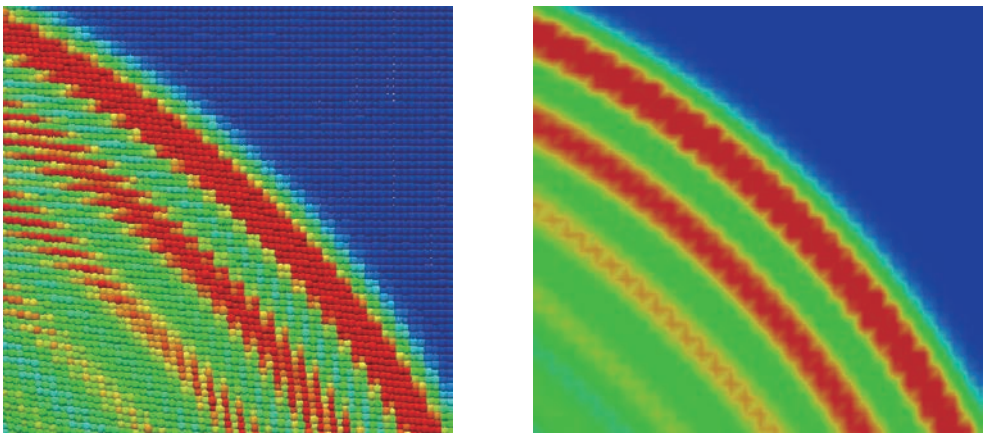
表 2.2　水 Grüneisen EOS 参数

c_0(m/s)	s	γ_0
1650	1.92	0.1

2.11　本章小结

本章介绍了物质点法的基本理论，从控制方程引入，通过加权余量法建立动量方程的等效积分弱形式并进行物质点离散，给出了物质点法的计算流程。本章还介绍了应力更新方法，介绍了本文研究材料局部破坏过程中将使用的几种常见材料模型和状态方程。介绍了具有 C^1 连续性的广义插值物质点法（GIMP）的插值函数。然后介绍了物质点接触算法的接触探测、节点动量、节点力更新的方法。

最后提出了基于背景网格的物质点前后处理方法，并应用此方法通过布尔运算建立了较为复杂的质点模型。同时利用物质法研究了水下爆炸问题，并基于背景网格进行了后处理，相比对基于质点的方法，基于背景网格的后处理方法可以得到更为光滑的物理量分布。



(a) 基于质点的后处理　　(b) 基于网格的后处理

图 2.10　0.1ms 时刻局部放大压力云图对比

第 3 章 局部化问题的多级背景网格物质点法

材料破坏区域往往发生较大变形，而局部化破坏问题的一个显著特征是材料变形的局部化，模拟时需要数值算法在局部变形区域拥有较高的计算精度。传统物质点法采用均匀一致的规则背景网格，动量方程在背景网格节点上进行积分，为了捕捉局部变形需在全场采用统一的较高离散精度（较密的物质点和较细的背景网格），这样势必造成计算资源的浪费。Tan[104] 以及 Ma[105,107] 等人初步发展了自适应物质点法，但目前的研究局限于二维简单模型且并未涉及明显的材料大变形。本文提出基于悬点的三维多级背景网格物质点法，在局部大变形处使用较高的离散精度，而在远离大变形梯度的地方采用较低的离散精度，从而保证了局部变形区域的模拟精度，提高了整体的计算效率。

3.1 多级背景网格物质点法

为了提高局部化问题的求解精度和效率，一般需要在关注的局部大变形区域采用较密的物质点和背景网格，而在其余区域采用较疏的物质点和背景网格。本文提出多级背景网格物质点法，允许在同一套求解体系下存在不同级别（密度）的背景网格。每一级网格格子的边长为上一级网格格子边长的 $1/2$，即第 n 级网格格子的边长 $h_n = h_0/2^n$，其中 h_0 为第 0 级网格（即最粗一级网格）格子的边长。图3.1所示为一个二维三级网格实例，可以看到在不同级别的背景网格界面处，粗网格格子上会产生额外的网格节点（称为悬点，hanging node）。在二维情况下，粗网格中会存在 4~8 节点格子，而最细一级网格只存在 4 节点格子。例如，图3.1中的第 0 级网格的格子 1 有 6 个节点，第 1 级网格的格子 3 有 5 个节点，而第 2 级网格的格子 4 只有 4 个节点。为了保证近似函数在格子边界上的协调性，需要对 5~8 节点格子的节点形函数做特殊处理。对于格子 1 而言，需使其近似函数在 a-b-c 边上与格子 2 的近似函数在 a-b 边上以及格子 3 的近似函数在 b-c 边上协调，因此格子 1 的近似函数在 a-b-c 边上应为分段线性函数。

以只含有悬点 b 的格子 1 为例，如图3.2(a) 所示，b 节点正好位于 a，c 节点连线的中点。b 节点将格子分成了上下两个子区域（图中用虚线分开），在每个子区域形函数是线性的。由于悬点 b 的存在，所以 a 和 c 节点的形函数 N_a 和 N_c 在 b 节点处的值均为 0，悬点 b 的形函数 N_b 在 b 节点处的值为 1 且在 a，

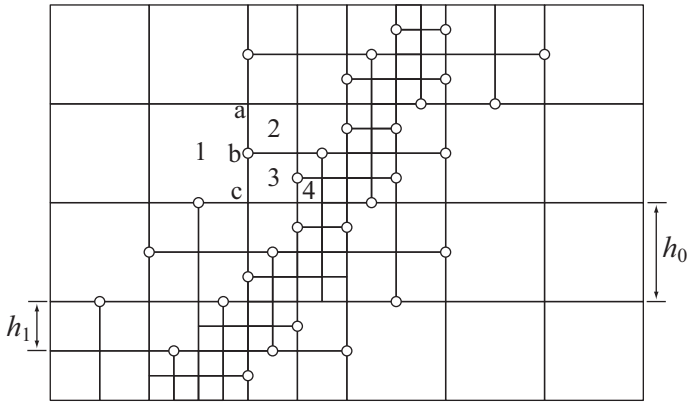


图 3.1　二维三级网格（空心圆为悬点）

c 节点处的值为 0。若不存在悬点 b，原始格子 a 和 c 节点的形函数分别为 N_a^L 和 N_c^L，它们在 b 节点位置处的值为 1/2。则悬点 b 对 a，c 节点的形函数的修正如下

$$N_a(\xi,\eta) = N_a^L(\xi,\eta) - \frac{1}{2}N_b(\xi,\eta) \tag{3-1}$$

$$N_c(\xi,\eta) = N_c^L(\xi,\eta) - \frac{1}{2}N_b(\xi,\eta) \tag{3-2}$$

$$N_b(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-|\eta|) \tag{3-3}$$

$$N_a^L(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \tag{3-4}$$

$$N_c^L(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \tag{3-5}$$

如此保证格子各节点形函数满足 Kronecker-delta 性质以及完备性的要求。

在三维情况下，多级网格中可能存在 8~26 节点格子，如图3.3所示，其中 1~8 号节点是主节点，9~16 号节点是网格线中点可选节点，21~26 号节点是格子面中心可选节点。各节点的形函数列于表3.1[161]。本文实现的多级背景网格物质点法基于线性插值形函数。

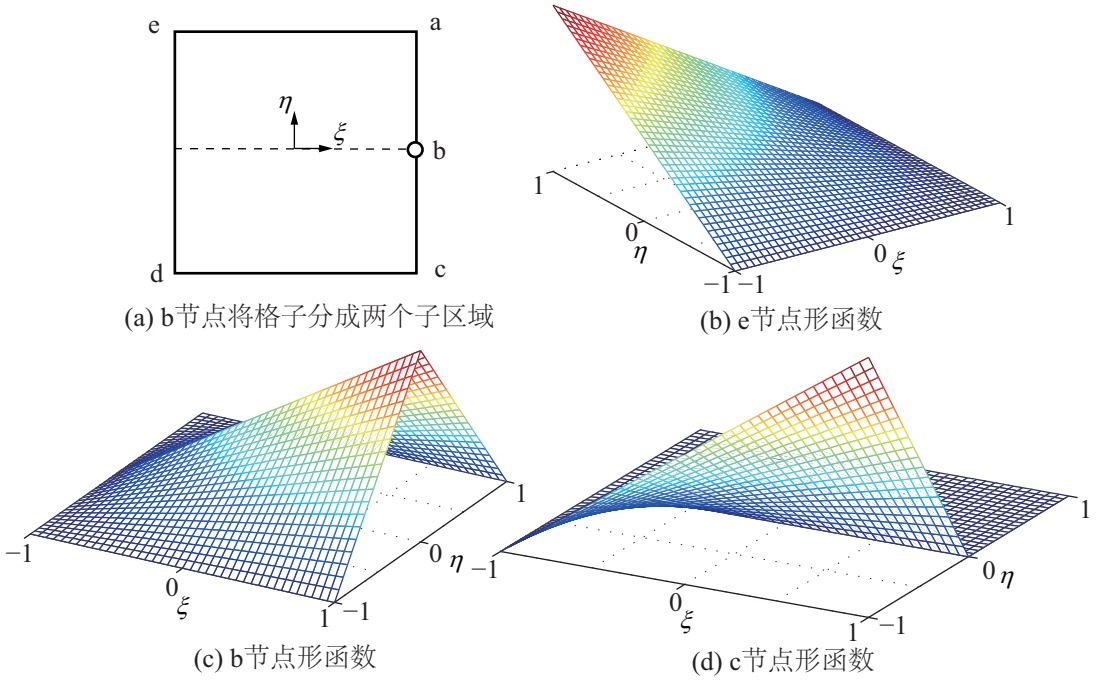
表 3.1　三维带悬点格子的节点形函数

节点	$N(\xi,\eta,\zeta)$
26	$\frac{1}{2}(1-\lvert\xi\rvert)(1-\lvert\eta\rvert)(1-\zeta)$
25	$\frac{1}{2}(1-\lvert\xi\rvert)(1-\lvert\eta\rvert)(1+\zeta)$
24	$\frac{1}{2}(1-\lvert\xi\rvert)(1-\eta)(1-\lvert\zeta\rvert)$
23	$\frac{1}{2}(1-\lvert\xi\rvert)(1+\eta)(1-\lvert\zeta\rvert)$

22	$\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\lvert\eta\rvert)(1-\lvert\zeta\rvert)$
21	$\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\lvert\eta\rvert)(1-\lvert\zeta\rvert)$
20	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\lvert\zeta\rvert)-\frac{1}{2}(N_{21}+N_{24})$
19	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1-\lvert\zeta\rvert)-\frac{1}{2}(N_{22}+N_{24})$
18	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1-\lvert\zeta\rvert)-\frac{1}{2}(N_{22}+N_{23})$
17	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\lvert\zeta\rvert)-\frac{1}{2}(N_{21}+N_{23})$
16	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\lvert\eta\rvert)(1-\zeta)-\frac{1}{2}(N_{21}+N_{26})$
15	$\frac{1}{4}(1-\lvert\xi\rvert)(1-\eta)(1-\zeta)-\frac{1}{2}(N_{24}+N_{26})$
14	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\lvert\eta\rvert)(1-\zeta)-\frac{1}{2}(N_{22}+N_{26})$
13	$\frac{1}{4}(1-\lvert\xi\rvert)(1+\eta)(1-\zeta)-\frac{1}{2}(N_{23}+N_{26})$
12	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\lvert\eta\rvert)(1+\zeta)-\frac{1}{2}(N_{21}+N_{25})$
11	$\frac{1}{4}(1-\lvert\xi\rvert)(1-\eta)(1+\zeta)-\frac{1}{2}(N_{24}+N_{25})$
10	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\lvert\eta\rvert)(1+\zeta)-\frac{1}{2}(N_{22}+N_{25})$
9	$\frac{1}{4}(1-\lvert\xi\rvert)(1+\eta)(1+\zeta)-\frac{1}{2}(N_{23}+N_{25})$
8	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)-\frac{1}{2}(N_{15}+N_{16}+N_{20})-\frac{1}{4}(N_{21}+N_{24}+N_{26})$
7	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)-\frac{1}{2}(N_{14}+N_{15}+N_{19})-\frac{1}{4}(N_{22}+N_{24}+N_{26})$
6	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)-\frac{1}{2}(N_{13}+N_{14}+N_{18})-\frac{1}{4}(N_{22}+N_{23}+N_{26})$
5	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)-\frac{1}{2}(N_{13}+N_{16}+N_{17})-\frac{1}{4}(N_{21}+N_{23}+N_{26})$
4	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)-\frac{1}{2}(N_{11}+N_{12}+N_{20})-\frac{1}{4}(N_{21}+N_{24}+N_{25})$
3	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)-\frac{1}{2}(N_{10}+N_{11}+N_{19})-\frac{1}{4}(N_{22}+N_{24}+N_{25})$
2	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)-\frac{1}{2}(N_{9}+N_{10}+N_{18})-\frac{1}{4}(N_{22}+N_{23}+N_{25})$
1	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)-\frac{1}{2}(N_{9}+N_{12}+N_{17})-\frac{1}{4}(N_{21}+N_{23}+N_{25})$

3.2 质点分裂方案

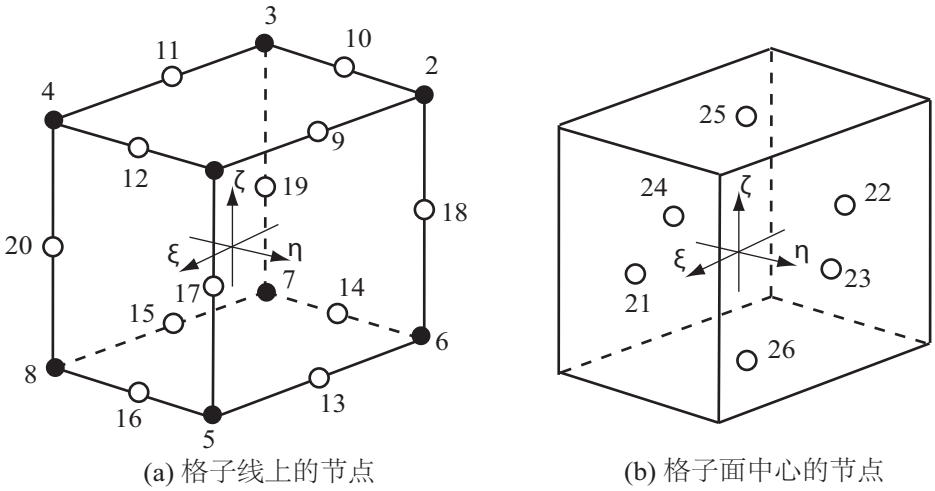
MPM 中物质点间的相互作用通过背景网格实现，因此当背景网格加密后，当由粗网格进入细网格中的物质点仍然使用原来的大小离散时，容易发生原来存在联系的质点被一个空或多个空网格隔开的现象，从而质点间失去相互作用，产生如图3.4所示的数值断裂现象。因此质点的大小应与网格格子的大



(a) b节点将格子分成两个子区域　(b) e节点形函数

(c) b节点形函数　(d) c节点形函数

图 3.2　含有 1 个悬点的过渡格子

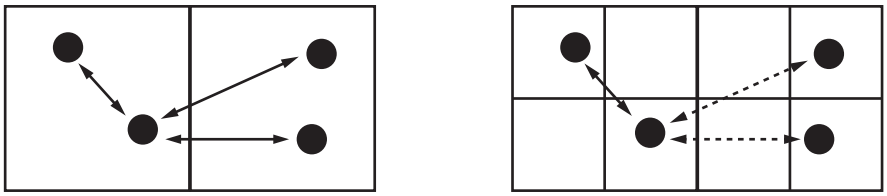


(a) 格子线上的节点　(b) 格子面中心的节点

图 3.3　8–26 节点线性等参六面体格子

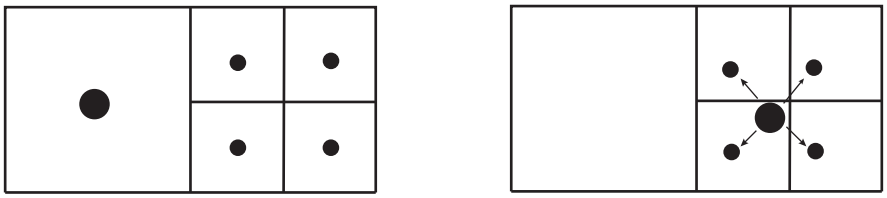
小协调，即在粗网格中使用较疏的质点离散，而在细网格中应使用较密的质点离散。例如在图3.5(a) 中，0 级网格格子中的质点所代表的物质元的边长应该是 1 级网格格子中的质点所代表物质元的边长的 2 倍。当 0 级网格中的质点运动到 1 级网格中时，需将其分裂成四个较小尺寸的质点，如图3.5(b) 所示。在三维情况下，一个 0 级网格质点将分裂成 8 个 1 级网格质点。

本文中的质点分裂方法借鉴马上和张雄等[108] 提出的自适应质点分裂方案。他们主要是为了解决在模拟聚能射流问题中，金属药型罩在爆炸载荷作



(a) 网格加密前　　(b) 网格加密后

图 3.4　数值断裂



(a) 两级网格质点布置　　(b) 质点分裂

图 3.5　二维两级网格

用下被剧烈拉伸从而在射流未形成时便发生数值断裂的问题。而本文需要解决图3.4中所示由于网格加密导致的数值断裂，因此需要对马上等[108] 提出的分裂方法做一定调整。马上等[108] 提出的分裂方法基本思想如下：

假定每个质点初始时刻所代表的物质点区域为正方体，其初始长度为

$$L_0 = \sqrt[3]{m_p/\rho_0} \tag{3-6}$$

某一时刻，质点的三个方向累积应变可表示为

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^{N} \Delta\varepsilon_i = \sum_{k=1}^{N} \dot{\varepsilon}_{ii}\Delta t \tag{3-7}$$

则对应的特征长度为

$$L_i = L_0(1+\varepsilon_i) \tag{3-8}$$

当任一方向特征长度满足

$$L_i > \alpha d_c \tag{3-9}$$

时，则在该方向将质点一分为二，式中 d_c 为网格间距， α 为自定义因子（一般小于 1）。分裂产生间距为 $0.5\alpha d_c$ 的两个质点，如图3.6所示，图中的虚线代表计算网格。

在多级背景网格物质点法中，首先给质点进行像网格那样的级别编号，某一级别背景网格使用对应级别的质点进行计算，比如说 0 级（最粗一级别）网格中使用 0 级（最大离散尺寸）质点。本文不使用式 (3-9) 的分裂判断条件，而

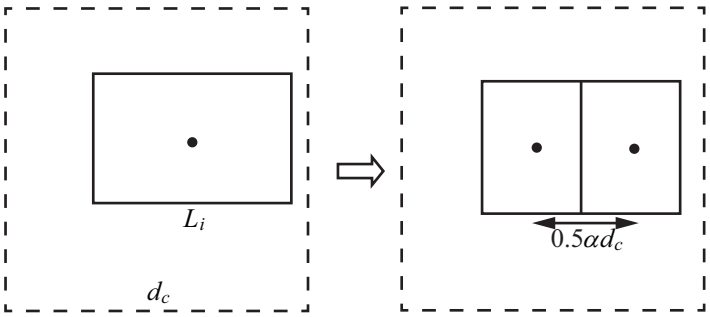


图 3.6　自适应质点分裂

是当低级别质点运动到高级别网格中时候，质点自动进行分裂。在三维情况下一个质点对应分裂成 8 个质点。相应的二维情况如图3.7所示，粒子每个方向尺寸减半。图中质点尺寸 L_x 和 L_y 为考虑了变形后的大小，由式 (3-8) 求得。另外当高级别质点运动到低级别网格中时，为降低程序实现中数据结构复杂程度不对质点进行合并操作。

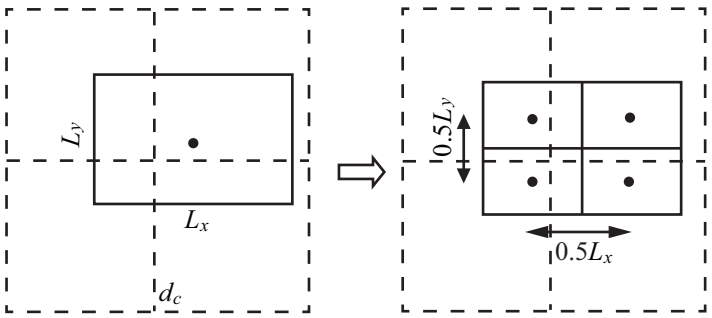


图 3.7　多级网格质点分裂

分裂完成后，需要对质点质量、内能、体积进行调整，三维情况下均为原来的 1/8，而应力、应变、速度、密度等物理量则保持不变。马上等[108] 提出的分裂方法需要对物质点累积应变值进行调整。当质点某一方向满足了式 (3-9) 的条件时，其等效长度在该方向减半，而其他两个方向则保持不变。由于质量相应减半，由式 (3-6) 可知，$L_0' = \sqrt[3]{0.5}L_0 \approx 0.7937L_0$。若质点在 1 方向分裂，为使得分裂后的等效长度满足 $L_i' = 0.5L_i$、$L_2' = L_2$ 以及 $L_3' = L_3$，对质点累计应变进行如下调整

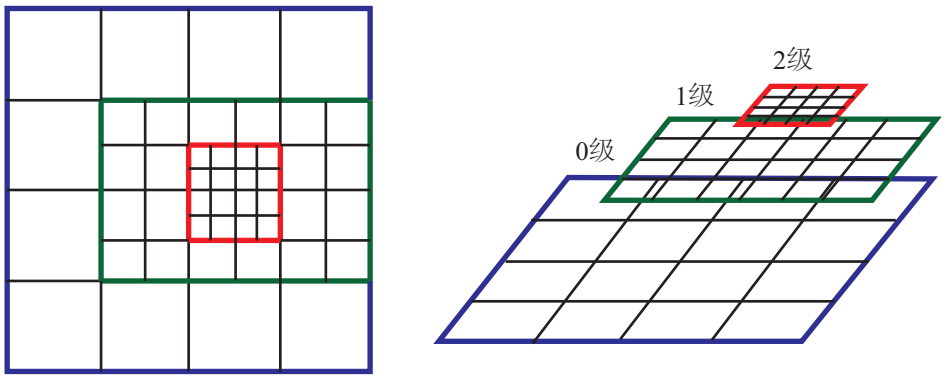
$$\begin{cases} \varepsilon_1' = 0.63\varepsilon_1 - 0.37 \\ \varepsilon_2' = 1.26\varepsilon_2 + 0.26 \\ \varepsilon_3' = 1.26\varepsilon_3 + 0.26 \end{cases} \tag{3-10}$$

这里不同的是，多级背景网格物质点法中质点在每个方向均需要进行分裂，所

以不需要对累积应变进行调整，即 $\varepsilon_i' = \varepsilon_i$，因而减少了相应的计算量。

3.3　网格块

本文提出的多级背景网格物质点法在程序实现时使用“块”的思想。如图3.8所示三级背景网格，层层嵌套，高级别背景网格位于低级别背景网格内部。每一级别网格边界线对应一个“块”，块的级别与其背景网格级别一致。同一级别块体中的网格具有一致的网格格子大小。块体中包含了其内部背景网格信息，同一级别网格块下可以存在多个与之相同级别的背景网格，程序实现时每个块体均包含了一个网格指针地址列表。



(a) 平面三级网格　　(b) 网格层级关系

图 3.8　多级网格块状嵌套结构

当质点所处计算区域存在高级别背景网格时，需使用高级别背景网格进行计算，所以每个时间步需确定质点所处的最高级别背景网格格子。按级别从小到大的顺序建立网格块列表，通过网格块列表可以迅速确定当前质点所在的最高级背景网格格子，具体算法如下：

1. 设某一质点所在最高级别网格的级别为 l_g，令 $l_g = 0$。
2. 对全局网格块列表循环。如果网格块 Block 的级别 $l_b > l_g$，确定质点在网格块 Block 中所处的网格格子 Cell。
3. 如果网格格子 Cell 存在下一级别网格格子，$l_g = l_g + 1$，转到第2步进入下一步循环。
4. 如果网格格子 Cell 不存在下一级别网格格子，l_g 即为质点所在最高级别网格的级别，当前的 Block 即为质点所在的网格块。

3.4　悬点类型的确定

不同级别的背景网格嵌套在一起，共享重合网格线上的节点。本文提出的多级背景网格物质点法使用一套网格节点编号，即不存在重叠但不同编号的网格节点。因此在网格初始化阶段需要确定不同级别网格块中格子的 8 个网格节点编号。更重要的是对于处于不同级别背景网格界面处的网格节点，需要确定其是否为悬点，并确定其类型（即是否位于格子面中心或者格子线中心，以及所处的具体位置，每个悬点对应于表3.1中的唯一编号），根据悬点的类型便可以确定其所处网格格子的各节点形函数。

背景网格创建时由低级别网格块向高级别网格块逐层创建，首先创建网格块，然后创建网格块中的所有网格节点，再创建网格块中的格子并确定与格子对应的网格节点。当创建 1 级别以上的背景网格时需要确定其背景网格节点是否与低一级别背景网格中的节点重叠，如重叠则使用相同的节点，如果没有重叠则创建新的背景网格节点。判断是否有重叠节点时不需要对已有背景网格节点进行遍历比较，而是先确定新节点所在的低一级别背景网格格子，然后求得新节点在此格子中的自然坐标 ξ，η 和 ζ，当满足

$$||\xi\eta\zeta| - 1| < \mathrm{TOL} \tag{3-11}$$

时，即表示存在重叠节点，其中 TOL 是容许误差，这里取 1×10^{-5}。

如果不存在重叠节点，则创建新的网格节点，同时需判断其是否为悬点，如果是悬点则需确定其类型。如图3.9所示，A，B 两点均不满足式 (3-11) 所示的条件，需要新建节点。但 B 在高级别网格块内部，是普通网格节点，而 A 在高级别网格与低级别网格的交界线上，属于低级别背景网格格子的悬点，我们可以求得 A 节点在 1 号背景网格格子中的自然坐标为 (1,0)，这与图3.2中的 b 节点情况相同，因此便可确定 1 号格子各节点形函数表达式。

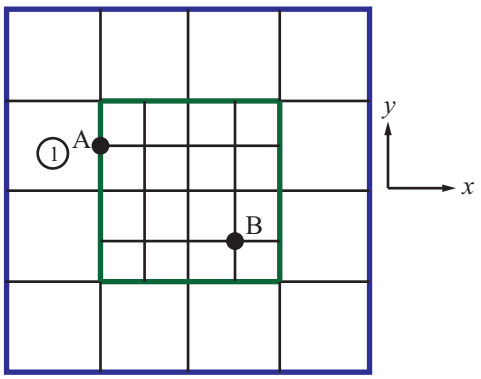


图 3.9　确定悬点类型

三维情况下悬点的确定方法变得更加复杂，某一边界节点可能同时为多个低级别网格格子的悬点。如图3.10所示的节点 A，它同时是 1 号和 2 号格子的悬点，因此需要分别判断它在 1 号和 2 号网格格子中的悬点类型。三维情况下判断某一新建节点是否为悬点以及确定悬点类型的步骤可以概括为：

1. 判断该节点是否处于高级别网格块边界上，若不是则该节点为内部节点，否则为悬点。
2. 根据悬点在低级别过渡格子中的位置判断其类型，确定其局部编号。

   将网格块的六个面定义为 x_0， x_1， y_0， y_1， z_0， z_1，分别表示法向为 x 轴负方向， x 轴正方向， y 轴负方向， y 轴正方向， z 轴负方向和 z 轴正方向的面。首先确定悬点所在的面，如图3.10所示为在高级别网格块 x_0 面上的一悬点，图中所示网格只截取了低级别网格一侧。若 A 点坐标是

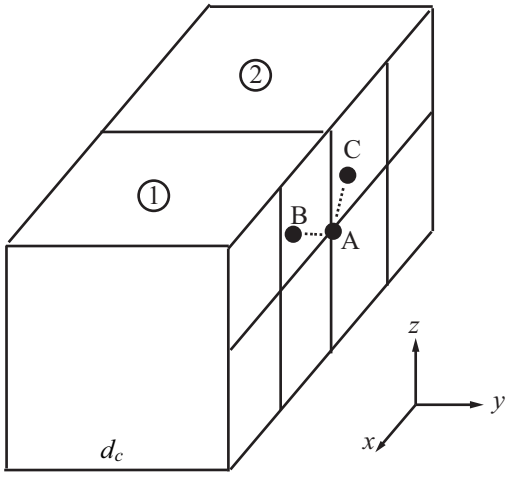


图 3.10　三维情况下悬点类型的确定

(x,y,z)，将 A 节点坐标进行一定调整得到两个虚节点 B 和 C，其坐标分别为 $(x-\frac{1}{n}d_c, y-\frac{1}{n}d_c, z)$， $(x-\frac{1}{n}d_c, y+\frac{1}{n}d_c, z)$，其中 n 为一大数，这里取 100。判断出 B 在 1 号格子中的自然坐标接近于表3.1中的 18 号节点，因此可以确定 A 节点在 1 号格子中的悬点编号为 18，计算时使用表3.1中 18 号节点对应的形函数。同样通过 C 节点便可以确定 A 节点在 2 号格子中的悬点编号为 17。

3.5　计算过程

多级背景网格物质点法仅在网格初始化时，增加额外的计算来建立相应的网格数据结构，并确定过渡格子中悬点的类型。同时质点上增加了其所在最

高级别背景网格的级别编号变量，初始时刻创建完一套多级背景网格后，每一时间步计算过程在传统物质点法基础上稍作更改，质点信息均映射到其所处的最高级别背景网格节点上，以 MUSL 格式为例计算过程如下：

1. 将物质点信息映射到背景网格节点上，初始化背景网格节点质量和动量。
2. 施加边界条件，如果悬点位于整体网格边界上，需在悬点上施加此边界面的边界条件。
3. 计算背景网格节点力，同传统物质点法。
4. 由式 (2-76) 判断接触条件，计算接触力，并对背景网格节点力修正。
5. 积分动量方程。高级别背景网格往往布置在变形梯度较大、质点运动速度较快的区域，因此显式积分时间步长由最高级别背景网格的尺寸决定

$$\Delta t_{\mathrm{cr}} = \frac{\min d_c}{\max\limits_{p}(c_p + |u_p|)} \tag{3-12}$$

   其中 p 为最高级别背景网格块中的质点。
6. 更新质点位置和速度，同传统物质点法。
7. 再次修正背景网格节点动量，更新节点速度并计算质点应力。
8. 根据质点的新位置和背景网格布置，由3.2节中方法分裂质点，并更新质点所在最高级别背景网格的级别编号。

3.6 数值算例

3.6.1 弹性杆单轴压缩

考虑弹性杆应力波传播问题，模型如图3.11所示，弹性杆件左端固定，右端自由并且受到 2.5N 的压力，杆的四周使用对称边界条件。弹性杆材料密度 $\rho = 5 \times 10^{-3}\mathrm{g/mm^3}$，弹性模量 $E = 100\mathrm{GPa}$，泊松比 $\nu = 0$。以此来通过三维程序近似模拟一维问题。杆件使用两级背景网格离散，较密的高级别背景网格区域位于杆件中央，长 40mm。低级别背景网格间距 0.5mm，其中质点大小 0.25mm；高级别背景网格间距 0.25mm，质点大小 0.125mm。弹性波波速 $c = \sqrt{E/\rho} = 4472.1\mathrm{m/s}$。应力波由右端往左端传播，压力理论值为 0.1MPa，当到达左端后，反射波叠加后以 0.2MPa 的应力值向右传播。

图3.12，3.13，3.14和3.15分别为 0.009ms，0.018ms，0.031ms 和 0.04ms 时刻的应力分布曲线和对应的弹性杆应力云图，可见数值解与理论解一致。对比图3.12和3.13可见，应力波在通过 70mm 处不同级网格界面后，界面处未出现应力震荡。观察应力波传播的全过程可以发现无论应力波从粗网格传入细网

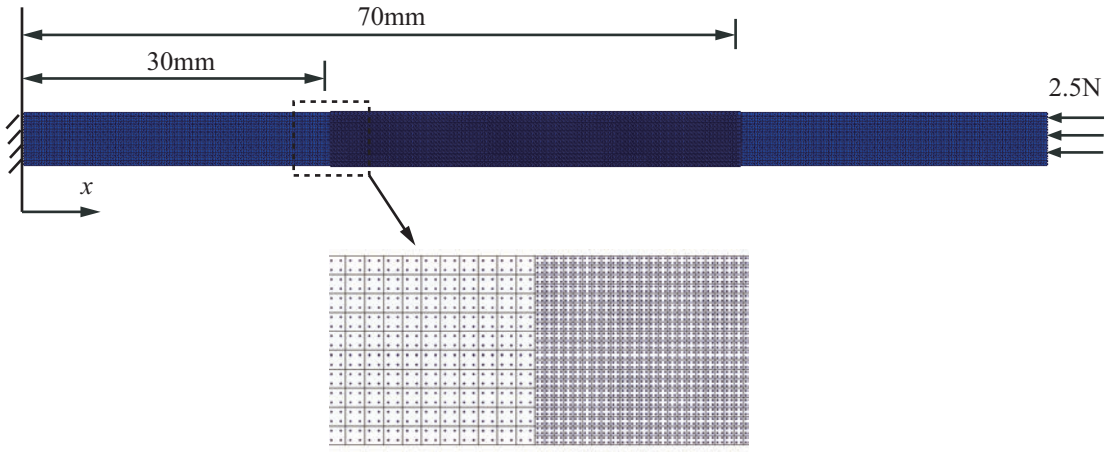


图 3.11 两级网格模型

格，还是从细网格传入粗网格均未出现界面反射或扰动。说明基于悬点的多级背景网格物质点法所采用的插值函数在不同级别网格界面处不会产生伪内力。以图3.5(a) 的二维两级背景网格为例，假设一致应力状态，即质点应力均为 σ，由式 (2-16) 可以求得过渡边界上各节点的内力

$$\boldsymbol{f}_i^{\text{int}} = -\sum_{p=1}^{n_p} \nabla N_{ip} \cdot \sigma \frac{m_p}{\rho_p} \tag{3-13}$$

通过计算可发现不同级别网格边界上各节点内力均为 0，这是多级背景网格物质点法不存在界面应力反射的原因。

采用单一级别背景网格的传统物质点模拟得到的应力分布也在结果列出，使用的统一背景网格间距为 0.25mm，质点大小 0.125mm，相比于两级背景网格物质点法传统物质点法在杆件两端的离散精度要高，因此在应力波间断处其波动要小。整个计算过程模拟了 0.05ms 的波传播时间，CPU 耗时传统物质点法为 21min，两级背景网格物质点法为 14min。

3.6.2 Taylor 杆问题

Taylor 杆问题是经典冲击动力学问题，Johnson 等人[162] 将柱状铜杆撞向刚性墙以获得材料模型的参数。Taylor 杆在高速撞击下，发生底部墩粗，长度缩小的现象，即与刚性墙接触的地方材料变形较大，而远离墙壁的另一端变形较小，因此考虑使用多级背景网格物质点法来模拟 Johnson 等人[162] 的实验，并在杆的底部大变形区域使用较高级别的背景网格进行求解。铜杆使用 Johnson-Cook 本构模型，材料参数见表3.2。杆长 25.4mm，直径 7.6mm，撞击刚性强的速度为 190m/s。这里使用三维全模型进行模拟，共使用三种网格布

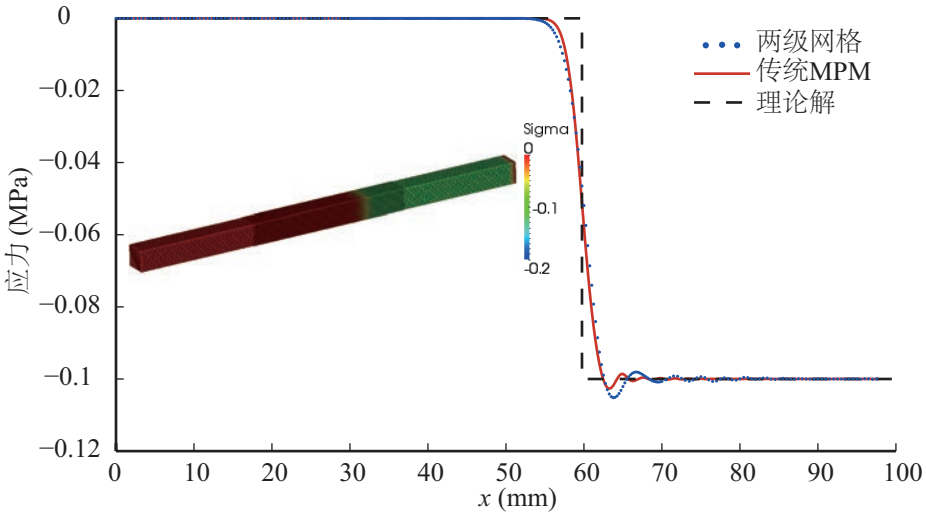


图 3.12　0.009ms 时刻的应力分布

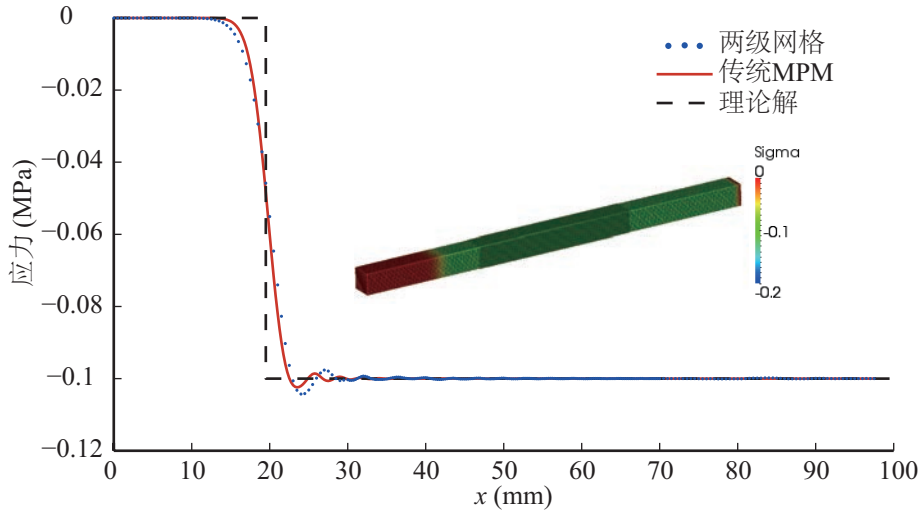


图 3.13　0.018ms 时刻的应力分布

置：（1）均匀背景网格，网格格子大小 0.76mm，如图3.16所示；（2）二级背景网格，0 级网格格子大小为 0.76mm，1 级网格格子大小为 0.38mm，如图3.17所示；（3）三级背景网格，0 级网格格子大小为 0.76mm，1 级网格格子大小为 0.38mm，2 级网格格子大小为 0.19mm，如图3.18所示。初始时刻各级背景网格中的质点大小为其所在背景网格格子大小的 $\frac{1}{2}$，在计算过程中，当低级别背景网格中的质点运动到相邻高级别背景网格中时，进行一次自适应分裂。

表 3.2　铜杆的材料参数

ρ_0(kg/m^3)	ν	E(GPa)	A(MPa)	B(MPa)	n	C
8930	0.35	117	157	425	1.0	0

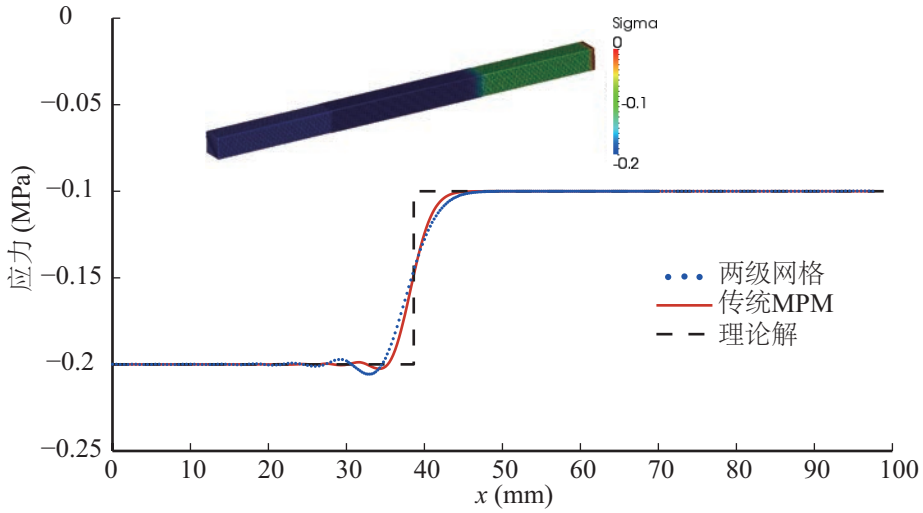


图 3.14　0.031ms 时刻的应力分布

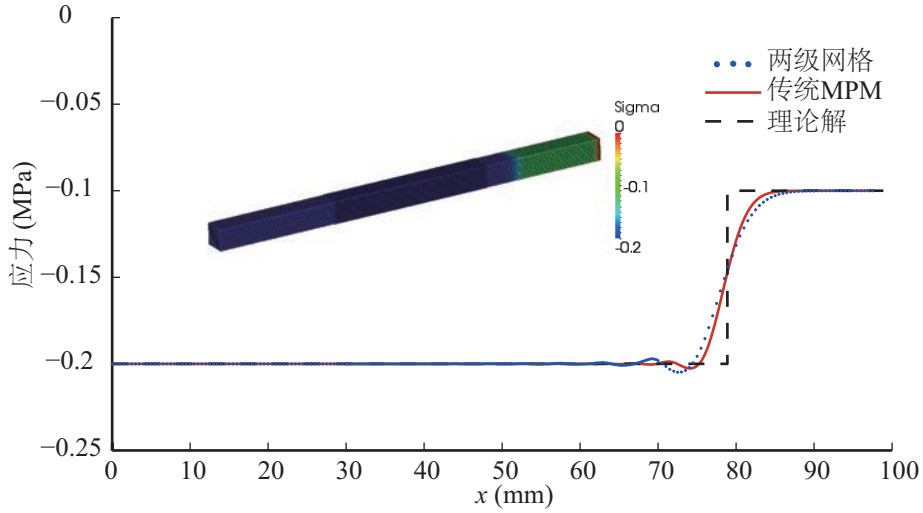
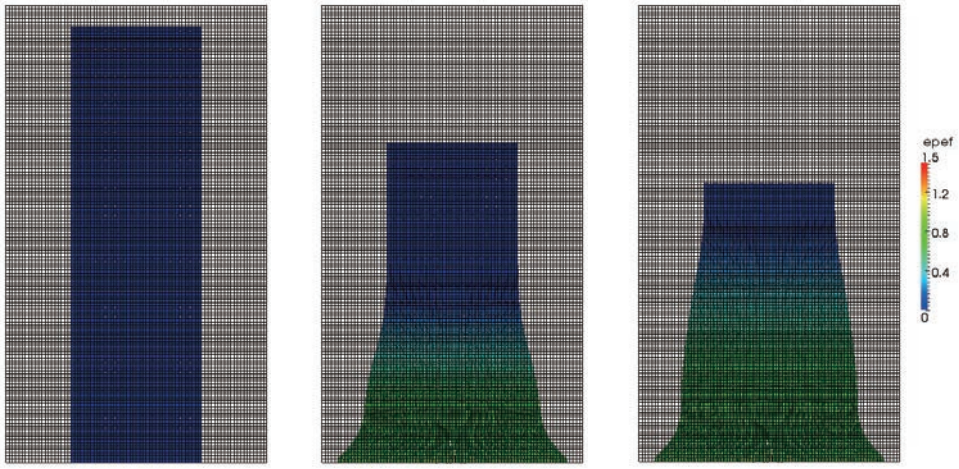


图 3.15　0.04ms 时刻的应力分布

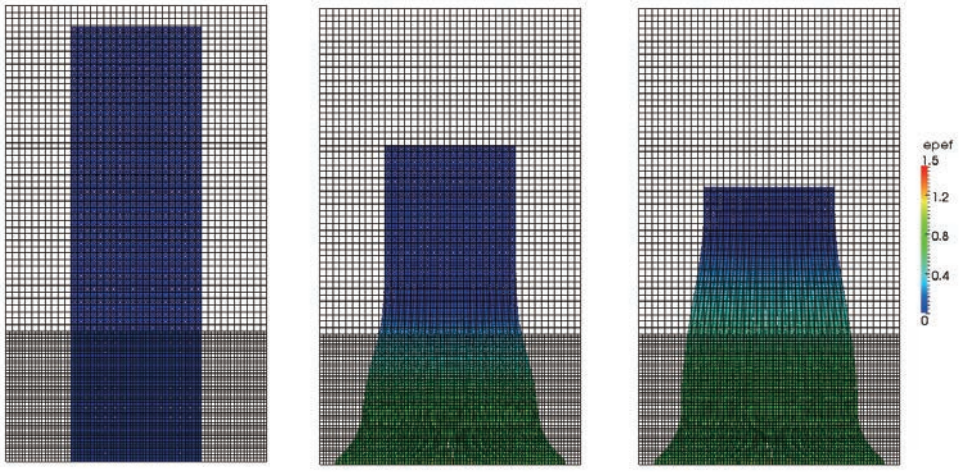
共模拟碰撞时间 0.08ms，此时杆件的动能和内能不再变化，认为碰撞已经完成。不同背景网格下 Taylor 杆撞击过程中的变形过程分别如图3.16，图3.17和图3.18所示。测得最终杆件的长度和底部直径与实验的对比见表3.3所示，表3.3中同时列出了使用不同网格模拟的 CPU 计算时间。

计算过程中质点数的变化如图3.19所示，使用多级背景网格时伴随着铜杆向高级别背景网格计算区域的挤压过程，低级别质点进行自适应分裂，因此质点总数不断上升。频繁增加质点在一定程度上降低了计算效率。碰撞过程中，多级别背景网格计算所用质点数占单一级别网格计算所用质点数的比例变化曲线如图3.19所示。本算例证明了多级别背景网格和相应的自适应质点分裂方法的可靠性。实际在很多局部化破坏问题中，由于变形的局部性，计算



t=0μs　　t=40μs　　t=80μs

图 3.16　一级背景网格物质点法



t=0μs　　t=40μs　　t=80μs

图 3.17　二级背景网格物质点法

表 3.3　模拟结果对比

	L(mm)	D(mm)	网格节点数	计算时间 (min)
实验	16.2	13.5	–	–
一级背景网格	16.25	13.38	925101	75
二级背景网格	16.20	13.42	353051	70
三级背景网格	16.19	13.50	180221	49

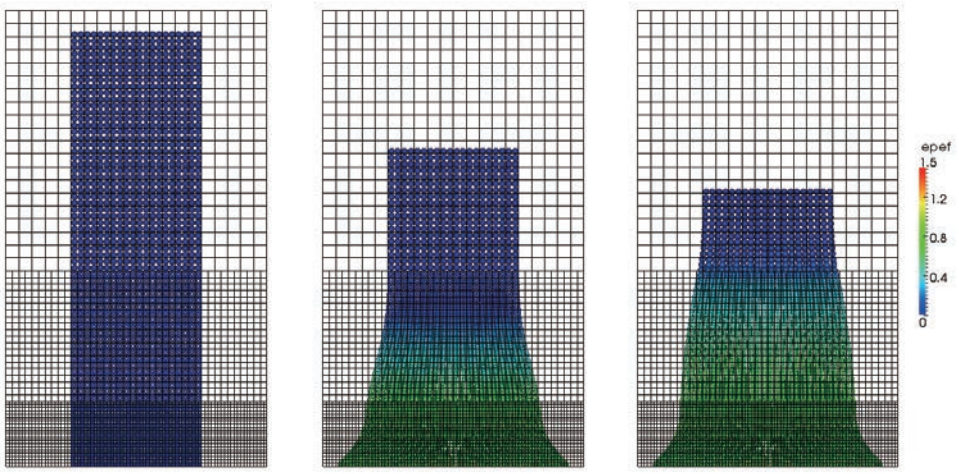


图 3.18　三级背景网格物质点法

中不同级别网格间的质点不会频繁穿越，这将进一步提高多级背景网格物质点法的计算效率。

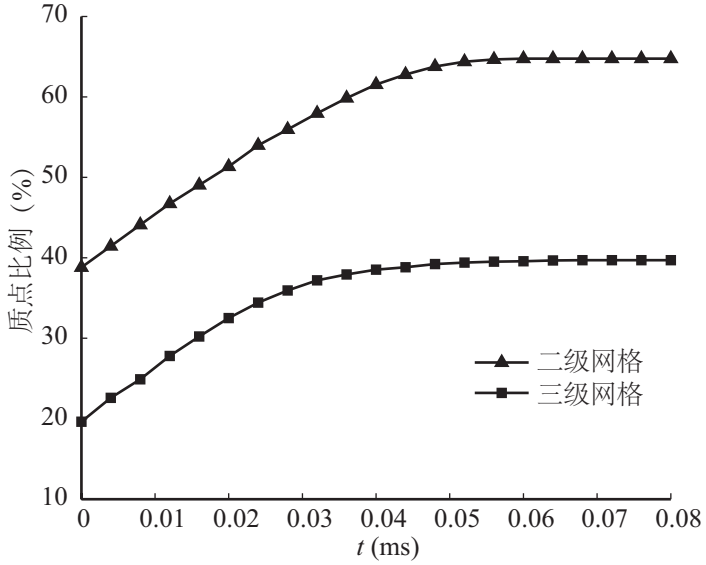


图 3.19　多级别网格质点数占单一级网格质点数的比例

3.6.3　卵形钢弹斜侵彻铝靶

Piekutowski 等[163] 研究了卵形钢弹斜侵彻铝靶的过程，测得了弹体的剩余弹速并用 X 光照相机拍摄了弹体穿孔的过程。黄鹏[101] 给出了物质点法接触算法的完整数学表达，并成功应用于此问题的模拟。廉艳平[114] 应用耦合物质点有限元方法研究了此问题，模拟中用有限元法模拟变形较小的弹体，用物质点法模拟靶体。弹体模型如图3.20所示，弹体入射方向与靶体的夹角为 60°。

由于高速侵彻中，靶体仅在弹体周围的区域发生局部大变形。因此可以采用多级背景网格物质点法模拟此类问题，在弹体周围使用较密的背景网格和较小的质点离散，在远离弹体的区域使用较粗的背景网格和较大的质点离散，从而保证了局部变形区域的描述精度，并在整体上提高计算效率。模拟中采用的两级背景网格设置如图3.21所示，1 级网格在 0 级网格内部，覆盖弹体周围的局部区域。当使用单一级别背景网格计算时，其网格间距和质点离散尺寸和采用两级背景网格模拟时高级别背景网格中的设置一致。单一级别背景网格计算时共使用 3857333 个网格节点、3042874 个质点。而采用二级背景网格计算时共使用 1003685 个网格节点，初始质点数为 807928，在计算过程中由于质点分裂，质点数略有增加，但靶体的变形基本局限在高级别背景网格计算范围内，因此质点分裂数较少。

本算例中弹体材料采用线性强化弹塑性模型模拟，材料参数见表3.4。靶体材料为 A6061-T651 铝合金，密度 $\rho = 2.7 \times 10^{-3}\text{g/mm}^3$，弹性模量 $E = 6.9 \times 10^4\text{MPa}$，泊松比 $\nu = 0.3$；采用 Johnson-Cook 模型更新偏应力，其参数见表3.5；采用 Mie-Grüneisen 状态方程来描述压力，其参数见表3.6；采用等效应变失效模型，即当材料等效应变 $\varepsilon > \varepsilon_f$ 时认为材料失效，考虑弹体和靶体间的摩擦系数为 0.05。当入射速度 $v_0 = 575\text{m/s}$ 时，采用单一级别和两级背景网格计算得到的弹体和靶体变形过程与实验的对比如图3.22所示。可见弹体运动的轨迹基本为直线，弹体轴向有轻微弯曲。当入射速度 $v_0 = 400\text{m/s}$ 时，相应的结果如图3.23所示，此时弹体动能相对较小，弹体与靶体接触后发生较大变形，$t = 204\mu\text{s}$ 时弹体运动轨迹向上偏斜，最终出口点相对入射点偏高。结果显示不同入射速度下，计算所得的弹体运动轨迹基本和实验一致，且采用两级背景网格模拟的结果和采用单一级别背景网格模拟的结果基本相同。表3.7为四种不同入射速度下计算所得的出口速度与实验结果的对比，结果显示计算得到的剩余弹速与实验结果的误差均在 3% 以内。另外采用两级背景网格时其出口弹速均比采用一级背景网格时高出 1~2m/s，当使用两级背景网格时，弹体远端的背景网格较粗，刚度相对偏大，材料变形相对更集中在弹体周围区域，导致周围更多材料失效从而使得弹体出口弹速偏高，但这种影响几乎可以忽略。由表3.7可见，与单一级别背景网格相比，两级背景网格的计算结果偏差在 0.5% 左右，计算消耗的时间仅占 20%~30%，表明多级背景网格物质点法非常适合局部大变形问题的模拟。

表 3.4　钢弹材料参数

$\rho(\mathrm{g/mm^3})$	$E(\mathrm{MPa})$	ν	$\sigma_y(\mathrm{GPa})$	$E_T(\mathrm{GPa})$
7.85×10^{-3}	2.0×10^{5}	0.3	1.43	14.759

表 3.5　铝靶 Johnson-Cook 模型参数

$A(\mathrm{MPa})$	$B(\mathrm{MPa})$	$T_{\mathrm{melt}}(\mathrm{K})$	$T_{\mathrm{room}}(\mathrm{K})$	n	c	c
262	52.1	875	293	0.41	0	0.859

表 3.6　铝靶 Grüneisen EOS 参数

$c_0(\mathrm{m/s})$	s	γ_0
5350	1.34	2.0

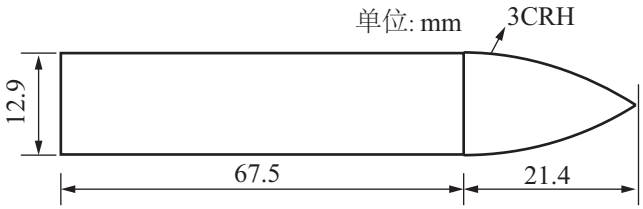


图 3.20　弹体模型

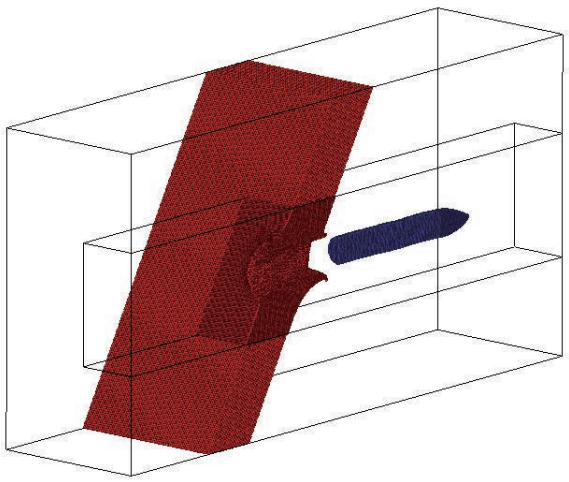


图 3.21　计算网格边界



t=82.9 μs　　t=152.8μs　　t=194.4μs

(a) 实验结果



t=83 μs　　t=153μs　　t=195μs

(b) 两级网格计算结果



t=83 μs　　t=153μs　　t=195μs

(c) 一级网格计算结果

图 3.22　初速度 575m/s 时的侵彻过程

表 3.7　剩余弹速 v_r 和计算时间 t 对比

v_0(m/s)	400		446		575		730	
	v_r(m/s)	t(min)	v_r(m/s)	t(min)	v_r(m/s)	t(min)	v_r(m/s)	t(min)
实验值	217	–	288	–	455	–	655	–
一级网格	212	628	292	562	457	329	633	324
两级网格	215	193	293	170	459	95	635	69



t=43.3 μs　　*t*=204.3μs　　*t*=421.1μs

(a) 实验结果



t=43 μs　　*t*=204μs　　*t*=421μs

(b) 两级网格计算结果



t=43 μs　　*t*=204μs　　*t*=421μs

(c) 一级网格计算结果

图 3.23　初速度 400m/s 时的侵彻过程

3.7　本章小结

本章提出了基于悬点的多级背景网格物质点法。不同级别背景网格在界面上共享网格节点，通过悬点改变过渡网格格子各节点的插值函数进行不同级别网格的衔接。在求解过程中粗网格使用大尺寸的质点，细网格中使用小尺寸的质点。为防止大尺寸质点进入细网格中引起的数值断裂，本章同时提出了与网格级别相匹配的质点分裂方法，此方法保持了系统质量、动量和能量守恒。针对三维情况网格结构复杂的特点，本章还提出了基于网格块的多级背景网格实现方案和悬点类型确定方法。

本章首先模拟了弹性杆应力波传播问题，证明了多级背景网格物质点法在不同级别网格界面处基本不存在应力波的反射。进而利用多级背景网格物质点法研究了 Taylor 杆问题，一级、两级和三级背景网格的计算结果基本相

同且与实验结果一致，三级背景网格的计算效率最高。本算例同时证明了质点分裂方法的可靠性，但由于质点分裂较多，两级背景网格计算效率相比于一级网格并没有明显提高。最后使用两级背景网格模拟了卵形弹斜侵彻问题，研究了不同入射弹速下弹体贯穿靶体的过程并考察了出口弹速，结果显示多级背景网格物质点法在保证了计算精度的同时，大大提高了计算效率。

第 4 章 冲击侵彻问题的多重移动网格物质点法

传统物质点法使用单一规则静止的背景网格进行计算，在处理冲击侵彻等涉及物体大范围运动的问题时，便需要布置足够大的背景网格以防止计算过程中物体运动出求解区域。这直接造成了许多空网格格子的浪费，消耗了额外的计算资源、降低了计算效率。某些情况下无法预测到物体在计算过程中的运动范围，当背景网格不够大而物体飞出求解区域时，计算宣告失败并不得不重新进行计算。另外当求解区域中存在较多物体，而部分物体只在局部发生作用时，传统物质点法仍然要求将所有物体质点信息映射到同一套背景网格上求解，这在很大程度上限制了物质点法模拟的灵活性。因此本章提出多重移动网格物质点法以期能改善以上问题，允许整个求解体系中存在多套背景网格，并且背景网格可以根据物体的运动范围进行实时调整。

物质点法利用背景网格积分动量方程，因此背景网格对求解效率和精度有着决定性影响。我们首先以一维问题来说明物质点法求解精度对背景网格的依赖性。假设弹性模量均为 E 的两个一维杆以速度 v 对撞，每个杆用 3 个质点离散，分别采用三种不同的背景网格，如图4.1所示。其中方案一和方案二的背景网格间距为 d，方案三的背景网格间距为 $1.5d$。利用 USF 计算格式可以分别计算出三种方案下各物质点的压力值为：

1. $p_1 = 0$， $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = \frac{Ev}{d}$， $p_6 = 0$；
2. $p_1 = p_2 = \frac{Ev}{4d}$， $p_3 = p_4 = \frac{3Ev}{2d}$， $p_5 = p_6 = \frac{Ev}{4d}$；
3. $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{2Ev}{3d}$。

可见不同背景网格布置下，同样布置的质点计算出压力值却有较大的差异。三种方案下，撞击点 3 号和 4 号质点压力的最大值是最小值的 1.5 倍。方案二中，3 号和 4 号质点位于同一网格格子中，与它们有共同联系的网格节点有两个，而方案一和方案三中只有 1 个网格节点与它们有共同联系。方案三相比于方案一而言，较大网格间距扩大了质点间的相互影响范围，另外 3 号和 4 号质点与它们之间网格节点的相对距离比方案一中的情况要小，所以 3 号和 4 号质点的相互作用更大。以上分析是基于 MPM 线性插值函数进行的，可以预见扩大了节点形函数影响范围的 GIMP 方法在一定程度上可以缓解以上问题。

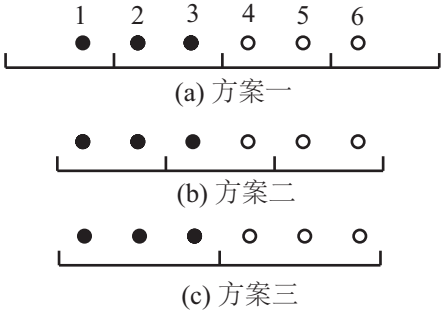


图 4.1 不同背景网格布置方案对比

4.1 移动网格

4.1.1 基本原理

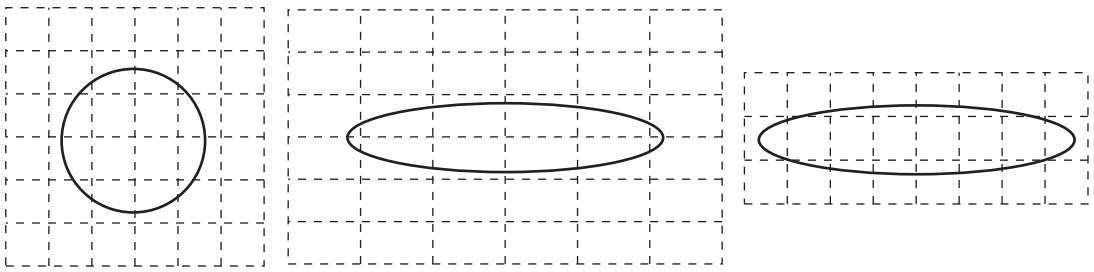
为解决质点飞出计算区域而导致的计算失败问题，Ma 和 Zhang 等人[103]于 2010 年提出了移动网格方法，该方法在计算过程中根据质点的当前位置自动调整背景网格，使背景网格覆盖到整个物质区域。具体步骤为：

1. 计算当前物质区域，并将其边界扩大一个网格间距大小，判断其是否仍在背景网格内，若是则无需做进一步处理；
2. 记录网格需要变化的方向。如果计算网格存在非自由边界条件，则在被约束方向不进行移动；
3. 将网格在其变化方向上前后各延伸 10%；
4. 根据调整后的网格大小，计算新的背景网格格子边长。

该移动网格方法中伴随物体质点间距加大，背景网格区域也相应扩大，网格格子被拉长。因此相比于覆盖同样范围的初始背景网格其网格节点数较少，计算量较小。同时背景网格格子的扩大，使得质点的影响域也随之扩大，从而在一定程度上可以避免数值断裂现象。

Ma 等的移动网格方法特点是其不改变背景网格的拓扑结构，而是动态改变背景网格格子的尺寸。物质点法动量方程在背景网格节点上积分，如果网格间距变大，可能导致计算精度下降。另外背景网格间距变大会扩大质点间相互作用的范围，而背景网格间距减小可能会导致数值断裂。图4.1的例子说明，改变网格节点的位置会在一定程度上影响计算结果，因此计算过程中最好保持网格节点的位置不变。基于以上考虑，本文进一步提出了改进的移动网格物质点法，通过改变网格的拓扑结构以保持网格格子的尺寸不变，删除不含质点的背景网格格子，同时未删除的网格节点位置保持不变。例如，考虑一初始时刻为圆形的物体，如图4.2(a) 所示。当物体变形为椭圆形时，原移

动网格技术不改变背景网格的拓扑结构，使背景网格格子在椭圆长轴方向伸长以覆盖整个模型，在短轴方向上的尺寸保持不变，如4.2(b) 所示。而改进的移动网格技术保持背景网格格子的尺寸不变，在椭圆长轴方向增加格子，并在短轴方向删除不包含质点的格子，以此在优化背景网格布置的基础上，保持求解精度与原始背景网格匹配，如图4.2(c) 所示。



(a) 初始背景网格　(b) 原移动网格技术　(c) 改进移动网格技术

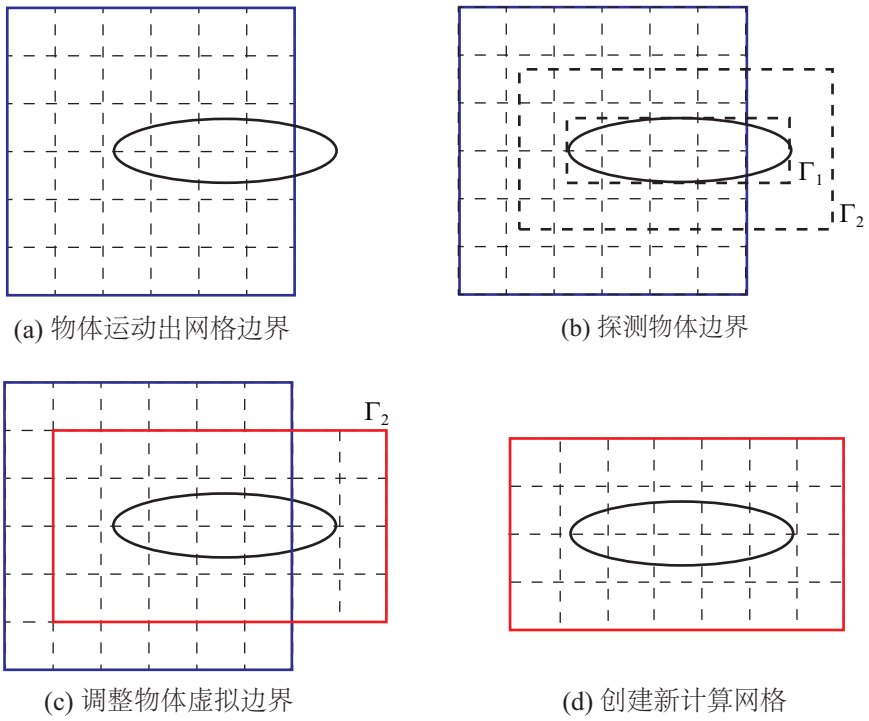
图 4.2　移动网格技术

4.1.2　算法实现

图4.3是采用本文提出的移动网格方法生成新网格的过程，图中将网格边界用实线表示。原始的背景网格边界用蓝线表示，背景网格间距为 d_c。新背景网格边界用红线表示。假设初始计算模型如图4.2(a) 所示，某一时间步计算完成后，物体向前运动并发生变形和原背景网格的相对位置如图4.3(a) 所示。具体算法实现过程如下：

1. 探测出物体运动变形后的边界 Γ_1，将 Γ_1 往外扩展一个背景网格间距 d_c 得到新的边界 Γ_2。Γ_2 即为物体当前的虚拟边界，新生成的计算网格应覆盖 Γ_2 区域，如图4.3(b) 所示。
2. 保持新网格的间距与原网格一致，且不改变新背景网格节点的空间位置，对 Γ_2 进行调整得到图4.3(c) 中用红线表示的背景网格边界。
3. 删除原网格信息，以 Γ_2 为边界，以 d_c 为背景网格间距创建如图4.3(d) 所示的新网格，

在实际运用中，为了避免每一时间步均检查质点是否飞出网格区域，可以增大 Γ_2 与 Γ_1 的间距，本文中使用 $2d_c$。整个移动网格方法实现的效果相当于每次移动网格后截取了一套大网格的局部区域来进行计算，从而避免了在初始时刻布置足够大的背景网格而造成浪费。



(a) 物体运动出网格边界　(b) 探测物体边界

(c) 调整物体虚拟边界　(d) 创建新计算网格

图 4.3　移动网格生成过程

4.2　多重网格

4.2.1　基本原理

传统物质点法采用一套背景网格，背景网格需覆盖求解区域中的所有物体，质点动量均映射到同一套背景网格。在某些问题下单一的背景网格降低了问题模拟的效率。比如在模拟多个物体运动中相互作用的问题中，可能存在很多不含质点的空背景网格格子，伴随物体运动这些空背景网格格子可能在下一时刻被质点占据，同时也会产生一些新的空背景网格格子。另外初始阶段相距较远的物体之间可能不存在相互作用，它们的信息一样需要映射到同一套背景网格节点上，直到他们相互接触后才通过局部背景网格实现相互作用。这些都在一定程度上造成了网格的浪费，降低了求解效率。

基于以上考虑本章提出多重背景网格物质点法，它允许在同一个求解体系下存在多套背景网格，每个物体可以在各自独立的背景网格中进行计算。当不同网格中的物体发生相互作用时，再将物质点信息映射到同一套背景网格下进行计算，从而增强了背景网格求解的灵活性。同时由于不同物体使用各自独立的背景网格计算，各背景网格只要覆盖相应物体的求解区域即可，进而充分提高背景网格节点的利用率，从而提高求解效率，节省计算资源消耗。多重网格可以和第4.1节中提出的移动网格方法一起使用，从而进一步发挥其

优势。

4.2.2 算法实现

如图4.4所示，这里以两个圆盘 A 和 B 相向运动直到分离的过程说明多重网格算法的实现过程。具体如下：

1. 当初始状态物体相隔一定距离并未相互作用时，各自使用单独的网格进行计算。如图4.4(a) 所示，物体 A 对应蓝色计算网格，物体 B 对应红色计算网格。
2. 当物体发生接触时，使用同一套背景网格进行计算。对物体的接触探测需要确定一套主网格，这里设定主网格为物体 A 的计算网格。我们定义存在两个以上物体质点映射信息的网格节点为接触节点。当主网格中发现接触节点时，即触发计算网格转换条件。此时使用第4.1节中提出的移动网格方法创建新的背景网格，并覆盖发生接触物体的求解区域，如图4.4(b) 所示。
3. 当接触完成后物体相互分离时，各物体可以使用独立的网格计算。采用独立网格计算的基本条件是主网格中不再存在接触节点。某些情况下当前时刻主网格中接触节点消失，而下一时刻又可能出现接触节点。为防止由此导致的背景计算网格频繁创建切换，这里使用图4.3(b) 中所示的虚拟计算边界思想。即计算出某一物体的质点边界，如图4.1(c) 中所示物体 A 的边界 Γ_1，并向外扩展 $2d_c$ 的空间，得到 Γ_2。当 Γ_2 中不存在物体 B 的质点时，分别创建物体 A 和 B 的计算网格，并独立计算。

4.3 数值算例

4.3.1 钢珠侵彻薄钢板

这里应用本文提出的移动网格物质点法研究了钢珠侵彻薄钢靶的过程。钢珠直径 10mm，金属薄板厚 1mm，钢珠冲击速度 200m/s。弹体和薄板的材料相同，均采用简化 Johnson-Cook 模型来更新偏应力，不考虑温度效应的影响，相关参数见表4.1，采用 Mie-Grüneisen 状态方程来描述压力，相关参数见表4.2。这里使用等效塑性应变失效模型，失效应变值取值 $\varepsilon_f = 0.57$，当材料等效塑性应变大于 ε_f 时，将偏应力设置为 0[164]。

模型离散时考虑其对称性使用 1/4 模型计算，质点大小 0.25mm，初始背景网格格子间距 0.5mm。这里一共采用三种背景网格进行计算:（1）一致静态背

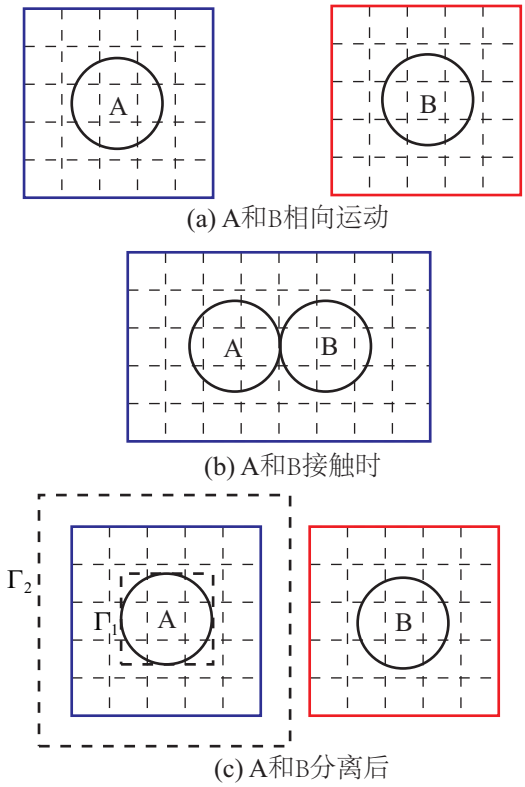


图 4.4　多重网格示意图

景网格，即传统物质点法所采用的背景网格，背景网格在整个计算过程中保持不变，因此初始时刻背景网格应覆盖足够大的计算区域才能完全捕捉钢珠穿透薄板的整个过程，初始网格布置如图4.5(a) 所示；（2）Ma 等提出的移动网格方法，即当发现物体飞出背景网格计算区域后自动调整背景网格格子大小并保持拓扑结构不变，初始网格布置如图4.5(b) 所示；（3）本文提出的改进的移动网格方法，动态更新背景网格范围，保持背景网格格子大小不变，并且不改变原有网格节点的位置，初始网格布置与方案（2）的相同，如图4.5(b) 所示。对比可见在计算开始阶段传统物质点法使用的网格存在很大程度的浪费。

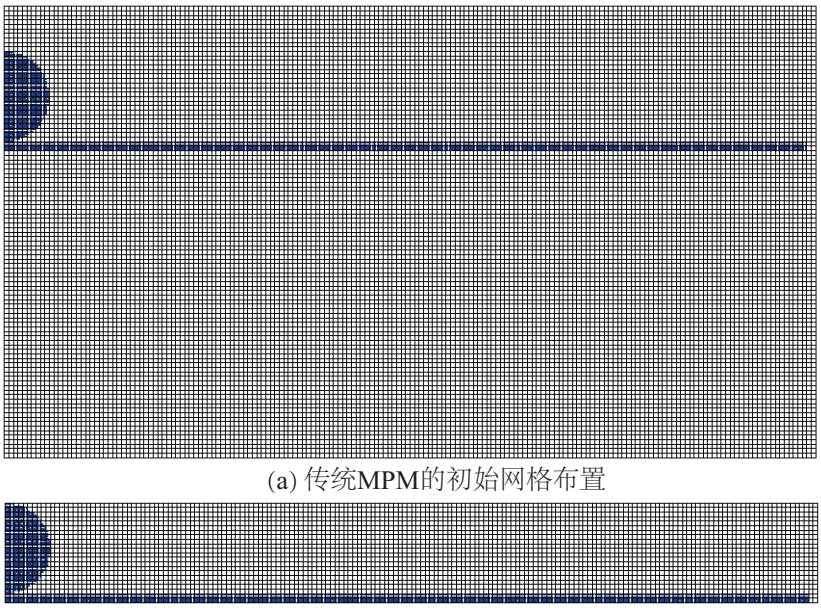
表 4.1　钢的 Johnson-Cook 模型参数[165]

ρ_0(g/mm^3)	ν	E(GPa)	A(MPa)	B(MPa)	n
7.85×10^{-3}	0.30	200	600	275	0.36

图4.6为 0.12ms 时刻三种不同网格的计算结果对比图。从薄板的变形可以看出当使用 Ma 等提出的移动网格方法时，由于背景网格移动后在侵彻方向被拉长，从而扩大了质点间的相互作用范围，增强了钢珠对薄板的破坏作用，从图4.6(b) 中可以看到撞击处薄板的质点基本失效。而本提出的改进的移动背

表 4.2　钢的 Grüneisen EOS 参数[165]

c_0(m/s)	s	γ_0
3600	1.90	1.70



(a) 传统MPM的初始网格布置

(b) 移动网格MPM的初始网格布置

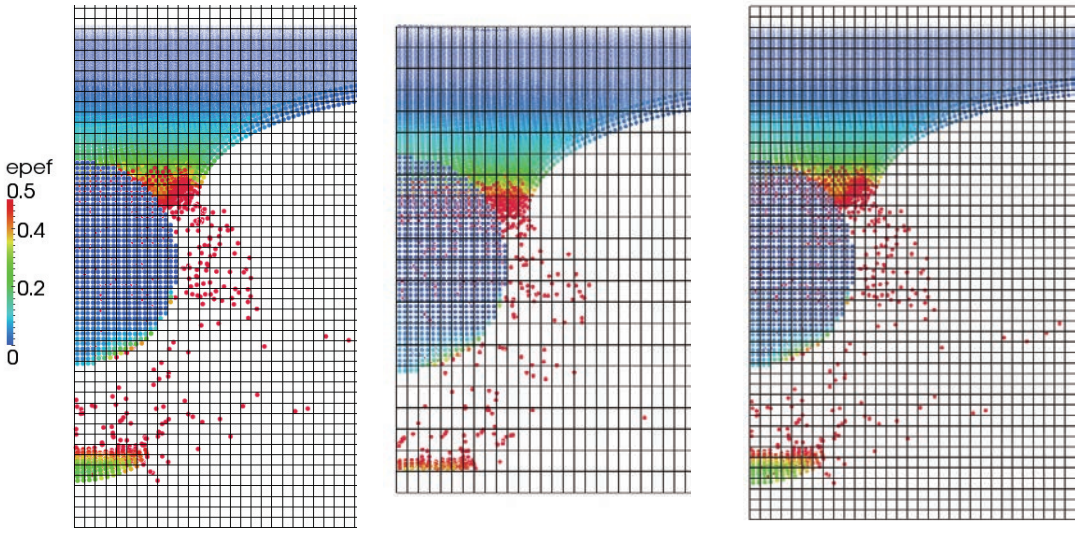
图 4.5　初始网格布置

景网格物质点法得到了和使用原始静态背景网格一致的结果，如图4.6(a) 和 (c) 所示。图4.6(a) 所示的背景网格为沿钢珠侵彻速度方向截取的一部分网格，而图4.6(b) 和 (c) 给出了背景网格在侵彻方向的边界，图4.6(c) 中可以看到改进的移动网格方法保持了原始格子尺寸。

图4.7绘制了计算过程中钢珠的速度时程曲线，可以发现改进的移动网格方法与传统物质点法的计算结果完全重合，而 Ma 等提出的移动网格技术由于背景网格格子在钢珠侵彻方向不断扩大，从而加大了质点间的相互作用范围，在增强钢珠对薄板破坏效应的同时也降低了钢珠本身的剩余速度。

薄板的破坏程度可以通过图4.8(a) 中的 h/d 作为定量指标来评价，实验测得 $h/d=0.83$。使用不同网格模拟得到的靶体最终形状和实验的对比如图4.8所示，图中同时列出了相应的 h/d 大小，可见传统物质点法和改进移动网格物质点法的结果一致均为 0.85，而 Ma 等提出的移动网格物质点法由于侵彻方向格子长度不断增加导致薄板最终形状 h 值偏大，d 值偏小，测得 $h/d=0.91$。

三种背景网格下的计算耗时对比见表4.3，本文提出的改进的移动网格方



(a) 传统MPM　　(b) Ma移动网格MPM　　(c) 改进移动网格MPM

图 4.6　不同网格计算结果对比

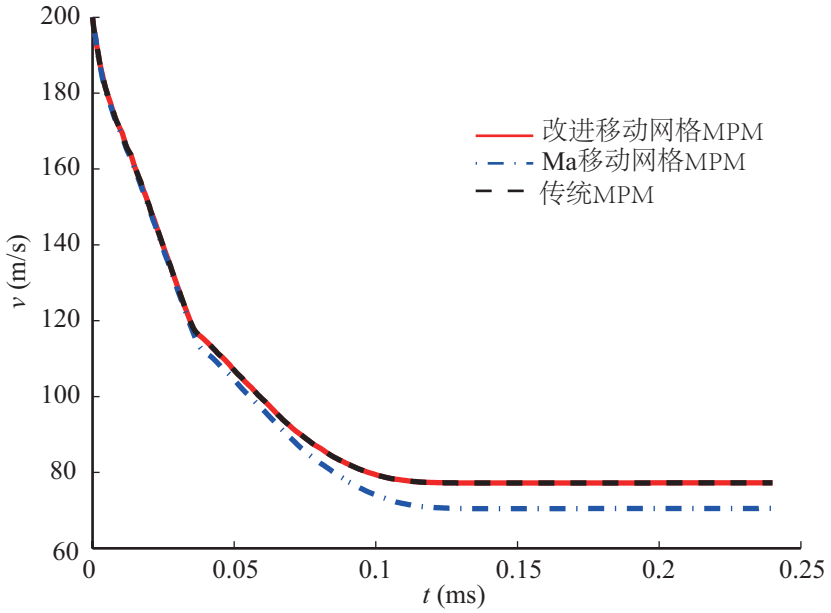


图 4.7　不同网格弹丸速度变化对比

法根据物体的运动变形情况移动并拓扑优化背景网格，同时在运动方向前留出了一定的余量避免了频繁的创建删除网格，具有较高的计算效率。

4.3.2　多层侵彻问题

第3.6.3节的研究证明物质点法对侵彻问题的有效性，本节将改进的移动网格方法和多重网格方法结合并应用于研究多层侵彻的问题。弹体模型如图3.20，采用简化 Johnson-Cook 弹塑性模型，考虑应变率效应，相关参数见表4.4；采

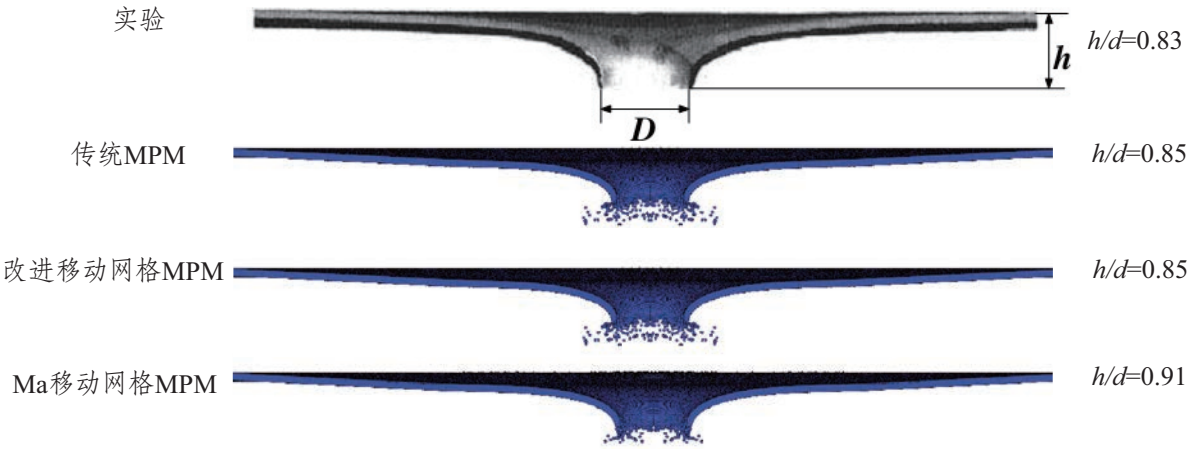


图 4.8 靶板的破坏形貌对比

表 4.3 不同背景网格计算时间 t 对比

	改进移动网格	Ma 移动网格	传统网格
t	176min	269min	369min

用 Mie-Grüneisen 状态方程来描述压力，参数见表4.5。靶体材料为 A6061-T651 铝合金，采用与3.6.3节中靶体相同的材料模型和参数。两靶体之间的距离为 150mm，靶体与弹体入射方向夹角为 60º，厚靶厚度 20mm，薄靶厚度 5mm，弹体入射速度 400m/s。

表 4.4 弹体 Johnson-Cook 模型参数

ρ(g/mm^3)	E(MPa)	ν	A(MPa)	B(MPa)	n	c
7.85×10^{-3}	2.1×10^{5}	0.3	1587	382.5	0.245	0.02

这里分别研究薄靶在前、厚靶在后以及厚靶在前、薄靶在后两种情形。图4.9和图4.10为多重移动网格物质点法用于多层侵彻问题的模拟结果，图4.9为薄靶在前的情形，图4.10为厚靶在前的情形。此算例中存在三个物体，分别建立各自的背景计算网格。在弹体与靶体发生接触前可各自采用独立的网格进行计算，接触后采用同一套网格进行计算，而在弹体穿透靶体并与靶体分离后又可以各自采用独立的网格进行计算。

多重移动网格物质点法可以充分提高背景网格的利用效率，同时还可以对个别网格进行关闭、激活操作。例如，在弹体与靶体发生接触前，靶体没有外载荷和初速度，因此可以关闭靶体的背景网格；在弹体和靶体分离后，若

表 4.5 弹体 Grüneisen EOS 参数

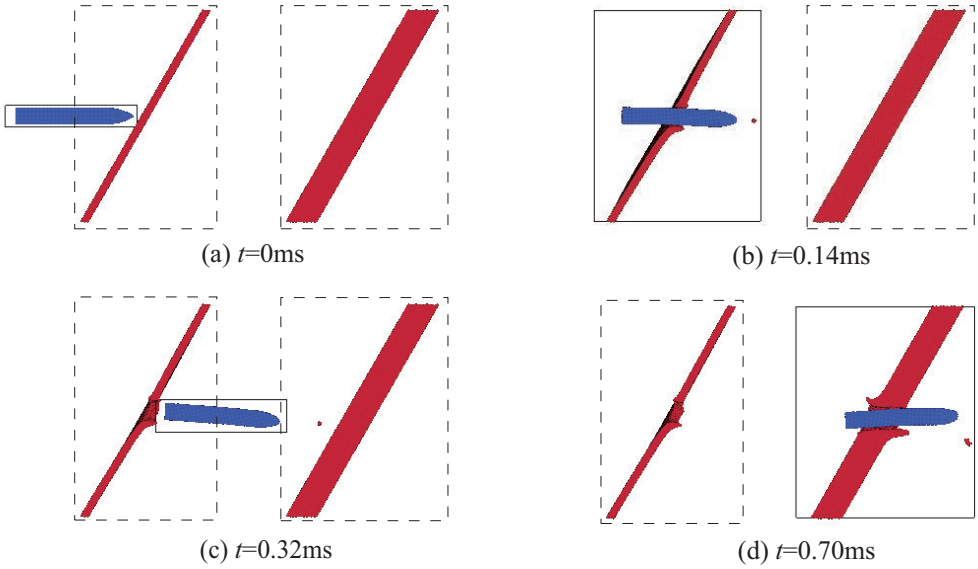
c_0(m/s)	s	γ_0
3570	1.92	1.8

探测到靶体内能不再变化，也可以关闭其背景网格，以进一步提高计算效率。图4.9和图4.10中虚线框为当前未激活背景网格的边界，实线框为激活背景网格的边界，可以看到激活的背景网格一直跟随着弹体移动。弹体侵彻过程中攻角的变化见表4.6，相应的速度变化曲线如图4.11所示，可见当薄靶在前时，弹体穿透薄靶后速度并未明显改变，接着在穿透厚靶的过程中弹体轨迹向上偏斜，纠正了负攻角，最终出射弹体攻角变小。而当厚靶在前时，弹体虽然穿透第一层靶体后的攻角仍然为 -10º 左右，但其弹速明显降低，当接触到第二层的薄板时，弹体动能不足以使其直接穿透靶体，弹体进一步产生翻转偏斜，导致对靶体的破坏范围加大，薄靶被撕裂。此过程也消耗了弹体更多的动能，最终弹体出射攻角进一步加大。

由于采用了多重移动背景网格，每一时刻所使用的背景网格仅仅局限于围绕弹体的局部有限区域，相比于采用传统单一规则背景网格，多级移动背景网格使得背景网格节点的利用率大大提高，图4.12显示了两种算例下，多重移动背景网格物质点法所使用的背景网格节点数占采用传统单一规则背景网格时所用的节点数的比例变化情况。整个计算过程中多重移动网格物质点法使用的网格节点数相比传统单一规则背景网格节点数的比率一直保持在 50% 以下，当弹体与靶体不存在相互作用时，其网格节点使用率仅在 1% 左右。网格节点使用率的降低使得计算机资源占用率降低，同时也提高了计算效率，CPU 计算时间的比较见表4.7，可见本算例中采用多重移动网格的计算时间相比于传统单一规则网格的情况节省了 60% 以上。

表 4.6 弹体侵彻过程中攻角的变化

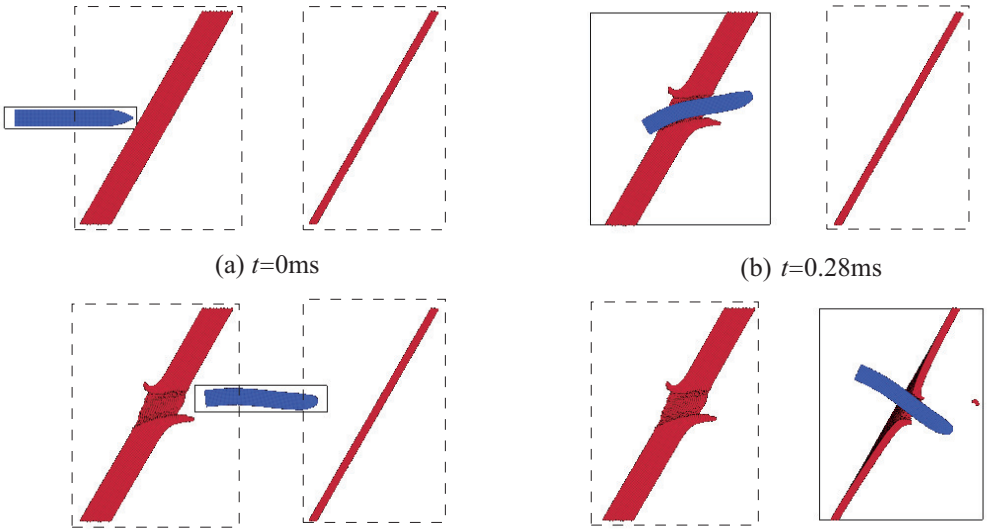
	第一靶后	第二靶前	第二靶后
薄靶在前	-10º	-15º	-5º
厚靶在前	-10º	-35º	-50º



(a) t=0ms　(b) t=0.14ms

(c) t=0.32ms　(d) t=0.70ms

图 4.9　多层侵彻过程（薄靶在前）



(a) t=0ms　(b) t=0.28ms

(c) t=0.56ms　(d) t=0.98ms

图 4.10　多层侵彻过程（厚靶在前）

4.4　本章小结

本章提出了多重移动背景网格物质点法，在改进了 Ma 等提出的移动网格方法可能导致计算精度下降问题的基础上，允许系统中不同物体使用独立的背景网格求解，在发生相互作用时再映射到同一套背景网格下计算，因此大大增强了传统物质点法的求解灵活性，从而在降低资源消耗的同时提高了计算效率。

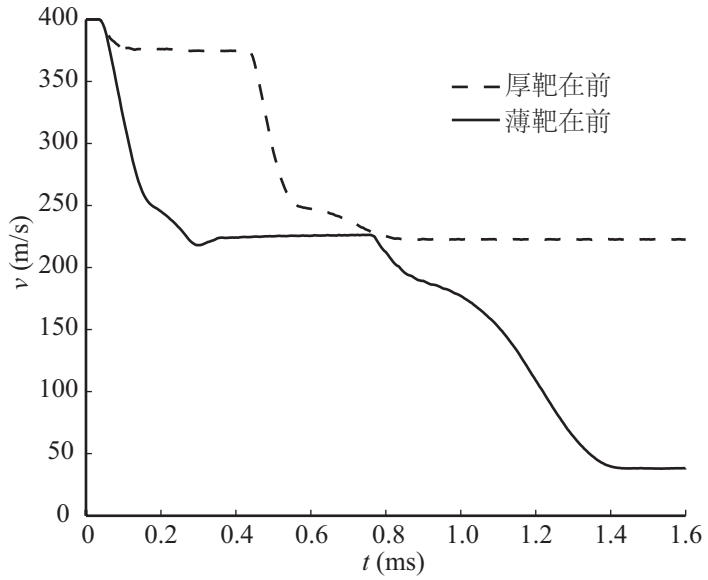


图 4.11　弹体速度变化曲线

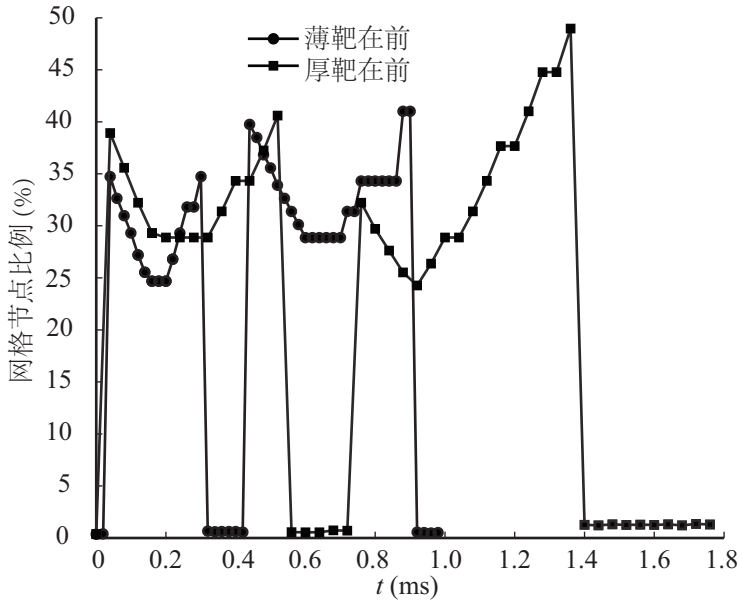


图 4.12　网格内存占用比率

表 4.7　计算时间比较

	薄靶在前	厚靶在前
单一规则网格	53min	86min
多重移动网格	25min	32min

本章利用改进的移动网格方法研究了弹丸侵彻薄板的问题，改进的移动网格方法不存在 Ma 等提出的移动网格方法在移动网格过程中由物质点相互作用范围扩大导致出口弹速偏低的问题。改进的移动网格方法在有效提高计算效率的同时，保持了传统一致静止网格的计算精度。本章同时应用多重移动网格物质点法研究了弹体斜侵彻多重靶体的过程，分析了不同厚度靶体布置位置对弹体运动轨迹和出口弹速的影响，研究表明多重移动网格物质点法大幅降低了空间背景网格的利用率，提高了计算效率。

第 5 章 金属延性断裂的物质点法研究

金属延性断裂行为是工程中普遍关注的问题，但是准确预测裂纹的扩展路径以及断裂载荷仍然是一难题。在这样的背景下，美国 Sandia 国家重点实验室于 2012 年举办了 Sandia 断裂挑战赛（The Sandia Fracture Challenge ）以寻找有效的数值模拟方法。作者基于物质点法参与了此项挑战，本章中所使用的实验图片均来自于美国 Sandia 国家实验室所提供的实验结果。

物质点法具有不需要固定网格连接的特性，相比有限单元法对模拟不连续问题具有较明显的优势。本章的工作基于 Miehe 和 Schröder[166] 提出的脱聚（decohesion）本构模型，它能够有效表征材料由局部化到脱聚的转变过程。本章发展了三维脱聚模型理论并在三维物质点法框架下实现，以此来模拟延性断裂问题。

5.1 基本思路

材料的破坏伴随着位移、速度、应变、应力等场变量的间断，连续体失效过程中运动场变量的间断可以概括为[167]：

$$\text{扩散失效：}\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$$

$$\text{局部失效：}\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1\neq\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$$

$$\text{离散失效：}\boldsymbol{v}_1\neq\boldsymbol{v}_2,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1\neq\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$$

其中 $\boldsymbol{v}_1$， $\boldsymbol{v}_2$ 和 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$， $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$ 分别是某一不连续面两侧材料的速度向量和总应变率张量，运动场变量的突变程度反映了材料的破坏程度。连续状态到非连续状态的转变可以由局部化失效来表征[144]。

材料断裂破坏的数值模拟方法很多，比较有代表性的有：（1）基于连续损伤模型的方法；（2）内聚力理论；（3）扩展有限元。其中内聚力理论是一种不连续方法，它给出了内聚力和不连续性位移的关系。这种不连续的本构关系被广泛应用在界面单元中，Ortiz 和其合作者们[29,168] 将内聚力模型应用于内聚力单元中研究了裂纹传播问题。Dvorkin 等人[169] 在单元内部而不是在单元界面施加了这种不连续性。为提高计算效率，局部化和断裂的方向往往事先指定或者依赖于离散网格。

Miehe 和 Schröder[166]，以及 Schreyer 等[140] 提出了脱聚本构模型来描述局部失效面的应力应变状态，脱聚模型属于一种不连续本构关系。当材料中脱聚面的等效拉力达到一定阈值时，使用脱聚本构模型来更新材料应力。该模型建立等效界面拉力和突变位移的关系，描述了材料失效过程，而失效前的材料行为可以使用其他连续体本构模型单独求解。脱聚模型将不连续性视作本构关系的一部分，失效的质点仍然是连续体的一部分，必须同时满足脱聚模型和连续体本构模型。

Chen 等[144] 指出局部失效位置以及脱聚方向的计算可以基于计算网格、最大拉应力（应变）或者不连续分岔分析[167]。Chen 和 Shen 等人[144–146] 陆续发展了脱聚模型，应用中首先分析材料切线刚度的正定部分，当其丧失了正定性时，材料由连续状态进入非连续状态，即进入由局部化向界面失效的转变过程。这种方法的优点在于可以考虑不连续分岔发生在材料极限应力状态之前、之上以及之后的不同情况，但其计算较为复杂，效率不高，因此目前的工作仅仅围绕二维脱聚模型展开，求解的二维问题模型简单、规模较小。另外目前在脱聚模型的应用中，同一套参数下只能考虑一种断裂失效模式。即无论载荷形式如何，当参数选定后，I 型、II 型或者 I 型 II 型混合的具体失效模式便确定了。而实际中复杂构件在复杂载荷作用下，不同材料区域可能发生不同模式的失效，而不是由材料模型确定了整个构件材料的统一失效模式。

基于以上考虑，为了研究三维复杂金属构件的延性断裂问题，本文发展了三维脱聚模型，主要考虑如下：（1）使用基于最大主应力和最大剪切应力的脱聚判断准则，根据最大主应力的作用面法向以及最大切应力的作用方向计算脱聚方向。（2）在同一套模型下考虑不同的失效模式，构件在变形过程中可以根据局部载荷和应力状态的不同发生不同模式的失效。

5.2 脱聚模型

设材料的失效面由一系列位移不连续的点组成的，当材料面上不能再承载任何拉力时失效就完全发生了，此时失效面两侧材料分离，断裂即发生。这种界面处位移的不连续性称作为脱聚。

图5.1为二维脱聚模型示意图，其中 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 分别是脱聚面的单位法向和切向方向矢量，$\boldsymbol{m}$ 为脱聚演化方向。

在建立脱聚不连续本构模型时，忽略弹性应变部分，即总应变等于塑性应变，$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^p$。假设荷载作用下材料某部分发生脱聚，并产生失效面 Γ，脱聚

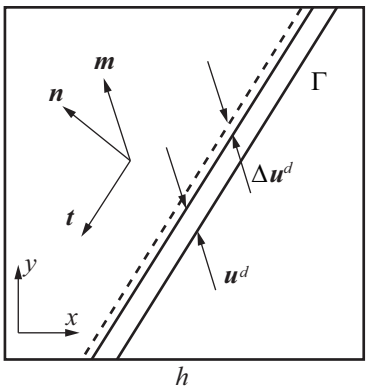


图 5.1　二维脱聚模型

量为 $\boldsymbol{u}^d$。Γ 上的任一点同时为连续体中的一点，它满足线弹性应力应变关系

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{E} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d) \tag{5-1}$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}^d$ 为脱聚应变张量，$\boldsymbol{E}$ 为弹性张量。

界面拉力 $\boldsymbol{\tau}$ 可以表达为：

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \tag{5-2}$$

$\boldsymbol{\tau}$ 引起的表面能的增加率为 $\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}^d$，假设初始单位面积表面能为 U_0，脱聚引起的表面能效应为 U_d，则破坏面单位面积表面自由能的表达式为

$$U = U_0 - U_d \tag{5-3}$$

式中 U_d 的形式在一定程度上决定了脱聚本构模型的表达式。由于不考虑弹性，脱聚位移变化率 $\dot{\boldsymbol{u}}^d = \dot{\boldsymbol{u}}^p$，脱聚初始时刻 $\boldsymbol{u}^d = \boldsymbol{u}^p = \boldsymbol{0}$，定义 $\bar{u}$ 为表征脱聚状态的标量参数，则能量耗散率为

$$D_s = \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}^d - \dot{U} = \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}^p + \bar{\tau}\dot{\bar{u}} \tag{5-4}$$

其中 $\bar{\tau}$ 为广义的拉力，它与 $\bar{u}$ 共轭，即

$$\bar{\tau} = \frac{\partial U_d}{\partial \bar{u}} \tag{5-5}$$

定义 λ 为单值单调递增的无量纲参数，则可以将脱聚过程参数化，其演化方程为

$$\dot{\boldsymbol{u}}^p = \dot{\lambda}\boldsymbol{m},\ \dot{\bar{u}} = \dot{\lambda} m \tag{5-6}$$

式中 $\boldsymbol{m}$ 和 m 为演化函数，它们分别依赖于 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\bar{\tau}$。向量 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{\tau}$ 的内积半正定，

定义界面等效拉力

$$\tau^e = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{m} \tag{5-7}$$

则能量耗散率可写成

$$D_s = \dot{\lambda} [\tau^e + \bar{\tau} m] \tag{5-8}$$

为保证能量耗散率为正，定义脱聚方程为

$$f^d = \tau^e + \bar{\tau} m - \tau_0^e,\ \tau_0^e > 0 \tag{5-9}$$

当界面拉力为 0 时 f^d<0。脱聚过程中不容许 $f^d > 0$，即当 $f^d = 0$ 时脱聚发生。在脱聚初始时刻，有 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0$，$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_0$，$\bar{\tau} = 0$。$\bar{\tau}$ 逐渐增加直至 $\tau^e = 0$，此时材料点完全分离。

定义材料常数：参考脱聚脱聚量 $\bar{u}_0$，参考表面能 U_0，参考拉力 $\bar{\tau}_0$，并有 $U_0 = \bar{u}_0 \bar{\tau}_0$。选择如下形式的演化函数和脱聚能：

$$\boldsymbol{m} = \bar{u}_0 \frac{\boldsymbol{A}^d \cdot \boldsymbol{\tau}}{\sqrt{\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{A}^d \cdot \boldsymbol{\tau}}},\ m = \bar{u}_0,\ U_d = U_0 \frac{(\bar{u}/\bar{u}_0)^{q+1}}{(q+1)} \tag{5-10}$$

其中 $\boldsymbol{A}^d$ 是正定的与材料参数相关的无量纲张量，$q \geqslant 0$。

$\boldsymbol{\tau}$ 在失效面法向和切向的分量分别为 τ_n 和 τ_t，即

$$[\boldsymbol{\tau}] = [\ \tau_n \quad \tau_t\ ] \tag{5-11}$$

当 τ 只有法向分量时，材料失效的拉力临界值为 τ_{nf}；当 τ 只有切向分量时，材料失效的拉力临界值为 τ_{tf}。$\boldsymbol{A}_d$ 综合考虑了这两种失效情况，其形式如下：

$$\left[\boldsymbol{A}^d\right] = \bar{\tau}_0^2 \begin{bmatrix} 1/\tau_{\mathrm{nf}}^2 & 0 \\ 0 & 1/\tau_{\mathrm{tf}}^2 \end{bmatrix} \tag{5-12}$$

则等效拉力 τ^e 的表达式如下：

$$\tau^e = U_0 \tau^{e*} \tag{5-13}$$

$$\tau^{e*} = \sqrt{\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{A}^d \cdot \boldsymbol{\tau}} / \bar{\tau}_0 \tag{5-14}$$

可以发现这里选择的演化函数是相关联的，即

$$\boldsymbol{m} = \frac{\partial f^d}{\partial \boldsymbol{\tau}},\ m = \frac{\partial f^d}{\partial \bar{\tau}} \tag{5-15}$$

另外有

$$\bar{u} = \lambda \bar{u}_0,\ \bar{\tau} = \bar{\tau}_0 \lambda^q \tag{5-16}$$

在脱聚的初始时刻，$\lambda = 0$，且

$$\frac{\tau_{\mathrm{nb}}^2}{\tau_{\mathrm{nf}}^2} + \frac{\tau_{\mathrm{tb}}^2}{\tau_{\mathrm{tf}}^2} = 1 \tag{5-17}$$

其中 τ_{nb} 和 τ_{tb} 分别是从不连续分岔分析得到的正应力和切向应力，本文基于临界应力的判断方法，τ_{nb} 和 τ_{tb} 分别对应由应力分析求得最大主应力和最大剪切应力。令 $C_m = \tau_{\mathrm{tf}}/\tau_{\mathrm{nf}}$，$C_m$ 的大小反映了不同的失效模式。当 $C_m = 100$ 时表示 I 型失效模式，此时 $\bar{\tau}_0 = \tau_{\mathrm{nf}}$；当 $C_m = 0.01$ 时表示 II 型失效模式，此时 $\bar{\tau}_0 = \tau_{\mathrm{tf}}$；当 $C_m = 1$ 时表示 I 型 II 型混合失效模式，此时 $\bar{\tau}_0 = \tau_{\mathrm{nf}} = \tau_{\mathrm{tf}}$。设材料的主应力为 s_1，s_2 和 s_3，其中 s_1 和 s_3 分别为最大最小主应力，则剪切应力 $\tau_t = \frac{s_1 - s_3}{2}$，有 $\tau_{\mathrm{nb}} = s_1$，$\tau_{\mathrm{tb}} = \tau_t$，则 τ_{nf} 的计算公式为

$$\tau_{\mathrm{nf}} = \sqrt{s_1^2 + \frac{(s_1 - s_3)^2}{4C_m^2}} \tag{5-18}$$

界面拉力和脱聚量的关系可由参数 q 来调节，如图5.2所示。当 $q = 1$ 是表征了一种线性关系。因此脱聚模型的模型参数为 τ_{nf}，τ_{tf}，U_0 以及 q。伴随着脱聚的发展，$\boldsymbol{u}^d$ 增加的同时 τ^{e*} 逐渐减小，当 $\boldsymbol{u}^d = \bar{u}_0$ 时，$\tau^{e*} = 0$。当界面脱开两侧材料分离时，$\boldsymbol{u}^d > \bar{u}_0$ 且 $\tau^{e*} = 0$。脱聚演化方程的另一种表达形式为：

$$\boldsymbol{m} = \frac{U_0}{\tau^{e*}} \left(\frac{\tau_n}{\tau_{\mathrm{nf}}^2} \boldsymbol{n} + \frac{\tau_t}{\tau_{\mathrm{tf}}^2} \boldsymbol{t} \right) \tag{5-19}$$

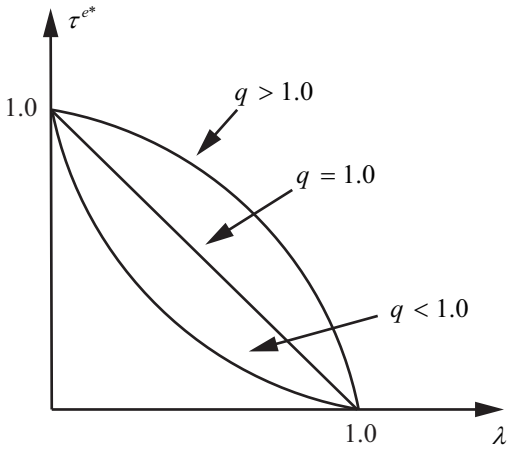


图 5.2　脱聚关系

考虑 $\tau_0^e = \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \boldsymbol{m}_0$，$\boldsymbol{m}_0 = \bar{u}_0 \frac{\boldsymbol{A}^d \cdot \boldsymbol{\tau}_0}{\sqrt{\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \boldsymbol{A}^d \cdot \boldsymbol{\tau}_0}}$，$m = \bar{u}_0$，$\bar{\tau} = \bar{\tau}_0 \lambda^q$ 以及 $U_0 = \bar{u}_0 \bar{\tau}_0$，脱聚函数 f^d 可表示为

$$f^d = \tau^e - U_0(1-\lambda^q) = 0 \tag{5-20}$$

定义 $f^d = U_0 f^{d*}$, $\bar{\tau}^* = \bar{\tau}/\bar{\tau}_0 = \lambda^q$，则

$$f^{d*} = \tau^{e*} - (1-\bar{\tau}^*) \tag{5-21}$$

对 f^{d*} 的试探状态进行 Taylor 展开来更新脱聚状态：

$$f^{d*} = \frac{\partial f^{d*}}{\partial \lambda}|_{\mathrm{tr}} \triangle\lambda + [\tau^{e*} - (1-\bar{\tau}^*)]|_{\mathrm{tr}} + O(\triangle\lambda)^2 = 0 \tag{5-22}$$

对给定的应变增量，假设不发生脱聚求得试探应力和界面等效拉力，并计算相应的脱聚函数试探值 $f^{d*}|_{\mathrm{tr}}$，如果 $f^{d*}|_{\mathrm{tr}} \leqslant 0$ 则不发生脱聚，如果 $f^{d*}|_{\mathrm{tr}} > 0$，由式 (5-22) 求得 $\triangle\lambda$ 并进行脱聚更新。

当断裂发生时，材料分离将引起材料点的应变场发生变化，图5.1为一边长为 h 的材料点处发生的脱聚，该材料点应变增量为 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$，脱聚增量为 $\Delta\boldsymbol{u}^d$，脱聚单位方向为 $\boldsymbol{m} = \Delta\boldsymbol{u}^d/|\Delta\boldsymbol{u}^d|$。定义失效模式张量为

$$\boldsymbol{M}_m = \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{m} + \boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{n}) \tag{5-23}$$

注意到当 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{t}$ 时，$\boldsymbol{M}_m$ 分别退化为张开型（I 型）失效模式张量和剪切型（II 型）失效模式张量。

给定时间步，材料点总应变增量 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ 一定，脱聚应变增量 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^d$ 将降低材料点的有效应变增量，它满足

$$\int_\Omega \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^d \mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega_d} \Delta u^d \boldsymbol{M}_m \mathrm{d}A, \quad \Delta\boldsymbol{u}^d = \Delta u^d \boldsymbol{m} \tag{5-24}$$

其中 $\mathrm{d}V$ 和 $\mathrm{d}A$ 分别为材料点体积 Ω 和脱聚面 $\partial\Omega_d$ 面积的微分。脱聚增量为 Δu^d，方向为 $\boldsymbol{m}$，因此脱聚应变增量和脱聚增量的关系为

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^d = \frac{\Delta u^d}{L_e}\boldsymbol{M}_m \tag{5-25}$$

其中 L_e 为材料点体积与脱聚面面积的比值。三维情况下 L_e 可表示为

$$L_e = hm_1 + hm_2 + hm_3 \tag{5-26}$$

其中 $\boldsymbol{m} = m_1\boldsymbol{e}_1 + m_2\boldsymbol{e}_2 + m_3\boldsymbol{e}_3$，式 (5-25) 的率形式为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d = \dot{\lambda}(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{m} + \boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{n})/(2L_e) \tag{5-27}$$

5.3 模型实现

本文在三维物质点框架下实现脱聚模型，对原来基于连续体本构模型的应力更新方式做如下修改：

当物质点未进入脱聚状态时，首先对物质点按连续体本构模型进行应力更新并进行应力分析，得到质点等效应力 s 以及主应力 s_1， s_2 和 s_3。已知容许最大拉应力和剪切应力分别为 $s_{\max}$ 和 $\tau_{\max}$，进行如下判断

1. 当且仅当 $s_1 > s_{\max}$ 时，发生 I 型失效，此时 $C_m = 100$，按式 (5-18) 计算得到 τ_{nf}， $\tau_{\mathrm{tf}} = 100\tau_{\mathrm{nf}}$，取 $\bar{\tau}_0 = \tau_{\mathrm{nf}}$。
2. 当且仅当 $\tau_t > \tau_{t,\max}$ 时，发生 II 型失效，此时 $C_m = 0.01$，按式 (5-18) 计算得到 τ_{nf}， $\tau_{\mathrm{tf}} = 0.01\tau_{\mathrm{nf}}$，取 $\bar{\tau}_0 = \tau_{\mathrm{tf}}$。
3. 当 $s_1 > s_{\max}$ 且 $\tau_t > \tau_{t,\max}$ 时，发生 I 型 II 型混合失效，此时 $C_m = 1$，按式 (5-18) 计算得到 τ_{nf}， $\tau_{\mathrm{tf}} = \tau_{\mathrm{nf}}$，取 $\bar{\tau}_0 = \tau_{\mathrm{nf}} = \tau_{\mathrm{tf}}$。

由于 $U_0 = \bar{u}_0\bar{\tau}_0$，则剩余模型参数为 $\bar{u}_0$ 和 q。当满足以上三个条件之一时，质点进入脱聚状态，从脱聚模型应力更新步骤中的第2步开始，计算脱聚面单位法向并进行脱聚更新。

如果质点在上一计算时间步已经进入脱聚状态，从脱聚模型应力更新步骤中的第1步开始计算，首先进行弹性试探。

脱聚模型应力更新步骤如下：

1. 弹性试探步

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{tr}} = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{E} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d)\triangle t \tag{5-28}$$

2. 计算脱聚面单位法向 $\boldsymbol{n}$

首先求出主应力 s_1， s_2 和 s_3 作用面的单位法线方向 $\boldsymbol{n}_1$， $\boldsymbol{n}_2$ 和 $\boldsymbol{n}_3$。

如果为 I 型失效模式，脱聚面为最大主应力作用面， $\boldsymbol{n}$ 即为最大主应力的单位方向矢量， $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1$， $\tau_n = s_1$， $\tau_t = 0$;

如果为 II 型失效模式，脱聚面为最大剪切应力作用面，即为通过中间主应力且平分最大和最小主应力夹角的平面,$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{n}_2\times(\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_3)}{|\boldsymbol{n}_2\times(\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_3)|}$， $\tau_n = \frac{s_1+s_3}{2}$，$\tau_t = \frac{s_1-s_3}{2}$;

如果为混合失效模式， $\boldsymbol{n}$ 取最大主应力作用面法向和最大剪切应力作用面法向的平均值，令 $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{n}_1 + \frac{\boldsymbol{n}_2\times(\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_3)}{|\boldsymbol{n}_2\times(\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_3)|}$， $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{d}|}$。

则可求得 $\boldsymbol{\tau}$ 的试探值为

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{tr}} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{tr}} \cdot \boldsymbol{n} \tag{5-29}$$

3. 计算 f^{d*}

   由式 (5-14) 求得 τ^{e*}，然后由式 (5-21) 计算 f^{d*}。如果 $f^{d*}>0$ 且 $\lambda<1$，转到第4步进行脱聚量更新并修正应力状态；否则新应力状态取为试探应力 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{tr}}$。

4. 计算 $\Delta\lambda$

$$\Delta\lambda=-f^{d*}/\frac{\partial f^{d*}}{\partial\lambda} \tag{5-30}$$

   其中

$$\frac{\partial f^{d*}}{\partial\lambda}=\left(-\frac{\tau_m\cdot\boldsymbol{m}^*}{\bar{\tau}_0}+q\lambda^{q-1}\right) \tag{5-31}$$

$$\boldsymbol{m}^*=\frac{\boldsymbol{A}^d\cdot\boldsymbol{\tau}}{\bar{\tau}_0\tau^{e*}} \tag{5-32}$$

5. 修正脱聚质点应力状态

$$\boldsymbol{m}=\bar{u}_0\boldsymbol{m}^* \tag{5-33}$$

$$\boldsymbol{M}=\frac{1}{2L_e}(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{m}+\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{n}) \tag{5-34}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_m=\boldsymbol{E}:\boldsymbol{M} \tag{5-35}$$

$$\tau_m=\boldsymbol{\sigma}_m\cdot\boldsymbol{n} \tag{5-36}$$

$$\lambda=\lambda_{\mathrm{pr}}+\Delta\lambda \tag{5-37}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^d=\Delta\lambda\boldsymbol{M} \tag{5-38}$$

$$\Delta\boldsymbol{u}^d=\Delta\lambda\boldsymbol{m} \tag{5-39}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^d=\boldsymbol{\varepsilon}^d_{\mathrm{pr}}+\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^d \tag{5-40}$$

$$\boldsymbol{u}^d=\boldsymbol{u}^d_{\mathrm{pr}}+\Delta\boldsymbol{u}^d \tag{5-41}$$

$$\Delta\boldsymbol{\tau}=\Delta\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{tr}}-\Delta\lambda\boldsymbol{\tau}_m \tag{5-42}$$

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{pr}}+\Delta\boldsymbol{\tau} \tag{5-43}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{tr}}-\Delta\lambda\boldsymbol{\sigma}_m \tag{5-44}$$

   其中下标 pr 表示上一时间步的值。

6. 检测 f^{d*}，如果 $f^{d*}<\mathrm{Tol}$（Tol 为用户指定的容许误差）或者 $\lambda\geqslant 1$，则停止脱聚更新。

程序实现过程中涉及如下三个向量的计算

$$\boldsymbol{n}=n_i\boldsymbol{e}_i,\quad \boldsymbol{t}=t_i\boldsymbol{e}_i,\quad \boldsymbol{m}=m_i\boldsymbol{e}_i\quad i=1,2,3 \tag{5-45}$$

它们分别为界面正应力单位方向、界面切应力单位方向以及脱聚演化方向的单位矢量。已知 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{n}$，利用以下关系便可求出 $\boldsymbol{t}$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t}=0,\quad \boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n},\quad \tau_n=\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n},\quad \tau_t=\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{t},\quad \boldsymbol{\tau}=\tau_n\boldsymbol{n}+\tau_t\boldsymbol{t} \tag{5-46}$$

当为 I 型失效模式时 $\boldsymbol{t}=0$；当为 II 型或混合失效模式时，

$$\boldsymbol{t}=\frac{\boldsymbol{\tau}-\tau_n\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{\tau}-\tau_n\boldsymbol{n}|} \tag{5-47}$$

则脱聚演化方向矢量 $\boldsymbol{m}$ 和失效模式张量 $\boldsymbol{M}$ 计算方式如下

$$[\boldsymbol{m}]=\frac{\bar{u}_0}{\tau^e}\left[\begin{array}{cc}\boldsymbol{A}^d(1,1)\tau_n\boldsymbol{n} & \boldsymbol{A}^d(2,2)\tau_t\boldsymbol{t}\end{array}\right] \tag{5-48}$$

$$\boldsymbol{A}^d(1,1)=\bar{\tau}_0^2/\tau_{\mathrm{nf}}^2,\ \boldsymbol{A}^d(2,2)=\bar{\tau}_0^2/\tau_{\mathrm{tf}}^2 \tag{5-49}$$

$$[\boldsymbol{m}]=\frac{\bar{u}_0}{\tau^e}\left[\begin{array}{c}(\boldsymbol{A}^d(1,1)\tau_n n_1+\boldsymbol{A}^d(2,2)\tau_t t_1)\boldsymbol{e}_1\\(\boldsymbol{A}^d(1,1)\tau_n n_2+\boldsymbol{A}^d(2,2)\tau_t t_2)\boldsymbol{e}_2\\(\boldsymbol{A}^d(1,1)\tau_n n_3+\boldsymbol{A}^d(2,2)\tau_t t_3)\boldsymbol{e}_3\end{array}\right]^T \tag{5-50}$$

$$[\boldsymbol{M}]=\frac{1}{2L_e}\left[\begin{array}{ccc}(n_1m_1+m_1n_1) & (n_1m_2+m_2n_1) & (n_1m_3+m_3n_1)\\(n_2m_1+m_1n_2) & (n_2m_2+m_2n_2) & (n_2m_3+m_3n_2)\\(n_3m_1+m_1n_3) & (n_3m_2+m_2n_3) & (n_3m_3+m_3n_3)\end{array}\right] \tag{5-51}$$

5.4 数值算例

5.4.1 杆单向拉伸

Sandia 实验室在实验中选用的试件材料为金属合金，已知材料密度 $\rho=7.81\times10^{-3}\mathrm{g/mm^3}$，泊松比 $\nu=0.3$，弹性模量 $E=195\mathrm{GPa}$，屈服强度 $\sigma_y=1100\mathrm{MPa}$。这里选用线性强化弹塑性模型，根据杆件的单向拉伸实验，确定材料的切线模量 E_T。杆的几何参数如图5.3所示。实验中的加载速率为 0.0127mm/s, 由于 MPM3D 为显式积分程序，如果按照实际的加载速率需要大量的计算时间，并且可能导致数值误差累积从而使得计算失败。本章采用的线性强化弹塑性模型未考虑材料的应变率强化效应。当 $E_T=1150\mathrm{MPa}$ 时计算得到的 $F-\varepsilon$（力 -工程应变）曲线如图5.4所示。图5.4中还比较了模拟中不同加载速度 v 对

计算结果的影响。当加载速度较大时，曲线震荡较大，但不同加载速度下曲线变化趋势一致，且和实验结果基本吻合。本章模拟中选用加载速度 $v=5\text{m/s}$，材料切线模量 $E_T=1150\text{MPa}$。

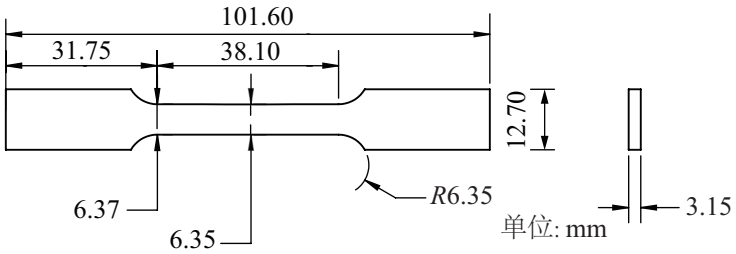


图 5.3　单拉试件尺寸

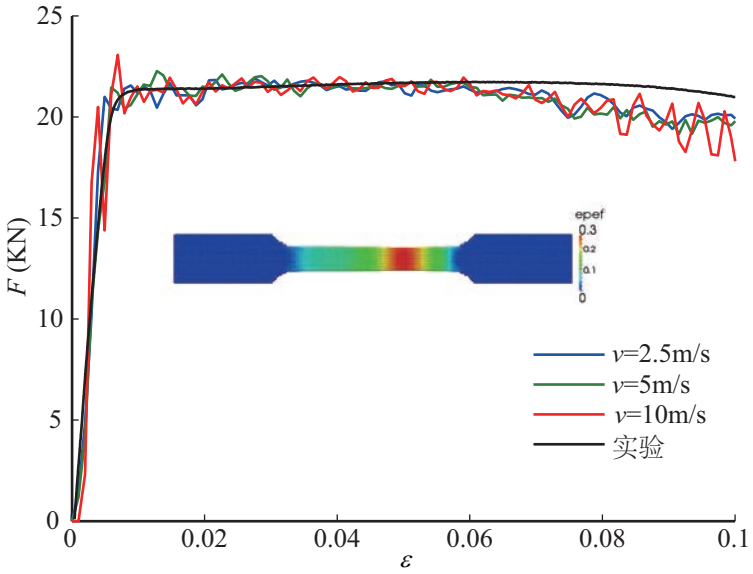
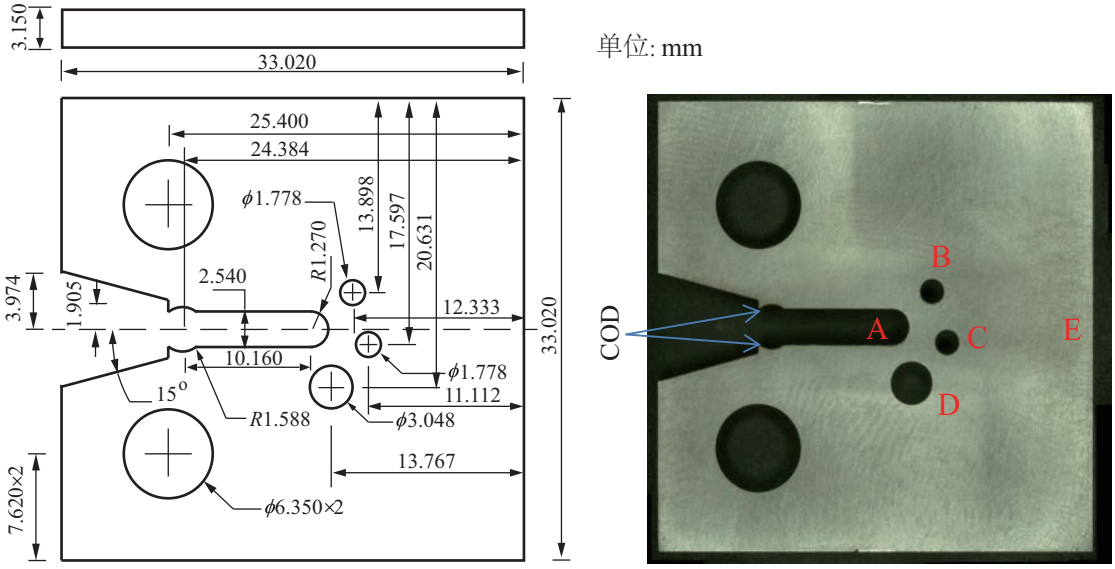


图 5.4　力 -工程应变曲线

5.4.2　多孔金属试件的延性断裂模拟

本节利用脱聚模型预测多孔金属试件的裂纹扩展。试件构型如图5.5所示，相关尺寸在图中标出。本算例采用第3章中的多级背景网格物质点法进行模拟，选用两级背景网格，在孔洞周围的应力集中区域使用较密的背景网格和质点离散，如图5.6所示。低级别背景网格间距 0.5mm，其中质点大小 0.25mm；高级别背景网格间距 0.25mm，其中质点大小 0.125mm。脱聚模型参数为 $\bar{u}_0=2\times10^{-7}\text{m}$，$q=1$。容许最大拉应力和剪切应力分别为 $s_{\max}=4900\text{MPa}$，$\tau_{t,\max}=820\text{MPa}$。这里考虑 I 型、II 型以及混合破坏模式的共同作用，即仅当 $s_1>s_{\max}$ 时令 $C_m=100$；仅当 $\tau_t>\tau_{t,\max}$ 时令 $C_m=0.01$；当 $s_1>s_{\max}$ 且 $\tau_t>\tau_{t,\max}$

时令 $C_m = 1$。加载速度 5m/s，最后得到的裂纹形状如图5.7所示，对应的加载力 -COD 位移曲线如图5.8所示。可以看到裂纹首先从 A 进入 D，产生沿着加载方向的裂纹，然后从 D 进入 C，裂纹方向也基本平行于加载方向，最后从裂纹 C 往 E 传播，裂纹扩展方向基本和加载方向垂直，并形成一定的弧度。整个过程产生三条裂纹，每条裂纹的萌生对应于力 -位移曲线上的一次突降，三条裂纹萌生前的试件局部变形如图5.9所示。可以看到无论是裂纹形态还是力 -位移曲线均和实验的结果较为一致。表5.1是 MPM 计算结果和实验结果的定量比较，其中 $F_{\max}$ 为全局最大载荷，C_1、C_2 和 C_3 分别对应第一条、第二条和第三条裂纹萌生的时刻。



(a) 模型尺寸　　(b) 试件照片

图 5.5　试件模型参数

表 5.1　MPM 模拟和实验结果定量比较

	$F_{\max}$(N)	C_1		C_2		C_3		裂纹路径
		F(N)	d(mm)	F(N)	d(mm)	F(N)	d(mm)	
MPM	9553	8734	2.10	6963	4.00	4748	5.15	A-D-C-E
实验	8449	8298	2.50	6640	2.92	4960	5.48	A-D-C-E

以上得到的结果考虑了构件可能在不同局部区域分别发生 I 型、II 型以及 I 型 II 型混合的不同形式破坏。当只考虑 I 型破坏时，即令 $s_{\max} = 4900\text{MPa}$，$\tau_{t,\max} = \infty$，此时 $C_m = 100$；当只考虑 II 型破坏模式时，即令 $s_{\max} = \infty$，$\tau_{t,\max} =$

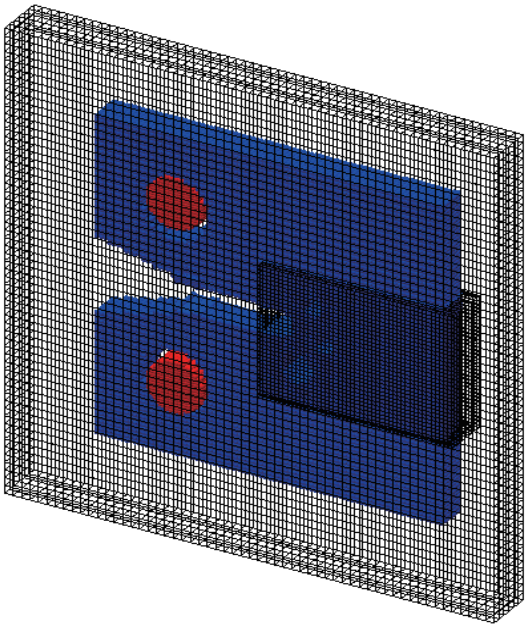
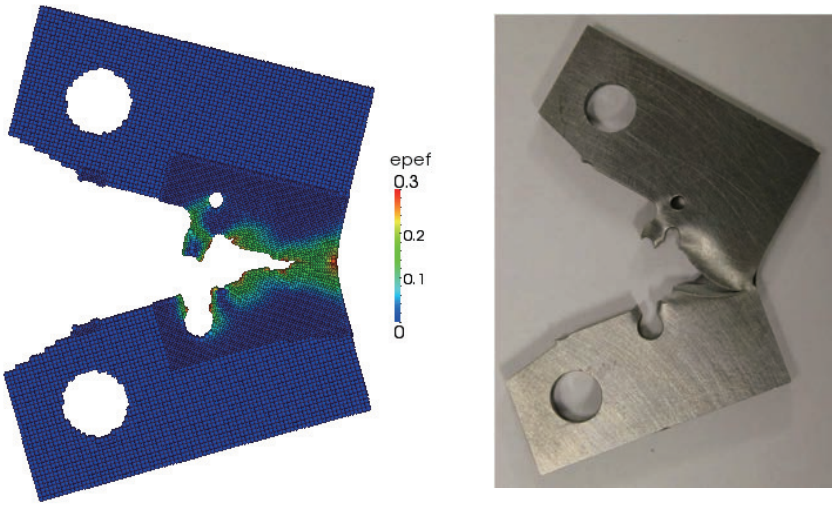


图 5.6　多级网格计算模型



(a) MPM模拟结果　　(b) 实验结果

图 5.7　数值模拟与实验结果对比

820MPa，此时 $C_m = 0.01$。这两种破坏模式下模拟得到的裂纹形状如图5.10所示，对应的加载力 -COD 位移曲线如图5.11所示。当只考虑 I 型破坏模式时，裂纹直接从 A 贯穿到 C，然后继续传播到 E，裂纹面基本保持与加载方向垂直；而只考虑 II 型破坏模式时，裂纹从 A 到 D，再到 C，最后传播向 E。对比加载力 -COD 位移曲线图5.8和图5.11可以发现，图5.11中 II 型破坏模式下计算的结果在第一次和第二次载荷突降阶段与图5.8中考虑了不同破坏模式共同作用下

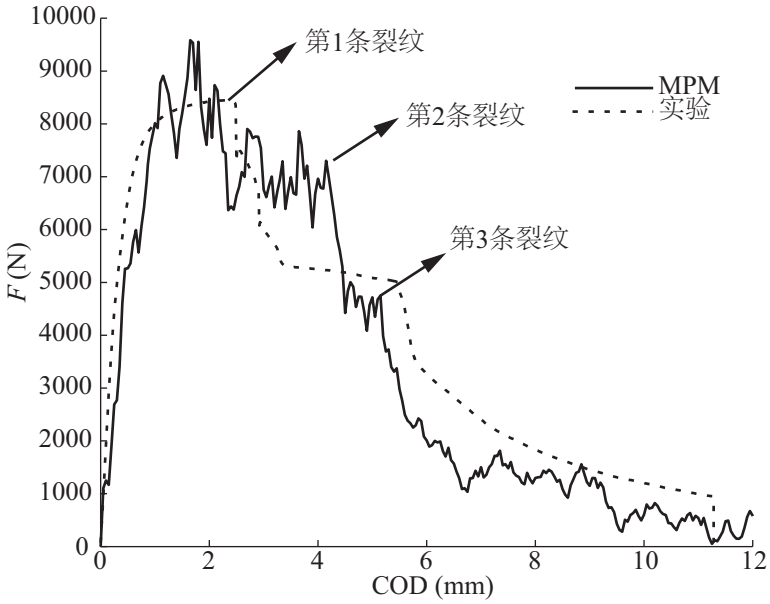
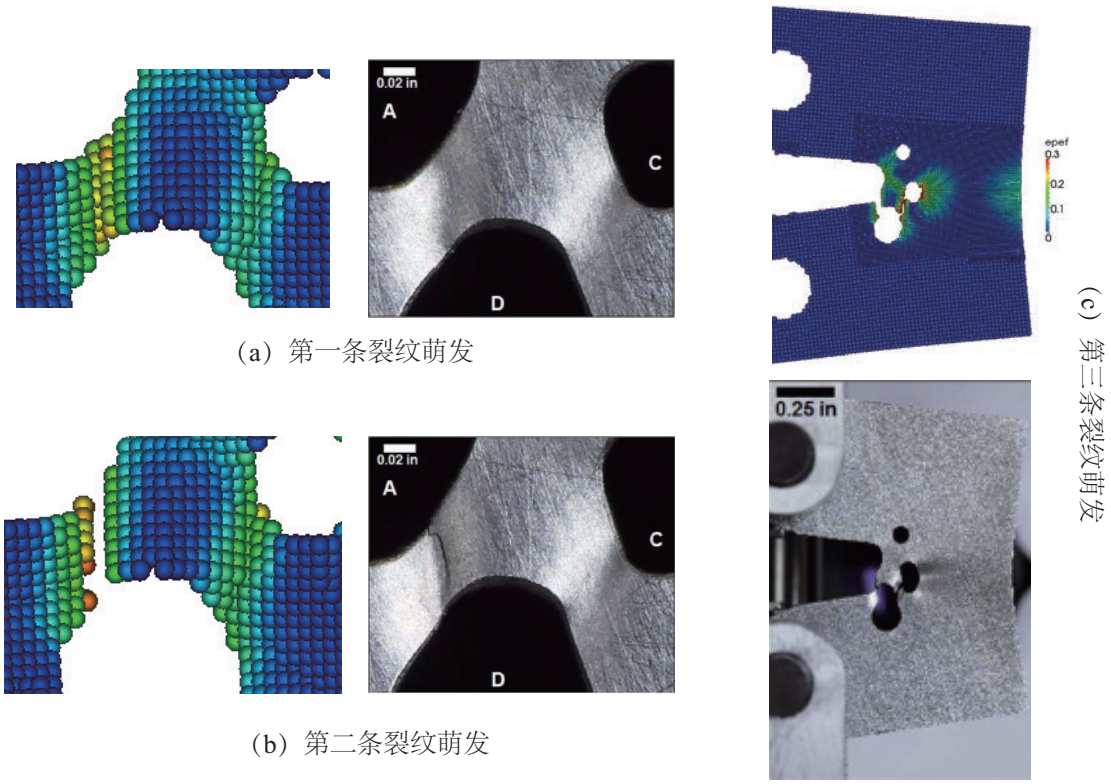


图 5.8　加载力位移曲线



（a）第一条裂纹萌发

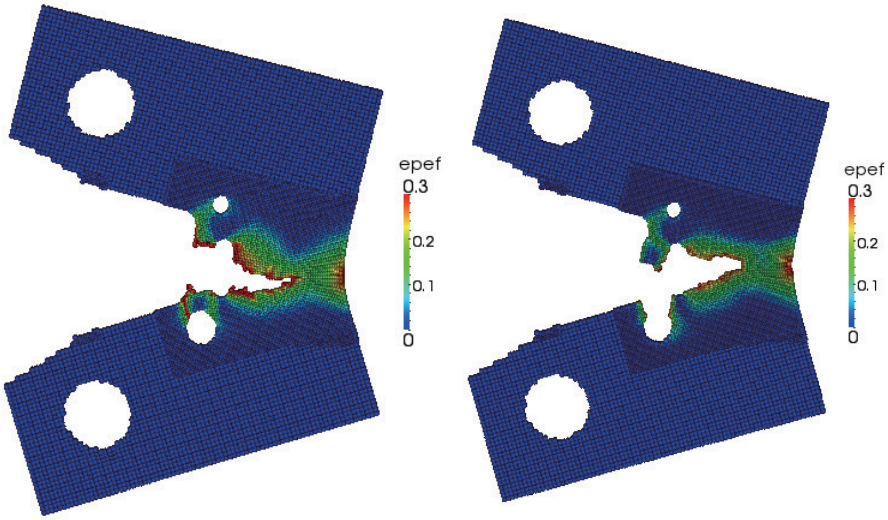
（b）第二条裂纹萌发

（c）第三条裂纹萌发

图 5.9　三条裂纹萌发的 MPM 模拟和实验结果对比

的结果基本一致，但图5.11中 II 型破坏模式下没有明显的第三次裂纹萌生前产生的载荷平台段。模拟中发现仅考虑 II 型破坏模式的情况下，在第三条裂纹萌生时裂纹尖端存在较多的完全脱聚（即 $\tau^{e*}=0$）质点，进而导致构件无法维持当前的加载力，加载力逐渐下降至 0。而仅考虑 I 型破坏模式时，整个过程只萌生了两条裂纹，在第二条裂纹萌生前，载荷位移曲线上形成了一定的平台段，且第二条裂纹具有和实验结果较为一致的弧度。综合可见真实断裂过程中，第一第二条裂纹主要以 II 型破坏模式产生，而第三条裂纹主要以 I 型破坏模式产生。

另外需要说明的是，参数 $s_{\max}$ 和 $\tau_{t,\max}$ 对模拟结果有较大的影响，参加 Sandia 断裂挑战赛时所采用的参数为 $s_{\max}=3000\text{MPa}$，$\tau_{t,\max}=820\text{MPa}$，结果当 COD 位移为 3mm 左右时，加载力便将至 1000N 附近，并且裂纹扩展路径与图5.10(a) 中的相似，为 I 型破坏模式。



(a) I型破坏模式　　(b) II型破坏模式

图 5.10　I 型和 II 型破坏模式下裂纹形状对比

5.4.3　含孔试件局部剪切带模拟

本节考虑含孔平板受压缩的问题，此模型最先由 Diez 等[170] 使用粘塑性模型进行研究，这里使用线性强化模型以及脱聚模型进行模拟，材料参数与第5.4.2节一致。这里平板采用平面应变模型进行模拟，由于平板受到挤压作用，只考虑 II 型失效，即 $s_{\max}=\infty$，$\tau_{t,\max}=820\text{MPa}$，此时 $C_m=0.01$。本节研究了不同孔洞数量对于局部剪切带形成的影响，计算模型如图5.12所示，分别为含有一个孔洞和两个孔洞的情形，孔洞半径 2mm。由于脱聚模型将材料断

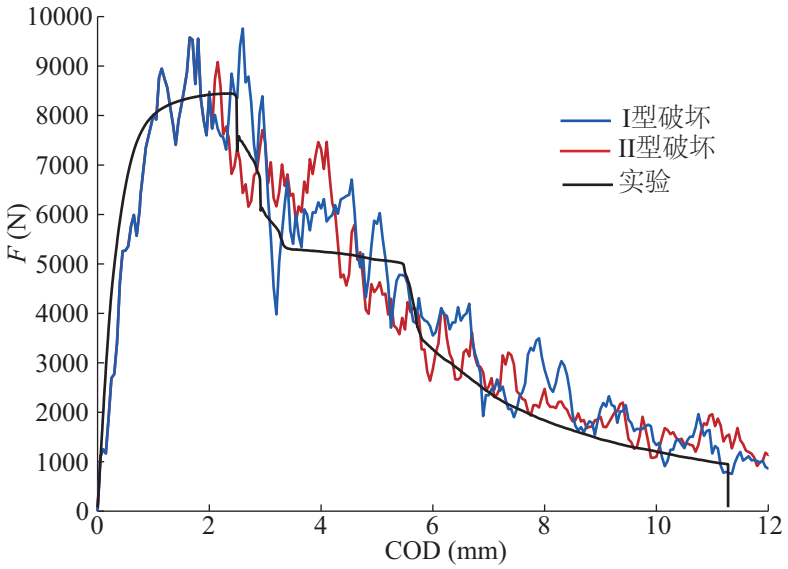


图 5.11　I 型和 II 型破坏模式下的加载力位移曲线

裂失效行为描述融入本构方程中，因此可以将脱聚模型直接应用到物质点法其他类型背景网格插值函数体系下，本算例采用 GIMP 插值函数，加载速度 $v=5\text{m/s}$，质点大小 0.25mm，背景网格间距 0.5mm，使用第2.10节中提出的基于虚拟背景网格的前处理方法建模。

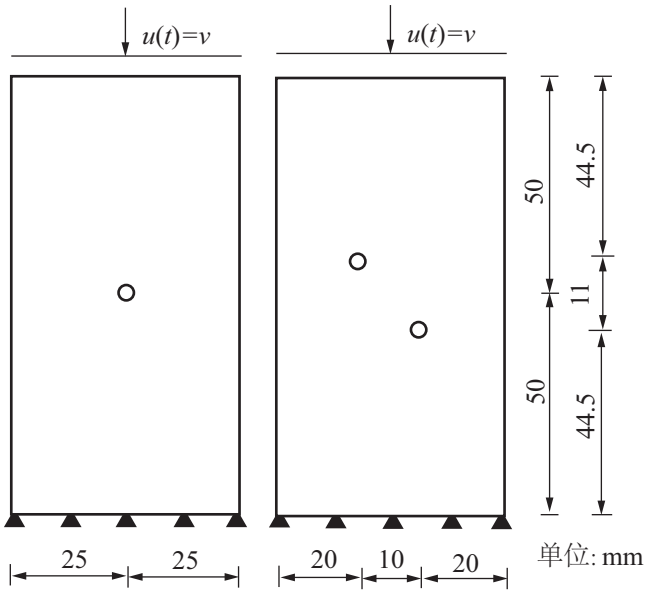
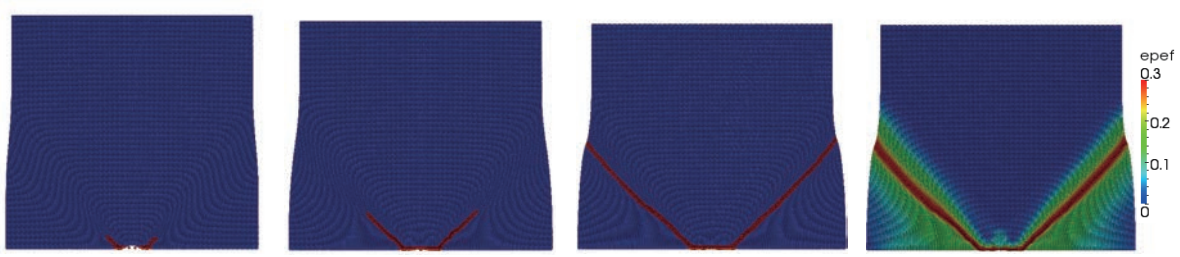


图 5.12　模型示意图

对于含有一个孔洞的算例使用 1/2 对称模型进行计算，剪切带形成过程以及最后时刻等效塑性应变分布如图5.13所示。伴随平板的压缩，孔洞周围形成两条对称的剪切带并逐渐向外扩展。当平板被压缩了 6.6mm 时，剪切带完全

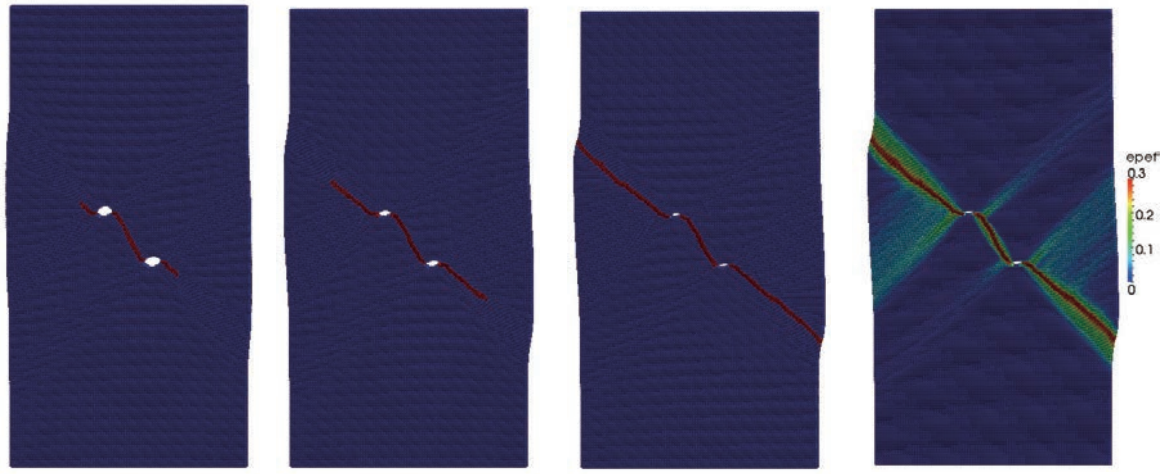
形成，孔洞基本被完全压缩，此时整个平板被剪切带分割成四块，整体的变形模式类似于几个刚性块沿着剪切带的相互滑动，剪切带中的材料以流动的方式运动。

对于含有两个孔洞的模型，剪切带形成过程以及最后时刻等效塑性应变分布如图5.14所示。当平板被压缩 1.9mm 时，首先一条剪切带将两个孔洞连接起来，当被压缩 3.2mm 时，整体结构被剪切破坏成两块，孔洞基本被完全压缩。



d=3.0mm　　*d*=5.0mm　　*d*=6.6mm

图 5.13　一个孔洞情况下剪切带形成过程



d=1.9mm　　*d*=2.7mm　　*d*=3.2 mm

图 5.14　两个孔洞情况下剪切带形成过程

两种情况下的载荷位移曲线对比如图5.15所示，此处载荷为底部固定边界的压力值，可见两个孔洞情况下平板的承载能力较弱，主要体现在局部剪切带形成较早，传播速度快。对应载荷位移曲线上，当 $d=1.9\text{mm}$ 时发生第一次载荷突降，连接两个孔洞的剪切带形成。当继续压缩时剪切带接着向孔洞的两侧扩展直至 $d=3.2\text{mm}$ 时剪切带完全形成，载荷也降到了最低。而只有一个孔洞时，整个平板在压缩过程中形成四条辐射的剪切带，对应载荷位移曲线

上 $d=3\text{mm}$ 时载荷开始下降，剪切带从孔洞周围开始形成，直到 $d=6.6\text{mm}$ 时剪切带完全形成。虽然与 Diez 等[170] 使用的材料模型不同，这里模拟得到的不同孔洞个数下剪切带的形成规律与其一致。

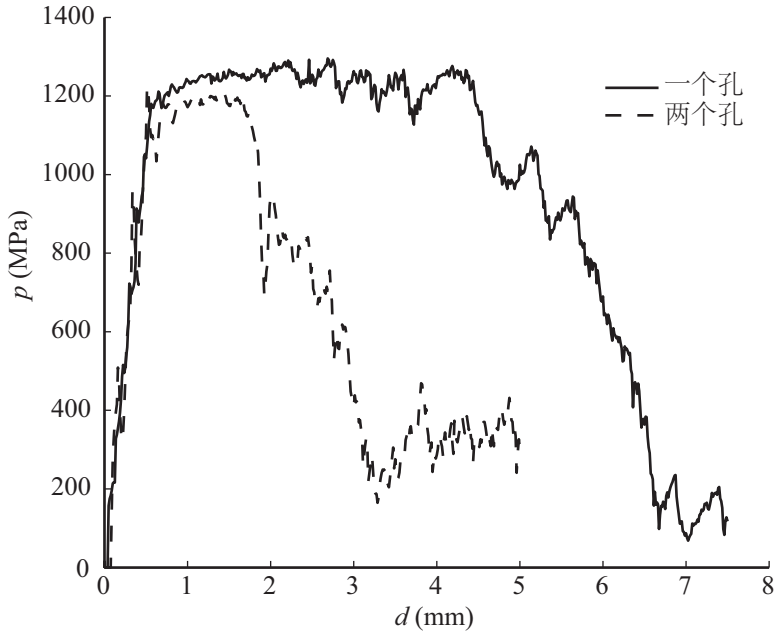


图 5.15　载荷位移曲线对比

5.5　本章小结

本章发展了三维脱聚模型用以描述材料失效界面的力学行为，并基于三维物质点法程序 MPM3D 发展了模拟延性断裂的有效工具。物质点法不需要与物体固定的网格连接，相比有限单元法对模拟不连续问题具有较明显的优势。本章通过脱聚模型将断裂行为的描述引入到本构方程中，使用基于最大主应力和最大剪切应力的脱聚判断准则和脱聚方向计算方法，并在同一脱聚模型下考虑断裂过程中可发生不同模式的断裂。本方法不需要裂纹面的显式描述，可以方便扩展到三维计算模型中。本章基于脱聚模型预测了带孔金属试件的裂纹扩展，得到了与实验吻合的加载力 -COD 位移曲线，同时还比较了不同断裂模式下的裂纹扩展形式。本章还应用脱聚模型研究了局部剪切带的形成，初步比较了不同几何缺陷对剪切带扩展形式以及整体结构承载能力的影响。

第 6 章 金属破碎行为的物质点法研究

破片是由于材料破碎产生的，而破碎是由连续发生的断裂导致的。动态断裂的重要表现形式之一就是材料在连续断裂后分裂成许多块体[171]。炸药爆炸驱动下的破碎现象是一种包含高应变率和多相材料交互作用的复杂物理过程。包裹装药的金属材料在内部装药爆炸驱动下迅速膨胀并猝然解体，破裂成不同大小、不同形状的碎片向四周高速飞散。

爆炸产生的碎片具有大小不均匀，形状不规则的特点，表现出破碎的随机特性。这种随机性可表现在微观和宏观两个方面。微观方面表现为材料的初始微观缺陷分布具有随机性，材料微观缺陷对流动应力的影响可以采用 Gurson 模型[172] 来描述，应用中设定材料的初始孔洞体积分数随机分布。宏观方面表现为材料点的失效具有随机性，可以通过设定材料宏观失效阀值服从 Weibull 分布[173,174] 来表征破碎的随机性。

金属塑性变形导致的延性破坏往往伴随着微小裂缝处小孔洞的成核、生长以及合并的过程，这在具有高应变率特征的冲击[175] 和爆炸成形[176] 等问题中起着重要作用；Weibull 统计理论常被用来研究不稳定的解理断裂[177,178]。延性断裂往往发生低应变率（或者高温）情况下，而脆性断裂往往发生在高应变率（或者低温）情况下。在特定的条件下，材料由于延性撕扯导致裂纹萌生并发展，最终由于突变解理断裂而失效，这个过程即为金属的延脆性断裂转换[179]。

本章中，物质点法被扩展应用于研究爆炸驱动下金属的破碎现象。本章使用接触算法和失效模型来模拟动态裂纹的扩展，丧失承载能力的物质点转化为失效组件并形成裂纹面。裂纹在未失效和已失效组件间的接触作用下扩展，避免了裂纹面两侧材料质点与裂纹面质点的相互黏着。这种方法不需要裂纹面描述模型，很容易扩展到三维情形处理任意形状的裂纹，即使在材料经历大变形时仍然简单有效。相比于第5章中的脱聚模型，这里不考虑材料失效面界面力的卸载过程，其实现简单，计算量小，适合大变形情况下任意多条复杂裂纹的处理。同时本章还提出了基于背景网格的高效碎片统计方案，进而得到了爆炸驱动下金属破碎的规律。

6.1　Gurson 模型

Gurson 于 1975 年提出了 Gurson 模型[172] 用以描述微孔洞对材料塑性变形的影响，其屈服函数的表达式为

$$f=\left(\frac{s}{\sigma_y}\right)^2+2\Phi\cosh\left(\frac{3\sigma_m}{2\sigma_y}\right)-\left(1+\Phi^2\right) \tag{6-1}$$

式中 σ_y 为基体材料的屈服强度，Φ 为材料孔洞体积分数。Tvergaard 和 Needleman 对 Gurson 提出的模型做了改进[180,181]，通过引入 Q_1、Q_2 来考虑周期性排列的孔洞并通过引入 Φ^* 来考虑材料失效时孔洞的迅速合并，得到了所谓的 GTN 模型

$$f=\left(\frac{s}{\sigma_y}\right)^2+2Q_1\Phi^*\cosh\left(\frac{3Q_2\sigma_m}{2\sigma_y}\right)-\left(1+Q_1^2\Phi^{*2}\right) \tag{6-2}$$

Φ^* 可以表达为：

$$\Phi^*=\begin{cases}\Phi & \text{当}\quad \Phi\le\Phi_c\\ \Phi_c+\frac{1/Q_1-\Phi_c}{\Phi_f-\Phi_c}(\Phi-\Phi_c) & \text{当}\quad \Phi_c<\Phi\le\Phi_f\\ 1/Q_1 & \text{当}\quad \Phi>\Phi_f\end{cases} \tag{6-3}$$

式中 Φ_c 为孔洞开始合并时的体积分数，Φ_f 为材料失去承载能力时的孔洞体积分数。σ_y 和微观功等效塑性应变 $\bar{\varepsilon}^p$ 的关系可以由宏观应力塑性功与塑性变形中微观尺度消耗的能量相等来表征，即

$$\sigma_y=\frac{\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}^p}{(1-\Phi)\dot{\bar{\varepsilon}}^p} \tag{6-4}$$

式中 $\boldsymbol{D}^p$ 是塑性应变率。孔洞体积分数的增加包含现有孔洞的膨胀和新孔洞成核两部分，其变化率为

$$\dot{\Phi}=\dot{\Phi}_{\text{growth}}+\dot{\Phi}_{\text{nucleation}} \tag{6-5}$$

式中

$$\dot{\Phi}_{\text{growth}}=(1-\Phi)\boldsymbol{D}^p:\boldsymbol{I} \tag{6-6}$$

为现有孔洞体积分数的变化率，它是塑性体积变化率的函数。

孔洞成核可以由 Chu 和 Needleman[182] 提出的应变控制式求得

$$\dot{\Phi}_{\text{nucleation}}=A_N(\bar{\varepsilon}^p)\dot{\bar{\varepsilon}}^p \tag{6-7}$$

式中

$$A_N(\bar{\varepsilon}^p)=\frac{\Phi_N}{s_N\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\varepsilon}^p-\varepsilon_N}{s_N}\right)^2\right] \tag{6-8}$$

s_N 和 ε_N 分别是成核应变分布的标准差和均值，Φ_N 是可成核孔洞总体积分数。

$\boldsymbol{D}^p$ 可以由关联塑性流动求得[183]

$$\boldsymbol{D}^p=\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\frac{1}{3}D_m^p\boldsymbol{I}+\sqrt{\frac{3}{2}}D_{\mathrm{eq}}^p\boldsymbol{N} \tag{6-9}$$

其中

$$D_m^p=\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\sigma_m},\quad D_{\mathrm{eq}}^p=\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial s},\quad \boldsymbol{N}=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\boldsymbol{S}}{s} \tag{6-10}$$

将式 (6-9) 代入式 (2-37) 得

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1}=\boldsymbol{\sigma}^{t^{n+1}}-KD_m^p\boldsymbol{I}\Delta t-\sqrt{6}GD_{\mathrm{eq}}^p\boldsymbol{N}\Delta t \tag{6-11}$$

其中 $K=(1-\Phi)K_s$，$G=(1-\Phi)G_s$。K_s 和 G_s 分别为基体材料的体积模量和剪切模量。求得 D_m^p 和 D_{eq}^p，便可由式 (6-11) 更新应力状态。平均应力和等效应力的更新分别为

$$\sigma_m^{n+1}=\sigma_m^{t^{n+1}}-KD_m^p\Delta t \tag{6-12}$$

$$s^{n+1}=s^{t^{n+1}}-3GD_{\mathrm{eq}}^p\Delta t \tag{6-13}$$

偏应力的更新为

$$\boldsymbol{S}^{n+1}=\boldsymbol{S}^{t^{n+1}}\frac{s^{n+1}}{s^{t^{n+1}}}$$

D_m^p 和 D_{eq}^p 应满足屈服函数条件，即

$$f_1(D_m^p,D_{\mathrm{eq}}^p)=f(D_m^p,D_{\mathrm{eq}}^p)=0 \tag{6-14}$$

为迭代求解方程 (6-14)，补充关于 D_m^p，D_{eq}^p 的恒等式方程

$$f_2\left(D_m^p,D_{\mathrm{eq}}^p\right)=D_m^p\frac{\partial f}{\partial s}-D_{\mathrm{eq}}^p\frac{\partial f}{\partial\sigma_m}=0 \tag{6-15}$$

对式 (6-14) 和 (6-15) 关于 ΔD_m^p 和 ΔD_{eq}^p 线性化，可解得

$$\begin{bmatrix}\Delta D_m^p\\ \Delta D_{\mathrm{eq}}^p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial D_m^p} & \frac{\partial f_1}{\partial D_{\mathrm{eq}}^p}\\ \frac{\partial f_2}{\partial D_m^p} & \frac{\partial f_2}{\partial D_{\mathrm{eq}}^p}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-f_1\\ -f_2\end{bmatrix} \tag{6-16}$$

Gurson 模型中 $\bar{\varepsilon}^p$ 和 Φ 为内变量，令 $q_1=\bar{\varepsilon}^p$，$q_2=\Phi$，有

$$\frac{\partial f_1}{\partial D_m^p}=\frac{\partial f}{\partial \sigma_m}\frac{\partial \sigma_m}{\partial D_m^p}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial D_m^p}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial D_m^p} \tag{6-17}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial D_{\mathrm{eq}}^p}=\frac{\partial f}{\partial \sigma_m}\frac{\partial \sigma_m}{\partial D_{\mathrm{eq}}^p}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial D_{\mathrm{eq}}^p}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial D_{\mathrm{eq}}^p} \tag{6-18}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial D_m^p}=&\frac{\partial f}{\partial s}+D_m^p\left[\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial \sigma_m}\frac{\partial \sigma_m}{\partial D_m^p}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial D_m^p}\right]-\\&D_{\mathrm{eq}}^p\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_m^2}\frac{\partial \sigma_m}{\partial D_m^p}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_m\partial q_i}\frac{\partial Qq_i}{\partial D_m^p}\right]\end{aligned} \tag{6-19}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial D_{\mathrm{eq}}^p}=&D_m^p\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\frac{\partial s}{\partial D_{\mathrm{eq}}^p}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial D_{\mathrm{eq}}^p}\right)-\frac{\partial f}{\partial \sigma_m}-\\&D_{\mathrm{eq}}^p\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_m\partial s}\frac{\partial s}{\partial D_{\mathrm{eq}}^p}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_m\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial D_{\mathrm{eq}}^p}\right)\end{aligned} \tag{6-20}$$

6.2　状态方程

金属壳体在爆炸作用下的热动力学行为可用 Mie-Grüneisen 状态方程来描述。多孔材料的压力与基体材料压力关系为

$$p(f,\rho,e)=(1-\Phi)p_s(\rho_s,e_s) \tag{6-21}$$

其中 ρ 和 e 分别是多孔材料的密度和内能，相应的 ρ_s 和 e_s 由以下关系求得

$$\rho_s = \frac{\rho}{(1-\Phi)} \tag{6-22}$$

$$e_s = e \tag{6-23}$$

这里使用 Mie-Grüneisen 状态方程的三阶等效形式[151]

$$p_s=\rho_{s0}c_0^2(1-\gamma_s\mu_s/2)P_H+\gamma_s\rho_s e_s \tag{6-24}$$

来描述基体材料的压力，其中

$$P_H=\mu_s+(2s-1)\mu_s^2+(s-1)(3s-1)\mu_s^3 \tag{6-25}$$

式中 $\mu_s=\rho_s/\rho_{s0}-1$ 是基体材料的压缩系数，ρ_{s0} 是自由应力状态下基体材料的密度，c_0，γ_s 和 s 是常数。

将式 (6-21) 对时间求导，可以求得压力的变化率

$$\dot{p}=-\dot{f}p_s+(1-\Phi)\left(\frac{\partial p_s}{\partial \rho_s}\dot{\rho}_s+\frac{\partial p_s}{\partial e_s}\dot{e}_s\right) \tag{6-26}$$

多孔材料密度更新的表达式为

$$\dot{\rho}=-\rho D_m \tag{6-27}$$

其中标量 D_m 是体积应变率。由式 (6-5)，(6-22) 和 (6-27) 可以计算得到基体材料密度的变化率为

$$\dot{\rho}_s=-\rho_s\left(D_m-D_m^p-\frac{A_N\dot{\bar{\varepsilon}}^p}{1-\Phi}\right) \tag{6-28}$$

则比内能的变化率为

$$\dot{e}_s=\dot{e}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}=\frac{1}{\rho}\left(-pD_m+\boldsymbol{S}:\boldsymbol{D}_s\right) \tag{6-29}$$

其中 $\boldsymbol{D}_s$ 为偏应变率。将式 (6-5)，(6-28)，(6-29) 代入到式 (6-26) 中得到

$$\dot{p}=-BD_m+\alpha D_m^p+\beta A_N\dot{\bar{\varepsilon}}^p+\gamma_s\boldsymbol{S}:\boldsymbol{D}_s \tag{6-30}$$

其中 B 是多孔材料的等效体积模量，它和基体材料的等效体积模量 B_s 的关系为 $B=(1-\Phi)B_s$，且

$$B_s = \rho_s\frac{\partial p_s}{\partial \rho_s}+\gamma_s p_s \tag{6-31}$$

$$\alpha = B-(1+\gamma_s)p \tag{6-32}$$

$$\beta = \frac{\partial p_s}{\partial \rho_s}\rho_s-p_s \tag{6-33}$$

和 Zuo 等人[184] 得到压力变化率相比，本文额外考虑了新孔洞成核的影响。

6.3　应力更新步骤

Simonsen 等[183] 给出了 Gurson 模型的应力更新步骤，本文在此基础上将 Mie-Grüneisen 状态方程引入应力更新过程中，使用牛顿迭代法求解式 (6-14) 和 (6-15) 的联立方程组，具体应力更新步骤描述如下：（以下变量不做特殊说明表示 t^{n+1} 时刻的值）

1. 弹性试探步，分别求得偏应力和球应力的试探值。

$$\boldsymbol{S}^t = \boldsymbol{S}^{Rn} + 2G^n \boldsymbol{D}_s^{n+1} \Delta t \tag{6-34}$$

$$\sigma_m^t = \sigma_m^n + B^n D_m^{n+1} \Delta t - \gamma_s \boldsymbol{S}^n : \boldsymbol{D}_s^{n+1} \tag{6-35}$$

2. 检验屈服函数 f，如果 $f \leqslant 0$，则弹性试探状态即为真实状态，即 $\boldsymbol{S}^{n+1} = \boldsymbol{S}^t$，$\sigma_m^{n+1} = \sigma_m^t$。如果 $f > 0$，则进行下面的步骤。
3. 初始化，令 $k = 0$：$D_{m(0)}^p = 0$，$D_{\mathrm{eq}(0)}^p = 0$，$q_{1(0)}^{n+1} = \bar{\varepsilon}^{p,n}$，$q_{2(0)}^{n+1} = \Phi^n$，$\dot{q}_{1(0)}^{n+1} = 0$，$\dot{q}_{2(0)}^{n+1} = 0$。
4. 计算 $\frac{\partial f_1}{\partial D_m^p}$、$\frac{\partial f_1}{\partial D_{\mathrm{eq}}^p}$、$\frac{\partial f_2}{\partial D_m^p}$ 和 $\frac{\partial f_2}{\partial D_{\mathrm{eq}}^p}$。
5. 由式 (6-16) 计算 ΔD_m^p 和 ΔD_{eq}^p，并更新 D_m^p 和 D_{eq}^p

$$D_{m(k+1)}^p = D_{m(k)}^p + \Delta D_{m(k)}^p \tag{6-36}$$

$$D_{\mathrm{eq}(k+1)}^p = D_{\mathrm{eq}(k)}^p + \Delta D_{\mathrm{eq}(k)}^p \tag{6-37}$$

6. 更新等效应力 s 和压力 p

$$s_{k+1} = s^t - 3G\Delta t D_{\mathrm{eq}(k+1)}^p \tag{6-38}$$

$$p_{k+1} = -\sigma_{m(k+1)} = -\sigma_m^t + \alpha \Delta t D_{m(k+1)}^p + \beta A_N \Delta t \dot{q}_{1(k+1)} \tag{6-39}$$

7. 更新 $\dot{q}_1$ 和 $\dot{q}_2$，式 (6-39) 与 (6-40) 联立求解

$$\dot{q}_{1(k+1)} = \frac{\sigma_{m(k+1)} D_{m(k+1)}^p + s_{(k+1)} D_{\mathrm{eq}(k+1)}^p}{(1-\Phi)\sigma_y} \tag{6-40}$$

$$\dot{q}_{2(k+1)} = (1-\Phi) D_{m(k+1)}^p + A_N \dot{q}_{1(k+1)} \tag{6-41}$$

8. 更新内变量 q_1 和 q_2

$$q_{1(k+1)} = q_1^n + \Delta t \dot{q}_{1(k+1)} \tag{6-42}$$

$$q_{1(k+1)} = q_1^n + \Delta t \dot{q}_{1(k+1)} \tag{6-43}$$

9. 计算 $|f_1|$ 和 $|f_2|$，若任意一个大于收敛容限值 TOL，则令 $k = k+1$，并转向4继续迭代，否则迭代结束。

此应力更新过程与 Simonsen 等[183] 的区别在于本文使用 EOS 对压力进行更新，如下导数值与 Simonsen 等[183] 使用的有所不同：

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial D_m^p} = -\alpha \Delta t - \beta A_N \Delta t \frac{\sigma_m}{(1-\Phi)\sigma_y} \tag{6-44}$$

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial D_{\mathrm{eq}}^p} = -\beta A_N \Delta t \frac{s}{(1-\Phi)\sigma_y} \tag{6-45}$$

$$\frac{\partial s}{\partial D_{\mathrm{eq}}^p} = -3G\Delta t \tag{6-46}$$

$$\frac{\partial s}{\partial D_m^p} = 0 \tag{6-47}$$

本章主要研究爆炸强载荷下金属的力学行为，应力更新过程中 $\left|\frac{\sigma_m}{\sigma_y}\right|$ 的值可能很大，从而导致迭代不收敛的问题。实际应用中，当 $\left|\frac{\sigma_m}{\sigma_y}\right|$ 达到一定值时将 Q_2 修正成 $\left|\frac{\sigma_y}{\sigma_m}\right|$。

6.4　裂纹模拟

本章中动态裂纹扩展通过接触算法和失效模型来模拟，达到特定失效阈值的物质点自然形成裂纹面。裂纹面上下部分的多重速度场通过裂纹面质点和未失效材料的接触算法来实现。与 CRAMP[123,185] 相比，本文提出的方法不需要特殊的裂纹面模型，在二维和三维情况下都更加高效。另外，即使在材料经受极端变形的情况下，本方法仍然保持很好的健壮性。裂纹模拟方法如图6.1所示，其中失效质点用实心圆表示，箭头表示接触力，虚线为背景网格。

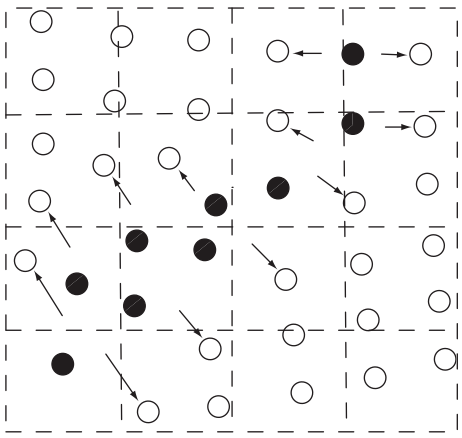


图 6.1　裂纹模拟方案

6.4.1　失效模型

本文使用两种失效判据。当考虑微观损伤时，Gurson 模型结合 TEPLA-F 失效条件一起使用，且初始孔洞体积分数随机分布。当从宏观角度出发时，不考虑微观孔洞的影响，Gurson 模型退化为 J_2 流动理论，此时设定材料宏观等

效塑性应变失效值服从 Weibull 随机分布。破碎的随机特性便可以从微观和宏观两个角度进行表征。

6.4.1.1　TEPLA-F 失效条件

TEPLA-F 失效条件是基于考虑拉伸塑性和孔洞成长的 Gurson 流动面而提出的[186]。断裂条件可以描述为最大容许孔洞体积分数 Φ_f 和各向同性等效塑性应变 $\bar{\varepsilon}_p^f$ 的形式，即

$$\left(\frac{\Phi}{\Phi_f}\right)^2+\left(\frac{\bar{\varepsilon}_p}{\bar{\varepsilon}_p^f}\right)^2=1 \tag{6-48}$$

6.4.1.2　Weibull 统计模型

Weibull 理论通常被用来分析脆性材料的失效以及延脆性转化中的断裂行为[177–179]，它由 Weibull[173] 于 1939 年基于最弱链理论[187] 而提出的。

单轴应力的 Weibull 理论可以表述为[188]

$$P_f=1-\exp\int\left[-\left(\frac{\sigma-\sigma_{\text{th}}}{\sigma_0}\right)^m\right]\frac{\mathrm{d}A}{a} \tag{6-49}$$

其中 P_f 是失效概率，A 和 a 分别为表面积和单位面积，它们是为了保证单位一致性而引入的。σ_0，σ_{th} 和 m 分别为平均强度，材料失效的应力极限以及名义一致组件失效强度的分布度量。

公式 (6-49) 是三参数的 Weibull 理论，如果 $\sigma_{\text{th}}=0$，则变成二参数 Weibull 分布模型

$$P_f=1-\exp\int\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right]\frac{\mathrm{d}A}{a} \tag{6-50}$$

二参数模型因其简化性经常被研究者采用，本文使用的也是二参数模型。

对表面一致应力而言，式 (6-50) 可以用已知面 a 的特征强度改写成

$$P_f=1-\exp\left[-(\sigma/\sigma_0)^m A/a\right] \tag{6-51}$$

Fok 等[189] 指出在 $A=1000$ 时，二参数和三参数模型预测的结果是一致的，在本文中也设定 $A=1000$。

本文中 Weibull 理论基于应变形式实现，模拟中设定材料极限等效塑性应变值随机分布，当材料点等效塑性应变值达到临界值时，材料即失去承载能力。Tadashi[190] 也研究了基于应变形式的 Weibull 统计理论，他证明脆性材料

的失效行为可以通过基于应变的随机过程来描述。式 (6-51) 的应变形式为

$$P_f = 1 - \exp\left[-(\bar{\varepsilon}^p/\bar{\varepsilon}_0^p)^m A/a\right] \tag{6-52}$$

6.4.2　接触算法

这里使用第2.9节中描述的接触算法来模拟裂纹面质点和裂纹面两侧未失效材料的接触。为满足一致性条件，除了第2.9节提出的几种方案外，这里还提出如下条件来模拟动态裂纹扩展：当组件 I 由失效质点组成，而组件 II 由未失效质点组成时，令

$$\boldsymbol{n}_i^1 = -\boldsymbol{n}_i^2 = \hat{\boldsymbol{n}}_i^2 \tag{6-53}$$

这样修正的法向量 $\boldsymbol{n}_i^b$ 保证了断裂面接触计算中的动量守恒。

当材料失效后，失效质点失去承载能力，失效和未失效组件间的接触提供了背景网格节点上的多重速度场，从而裂纹将沿着失效质点进行传播。

6.5　基于背景网格的碎片统计方法

尽管破碎的过程很复杂并且具有随机性，但其仍然呈现出一些显著的统计特性。Oddershede 等[191] 观察到脆性材料的破碎符合幂律法则，并且其幂指数与物体的形状相关而和特定的材料无关，这种现象称之为自组织临界（self-organized critical ）现象[192]。Oddershede 等[191] 得到的碎片质量分布 $n(m)$ 服从幂律法则，即 $n(m) \propto m^{-\beta}$。这里碎片分布的测定是孤立事件，所以使用累积分布描述更加方便。将质量大于或等于 m 的碎片的总数除以 m 得到 $N(m)$，其分布和 $n(m)$ 均服从幂律法则，且拥有相同的指数 β，

$$N(m) = \frac{1}{m}\int_m^\infty n(m')\mathrm{d}m' \tag{6-54}$$

本章主要研究金属壳在内部爆炸驱动下的破碎行为，将失效质点去除后剩下的壳体部分便是碎片。原则上，需要进行大量的质点对计算来统计碎片的大小。对每一个质点 i 而言，需要对所有其他质点 j 循环并计算出他们之间的距离 d_{ij}。如果 d_{ij} 比指定的临界距离 d_{cut} 小，则这两个质点属于同一块碎片。另外还需要进行额外的计算来判断哪几对质点属于同一块碎片。显然这种基于质点的计算方法很费时。

本章中提出了一种基于背景网格的碎片统计方法，非常适合质点类方法。利用类似于分子动力学中的邻接列表的思想[193]，通过链接列表建立背景网

格，从而确定了背景网格中相邻格子之间的联系。借助于物质点法的背景网格，我们只需要对所有格子循环便可以统计出碎片的数量以及每个碎片大小。定义包含碎片质点的格子称为破碎格子，如图6.2所示，破碎格子用灰色显示。统计时从某一特定的格子开始，当它的邻接格子也是破碎格子时，则检查此邻接格子的所有邻接格子，重复此过程直到不再有破碎邻接格子为止。于是我们得到一组破碎格子，它们连接在一起，在此组破碎格子中的质点便属于同一块碎片。最终一整套背景网格被划分成许多组，每组对应着一块碎片。在图6.2中，可以得到分别位于左上角和右下角位置的两组破碎格子。同时我们可以方便获得这块碎片中的质点数并计算出碎片的质量。

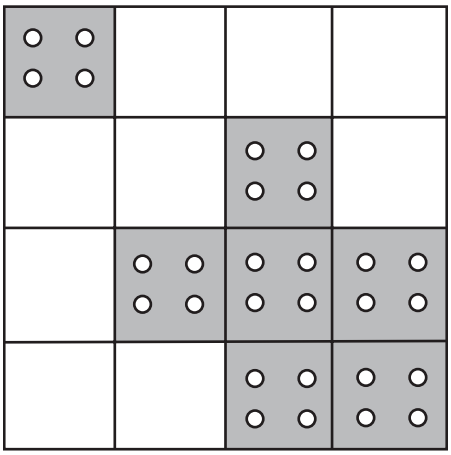


图 6.2　基于背景网格的碎片统计方法

碎片统计的伪代码如下：

```
nb_groups = 0;
for(int i=0;i<nb_cells;i++){
  Cell = cell_list[i];
  if (Cell belongs to any group) continue;
  if (Cell is fragmented) {
    Assign Cell to group_list[nb_groups];
    Check the neighbor cells of Cell;
  }
    nb_groups++;
}
```

其中 nb_cells 是背景网格格子的总数，nb_groups 是破碎格子的组数。子函数“Check the neighbor cells of Cell”可以用递归的方式来实现

```
for(int i=0;i<nb_neighbors;i++){
  Cell_nei = neighbors_list[i];
  if (Cell_nei belongs to any group) continue;
  if (Cell_nei is fragmented) {
    Assign Cell_nei to group_list[nb_groups];
    Check the neighbor cells of Cell_nei;
  }
}
```

其中 nb_neighbors 是 Cell 的所有邻接格子数。

基于质点的方法需要质点间的三重循环才能统计出碎片的分布，随着质点数增加这种方法效率将急剧下降。相反，基于背景网格的统计方法全局只需要对所有格子循环一遍即可。在物质点法中，质点的数量通常比格子数多很多。一般格子大小设置为质点大小的两倍。显然基于背景网格的碎片统计方法更加高效。和分子动力学采用的方法[193]不同的是，本文提出的方法在整个统计过程中均不需要对质点循环。

6.6 数值算例

6.6.1 局部剪切带分析

本节应用 Gurson 模型研究了局部剪切带的形成过程。考虑一边长为 10mm 的正方形试件其左侧边界水平方向以及底部边界垂直方向自由度均被限制，而上侧边界以 0.1m/s 的固定速度向右运动。这里将物质点法的计算结果与 LS-DYNA 显式 FEM 求解器的计算结果进行比较，验证了本文中实现的 Gurson 模型。正方形左下角设定一边长为 1mm 的弱区域，此区域的初始孔洞体积分数为 0.03，而其他区域初始孔洞体积分数为 0.01。采用双线性弹塑性本构描述基体材料的塑性强化行为。基体材料的材料模型参数和相应的 Gurson 模型参数分别如表6.1和表6.2所示。平均应力和等效应力分别由式 (6-12) 和式 (6-13) 更新。

表 6.1 基体材料的材料参数

ρ_s(g/mm^3)	E(MPa)	ν	E_t(MPa)	σ_y(MPa)
8.9×10^{-3}	117000	0.35	500	150

表 6.2　Gurson 模型参数

Q_1	Q_2	Φ_c	Φ_f	Φ_N	ε_N	s_N
1.5	1	0.85	0.85	0.04	0.3	0.1

在 MPM 模拟中，质点大小为 0.05mm，背景网格间距为 0.1mm。FEM 模拟中，单元尺寸与 MPM 模型中背景网格间距一致。图6.3比较了 MPM 和 FEM 计算得到的沿正方形对角线分布的等效塑性应变分布。图6.4比较了相应的孔洞体积分数分布。可以看到 MPM 和 FEM 模拟得到的 0.2ms，0.3ms 和 0.4ms 时刻等效塑性应变和孔洞体积分数的分布规律一致。图6.5比较了 MPM 和 FEM 模拟得到的等效塑性应变分布云图，其中 MPM 的结果通过第2.10节中提出的基于背景网格的后处理方法输出。图6.6描述了弱区域和其他区域的质量归一化内能随时间变化的规律。可以看到伴随沿着对角线局部剪切带形成，弱区域内能的增加速度比其余部分快得多。剪切带由孔洞的成长和演化而激发。此算例验证了 Gurson 模型在 MPM3D 框架下实现的正确性。本算例中材料仅仅发生有限变形，然而在爆炸加载下，材料将发生极大变形，在这种情况下 FEM 将陷入单元畸变的困境。

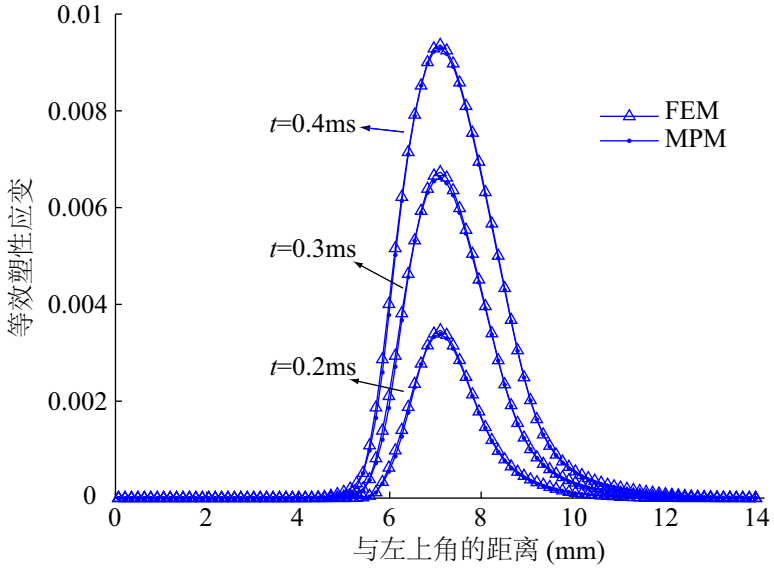


图 6.3　沿对角线的等效塑性应变分布

6.6.2　圆柱壳的破碎模拟

汤铁钢等[194,195] 应用高速摄影机观察了 45 钢柱壳在内部爆炸驱动下的膨胀断裂行为。本文应用 MPM3D 模拟了汤铁钢等研究的模型[194]，这里将其

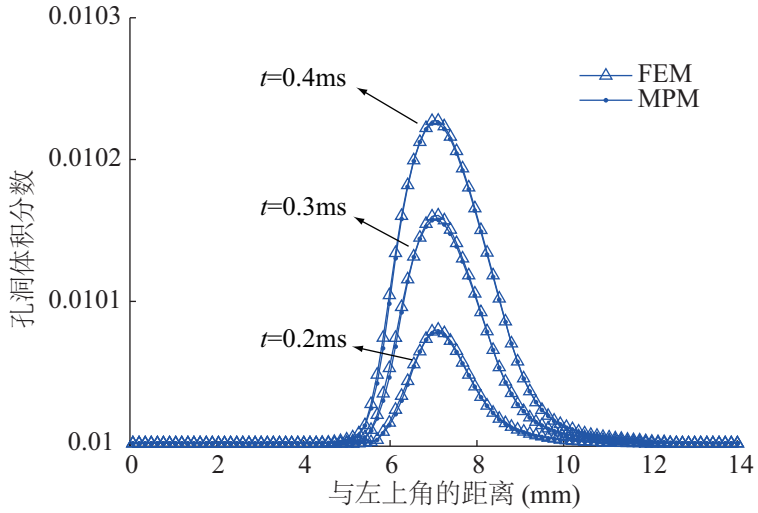
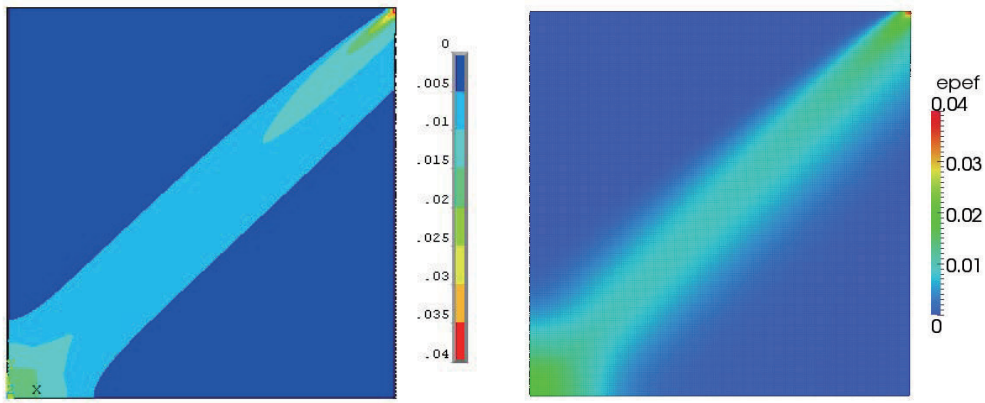


图 6.4　沿对角线的孔洞体积分数分布



(a) FEM　　(b) MPM

图 6.5　0.4 ms 时刻等效塑性应变分布云图

作为平面应变问题来处理。钢壳的厚度为 4mm，炸药和钢壳分别使用了 6284 和 12466 个质点来离散，网格间距为 0.5mm。模拟中采用和实验一致的炸药 RHT-901，其密度 $\rho = 1.684 \times 10^{-3}\text{g/mm}^3$，爆轰速度 $D = 7790\text{m/s}$，采用 JWL 状态方程描述，相关参数见表6.3。使用简化 Johnson-Cook 模型来更新钢壳基体材料的偏应力，相关材料参数见表6.4。使用 Mie-Grüneisen 状态方程更新钢壳压力，其参数为 $c_0 = 3570\text{m/s}$，$s = 1.92$，$\gamma_s = 1.8$。

表 6.3　RHT-901 炸药 JWL 状态方程参数[196]

$E_0(\text{mJ/mm}^3)$	$A(\text{MPa})$	$B(\text{MPa})$	R_1	R_2	ω
6853.9	524200	7678	4.2	1.1	0.34

实验中测得的壳体断裂应变为 0.43[194]。爆炸作用下钢壳的弹性变形相对

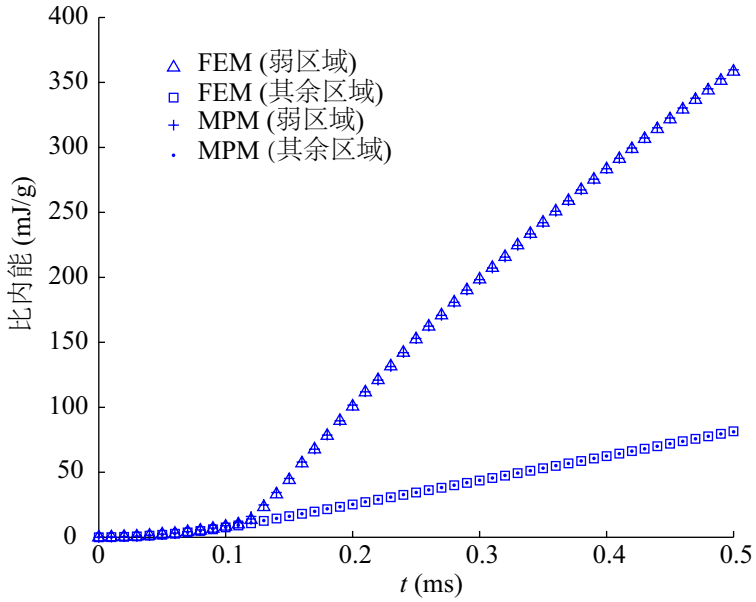


图 6.6　FEM 与 MPM 计算得到的单位质量内能对比

表 6.4　钢壳 Johnson-Cook 材料模型参数[197]

E(MPa)	A(MPa)	B(MPa)	C	N	ρ_s(g/mm^3)	ν
210000	507	320	0.064	0.28	0.0078	0.3

于塑性变形很小，当使用 Weibull 随机失效方案模拟时，设置材料失效的等效塑性应变均值为 0.43。Weibull 模型两个参数分别取为 $\bar{\varepsilon}_0^p = 0.898$，$m = 19.887$[189]。另一方面，TEPLA-F 失效模型和 Gurson 模型一起使用，设置 $\Phi_f = 0.2109$[198]，$\bar{\varepsilon}_p^f = 0.43$。Gurson 模型的相关参数见表6.5，其中 Φ_{0e} 和 Φ_{0s} 分别是初始孔洞体积分数的均值和方差。

表 6.5　Gurson 模型材料参数[198]

Q_1	Q_2	Φ_{0e}	Φ_{0s}	Φ_c	Φ_f	Φ_N	ε_N	s_N
1.5	1	0.005	0.0003	0.0021	0.2109	0.001	0.04	0.01

使用 Weibull 随机失效方案和 Gurson 模型的模拟结果分别如图6.7和图6.8所示。钢壳的动能变化曲线如图6.9所示。Gurson 模型和 Weibull 随机失效方案得到了相近的动能演化规律。爆炸初期，在爆轰产物作用下钢壳产生很大的加速度向外膨胀。当钢壳断裂后，爆轰产物从裂缝中飞出时碎片也就形成了。之后，具有稳定形状的碎片以相对恒定的速度继续向前运动。在图6.9中用方框标出了破碎形成区域，此区域中动能曲线斜率迅速降至 0，钢壳破裂成碎片。

模拟中确定不再有新碎片产生的时刻为钢壳的破碎时间，其与实验得到破碎时间较为一致，见表6.6。

表 6.6　钢壳的破碎时间

实验	Weibull 方案	Gurson 模型
$15.4\mu s$	$15.0\mu s$	$15.5\mu s$

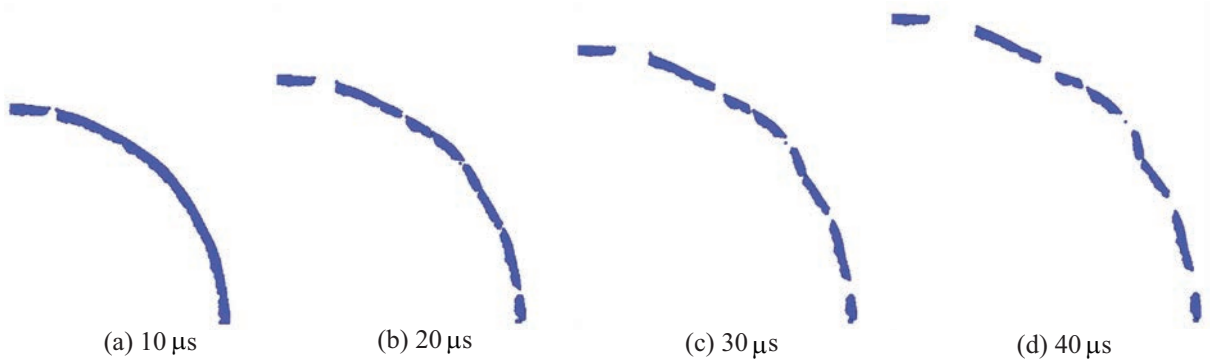


图 6.7　Weibull 失效方案得到的碎片分布

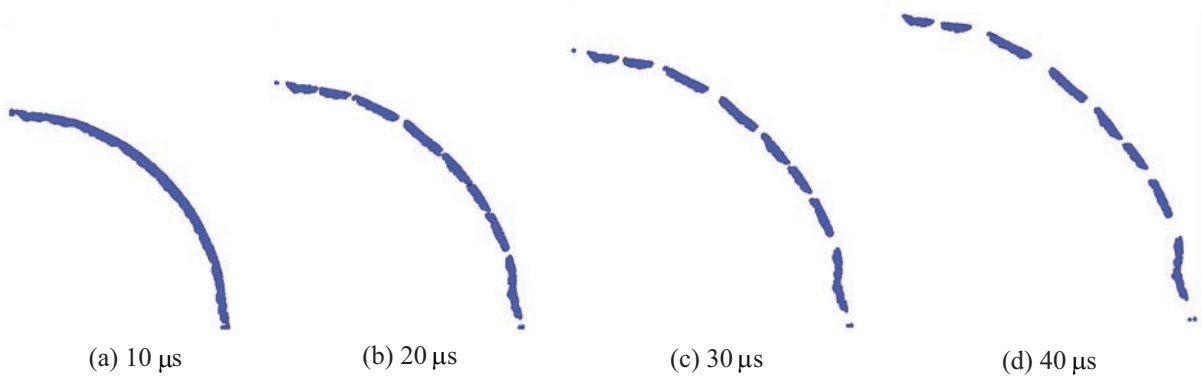


图 6.8　Gurson 模型得到的碎片分布

从断裂的整个过程看，钢壳内侧首先受到爆炸产物的压力作用产生剪切不稳定，然后外侧很快受到环向的拉伸，进而导致拉伸断裂。当外侧的拉伸断裂和内侧的剪切不稳定相遇时，拉剪混合断裂便产生了。局部化剪切在高应变率效应下发生，进而导致广泛塑性流动和钢壳的颈缩。此机理如图6.10所示。模拟中可以观察到拉伸剪切混合断裂，钢壳内侧的质点首先失效；当继续膨胀时，外侧的部分质点伴随拉伸应力的上升失去了承载能力；最后裂纹沿着剪切带萌生。如图6.7和图6.8所示，钢壳在断裂区域发生颈缩，产生了中间大两头小的碎片。

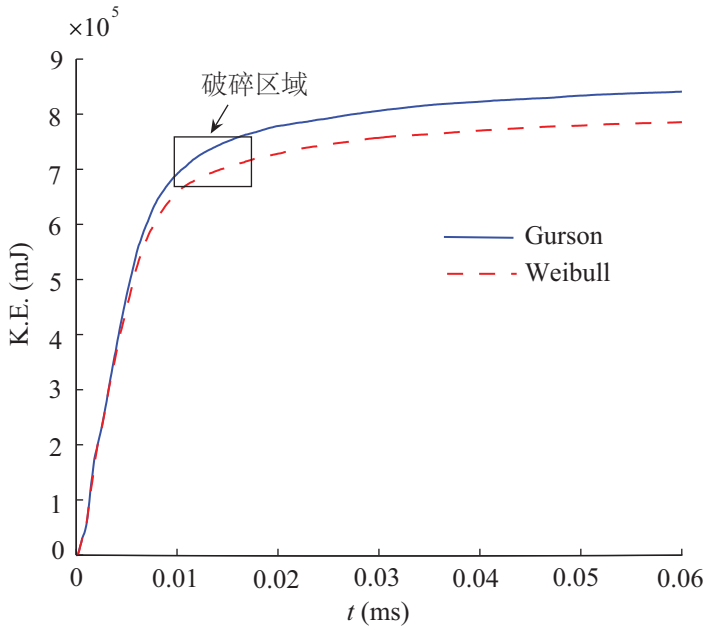


图 6.9　壳体动能的演化曲线

从模拟结果可以看出，由于使用了 Weibull 随机失效方案和带初始随机分布孔洞的 Gurson 模型，模拟产生的碎片具有不同的大小和形状，显示了一定的随机性。

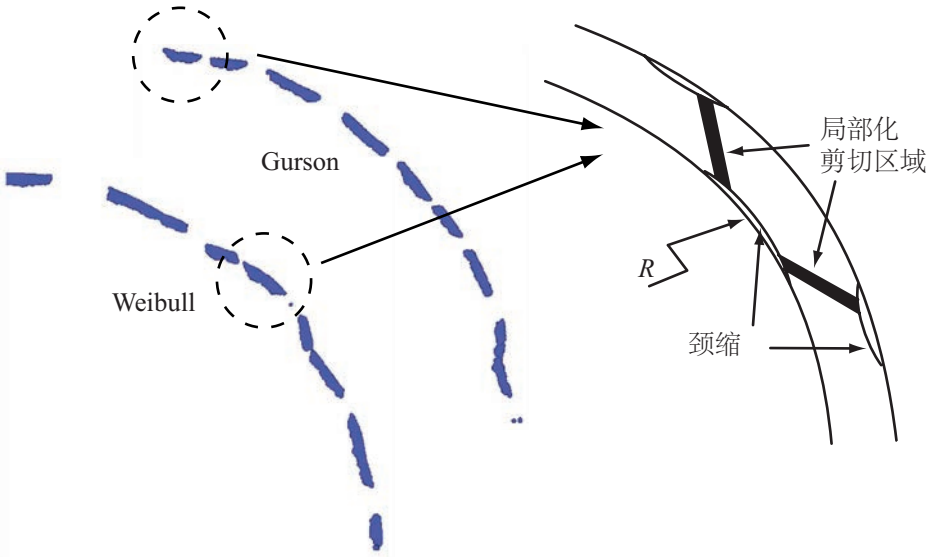
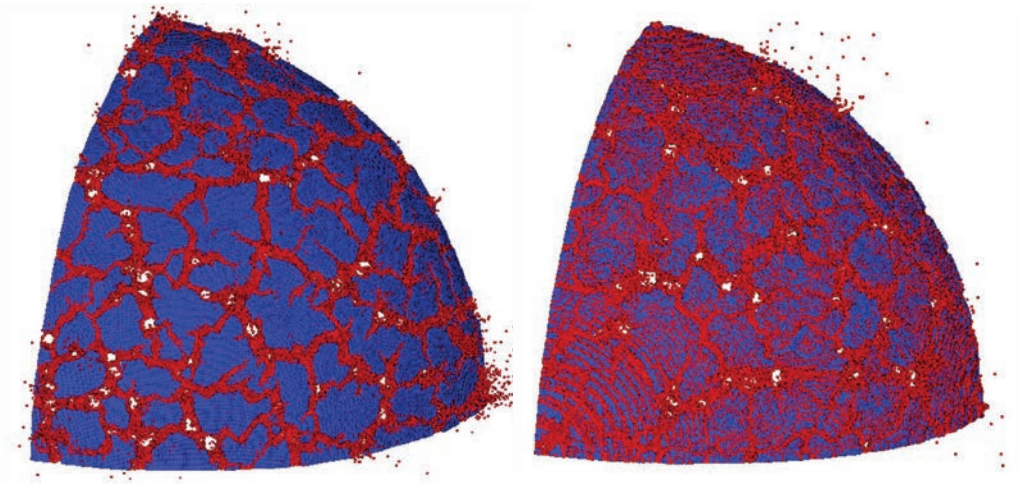


图 6.10　壳体的局部剪切和紧缩现象

6.6.3　球壳的碎片模拟

本节将6.6.2节中的二维算例扩展到三维球壳模型，球壳厚 4mm，内径 60mm，使用 1/8 对称模型进行模拟，壳体和炸药分别使用 1546509 和 636770 个质点进行离散，背景网格间距为 0.5mm。球壳的膨胀同样由内部炸药爆炸驱动。炸药和金属壳的材料参数和6.6.2节中的算例一样。

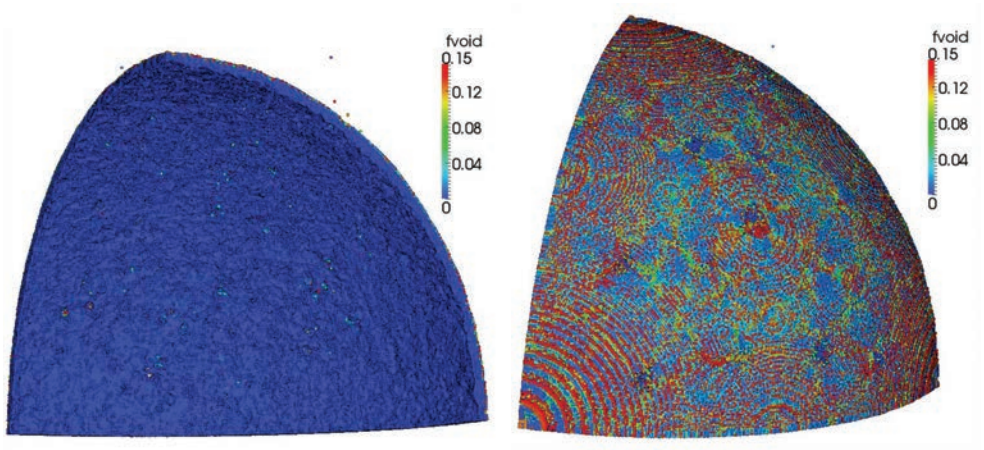
使用 Weibull 失效方案和 Gurson 模型模拟得到的裂纹和碎片形状分别如图6.11(a) 和6.11(b) 所示，其中失效质点显示为红色，破片质点显示为蓝色。失效质点形成了裂纹的扩展路径。两种模拟方案得到了相似的碎片形态。不同的是使用 Gurson 模型时，球壳外侧广泛存在失效质点。



(a) Weibull失效方案　　(b) Gurson模型

图 6.11　裂纹和碎片形态

当使用 Gurson 模型时，壳体内侧在压力作用下孔洞被压实，孔洞体积分数分布如图6.12(a) 所示。相反，壳体外侧孔洞由于受到拉伸作用而膨胀，孔洞生长、成核、合并，并最终引发解理断裂。图6.12(b) 显示了 $20\mu s$ 时刻壳体外侧质点的孔洞分布。相比于 Weibull 失效方案，Gurson 模型考虑了微观损伤对材料塑性流动和断裂的影响，从而可以更好的描述延脆性断裂转换过程。在爆炸初期，球壳的应变率相对较低，材料主要发生延性失效。然后应变率迅速上升，材料的屈服强度随着应变率增加而增加。材料在发生广泛塑性流动前便可能达到发生解理断裂所需的应力值，因而发生脆性断裂[138]。回顾柱壳模型得到动能变化曲线图6.9，使用 Weibull 随机失效方案得到的壳体最终动能相对较小。可能的原因是使用 Weibull 模型时壳体更接近于直接脆性断裂，壳体在未充分变形、加速时即被解体。



(a) 内表面　　(b) 外表面

图 6.12　孔洞体积分数分布

这里应用6.5节提出的方法来统计球壳产生的碎片。如图6.13所示，通过 Weibull 失效方案和 Gurson 模型模拟得到的碎片质量均服从幂定律分布，且指数分别为 $\beta_w = 1.06$， $\beta_g = 1.06$。Oddershede 等[191] 指出碎片的质量分布最终取决于破碎物体的初始形状而并非材料属性。他们发现当破碎物体为实心球时 $\beta = 1.63$，当为薄圆盘时 $\beta = 1.08$，当为棒条体时 $\beta = 1.05$。这里研究的球形壳在结构上更接近于薄圆盘而并非实心球。因此模拟得到的 β 值是合理的。从图6.13中可以发现，当质量大于 $m_0 = 0.5\text{g}$ 时，分布曲线迅速下降。产生此现象的原因是这里幂定律描述的是尺寸比破碎物体最小维度更小的碎片。在本算例中，球壳的最小维度即厚度 $h = 4\text{mm}$，因此特征截断质量 $m_0 = \rho h^3 = 0.4992\text{g}$。由于使用了基于背景网格的碎片统计方法，本算例尽管使用了大量质点进行离散计算，但统计碎片所花费的时间相比于整个计算过程而言可以忽略。

6.7　本章小结

本章基于物质点法从材料的宏观和微观性质两个角度研究了爆炸载荷作用下金属的破碎过程。宏观方面考虑材料的宏观失效应变服从 Webull 分布，微观方面使用 Gurson 模型描述材料微观孔洞对塑性流动的影响并考虑初始孔洞的随机分布。裂纹由材料的失效来描述，质点失效后通过接触算法转移到单独的速度场，以此裂纹面不被网格线束缚，并且即使材料发生很大塑性变形也可以自由传播。

本章应用以上方法模拟了爆炸驱动下柱壳和球壳破碎过程。金属壳在爆炸产物作用下加速膨胀并最终破裂，模拟得到了合理的破裂时间和破碎形态。

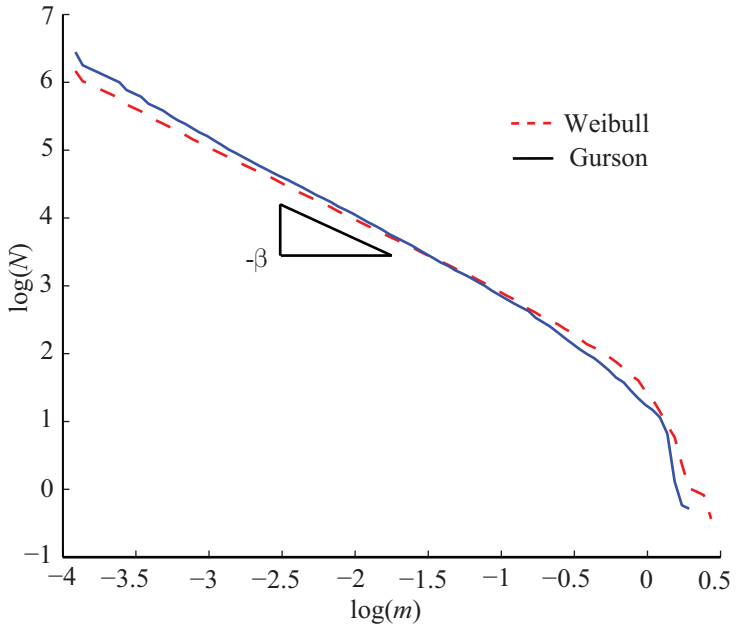


图 6.13　碎片的累积质量对数分布

结果显示 Weibull 随机失效方案和带有初始随机分布孔洞的 Gurson 模型都能较好的表征碎片的随机特性。基于微观损伤 Gurson 模型能更好的描述延脆性断裂转换过程。宏观和微观两种方法模拟得到的碎片质量服从幂定律分布，高应变率下金属的破碎行为呈现出脆性材料破碎的规律。本文提出基于背景网格的高效碎片统计方法使得 MPM 更加适合研究材料的破碎问题。

第 7 章 全文总结

7.1 研究成果

材料的局部化破坏问题有着广泛的工程应用背景，本文基于物质点法在两个层面上对此类问题进行了深入研究。首先从算法层面上，本文提出了多级背景网格、多重移动背景网格物质点法，在保证局部区域求解精度的同时，提高了局部化破坏问题的模拟效率。在模型应用层面上，本文发展了三维脱聚模型，并基于 Gurson 模型和 Webull 随机失效分别研究了金属延性断裂以及爆炸载荷下的金属破碎行为。本文主要成果如下：

（1）提出了基于背景网格的物质点前后处理方法。基于虚拟背景网格的质点布尔运算方法避免了质点间的循环查找以及相互比对，实现中将每个质点对应一个虚拟背景网格格子编号，布尔运算的计算过程转化为判断空间同一个虚拟背景网格格子是否同时被两个以上的质点占据。该方法有效提高了质点布尔运算建模的效率并保证了运算精度，可以方便地进行多个物体间的布尔运算。同时该方法还可以推广到其他质点类方法的前处理建模中。另外，基于背景网格的后处理技术可将质点的信息在背景网格节点上进行光滑处理，对水下爆炸问题的应用显示该方法避免了质点显示空间场分布时呈现出的不连续特征。

（2）针对局部化破坏问题中材料变形往往局部化的现象，本文提出了多级背景网格物质法，该方法基于层级的结构布置背景网格，在局部变形较大的区域使用高级别（小间距）背景网格，而在局部变形外围区域使用低级别（大间距）背景网格。不同级别背景网格之间通过悬点进行过渡衔接，悬点增加了所在背景网格格子的节点数，通过调整各节点的插值函数形式使其重新满足 Kronecker-delta 性质以及完备性的要求。算法实现时基于网格块的概念，可以方便定位到质点所处的网格级别。为保证求解精度匹配，高级别背景网格中使用较小尺寸的质点计算，而低级别背景网格中使用较大尺寸的质点计算。同时为了避免当粗质点运动到细网格中导致的数值断裂问题，本文提出了与背景网格级别相适应的质点分裂方法。对弹性波传播问题的模拟显示不同级别背景网格间基本不存在应力波反射现象。对 Talyor 杆碰撞问题的模拟验证了质点自适应分裂方法的有效性。通过弹体斜侵彻问题的研究表明多级背景网格物质点法有效提高了局部化问题的模拟效率。

（3）冲击侵彻作用下材料往往在与弹体接触的局部区域发生破坏，此类问题模拟中弹体在空间大范围运动，为了捕捉弹体的运动传统物质点法要求创建足够大的背景网格求解区域，这样在较大程度上造成了计算资源的浪费。针对此问题本文提出了多重移动背景网格物质点法，该方法只需要在初始时刻布置覆盖当前求解区域的背景网格，当物体运动出网格边界时，采用移动网格技术重新构建背景网格并覆盖所有物体。另外，多重移动背景网格物质点法允许在同一求解体系下存在多套背景网格，不同的物体在个各自独立的背景网格下求解，当物体间发生接触时将其质点信息映射到同一套背景网格下求解。因此多级背景网格物质点法可以有效提高背景网格节点的空间利用率，从而提高问题的求解效率。本文应用多重移动网格物质点法研究了弹丸冲击薄板以及弹体对多层靶板的侵彻问题，有效提高了此类问题的计算效率。

（4）金属材料由于局部缺陷等因素在载荷作用下产生应力集中，并在局部产生塑性变形最终发生延性断裂。由于材料存在广泛塑性流动，传统线弹性断裂力学理论的应用受到限制，本文发展了三维脱聚模型来描述材料失效界面的力学行为，并结合物质点法在描述不连续问题时不存在网格线依赖的特点发展了适合于延性断裂模拟的数值方法。脱聚模型将断裂行为的描述引入到本构方程中，失效质点同时满足脱聚模型和连续体本构模型，并且不需要具体断裂面描述模型，可以方便处理三维断裂问题。本文使用基于最大主应力和最大剪切应力的脱聚判断准则和脱聚方向计算方法，并在同一脱聚模型下考虑破坏过程中可发生 I 型、II 型以及混合型的不同模式断裂。结合多级背景网格物质点法本文成功预测了含非对称缺陷金属试件的裂纹发展。通过对不同断裂模式下裂纹扩展方式的比较，说明了在同一脱聚模型下考虑不同断裂模式对复杂构件裂纹扩展模拟的必要性。本文同时还应用脱聚模型研究了含孔平板压缩作用下局部剪切带的形成过程，总结了不同孔洞数量对剪切带形成以及整体结构承载力的影响。

（5）金属材料在高应变率下趋向于发生脆性破坏，强载荷作用下局部破坏在短时间发生并发展，连续的破坏最终导致材料的破碎。本文基于 Gurson 模型和 Weibull 随机失效研究了爆炸载荷下金属的破碎行为，裂纹的扩展通过失效模型和接触算法来实现。当使用 Gurson 模型时，考虑材料的初始微观孔洞随机分布，并使用 Tepla-F 失效模型。当不考虑材料微观孔洞缺陷时，Gurson 流动退化为 J_2 流动，使用基于宏观材料应变的 Weibull 随机失效方案。模拟结果显示这两种方案分别从微观缺陷和宏观失效两个角度较好的表征了金属在高应变率下的破碎过程并反映了破碎的随机特性。本文同时提出了基于背景

网格的高效碎片统计方法，模拟得到的碎片质量分布服从幂率法则，与实验结果一致。

本文的主要创新点总结如下：

（1）提出了基于悬点的多级背景网格物质点法，同时提出了与网格级别相适应的质点分裂方法。应用中在局部破坏区域使用较小的离散尺寸，从而提高整体的计算效率。

（2）提出了多重移动背景网格物质点法，增强了传统物质点法背景网格的灵活性，充分提高了背景网格的空间利用率，适合模拟冲击侵彻等涉及多物体大范围运动的问题。

（3）发展了三维脱聚模型，允许在同一脱聚模型下考虑材料破坏过程中可发生不同模式的断裂，基于物质点法发展了适合于延性断裂模拟的数值方法。

（4）基于 Gurson 模型和 Weibull 随机失效分别从微观缺陷和宏观失效角度研究了爆炸载荷下金属的破碎行为，并提出了基于背景网格的高效碎片统计方法。

7.2 工作展望

本文基于物质点法，从算法和模型两个层面发展了适用于局部化破坏问题的有效数值仿真方法，显示了物质点法处理局部大变形和复杂断裂破碎问题的能力和优势，取得了一定的阶段性成果。基于本人对现阶段工作的思考和总结，提出下阶段工作的内容如下：

（1）在多级背景网格物质点法的基础上发展三维自适应背景网格物质点法。三维自适应网格背景网格相比于多级背景网格物质点法，理论上可以进一步提高局部化问题的模拟效率，并可以追踪局部破坏的发展。但自适应背景网格物质点法需要实时创建更新背景网格，处理不当反而容易造成效率低下，甚至计算失真。实现时建议从算法和代码优化两方面着手。

（2）将扩展有限元单位分解的思想引入到物质点法体系下，将间断不连续引入到物质点法背景网格中描述裂纹扩展。在裂纹尖端引入额外自由度来提高物质法描述裂尖奇异应力场的精度。

（3）发展应用非局部本构模型提高剪切带等破坏形式的描述精度。非局部本构模型将空间变形梯度作为材料参数，而 MPM 采用的线性插值函数梯度不连续，因此可以将非局部本构模型与 GIMP 结合进行研究。

（4）将多重移动网格物质点法和多级背景网格物质点法结合，形成有机的整体，从而进一步提高局部化破坏问题的求解效率。同时在本文已完成工作的基础上，开展局部化破坏问题的并行计算研究。

参考文献

[1] Benioff M, Lazowska E, et al. Computational science: ensuring America’s competitiveness. Report to the President, President’s Information Technology Advisory Committee, Washington, DC, 2005..

[2] 王子才. 仿真技术发展及应用. 中国工程科学, 2003, 5(2):40–44.

[3] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless methods: An overview and recent developments. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139(1-4):3–47.

[4] 张雄，刘岩，马上. 无网格法的理论及应用. 力学进展, 2009, 39:1–36.

[5] 庄汉东. 材料失效分析. 华东理工大学出版社, 2009.

[6] Meyers M A. 材料的动力学行为. 北京: 国防工业出版社, 2006.

[7] Griffith A A. The phenomena of rupture and flow in solids. Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character, 1921, 221:163–198.

[8] Irwin G R. Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminium alloys. Proceedings of Proceedings of the Second Sagamore Ordinance Materials Conference, volume 2, 1956. 289–305.

[9] Irwin G R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. J. appl. Mech., 1957..

[10] Wells A. Unstable crack propagation in metals: cleavage and fast fracture. Proceedings of Proceedings of the crack propagation symposium, volume 1, 1961. 210–230.

[11] 程靳，赵树山. 断裂力学. 科学出版社, 2006.

[12] Rice J R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. DTIC Document, 1967.

[13] Hutchinson J. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1968, 16(1):13–31.

[14] Rice J, Rosengren G. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1968, 16(1):1–12.

[15] Cotterell B. The past, present, and future of fracture mechanics. Engineering fracture mechanics, 2002, 69(5):533–553.

[16] Holian B L, Ravelo R. Fracture simulations using large-scale molecular dynamics. Physical Review B, 1995, 51(17):11275.

[17] Abraham F F, Bernstein N, Broughton J Q, et al. Dynamic fracture of silicon: Concurrent simulation of quantum electrons, classical atoms, and the continuum solid. Mrs Bulletin, 2000, 25(05):27–32.

[18] Tadmor E B, Ortiz M, Phillips R. Quasicontinuum analysis of defects in solids. Philosophical Magazine A, 1996, 73(6):1529–1563.

[19] Benson D J. Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes. Computer methods in Applied mechanics and Engineering, 1992, 99(2):235–394.

[20] 杨秀敏. 爆炸冲击现象数值模拟. 中国科学技术大学出版社, 2010.

[21] Wilkins M L. Computer simulation of dynamic phenomena. Springer, 1999.

[22] Hallquist J. LS-DYNA theoretical manual. 1998. Livermore Software Technology Corporation..

[23] Attaway S, Brown K, Mello F, et al. PRONTO3D Users’ Instructions: A Transient Dynamic Code for Nonlinear Structural Analysis. SAND98-1361, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM, 1998..

[24] Wingate C, Stellingwerf R, Davidson R, et al. Models of high velocity impact phenomena. International journal of impact engineering, 1993, 14(1):819–830.

[25] 张雄，王天舒. 计算动力学. 清华大学出版社, 2007.

[26] Trädegård A, Nilsson F, Östlund S. FEM-remeshing technique applied to crack growth problems. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1998, 160(1):115–131.

[27] Espinosa H, Dwivedi S, Zavattieri P, et al. A numerical investigation of penetration in multilayered material/structure systems. International journal of solids and structures, 1998, 35(22):2975–3001.

[28] Xu X P, Needleman A. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1994, 42(9):1397–1434.

[29] Camacho G, Ortiz M. Computational modelling of impact damage in brittle materials. International Journal of solids and structures, 1996, 33(20):2899–2938.

[30] Zhou F, Molinari J F. Dynamic crack propagation with cohesive elements: a methodology to address mesh dependency. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 59(1):1–24.

[31] Ren X, Li J. Dynamic fracture in irregularly structured systems. Physical Review E, 2012, 85(5):055102.

[32] Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. International journal for numerical methods in engineering, 1999, 45(5):601–620.

[33] Dolbow J, Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing. International journal for numerical methods in engineering, 1999, 46(1):131–150.

[34] Moës N, Belytschko T. Extended finite element method for cohesive crack growth. Engineering fracture mechanics, 2002, 69(7):813–833.

[35] Melenk J M, Babuška I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1996, 139(1):289–314.

[36] Gravouil A, Moës N, Belytschko T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets—Part II: Level set update. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 53(11):2569–2586.

[37] Belytschko T, Chen H, Xu J, et al. Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 58(12):1873–1905.

[38] 庄茁，柳占立，成斌斌，廖剑晖. 扩展有限元. 清华大学出版社, 2012.

[39] McGlaun J M, Thompson S, Elrick M. CTH: a three-dimensional shock wave physics code. International Journal of Impact Engineering, 1990, 10(1):351–360.

[40] 宁建国，王成，马天宝. 爆炸与冲击动力学. 国防工业出版社, 2010.

[41] Harlow F H, Welch J E. Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. Physics of fluids, 1965, 8:2182.

[42] Hirt C W, Nichols B D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. Journal of computational physics, 1981, 39(1):201–225.

[43] Youngs D. Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion. Numerical methods for fluid dynamics, 1982, 24:273–285.

[44] Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. Journal of computational physics, 1988, 79(1):12–49.

[45] Silling S A. CTH reference manual: boundary layer algorithm for sliding interfaces in two dimensions. SAND93-2487, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM, 1994..

[46] Scheffler D. Modeling non-eroding perforation of an oblique aluminum target using the Eulerian CTH hydrocode. International journal of impact engineering, 2005, 32(1):461–472.

[47] 陈龙伟，孙远翔，宁建国. 动能弹对混凝土靶板侵彻三维数值模拟. 北京理工大学学报, 2003, 23(5):536–539.

[48] Noh W F. CEL: A time-dependent, two-space-dependent, coupled Euler-Lagrange code. Meth. Comp. Phys., 1964, 3:117–179.

[49] Gadala M. Recent trends in ALE formulation and its applications in solid mechanics. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2004, 193(39):4247–4275.

[50] 邓荣兵，金先龙，陈峻，沈建奇，陈向东. 爆炸冲击波对玻璃幕墙破坏作用的多物质 ALE 有限元模拟. 高压物理学报, 2010, (002):81–87.

[51] Lucy L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. The Astrophysical Journal, 1977, 8(12):1013–1024.

[52] Gingold R A, Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to nonspherical stars. Monthly notices of the Royal Astronomical Society, 1977, 18:375–389.

[53] Li S, Liu W K. Meshfree and particle methods and their applications. Applied Mechanics Reviews, 2002, 55(1):1–34.

[54] 张雄，刘岩. 无网格法. 北京: 清华大学出版社/Springer, 2004.

[55] 王勖成. 有限单元法. 清华大学出版社, 2003.

[56] Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. Computational mechanics, 1992, 10(5):307–318.

[57] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element free Galerkin methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37:229–256.

[58] Atluri S N, Zhu T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. Computational Mechanics, 1998, 22(2):117–127.

[59] Belytschko T, Lu Y, Gu L. Crack propagation by element-free Galerkin methods. Engineering Fracture Mechanics, 1995, 51(2):295–315.

[60] Belytschko T, Tabbara M. Dynamic fracture using element-free Galerkin methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996, 39(6):923–938.

[61] Krylsl P, Belytschko T. The element free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 44(6):767–800.

[62] Rabczuk T, Belytschko T. Cracking particles: a simplified meshfree method for arbitrary evolving cracks. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 61(13):2316–2343.

[63] Rabczuk T, Areias P, Belytschko T. A simplified mesh-free method for shear bands with cohesive surfaces. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 69(5):993–1021.

[64] Lee G H, Chung H J, Choi C K. Adaptive crack propagation analysis with the element-free Galerkin method. International journal for numerical methods in engineering, 2003, 56(3):331–350.

[65] Morka A. On the modelling of penetration/perforation problems. Journal of KONES Powertrain and Transport, 2010, 17(1).

[66] 龚曙光, 饶刚, 伍贤洪. 基于无网格 Galerkin 法的穿甲侵彻数值模拟. 爆炸与冲击, 2012, 31(6):658–663.

[67] Liu Y, Gao L T. Numerical Simulation for Dynamic Crack Propagation by MLPG. Key Engineering Materials, 2006, 324:495–498.

[68] Liu H, Han Z, Rajendran A, et al. Computational modeling of impact response with the RG damage model and the meshless local Petrov-galerkin (MLPG) approaches. CMC-TECH SCIENCE PRESS-, 2006, 4(1):43.

[69] Han Z, Liu H, Rajendran A, et al. The applications of meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approaches in high-speed impact, penetration and perforation problems. CMC-TECH SCIENCE PRESS-, 2006, 4(2):119.

[70] Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing kernel particle methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, 20:1081–1106.

[71] Liu G R, Liu M B. 光滑粒子流体动力学: 一种无网格粒子法. 湖南大学出版社, 2005.

[72] Randles P W, Libersky L D. Smoothed particle hydrodynamics: Some recent improvements and applications. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139(1-4):375–408.

[73] Johnson G R, Beissel S R. Normalized smoothing functions for SPH impact computations. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, 39(16):2725–2741.

[74] Dilts G A. Moving-least-squares-particle hydrodynamics—I. Consistency and stability. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 44(8):1115–1155.

[75] Rabczuk T, Eibl J. Simulation of high velocity concrete fragmentation using SPH/MLSPH. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 56(10):1421–1444.

[76] Liu W K, Chen Y J. Wavelet and multiple scale reproducing kernel methods. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1995, 21(10):901–931.

[77] Liu W K, Hao S, Belytschko T, et al. Multiple scale meshfree methods for damage fracture and localization. Computational materials science, 1999, 16(1):197–205.

[78] WANG H. RKPM Meshless Analysis of Brittle-to-Ductile Fracture. International Journal of Computational Methods, 2012, 9(04).

[79] Wang D D, Chen J S, Sun L Z. Homogenization of magnetostrictive particle-filled elastomers using an interface-enriched reproducing kernel particle. Finite Elements in Analysis and Design, 2003, 39(8):765–782.

[80] Wendland H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. Advances in computational Mathematics, 1995, 4(1):389–396.

[81] Liu G R. Mesh free methods: moving beyond the finite element method, volume 712. CRC Press, 2003.

[82] Djeukou A, Estorff O. Static and damage analyses of shear deformable laminated composite plates using the radial point interpolation method. Progress on Meshless Methods, 2009. 199–216.

[83] Xu J, Belytschko T. Discontinuous Radial Basis Function Approximations for Meshfree Methods. Meshfree Methods for Partial Differential Equations II, 2005. 231–253.

[84] Wen P H, Aliabadi M. Dynamic Crack Problems Using Meshless Method. Key Engineering Materials, 2013, 525:601–604.

[85] Duarte C A, Oden J T. Hp clouds-an hp meshless method. Numerical methods for partial differential equations, 1996, 12(6):673–706.

[86] Duarte C, Hamzeh O, Liszka T, et al. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(15):2227–2262.

[87] Rabczuk T, Gracie R, Song J H, et al. Immersed particle method for fluid–structure interaction. International journal for numerical methods in engineering, 2010, 81(1):48–71.

[88] Sulsky D, Chen Z, Schreyer H L. A Particle Method for History-Dependent Materials. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, 118(1-2):179–196.

[89] Sulsky D, Zhou S J, Schreyer H L. Application of a Particle-in-Cell Method to Solid Mechanics. Computer Physics Communications, 1995, 87(1-2):236–252.

[90] Brackbill J U, Ruppel H M. FLIP: A method for adaptively zoned, particle-in-cell calculations of fluid flows in two dimensions. Journal of Computational Physics, 1986, 65:314–343.

[91] Brackbill J U, Kothe D B, Ruppel H M. FLIP: A low-dissipation, particle-in-cell method for fluid flow. Computer Physics Communications, 1988, 48:25–38.

[92] 廉艳平，张帆，刘岩，张雄. 物质点法理论和应用. 力学进展, 2013, 43(2):236–264.

[93] Cummins S J, Brackbill J U. An implicit particle-in-cell method for granular materials. Journal of Computational Physics, 2002, 180:506–548.

[94] Guilkey J E, Weiss J A. Implicit time integration for the material point method: Quantitative and algorithm comparisons with the finite element method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 57:1323–1338.

[95] Sulsky D, Kaul A. Implicit dynamic in the material-point-method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193(12-14):1137–1170.

[96] Bardenhagen S G, Kober E M. The generalized interpolation material point method. Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2004, 5(6):477–495.

[97] Nair A, Roy S. Implicit Time Integration in the Generalized Interpolation Material Point Method for Finite Deformation Hyperelasticity. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2012, 19(6):465–473.

[98] York II A R, Sulsky D, Schreyer H L. The material point method for simulation of thin membranes. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 44:1429–1456.

[99] Bardenhagen S G, Brackbill J U, Sulsky D. The material-point method for granular materials. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, 187(3-4):529–541.

[100] Hu W, Chen Z. A multi-mesh MPM for simulating the meshing process of spur gears. Computers & structures, 2003, 81:1991–2002.

[101] 黄鹏. 金属及岩土冲击动力学问题的物质点法研究 [D]. 清华大学, 2010.

[102] Huang P, Zhang X, Ma S, et al. Contact algorithms for the material point method in impact and penetration simulation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011, 85(4):498–517.

[103] Ma Z, Zhang X, Huang P. An Object-Oriented MPM Framework for Simulation of Large Deformation and Contact of Numerous Grains. CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2010, 55(1):61–87.

[104] Tan H L, Nairn J A. Hierarchical, adaptive, material point method for dynamic energy release rate calculations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, 191(19-20):2095–2109.

[105] Ma J, Lu H, Wang B, et al. Multiscale simulations using generalized interpolation material point (GIMP) method and SAMRAI parallel processing. CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2005, 8(2):135–152. Times Cited: 3.

[106] Hornung R D, Kohn S R. Managing application complexity in the SAMRAI object-oriented framework. Concurrency and Computation: Practice and Experience, 2002, 14:347–368.

[107] Ma J, Lu H B, Komanduri R. Structured mesh refinement in generalized interpolation material point (GIMP) method for simulation of dynamic problems. CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2006, 12(3):213–227.

[108] Ma S, Zhang X, P L Y, et al. Simulation of high explosive explosion using adaptive material point method. CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2009, 39(2):101–123.

[109] 马上. 冲击爆炸问题的物质点无网格法研究 [D]. 清华大学, 2009.

[110] Zhang X, Sze K Y, Ma S. An explicit material point finite element method for hyper velocity impact. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 66:689–706.

[111] Lian Y P, Zhang X, Zhou X, et al. A FEMP method and its application in modeling dynamic response of reinforced concrete subjected to impact loading. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200(17-20):1659–1670.

[112] Lian Y P, Zhang X, Liu Y. Coupling of finite element method with material point method by local multi-mesh contact method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200:3482–3494.

[113] Lian Y P, Zhang X, Liu Y. An adaptive finite element material point method and its application in extreme deformation problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2012, 241–244(1):275–285.

[114] 廉艳平. 自适应物质点有限元法及在冲击侵彻问题中的应用 [D]. 清华大学, 2012.

[115] Guillkey J E, Harman T B, Banerjee B. An Eulerian-Lagrangian approach for simulating explosions of energetic devices. Computers & structures, 2007, 85:660–674.

[116] Guo Z, Yang W. MPM/MD handshaking method for multiscale simulation and its application to high energy cluster impacts. International Journal of Mechanical Sciences, 2006, 48:145–159.

[117] 宫伟伟. 泡沫铝动态力学性能的物质点法研究 [D]. 清华大学, 2012.

[118] 王晓军. 陶瓷和混凝土冲击问题的物质点法研究 [M]. 清华大学, 2012.

[119] Hu W Q, Chen Z. Model-based simulation of the synergistic effects of blast and fragmentation on a concrete wall using the MPM. International Journal of Impact Engineering, 2006, 32(12):2066–2096.

[120] 王宇新. 多项介质爆炸冲击响应物质点法分析 [D]. 大连理工大学, 2006.

[121] Nairn J A. Material Point Method Calculations with Explicit Cracks. CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2003, 4:649–663.

[122] Guo Y, Nairn J A. Calculation of *J* integration and stress intensity factors using the material point method. CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2004, 6:295–308.

[123] Guo Y J, Nairn J A. Three-dimensional dynamic fracture analysis using the material point method. CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2006, 16(3):141–155.

[124] Wang B, Karuppiah V, Lu H, et al. Two-dimensional mixed mode crack simulation using the material point. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2005, 12:471–484.

[125] Gilabert F A, Cantavella V C, Sanchez E, et al. Modelling fracture process in ceramic materials using the Material Point Method. European Physics Letters, 2011, 96:24002.

[126] Daphalapurkar N P, Lu H, Coker D, et al. Simulation of dynamic crack growth using the generalized interpolation material point (GIMP) method. International Journal of Fracture, 2007, 143(1):79–102.

[127] Wieckowski Z. The material point method in large strain engineering problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193(39-41):4417–4438.

[128] Ambati R, Yuan H, Pan X F, et al. Application of material point method for cutting process simulations. Computational Materials Science, 2011, 57:102–110.

[129] Andersen S, Andersen L. Modelling of landslides with the material-point method. Computational Geosciences, 2010, 14:137–147.

[130] Zhang H W, Wang K P, Chen Z. Material point method for dynamic analysis of saturated porous media under external contact/impact of solid bodies. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, 198:1456–1472.

[131] 许爱国，张广财，应阳君，朱建士. 多孔材料冲击特性的数值研究. 力学学报, 2010, 42(6):1138–1148.

[132] Gilmanov A, Acharya S. A hybrid immersed boundary and material point method for simulating 3D fluid-structure interaction problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, 56:2151–2177.

[133] Xue L P, Borodin O, Smith G D, et al. Micromechanics simulations of the viscoelastic properties of highly filled composites by the material point method (MPM). Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 2006, 14(4):703–720.

[134] 王汉奎. 金属及碳管复合材料力学行为的物质点类方法研究 [D]. 清华大学, 2011.

[135] Guilkey J E, Hoying J B, Weiss J A. Computational modeling of multicellular constructs with the material point method. Journal of Biomechanics, 2006, 39:2074–2086.

[136] Ionescu I, Guilkey J E, Berzins M. Simulation of soft tissue failure using the material point method. Journal of Biomechanical Engineering, 2006, 128:917–924.

[137] 周双珍. 人体冲击响应的物质点法数值模拟技术研究 [D]. 清华大学, 2013.

[138] Needleman A, Tvergaard V. Numerical modeling of the ductile-brittle transition. International Journal of Fracture, 2000, 101(1):73–97.

[139] Bardenhagen S G, Nairn J A, Lu H. Simulation of dynamic fracture with the Material Point Method using a mixed J-integral and cohesive law approach. Int. J. Fract., 2011, 170:49–66.

[140] Schreyer H L, Sulsky D, Zhou S J. Modeling delamination as a strong discontinuity with the material point method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, 191:2483–2507.

[141] Chen Z, Hu W, Shen L M, et al. An evaluation of the MPM for simulating dynamic failure with damage diffusion. Engineering Fracture Mechanics, 2002, 69:1873–1890.

[142] Chen Z, Feng R, Xin X, et al. A computational model for impact failure with shear-induced dilatancy. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 56:1979–1997.

[143] Sulsky D, Schreyer H L. MPM simulation of dynamic material failure with a decohesion constitutive model. European Journal of Mechanics A/Solids, 2004, 23:423–445.

[144] Chen Z, Shen L M, Mai Y W, et al. A bifurcation-based decohesion model for simulating the transition from localization to decohesion with the MPM. Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physick ZAMP, 2005, 56:908–930.

[145] 郑勇刚，顾元宪，陈震. 薄膜破坏过程数值模拟的 MPM 方法. 力学学报, 2006, 38(3):347–355.

[146] Shen L M. A Rate-Dependent Damage/Decohesion Model for Simulating Glass Fragmentation under Impact using the Material Point Method. CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2009, 49(1):23–45.

[147] Sulsky D. Application of a particle-in-cell method to solid mechanics (vol 87, pg 236, 1995). Computer Physics Communications, 1996, 96(1):105–106.

[148] Lian Y P, Zhang X, Zhou X, et al. Numerical simulation of explosively driven metal by material point method. International Journal of Impact Engineering, 2011, 38:237–245.

[149] 张忠，陈卫东，杨文淼. 非均匀固体炸药冲击起爆的物质点法. 爆炸与冲击, 2011, 31(1):25–30.

[150] 张雄，廉艳平，杨鹏飞，等. 冲击爆炸问题的三维物质点法数值仿真. 计算机辅助工程, 2011, 20(4):29–37.

[151] Hallquist J O. LS-DYNA Theoretical Manual. Livermore Software Technology Corporation, 1998.

[152] Bardenhagen S G. Energy conservation error in the material point method for solid mechanics. Journal of Computational Physics, 2002, 180:383–403.

[153] Johnson G R, Holmquist T J. Evaluation of cylinder-impact test data for constitutive model constants. Journal of Applied Physics, 1988, 64(8):3901–3910.

[154] Zukas J A, Walters W P. Explosive Effects and Applications. Spinger, 1998.

[155] Bardenhagen S G, Kober E M. The generalized interpolation material point method. CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2004, 5(6):477–495.

[156] Pan X F, Xu A G, Zhang G C, et al. Three-Dimensional Multi-mesh Material Point Method for Solving Collision Problems. Commun. Theor. Phys., 2008, 49(5):1129 – 1138.

[157] Bardenhagen S G, Guilkey J E, Roessig K M, et al. An improved contact algorithm for the material point method and application to stress propagation in granular material. Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2001, 2(4):509–522.

[158] Gong W W, Liu Y, Zhang X, et al. Numerical Investigation on Dynamical Response of Aluminum Foam Subject to Hypervelocity Impact With Material Point Method. CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2012, 83(5):527–545.

[159] Requicha A A, Voelcker H B. Boolean operations in solid modeling: Boundary evaluation and merging algorithms. Proceedings of the IEEE, 1985, 73(1):30–44.

[160] 史宝军, 袁明武, 陈永强. 无网格方法数值结果的可视化方法与实现. 工程力学, 2004, 21(6):51–55.

[161] McDill J, Goldak J, Oddy A, et al. Isoparametric quadrilaterals and hexahedrons for mesh-grading algorithms. Communications in applied numerical methods, 1987, 3(2):155–163.

[162] Johnson G R, Holmquist T J. Evaluation of cylinder-impact test data for constitutive model constants. Journal of Applied Physics, 1988, 64(8):3901–3910.

[163] Piekutowski A J, Forrestal M J, Poormon K L, et al. Peroration of Aluminum plates with Ogive-Nose Steel Rods at Normal and Oblique Impacts. International Journal of Impact Engineering, 1996, 18:877–887.

[164] Vuyst T D, Vignjevic R, Campbell J C. Coupling between meshless and finite element methods. International Journal of Impact Engineering, 2005, 31:1054–1064.

[165] Seo S, Min O, Lee J. Application of an improved contact algorithm for penetration analysis in SPH. International Journal of Impact Engineering, 2008, 35(6):578–588.

[166] Schröder D I J, et al. Post-critical discontinuous localization analysis of small-strain softening elastoplastic solids. Archive of Applied Mechanics, 1994, 64(4):267–285.

[167] Chen Z, Fang H. A study on the link between coupled plasticity and damage and decohesion for multiscale modelling. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2001, 215(3):259–263.

[168] Ortiz M, Pandolfi A. A class of cohesive elements for the simulation of three-dimensional crack propagation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 44(9):1267–1282.

[169] Dvorkin E N, Cuitiño A M, Gioia G. Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990, 30(3):541–564.

[170] Díez P, Arroyo Balaguer M, Huerta A, et al. Adaptivity based on error estimation for viscoplastic softening materials. 2010..

[171] Meyers M A. Dynamics Behavior of Materials. John Wiley & Sons, 1994.

[172] Gurson A L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part 1. Yield criteria and flow rules for porous ductile media. Journal of Engineering Materials and Technology, 1977, 99:2–15.

[173] Weibull W. A statistical theory of strength of materials. Royal Swedish Institute for Engineering Research, 1939. 1–45.

[174] Weibull W. A statistical distribution function of wide applicability. Journal of applied mechanics, 1951, 18(3):293–297.

[175] Curran D, Seaman L, Shockey D. Dynamic failure of solids. Physics reports, 1987, 147(5):253–388.

[176] Worswick M, Pick R. Void growth and constitutive softening in a periodically voided solid. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1990, 38(5):601–625.

[177] Beremin F, Pineau A, Mudry F, et al. A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel. Metallurgical and Materials Transactions A, 1983, 14(11):2277–2287.

[178] Wang Y. A two-parameter characterization of elastic-plastic crack tip fields and applications to cleavage fracture[D]. Massachusetts Institute of Technology, 1991.

[179] Xia L, Shih C F. Ductile crack growth—III. Transition to cleavage fracture incorporating statistics. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1996, 44(4):603–639.

[180] Tvergaard V. Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. International Journal of Fracture, 1981, 17:389–407.

[181] Tvergaard V, Needleman A. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. Acta Metallurgica, 1984, 32(1):157–169.

[182] Chu C C, Needleman A. Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. Journal of Engineering Materials and Technology, 1980, 102:249–256.

[183] Simonsen B C, Li S F. Mesh-free simulation of ductile fracutre. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 60:1425–1450.

[184] Zuo Q, Rice J R. An implicit algorithm for a rate-dependent ductile failure model. Journal of Applied Physics, 2008, 104(8):083526–083526.

[185] Nairn J A. Material point method calculations with explicit cracks. CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2003, 4(6):649–663.

[186] Johnson J, Addessio F. Tensile plasticity and ductile fracture. Journal of applied physics, 1988, 64(12):6699–6712.

[187] Gumbel E. Statistical of extremes. Columbia University Press, New York, 1958.

[188] Jayatilaka A d S. Fracture of engineering brittle materials. Applied Science Publishers, 1979.

[189] Fok S, Mitchell B, Smart J, et al. A numerical study on the application of the Weibull theory to brittle materials. Engineering Fracture Mechanics, 2001, 68(10):1171–1179.

[190] Hatano T. Theory of failure of concrete and similar brittle solid on the basis of strain. International Journal of Fracture, 1969, 5(1):73–79.

[191] Oddershede L, Dimon P, Bohr J. Self-organized criticality in fragmenting. Physical Review Letters, 1993, 71:3107–3110.

[192] Inaoka H, Toyosawa E, Takayasu H. Aspect ratio dependence of impact fragmentation. Physical review letters, 1997, 78(18):3455–3458.

[193] Rapaport D C. The art of molecular dynamics simulation. Cambridge university press, 2004.

[194] 汤铁钢，谷岩，李庆忠，等. 爆轰加载下金属柱壳膨胀破裂过程研究. 爆炸与冲击, 2003, 23(6):529–533.

[195] 汤铁钢，李庆忠，孙学林，等. 45 钢柱壳膨胀断裂的应变率效应. 爆炸与冲击, 2006, 26(002):129–133.

[196] 董海山，周芬芬. 高能炸药及相关物性能. 科学出版社, 1989.

[197] 陈刚，陈忠富，徐伟芳，等. 45 钢的 JC 损伤失效参量研究. 爆炸与冲击, 2007, 27(2):131–135.

[198] Xia L, Shih C F. Ductile crack growth—II. Void nucleation and geometry effects on macroscopic fracture behavior. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1995, 43(12):1953–1981.

致 谢

衷心感谢导师张雄教授多年来对本人悉心关爱、严格要求和精心指导，张老师严谨的治学之道、丰富的研究经验以及忘我的工作态度使本人受益匪浅，也是本文得以顺利完成的关键因素。本人将终身铭记张老师的教诲和培养，愿以勤奋报师恩。

感谢加拿大多伦多大学机械与工业工程系 Shaker A Meguid 教授对本人在加拿大从事合作研究期间的细心指导和用心照顾。

感谢计算动力学研究室陆明万教授、邱信明教授、刘岩老师以及廉艳平博士对我的指导和帮助。

感谢计算动力学研究室的所有同窗好友们，谢谢你们的理解和帮助、关心与支持。

感谢我的父母多年来的疼爱、信赖、包容和付出。谨以此文，献给育我爱我的亲人。

本文研究承蒙国家自然科学基金（10872107）和 973 项目（2010CB832701）资助，特此致谢。

声　明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签　名：_____ 日　期：_____

个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果

个人简历

1987 年 5 月生于江苏省南通市。

2004 年 9 月考入河海大学土木工程学院，就读工程力学专业。2008 年 7 月本科毕业，获工学学士学位。

2008 年 9 月免试进入清华大学航天航空学院工程动力学研究所，师从张雄教授攻读博士学位至今。

2011 年 9 月 -2012 年 2 月获清华大学博士生短期访学项目资助，赴加拿大多伦多大学机械与工业工程系合作研究。

发表的学术论文

[1] Pengfei Yang, Yan Liu, Xiong Zhang, Xu Zhou, Yuli Zhao. Simulation of Fragmentation with Material Point Method Based on Gurson Model and Random Failure. CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, 85(3): 207-236, 2012. (SCI 收录；EI 收录)

[2] Pengfei Yang, Shaker A Meguid, Xiong Zhang. Accurate modelling of the crush behaviour of thin tubular columns using material point method. SCIENCE CHINA Physics, Mechanics & Astronomy. (SCI 源刊，已录用)

[3] Pengfei Yang, Yan Liu, Xiong Zhang. Numerical simulation of material fragmentation with material point method. ICCES: International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences, Nanjing 2011.(国际会议)

[4] 杨鹏飞，张雄. 基于 Gurson 模型和随机失效的破碎现象物质点方法模拟. 《中国计算力学大会'2010（CCCM2010）暨第八届南方计算力学学术会议（SCCM8）论文集》, 2010, 1418.

[5] Xiong Zhang, Yanping Lian, Pengfei Yang, Yan Liu. Numerical Simulation of Impact and explosion problems with material point method. Third International Symposium on Computational Mechanics (ISCM III), Second Symposium on Computational Structural Engineering (CSE II). Taipei 2011.(国际会议)

[6] 张雄，廉艳平，杨鹏飞，李金光，张衍涛，王汉奎. 冲击爆炸问题的三维物质点法数值仿真. 计算机辅助工程. 20(4): 29-37, 2011.

研究成果

[1] 侵彻爆炸问题的自适应物质点无网格法研究，国家自然科学基金(10872107，参加人).

[2] 强冲击荷载下结构破坏过程的建模与关键算法，国家 973 项目子课题(2010CB832701，参加人).