冲击爆炸问题的物质点无网格法研究

（申请清华大学工学博士学位论文）

培 养 单 位：航天航空学院

学　　科：力学

研 究 生：马 上

指 导 教 师：张 雄 教 授

副 指 导 教 师：周 旭 研 究 员

二〇〇九年六月

Material Point Meshfree Methods for Impact and Explosion Problems

Dissertation Submitted to

Tsinghua University

in partial fulfillment of the requirement

for the degree of

Doctor of Engineering

by

Ma Shang

(Mechanics)

Dissertation Supervisor : Professor Zhang Xiong

Associate Supervisor : Professor Zhou Xu

June, 2009

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：

清华大学拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：（1）已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；（2）为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供校内师生阅读，或在校园网上供校内师生浏览部分内容；（3）根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》，向国家图书馆报送可以公开的学位论文。

本人保证遵守上述规定。

（保密的论文在解密后应遵守此规定）

作者签名：_____　　导师签名：_____

日　　期：_____　　日　　期：_____

摘 要

冲击爆炸问题在国民经济和科学技术中有广泛而重要的应用。数值模拟是进行这类问题研究的重要手段，但冲击爆炸问题涉及多种学科，往往非常复杂，对数值方法提出了很大的挑战。无网格法在处理大变形问题以及涉及材料破坏的问题具有优势，为冲击爆炸问题的数值模拟提供了有效工具。一些质点类无网格法，如光滑质点动力学方法（SPH）已经取得了相当丰富的成果，得到了工程界的认可。本文针对超高速碰撞和爆炸问题，基于无网格物质点法（MPM），研究适合对冲击爆炸问题进行模拟的数值方法，研制三维物质点法程序，建立有效的数值模拟工具。

针对有限元在求解超高速碰撞问题遇到的网格畸变这一困难，本文借鉴物质点法的思想，提出了物质点有限元法。在物质点有限元法中，仍用有限单元离散物体，在大变形区域布置背景网格，被背景网格覆盖的区域将结点视为物质点，用物质点法进行计算，其他区域仍用有限元法求解，从而解决有限元法在处理大变形问题时网格畸变的问题。通过 Taylor 杆碰撞的模拟和弹丸超高速碰撞薄板的模拟，说明了此方法在效率上和在描述碎片云的形成过程上都比有限元法具有优势。

针对物质点法存在的数值断裂问题，本文提出了在物质点法中自适应分裂质点的方案，使物质点法可以在质点变形最大的方向上自适应分裂质点，从而避免了数值断裂。将自适应分裂质点物质点法用于激波管、爆轰驱动飞片、聚能射流等问题的模拟和分析，取得了较好的效果。

在理论和算法研究的基础上，研制了用于冲击爆炸问题的三维显式物质点法程序 MPM3DPP。从影响点搜索、形函数、稳定性、时间积分、边界条件和接触算法等方面对物质点法和 SPH 方法进行了比较，通过 Taylor 杆问题和超高速碰撞问题的模拟了进行比较和分析。

关键词：超高速碰撞；爆炸；无网格法；物质点法；数值模拟

Abstract

The impact and explosion problems have broad and significant applications in the national economy and technology. Numerical simulation is an important study approach for this kind of problems. However, the impact and explosion problems cover a broad range of disciplines, and are often very complicated. It is a great challenge for numerical methods. Meshfree methods have advantages in dealing with large deformation and material fracture. They are effective tools for simulation of impact and explosion problems. Some meshfree particle methods, such as smoothed particle hydrodynamics (SPH), have many successful applications in this area, and are accepted by engineers. In this paper, studies are carried out based on the material point method (MPM) with the aim of solving hypervelocity impact and explosion problems. The numerical methods for impact and explosion problems are investigated. A three dimensional material point method code has been developed as an effective numerical simulation tool.

Finite element method has the difficulty of mesh distortion in solving the hypervelocity impact problems. An explicit material point finite element method is proposed by using the idea of the material point method. The material domain is discretized by finite elements. The momentum equations are solved on a predefined computational grid (like the material point method) in the large deformation zone, and on the finite element mesh (like the traditional finite element method) elsewhere. Mesh distortion problem is avoided in material point finite element method. The advantages of the proposed method in efficient and depicting debris cloud are illustrated by simulating Taylor bar impact problem and hypervelocity impact problem.

To solve the numerical fracture problem existing in the material point method , an adaptive particle splitting scheme was proposed. The particle can be split adaptively in the direction with the largest deformation. The adaptive material point method has been applied in the shock tube, explosively driven flyer, and shaped charge jet formation

problems with good performance.

Based on theoretical and algorithmic studies, three dimensional explicit material point method code MPM3DPP is developed. SPH and MPM are compared in neighbor searching, approximation functions, consistency of shape functions, instability, time integration, boundary conditions and contact algorithm. The taylor bar impact problem and hypervelocity impact problem are analyzed by the two methods for comparison.

Key words: hypervelocity impact; explosion; meshfree methods; material point method; numerical simulation

目 录

第 1 章 引言 1
1.1 研究背景和意义 1
1.2 冲击爆炸问题数值模拟的研究现状 2
1.2.1 数值模拟的作用和意义 2
1.2.2 流体动力学程序 3
1.2.3 拉格朗日方法和欧拉方法 4
1.3 质点类无网格法的研究现状 8
1.3.1 无网格法的发展 8
1.3.2 质点方法 10
1.3.3 物质点法研究现状 12
1.4 本文主要内容 15
第 2 章 物质点法的基本原理 17
2.1 控制方程和离散 17
2.2 时间积分 20
2.3 求解格式 22
2.4 广义插值物质点法 23
2.5 接触算法 25
2.6 小结 26
第 3 章 冲击爆炸的基本理论和程序编制 27
3.1 冲击波 27
3.2 爆轰 30
3.2.1 爆轰波的CJ理论 30
3.2.2 爆轰的数值模拟 33
3.3 应力更新、材料模型和状态方程 35
3.3.1 人工体积粘性 35
3.3.2 应力更新算法 35
3.3.3 弹塑性模型 37
3.3.4 高应变率下的弹塑性材料模型 40
3.3.5 材料的损伤失效模型 41

3.3.6 固体状态方程 42
3.3.7 气体的状态方程 44
3.3.8 爆轰产物状态方程 45
3.4 一些具体问题 45
3.4.1 温度计算 45
3.4.2 质点体积的计算 46
3.5 程序设计与考核 47
3.5.1 程序设计 47
3.5.2 程序的考核 48
3.6 小结 51
第 4 章 物质点有限元法 54
4.1 拉格朗日有限元网格畸变的解决办法 54
4.2 物质点有限元法的求解方案 55
4.2.1 在背景网格上求解动量方程 56
4.2.2 在有限元网格上求解动量方程 58
4.2.3 时间积分 60
4.2.4 算法描述 60
4.3 算例 61
4.3.1 弹性杆撞击刚性墙 61
4.3.2 Taylor杆问题 62
4.3.3 空间碎片防护问题 65
4.4 小结 67
第 5 章 自适应物质点法求解爆炸冲击问题 69
5.1 数值断裂 69
5.2 自适应分裂质点方案 70
5.3 激波管问题 71
5.4 爆轰驱动飞片问题 75
5.5 聚能射流问题 77
5.5.1 射流形成过程的二维模拟 78
5.5.2 三维射流模拟 80
5.6 小结 81

第 6 章 物质点法和SPH的比较和分析 82
6.1 质点类方法 82
6.2 SPH的基本原理 82
6.3 物质点法和SPH的比较 84
6.3.1 影响点搜索 84
6.3.2 近似函数 85
6.3.3 形函数的一致性 86
6.3.4 不稳定性 87
6.3.5 时间积分 88
6.3.6 边界条件 88
6.3.7 接触算法 89
6.4 算例比较 89
6.4.1 单时间步比较 90
6.4.2 Taylor 杆问题 90
6.4.3 超高速碰撞问题 93
6.5 小结 95
第 7 章 结论 96
7.1 研究成果 96
7.2 需进一步开展的工作及展望 97
参考文献 98
致谢与声明 110
附录 A MPM3DPP 程序的输入文件 111
个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果 113

主要符号对照表

MPM	物质点法 (Material Point Method)
SPH	光滑质点流体动力学方法 (Smoothed Particle Hydrodynamics)
ρ	密度
K	体积模量
G	剪切模量
E	弹性模量
ν	泊松比
σ_{ij}	柯西应力张量
s_{ij}	偏应力张量
ε_{ij}	柯西应变张量
e	比内能
E	$=\rho_0 e$ 单位初始体积的内能
p	压力
v	$=1/\rho$ 比容
V	$=v/v_0$ 相对体积
V	质点体积
C_0	声速
u_s	冲击波波速
u_p	质点速度
D	爆速
D_{ij}	变形率张量
ω_{ij}	旋率张量
γ	$=C_p/C_v$ 绝热指数（也称等熵指数或比热比）
Γ	Grüneisen 系数

第 1 章　引言

1.1　研究背景和意义

冲击爆炸问题在国民经济和科学技术中有广泛而重要的应用。在国防领域，为了进行各种武器的研制开发，需要全面研究侵彻、爆炸的基本规律和作用原理。爆炸所产生的冲击波和碎片的毁伤效应是衡量武器效果的重要标志，只有对其规律进行深入的研究，才能有效的指导战斗部设计以及装甲防护方式的设计。在民用领域，利用工程爆破进行隧道开挖、采矿作业，需要对炸药的选择使用，对岩土的动态响应以及破坏方式等爆破效果进行准确的评估。近年来，爆炸焊接、爆炸切割等爆炸加工技术在工程上已经广泛应用，利用爆炸的能量驱动金属板可以进行爆炸成形加工，利用爆炸冲击合成技术可以生产金刚石粉末，利用爆炸冲击压实可进行材料加工，对爆炸加工中相关问题的研究也方兴未艾。在航天领域，轨道附近的空间碎片可能以数千米每秒的速度撞击空间飞行器或卫星，给它们带来极大威胁，为了对空间飞行器或卫星进行防护，需要对超高速碰撞的规律有系统的研究[1]。随着当前各国对反恐问题的更加重视，人们对爆炸灾害与事故的防护以及相关抗爆结构的设计与毁伤分析提出了更高的要求，需要深入研究材料和结构在爆炸载荷下的响应。

冲击爆炸问题包含一系列复杂的物理化学过程，从力学的角度研究这一系列过程中的力学问题，形成了力学的一个重要分支，即爆炸力学[2]。爆炸是高功率密度的能量释放过程，包括物理爆炸，化学爆炸和核爆炸，在面向兵器工业与航天航空工业的研究中，以炸药爆炸、高速侵彻以及超高速碰撞为主要研究对象。研究内容包括高速碰撞和侵彻、超高速碰撞、炸药爆炸、爆炸对周围介质的驱动加速以及冲击爆炸导致的材料失效和结构破坏等，这些问题的共同特点是，都涉及在极短时间和极小的体积内，发生极大的能量转化，载荷强度极高。在冲击爆炸的载荷作用下，应力波的作用处于主导地位，材料经历高应变率的极大变形，载荷时间一般在微秒（μs）量级，应变率可达 $10^7 s^{-1}$，压力可达到 10 GPa 量级[3]。材料会出现不同机理的破坏失效现象，甚至出现相变，结

构也会发生断裂、破碎等多种类型的毁伤失效。

1.2　冲击爆炸问题数值模拟的研究现状

1.2.1　数值模拟的作用和意义

实验研究、理论研究和数值模拟是冲击爆炸问题研究的三个主要手段。其中实验是了解爆炸冲击过程中物理现象，认识其中规律，开展基础研究以及工程应用研究的基本研究手段，也是使用最多的研究方式。然而实验研究也有其局限性，特别是冲击爆炸问题的实验具有昂贵和危险的特点，往往代价较大。

理论研究包括对物理规律总结和提炼，这可以使我们对冲击爆炸问题可以达到较为完整的科学认识。同时，可靠的理论模型也是进行理论分析和数值模拟的基础。对于一些几何构型相对简单的问题，如果载荷以及边界条件可用一定的函数来描述，也可以用解析方法来进行理论分析，以较低的代价获得对问题较深入的认识。

计算机自其发明之日起就被用于了科学研究和工程计算。随着计算机硬件水平的飞速发展，数值模拟的作用日益显著。近年来，并行计算技术（MPI，OpenMP）[4]得到了非常大的重视，以计算机集群（cluster）为主要组成方式的超级计算机不断刷新世界上最快计算速度的记录，对超级计算机进行排名的 TOP500 排名每半年更新一次[5]。随着计算机软硬件技术以及数值方法研究飞速发展，数值模拟起到的作用越来越大，许多以前无法计算的复杂问题现在都可以进行成功地计算，数值模拟已与理论和实验并称为科学研究的三大支柱[6]。计算爆炸力学在爆炸力学发展中愈来愈重要的地位已获得普遍公认。

数值模拟具有一些显著的特点和优势：（1）冲击爆炸实验一般都涉及材料和结构的破坏，实验后，试件不能重复使用。和实验相比，数值模拟更经济，易于重复进行。（2）数值模拟不受客观条件限制，比如在进行超高速碰撞实验时，弹丸质量的大小和能达到的最高速度都受到加速设备的制约，往往微小的提高都需要付出大量的成本，而数值模拟则不受此限制。（3）冲击爆炸过程往往在极短的时间内完成，实验测量稍有疏忽便会错过最佳测量时机，实验数据的提取也需要克服高温、高速等困难，有时在过程完成后，只能观察终态结果，而通过数值模拟，可以给出动态变形过程，提供详细的信息，易于连续反复观

察。（4）一些破坏性巨大的爆炸实验，比如核武器的实验因为国际公约等因素无法进行，而数值模拟则不受此限制。（5）解析方法只能处理一些相对简单的问题，有一定局限性，而数值模拟适用范围更广。不过另一方面，解析分析可以对研究者判别数值模拟的结果是否合理提供帮助，也有助于分析判断在数值模拟中出现的一些现象是物理的还是非物理的，以及帮助研究者适应物理问题对计算方法的不足进行改进[7]。

1.2.2　流体动力学程序

冲击爆炸问题涉及固体力学、流体力学、热力学、化学、高压物理等多种学科，往往非常复杂，对数值方法提出了很大的挑战。这类问题有如下特点：一是能量快速转化，高应变率，高温高压；二是材料变形非常大，涉及材料的损伤失效；三是是多相介质相互作用；四是冲击爆炸问题与普通的结构动力学问题不同，应力波的传播起很大作用[3]。

20 世纪 50 年代以来，美国三大国防实验室，洛斯阿拉莫斯国家实验室（Los Alamos National Laboratory, LANL）[8]，劳伦斯利弗莫尔国家实验室（Lawrence Livermore National Laboratory, LLNL），Sandia 国家实验室（Sandia National Laboratories，SNL）进行了大量的爆炸力学数值计算工作，发展了许多爆炸力学计算程序，一般这种程序都被称为流体动力学程序（Hydrocode）。

流体动力学程序（Hydrocode）的提法产生于上世纪 50 年代末[9]。美国 LANL 国家实验室的研究者在模拟超高速碰撞问题时发现，碰撞产生的压力远高于材料的强度，于是他们在模拟中便忽略材料强度，假设材料的行为是流体动力学的（Hydrodynamic）。并且他们把模拟高速载荷和强载荷作用下的材料和结构的程序称为流体动力学程序（Hydrocode）。

这种把高压下的固体当作可压缩流体来处理的方法称为流体动力学方法[10]，后来发展的各种爆炸力学程序基本都遵循这一方法。在实际计算时，一般将材料的静水压力和应力偏量分别计算，当外载荷产生的应力超过材料强度几个数量级时，惯性效应、可压缩性等起到主要作用，可以忽略材料的强度，把介质作为非粘性可压缩流体处理，把三个状态变量（静水压力、体积、温度）联系起来用一个状态方程来描述材料的行为。

在国内，郑哲敏先生为我国爆炸力学学科的创建和发展做出了创始性贡

献[11]。1965年开始，郑哲敏根据国家需要，从事地下爆炸问题的研究。当时国际上通常的做法是，在高压区把介质（岩石）当作流体，在低压区则将其当作弹性体，两个模型之间是人为突然过渡的。这种假设不能令人满意，基于 30 年代 von Karman 对大理石在高压下力学行为的实验研究，郑哲敏与解伯民一起，独立于国外提出了一个可以统一描述介质力学性质的流体弹塑性模型。这个模型消除了流体和固体间的传统界限，可以较好地刻画压力和温度对介质屈服行为的影响，与国外在同一时期发表工作相比，在具体处理上也有所不同。该模型被用于球对称条件下的地下爆炸问题。后来的发展表明，它有广泛的应用。

1.2.3 拉格朗日方法和欧拉方法

数值模拟的方法有许多种，无论在离散时采用有限差分法（Finite Difference Method，FDM）、有限单元法（Finite Element Method，FEM）还是有限体积法（Finite Volume Method，FVM），数值模拟方法根据所使用网格的不同，通常都可以分为欧拉方法和拉格朗日方法两大类。

1.2.3.1 欧拉方法

在欧拉方法中，网格固定在空间，在物体的变形过程中保持不变，物体则穿过网格流动。欧拉方法比较适合模拟大变形问题，因此在计算流体力学（Computational Fluid Dynamics，CFD）[12]中大多都采用欧拉方法，早期用于冲击爆炸问题的流体动力学程序也较多采用欧拉方法。

HELP 程序是典型的欧拉方法流体动力学程序，是上世纪 60 到 70 年底由 Walsh 和 Hageman 开发的有限差分法程序。为了处理多物质界面问题，HELP 中借助无质量的拉格朗日示踪点来显示物质界面[7,9]。

CTH 程序[13]是美国 Sandia 国家实验室在 CSQ 程序的基础上开发的一个软件体系，采用欧拉格式下的有限体积法，主要用来处理多维、多材料、大变形、强冲击波动的物理问题。在 CTH 中 求解分为两步，第一步是拉格朗日步，网格随物质运动变形。第二步是映射步，变形的网格被映射回欧拉网格。CTH 程序近年来仍在不断更新和维护，并发挥重要的作用。Scheffler 等应用 CTH 对斜侵彻问题进行分析[14]，Huerta 等将 CTH 用于聚能装药侵彻的模拟分析[15]。针对结构网格的自适应加密网格（Adaptive Mesh Refinement, AMR）技术是 Berger 等

人在上世纪 80 年代提出的[16,17]，AMR 在发展过程中逐渐得到广泛关注并已形成了一些比较成熟的程序包[18]。在 CTH 程序中已经引入了 AMR 技术，并应用于气体爆炸后冲击波对结构的作用[19]以及超高速碰撞问题[20]的模拟。

1.2.3.2　拉格朗日方法

欧拉方法中，由于物质相对网格运动，在控制方程中会出现对流项，容易出现数值扩散。同时，欧拉方法不跟踪物质变形，难以处理变化的物质边界，特别是多种物质间的界面。如果不采用特殊的物质分界面定位技术，物质分界面将很快在网格中弥散。

拉格朗日方法的计算网格固定在物质上，随物质一起变形。网格点和物质点重合在一起，因此网格点和物质点间不存在相对运动，控制方程中不存在对流项，这简化了控制方程，求解过程也相对比较简单。拉格朗日方法容易跟踪物体的运动，有利于处理物质间的界面和物质边界。另外，许多固体物质的本构关系和变形历史相关，用拉格朗日方法也比较容易精确地跟踪和处理。

拉格朗日方法的优势在于[9]：

1. 控制方程简单，没有对流项；
2. 界面处理简单；
3. 易于引入与历史相关的材料本构

拉格朗日方法的缺点是，在物体发生大变形的情况下，网格会畸变和扭曲，引起较大误差甚至计算失败。在显式时间积分的方法中，积分步长由最小单元的尺寸控制，当变形增加，单元扭曲，时间步长会逐步减小，并趋于零，使得计算成本急剧增加甚至无法完成。两种解决网格畸变的办法较为常见，分别是重分区（rezoning）技术和侵蚀（erosion）算法。重分区技术即重新划分网格，虽然采用这种技术可以一定程度上克服网格畸变带来的困难，但仍然会产生误差。而且对于三维问题，网格重划分，特别是六面体网格的重划分既费时又复杂，最复杂和完善的网格重划分程序也难以得到令人满意的结果。侵蚀算法是在单元变形过大，达到一定阈值（拉力，等效塑性应变等）后，就将单元删除。侵蚀算法在侵彻问题的模拟中取得了一定的成功，但也带来新的问题，如单元侵蚀造成的质量不守恒给系统带来扰动，忽略了被侵蚀单元对系统的作用，进而造成计算误差，另外，被侵蚀的单元也无法继续参与描述材料的变形。

比较知名的拉格朗日程序有如下几种：

HEMP 程序[21]是采用拉格朗日网格的显式有限差分程序，它由美国 LLNL 的 M.L. Wilkins 在 20 世纪 50 年代到 80 年代设计，早期被用于计算爆炸、冲击问题。

EPIC[22]（Elastic Plastic Impact Computations）是显式积分的拉格朗日型的有限元程序，由 Johonson 等在 20 世纪 70 年代研制，在二维问题中采用三角形单元，在三维问题中采用四面体单元。后来程序经过改进，引入重分区（rezoning）和侵蚀（erosion）算法后，可以计算高速碰撞、爆炸等问题。EPIC 程序的发展略早于 DYNA 程序，他们的区别在于 EPIC 主要用三角形单元，而 DYNA 主要用四边形单元[9]。EPIC 在研究领域一直发挥着作用，如美国陆军研究实验室用 EPIC 对材料的强度和局部化行为进行研究[23]。

PRONTO3D[24] 由美国 Sandia 国家实验室开发，是 Sandia 国家实验室工程分析代码接入系统（Sandia National Laboratories Engineering Analysis Code Access System，SEACAS）的成员之一。在这一系统中，代码的开发获得许多便利，输入文件是 GENESIS 格式，结果文件和重启动信息是 EXODUS 格式，前后处理可以有相应的程序给与支持。PRONTO3D 从 PRONTO2D 发展而来，用于求解高应变率下，高度非线性材料的大变形问题的三维瞬态固体动力学程序。发展 PRONTO3D 程序的一个重要需求来自于为新的数值算法和新的非线性本构模型提供一个测试平台。PRONTO3D 采用拉格朗日网格的有限元法，采用八节点常应变六面体单元，四节点常应变四边形壳单元，采用变步长的显式时间积分，用自适应时间步控制算法来控制时间步长。程序中包含沙漏模态控制、生死单元技术、刚体处理、程序起爆、JWL状态方程等功能，用结点约束的方式处理接触。无网格 SPH 方法作为一种特殊的单元加入到程序中，通过接触算法和有限元耦合。

美国 Sandia 国家实验室把 CTH 和 PRONTO3D 整合到一起，形成了 Zapotec 程序用于侵彻和爆炸与结构的相互作用。Bessette 等对这套程序和方法进行了评估，并与其他几种类似的程序进行了对比，为美国即将发射的火星科学实验室的安全分析做准备[25]。

DYNA 系列的程序是最为知名的显式动力学有限元分析程序，现在使用的很多程序或软件，比如 MSC.DYTRAN，都是在 DYNA 程序的基础上发展而

来的。最初的 DYNA3D 程序[26]源自 20 世纪 70 年代的美国 LLNL 国家实验室，DYNA3D 程序的发展背景和 PRONTO3D 程序类似，但是其商业化的版本 LS-DYNA 显然取得了更为广泛的应用。1988 年成立的 LSTC 公司，使得 LS-DYNA 程序的持续开发和维护得到有力的保证。在推出 940、950、960、970 版本后，LS-DYNA 到现在已经发展到了 971 版本。其中包括约 200 种材料模型，采用罚函数法处理接触，并行处理方式 MPP 和 SMP，以及无网格法 SPH。前后处理一般使用 LS-PrePost。一些商业有限元集成软件，如 ANSYS，对 LS-DYNA 求解器进行了包装，提供了部分前后处理功能。Arup 公司的 OASYS 也为 LS-DYNA 提供了前后处理环境。

对早期各种程序更详细的总结和介绍可参见 Zukas 主编的《High Velocity Impact Dynaimcs》的第 9 章[27]。

用于冲击爆炸问题的商业化软件以 LS-DYNA 和 AUTODYN 为代表，国内外研究者利用这些软件开展了大量的数值模拟工作，取得了许多成果。然而，一方面这类软件某些模块的进口是受到限制的，另一方面由于冲击爆炸问题的复杂性，许多问题需要使用者对软件有更多的控制，因此在我国，开发具有自主知识产权的冲击爆炸模拟程序仍然非常必要。在程序发展上，我国相对国外先进水平还有一定差距，但近年也有了很大发展[28]：北京理工大学宁建国研究组致力于冲击爆炸数值模拟程序的研究，开发了使用欧拉网格的有限差分程序 MMIC2D 和 MMIC3D，引入了界面处理技术，并用于聚能射流等问题的模拟[29,30]，同时，为了配合求解程序的使用，也开发了前处理程序 MESH2D 以及可视化程序 Visc2D 和 Visc3D。北京计算数学与应用物理研究所进行了大量流体动力学程序的研究开发工作，开发了欧拉网格的有限差分程序 MEPH2Y 和 MEPH3D[31,32] 并引入自适应加密网格技术和界面处理技术，用于高速碰撞、炸药爆轰、聚能射流等问题的模拟。中科院力学所张德良和北京大学刘凯欣等基于高精度时空守恒元解元算法开发了 SUPER CE/SE 程序用于高速侵彻和爆轰问题的模拟[33–35]。

1.2.3.3　混合方法

单纯的拉格朗日方法和欧拉方法都有不可避免的困难，针对不同的问题，将两种方法的处理方式互相借鉴，或将两种方法以某种方式结合，来发挥各自

优势，也产生了许多新的方法。

比如，在欧拉方法中添加示踪质点，在拉格朗日方法中进行重分区都是两种方法相互借鉴的尝试。

任意拉格朗日-欧拉（Arbitrary Lagrangian Eulerian，ALE）[36]方法是将两种方法结合的典型代表。ALE 最早是为了使用有限差分法求解带有移动边界的二维流体动力学问题而提出的。Donea、Belytschko 等人分别将 ALE 法引入有限元法中，用以求解流体与结构相互作用问题。Hughes 等人建立了 ALE 描述的运动学理论，并使用有限元法解决了粘性不可压缩流体流动和自由表面流动问题。

CALE[22]是二维的任意拉格朗日欧拉动力学计算程序，由美国 Lawrence Livermore 国家实验室的 R. Tipton 开发。CALE 这个名字来自于程序是用 C 语言编写的，并且采用的是任意拉格朗日欧拉方法。Alme 等[37]使用 CALE 程序对超高速碰撞问题进行了模拟。

在 ALE 中，网格拓扑并不改变[38]，而只是根据物体运动情况对已有网格设计一种移动算法，这是ALE 和网格重分区技术的一个根本区别。ALE 法在二维计算中取得了一定成功，但还是存在局限性，如何设计有效的三维网格运动算法是个有很大难度的问题。

另外一个将欧拉方法和拉格朗日方法结合的典型代表是质点网格法（Particle-in-cell，PIC）[39]， PIC 法是一种早年用于流体动力学的方法，其主要思想是在欧拉网格中布置拉格朗日的质点来追踪物体运动，解决欧拉方法中的材料输运问题。这种思想对计算方法的发展产生了重要的影响。在 PIC 法基础上发展得到的物质点法（Material Point Method，MPM）[40,41]将物体离散成拉格朗日质点，并借助欧拉背景网格辅助计算，也利用这种思想发挥欧拉方法和拉格朗日方法各自的优势。

1.3 质点类无网格法的研究现状

1.3.1 无网格法的发展

无网格法的研究一般被认为始于 70 年代末提出的光滑质点流体动力学方法（Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH）[42,43]。SPH当时主要被用于天体物理和流体问题中[44]，并没有引起更广泛的关注。1994 年 Belytschko 等提出基

于移动最小二乘（Moving Least Squares, MLS）近似和 Galerkin 离散方案的无单元 Galerkin 法（Element Free Galerkin Method, EFG）[45]，在动态裂纹扩张等问题体现出了相对有限元法的优势。此后无网格法的研究得到了广泛的关注[46]，许多种新的无网格法被提出[47,48]。同时期提出的还有物质点法（Material Point Method，MPM）[40,41]，在大变形问题中体现了其优势。

求解微分方程的数值方法，除了像有限差分法直接求解微分方程和相应定解条件的近似解，另一类方法是首先建立和原微分方程及定解条件相等效的积分弱形式，再在此基础上建立近似解法，如加权余量法。虽然无网格法的种类繁多，多达 30 余种，但从加权余量法的角度来看，各类无网格法的主要区别在于采用什么样的加权余量法和试探函数（trial function）。因此，无网格法的发展可以看做是对有限元法的扩展。

大多数无网格法与有限元法最显著的不同就在于无网格法的近似函数是直接通过一组离散点 $\boldsymbol{x}_I(I=1,2,\cdots,N)$ 来建立的，而不像有限元中近似函数的建立依赖于单元。通过一组离散点，函数 $u(\boldsymbol{x})$ 可以近似为：

$$u(\boldsymbol{x}) \approx u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{n} N_I(\boldsymbol{x}) u_I = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{1-1}$$

其中 $u_I = u(\boldsymbol{x}_I)$ 是函数 $u(\boldsymbol{x})$ 在节点 $\boldsymbol{x}_I$ 处的值，$N_I(\boldsymbol{x})$ 为节点 $\boldsymbol{x}_I$ 的形函数，n 为形函数在 $\boldsymbol{x}$ 处不为0的节点总数，$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}) = [N_1(\boldsymbol{x}), N_2(\boldsymbol{x}), \cdots, N_n(\boldsymbol{x})]$，$\boldsymbol{u} = [u_1, u_2, \cdots, u_n]^{\mathrm{T}}$。

在无网格法中最常见的近似方法是移动最小二乘近似（Moving Least Squares, MLS）。待求函数 $u(\boldsymbol{x})$ 在计算点 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 $\Omega_{\boldsymbol{x}}$ 内可以局部近似为

$$u^h(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) = \sum_{i=1}^{m} p_i(\bar{\boldsymbol{x}}) a_i(\boldsymbol{x}) \tag{1-2}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是计算点 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 $\Omega_{\boldsymbol{x}}$ 内各点的空间坐标，$p_i(\bar{\boldsymbol{x}})$ 是基函数，m 是基函数的个数，$a_i(\boldsymbol{x})$ 是待定系数。通常使用单项式作为基函数，也可以使用任何其它函数,如奇异函数和三角函数等。移动最小二乘近似要求系数 $a_i(\boldsymbol{x})$ 的选取使得近似函数 $u^h(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})$ 在计算点 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 $\Omega_{\boldsymbol{x}}$ 内是待求函数 $u(\boldsymbol{x})$ 在某种最小二乘意义下的最佳近似。通过在每个节点 $\boldsymbol{x}_I$ 处定义一个权函数 $w_I(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I)$，使近似函数 $u^h(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}})$ 在计算点 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 $\Omega_{\boldsymbol{x}}$ 内的 n 个节点 $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_I$ 处的误差

加权平方和最小，可以求出待定系数 $a_i(\boldsymbol{x})$，再代入式(1-2)中，就可以得到待求函数 $u(\boldsymbol{x})$ 在计算 点 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 $\Omega_{\boldsymbol{x}}$ 内的加权最小二乘意义下的局部最佳近似 $u^h(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})$。这些局部近似函数 $u^h(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})$ 在点 $\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}$ 处的值的集合就构成了待求函数 $u(\boldsymbol{x})$ 在求解域 Ω 内的全局近似函数 $u^h(\boldsymbol{x})$。

另外常用的近似函数构造方法还有在 SPH 中用到的核近似、对核近似进行改进的重构核近似、单位分解函数、径向基函数等。除了各种选择不同的近似函数，对离散方案的改进也是无网格法研究的重要方向。许多已出版的国内外学术专著对无网格法近年来的研究成果进行了详尽的总结[49–54]。

近十几年来，无网格法蓬勃发展，在许多有限元法解决不好的问题中，如冲击爆炸、动态裂纹扩展、材料断裂破坏、结构超大变形、拓扑优化、流固耦合和自由表面流动、生物力学、微纳米力学等，体现了独特的优势。从工程应用角度来看，无网格法是对已经在工程上取得巨大成功的有限元法等基于网格的方法的有效补充。与基于网格的有限元等方法相比，无网格法主要体现了以下优势：

（1）无网格法用一组点来离散求解区域，直接借助于离散点来构造近似函数，可以彻底或部分地消除网格，对于复杂三维结构，不需要网格的初始划分和重构，不仅可以保证计算的精度，而且可以减小计算的难度，也便于进行自适应分析。因此无网格法在处理大变形问题以及存在不连续界面的问题时取得了较好的效果。

（2）无网格法的近似函数较为灵活，易于建立高阶连续性的近似函数，可以达到较高精度，在处理板壳问题时具有优势。另外，也可将包含待求物理问题的特性的函数引入近似函数基底，便于处理裂纹扩展等特殊问题。

1.3.2　质点方法

无网格法的产生和发展，引起研究者对数值模拟方法的思考。有些无网格法是完全不需要网格的，有些则是要借助于背景网格。那么怎样才是真正的无网格法，或者说“真正的无网格法”这种提法是否必要？

Idelsohn 等[55]认为，对一个数值模拟方法而言，关键的问题不是建立网格更好还是不建立网格更好，而在于这个方法是否可以用 $O(N)$ 量级的计算量去计算结点关联（nodal connectivity），建立好的形函数。对有限元而言，这个结

点关联就通过单元来确定，如果不重划分网格，那么这个结点关联在计算过程中就是固定的。对大多数无网格法而言，这个结点关联就是被结点的影响域覆盖的其他结点来确定，而这个结点关联一般是可变的。Idelsohn 等认为，当问题要求不断更新结点关联，最重要的问题是有一个足够快的方法去计算结点关联。至于这个方法是有网格还是无网格是无关紧要的。

Idelsohn 等[56]发展了质点有限元方法（Particle Finite Element，PFEM）用于自由液面流体的流动模拟，并对质点类方法的含义进行了探讨。质点方法的一个特点是所有的物理量和数学量都附属于质点本身，而不象有限元中属于单元。物理量如粘性、密度，变量如速度、温度或者压力以及数学量如梯度或体积变形都赋予每个质点。它们表示这个量在质点位置附近的平均值。质点方法不仅对解决离散问题比如颗粒物质是有利的，同时，它对解决一些连续介质问题，如有内部分离的问题，接触问题或者有波浪破碎的自由液面问题，也是有利的。根据加在每个质点上力的计算方法不同，质点方法可以分成两类：一种质点间相互作用力通过局部的接触问题来计算；一种质点间相互作用力通过在全域上求解连续的微分方程来计算。质点类方法另一个特点是它没有一个特定的求解域，问题的区域由质点的位置来决定，因而没有边界线或面。这也是为什么在求解微分方程以计算力的时候，需要识别边界面以施加边界条件。

许多源自流体力学模拟的方法也被称为质点方法（Particle method）[57]或无网格质点法（Meshfree particle method）[51]。SPH 方法被认为是典型的质点方法，改造后的 PIC 方法由于物理量基本都存储于质点上，一般也被认为是质点方法。

从上述的观点来看，MPM 中用质点离散物体，物理量都由质点携带，质点关联可以借助于背景网格在每个时间步有不同的变化并且快速的计算，因此也可归类于质点类的无网格法。

由于网格的限制，有限元很难处理高速冲击和爆炸问题中出现的材料断裂失效，结构破碎等现象。尽管在有限元中应用侵蚀（erosion）算法可以将失效的单元抛弃，但同时也带来质量损失等新的问题。和传统的基于网格的拉格朗日有限元相比，无网格方法将连续体离散成质点，没有网格约束，避免了大变形下网格畸变的问题。而且无网格方法中离散的质点可对材料的破坏和结构的破碎提供更自然的描述，在冲击爆炸问题中已经得到了一些成功的应用。

在无网格法中，发展最早的 SPH 首先被用于模拟高速冲击问题[58–61]，以 SPH 为代表的质点类无网格法公式较为简单，效率较高，在这一领域展现了较好的应用前景，并得到了广泛的应用。

Johnson 等应用和改进 SPH 方法，针对高速冲击问题进行了一系列工作[62,63]。Johnson 等提出了与 SPH 类似的广义质点算法(Generalized Particle Algorithm，GPA)[64]，用于高速冲击问题。Johnson 等结合有限元和无网格方法，将冲击变形过程中扭曲的有限单元转化成质点[65,66]，用于超高速冲击层裂破坏以及长杆弹斜侵彻。Beissel 等[67]成功地将这种方法应用于空间碎片防护的超高速冲击的模拟中。Rabczuk 等[68]采用改进的 SPH 方法 MLSPH 模拟混凝土在冲击爆炸载荷下的破坏问题。SPH 已经成为高速冲击领域的重要方法，被加入到 AUTODYN、LS-DYNA 等商业软件中，并用于空间碎片防护等问题的分析中[69,70]。

爆炸问题，特别是爆炸载荷下结构和材料的响应问题，和高速冲击问题具有相似的特点，也是质点类无网格法的优势领域。Swegle 等[71]用 SPH 模拟水下爆炸，Randles 等[58]在综述文章中分析了 SPH 的研究进展及其在冲击爆炸问题中的应用，Liu 等[72,73]将 SPH 用于聚能装药等爆炸问题的模拟。

美国 LANL 国家实验室 Wingate 等人发展了应用 SPH 模拟冲击问题的 SPHINX 程序[74]，并用 SPHINX 程序对玻璃材料的强度和破坏情况进行分析[75]。Hayashida 等[76]以及 Wilson 等[77]对 CTH 程序和 SPHINX 程序 模拟超高速碰撞问题的效果进行了比较。

美国德州大学奥斯汀分校的 Fahrenthold 研究组一直致力于超高速碰撞问题数值模拟方法的研究，他们结合有限元的特点和质点类方法的思想提出杂交的质点单元方法[78]，同时利用质点和单元离散连续体，分别用质点和单元模拟不同的物理量，并将此方法应用于空间碎片防护问题的模拟[79]。

其他无网格法也在一定程度上表现出了在冲击爆炸问题中的应用潜力，如 Han 等[80]将 MLPG 无网格法用于高速冲击问题。

1.3.3 物质点法研究现状

经典 PIC 方法在质点上只存储质量和位置信息，后来以 PIC 方法为基础发展的方法中，有一部分倾向于把更多的物理量存储在质点上，以降低其数值耗

散，比如 Brackbill 等人发展的 FLIP（Fluid implicit PIC）方法[81,82]。

上世纪 90 年代中期，Sulsky 等人将 FLIP 应用于固体力学问题中，提出了物质点法（Material Point Method，MPM）[40,41]。为了能够处理固体力学中历史相关的本构，Sulsky 等对 FLIP 做了几点改进：（1）把本构方程在物质点上实现，而不是在网格上，于是可以应用历史相关的本构关系。（2）利用等效积分弱形式对求解格式重新进行推导。（3）采用显式时间积分。这种方法在被命名为物质点法（Material Point Method, MPM）[83]后，这个名称被广泛接受。

MPM 的核心思想在于结合拉格朗日方法和欧拉方法各自的优势。在 MPM 中，连续体被离散成若干质点，这些质点携带所有物质信息，其运动代表了物质的变形和运动。背景网格用于动量方程的求解和空间导数的计算，可以固定也可以自由布置。在每一个时间步中，首先将物质点和背景网格完全固连，在网格结点建立并求解动量方程，之后再映射回物质点，得到下一时刻物质点所携带的物质信息。这一步物质点和网格结点一同变形，没有相对运动，是拉格朗日求解，所以避免了欧拉法中处理对流项的困难。在下一时间步中，变形后的背景网格被抛弃，仍采用未变形的背景网格，物质信息被映射到网格结点，从而避免了拉格朗日法中因网格畸变而产生的数值困难。MPM 经过不断研究发展，在冲击、接触、流固耦合等涉及大变形和材料破坏的问题中体现了优势，得到了较多应用。

在 MPM 模拟物质变形的过程中，当质点穿过背景网格时，会出现应力的震荡，被称为跨网格噪音（cell-crossing noise）。Bardenhagen 等[84]针对此问题，基于Petrov-Galerkin 离散方案对 MPM 进行推广，发展了广义插值的物质点法（Generalized Interpolation Material Point method，GIMP）。

MPM 自动满足无滑移接触条件，在此基础上，York 等提出接触判断方法以及允许分离的接触释放算法[85]，Bardenhagen 等[86,87]提出允许分离和滑动，带有摩擦力的接触算法，指出这种接触算法的计算量和颗粒数是线性关系，很适合用于颗粒物质这种具有大量接触的问题的模拟。Hu 等提出了多重网格的接触算法[88]模拟齿轮啮合问题。Nairn[89]在此基础上改进接触算法用于处理裂纹表面的自接触。Pan 等[90]对接触力的计算方法进行了改进，使能量守恒得到更好的满足。

同有限元一样，物质点法中可以用协调质量阵，也可以用集中质量阵，Tan

等[91]和 Love 等[92]为了获得更好的守恒性质，采用协调质量阵进行计算，Love 等[93]对不同质量阵的影响进行了细致的讨论。在应用中，考虑到效率和精度的平衡，多数研究者还是采用集中质量阵。

在时间积分上，物质点法通常采用显式积分。和显式有限元以及 SPH 等质点方法相比，物质点法中时间积分的临界步长（CFL条件）取决于背景网格的大小而非质点间距[94]，不会像有限元因网格畸变而缩小时间步长，因此计算效率较高[95]。同 SPH 相比，也具有更高的效率。对于低速或准静态问题，往往能够获得更大时间步长的隐式算法更为有效，许多研究者对采用隐式积分的物质点法进行了研究[94,96,97]。

MPM 在冲击问题、裂纹扩展问题、材料破坏、接触问题、生物力学模拟等方面取得了成功的应用：

利用物质点法处理大变形问题的优势，Sulsky 等[41,83]将 MPM 用于高速冲击问题取得良好效果。Guilkey 等将 MPM 用于金属锻压成型[97]。York 等把 MPM 应用于膜的模拟[85]，并进一步模拟气囊膨胀等流体与薄膜相互作用的问题[98]。

Nairn 的研究组利用 MPM 易于处理不连续的特点，用接触算法处理裂纹表面，将 MPM 用于断裂力学研究[89,91,99,100]，计算裂尖参数。美国 Oklahoma 州立大学的 Lu 研究组针对动态裂纹扩展问题，用 MPM 做了一系列模拟工作，Wang 等[101]用不规则的背景网格来计算二维混合型裂纹，Daphalapurkar 等[102]用 GIMP 结合材料模型研究动态裂纹的扩展速度。

质点类方法在处理材料破坏上具有优势，Chen 等应用 MPM 研究动态脆性破坏[103,104]以及引入无反射边界条件来模拟金属薄膜的失效与破坏[105–107]，Schreyer等[108]模拟分层复合材料中的脱层（delamination）破坏模式，Sulsky等[109]通过在 MPM 中引入脱粘（decohesion）本构模型来模拟材料层裂破坏。

由于 MPM 在处理接触上的优势，它也被用于泡沫材料和散体（颗粒）材料。多孔固体和泡沫材料[110][111]。Wieckowski 等[112,113]引入三角形背景网格，用 MPM 模拟贮料垛卸料中的颗粒流动问题，Bardenhagen 等[86,87,114]将 MPM 用于颗粒问题模拟，Cummins 等[96] 用隐式的 MPM 模拟颗粒中的应力传播和颗粒流动问题，Coetzee 应用 MPM 模拟挖斗填充问题[115]。Hu 等将 MPM 用于正齿

轮啮合过程的模拟[88]。

生物力学方面，Ayton 等将 MPM 用于类脂混合双层膜跨尺度模拟[116,117]。Utah 大学 Guilkey 等用 MPM 对血管以及周边组织进行超过一千万质点的大规模模拟[118]。Ionescu 等用 MPM 模拟软组织的破坏[119]。

Lee 等[120]用改进的质点网格法（Particle In Cell, PIC）方法模拟聚能射流和穿甲问题。Hu 等[121,122]将 MPM 用于模拟爆炸及其对混凝土墙的破坏，Guilkey 等[123]利用欧拉描述的 多物质有限体积法和拉格朗日描述的 MPM 耦合计算圆筒爆炸以及爆炸作用下外壳破坏问题。

美国的 Utah 大学将 MPM 纳入到一个基于部件的并行模拟系统中[124] 用于火灾安全问题模拟的 C-SAFE 项目。Huang 等[125]用 OpenMP 实现在共享内存计算机上的物质点法并行计算。Zhang 等[126]将 MPM 用于饱和多孔介质与固体间相互作用的动态接触分析。其他方面，MPM 也被用于模拟多晶材料[127]、复合材料[128–130]、土工膜[131]、地质力学海冰[132]等问题的模拟。

国内方面，王宇新等将 MPM 应用于冲击载荷问题[133,134]以及爆炸焊接中的滑移爆轰问题[135]。郑勇刚等模拟薄膜破坏过程[136]。马上等用三维 MPM 模拟超高速碰撞问题[137]。王津龙等将 MPM 应用于散体力学，模拟柱状堆石成型过程[138]。

综上，物质点法采用拉格朗日描述的质点离散连续体，物理量输运没有误差；能够模拟大变形，不会有网格畸变问题；方便处理接触，在模拟多物质接触以及处理材料断裂破坏方面的优势；时间步长取决于网格，不会因为变形而减小时间步长。因此，基于上述特点，物质点法是比较适合模拟冲击爆炸问题的。

1.4　本文主要内容

本文的主要目标是针对爆炸冲击问题，结合近年来发展的物质点无网格法，研究适合爆炸冲击问题模拟的数值方法，进行算法和应用研究，建立有效的数值模拟工具。

本章介绍了研究背景和研究意义，对爆炸冲击问题的特点和数值模拟研究现状进行了总结，对无网格法的发展及其在爆炸冲击问题的应用情况进行了综

述，对 MPM 的特点和研究现状进行了总结。

第 2 章中主要介绍了 MPM 的基本算法与具体格式，对与 MPM 相关的时间积分、接触算法、GIMP 方法等技术和和算法进行了简要介绍。

冲击爆炸问题中涉及到复杂的应力波效应，爆轰又是一个复杂的物理化学过程，对这类问题的数值模拟需要适当的简化，对于冲击波以及爆轰波等强间断也需要恰当的处理。另外，由于冲击爆炸问题涉及比较极端的载荷情况，需要考虑高应变率、高温高压等因素的影响，在数值模拟中需要考虑特别的材料模型和状态方程。在第 3 章中对这些和数值模拟相关的理论问题进行了简要的叙述，对三维物质点法程序的实现方式以及程序编制注意的问题做了介绍，并给出了对程序进行考核的几个算例。

有限元在求解超高速碰撞问题时，在大变形区域不可避免的会出现网格畸变的问题，针对这一困难，借鉴物质点法的思想，在第 4 章，提出了物质点有限元法（Material Point Finite Element Method，MPFEM）。在大变形区域引入背景网格，采用物质点法来计算，而没有背景网格覆盖的区域仍用有限元计算。利用 Taylor 杆问题的模拟说明了物质点有限元法相对有限元法的优势，在超高速碰撞问题的模拟中，物质点有限元法可成功的模拟出碎片云的效果。

数值断裂是无网格法数值模拟中经常出现的一个问题。为了避免在 MPM 模拟中非物理的数值断裂出现，在第 5 章中，提出自适应分裂质点方案。将质点自适应的 MPM 应用于激波管、爆轰驱动飞片以及聚能射流等爆炸冲击问题的模拟。

MPM 和 SPH 是两种在模拟超高速碰撞和爆炸问题有较好表现的两种方法，在第 6 章，对这两种方法在模拟超高速碰撞问题中的表现进行了考查和比较。从影响点搜索、形函数特点、稳定性、时间积分、边界条件和接触算法等方面对两种方法进行了比较，并通过算例进行说明和分析。

第 2 章　物质点法的基本原理

本章介绍物质点法的基本原理和实现过程。物质点法将连续体离散成若干质点，如图 2.1 所示。这些质点携带所有物质信息，其运动代表了物质的变形和运动。背景网格用于动量方程的求解和空间导数的计算，可以固定也可以自由布置。在每一个时间步中，首先将物质点和背景网格完全固连，在网格结点建立并求解动量方程，之后再映射回物质点，得到下一时刻物质点所携带的物质信息。这一步物质点和网格结点一同变形，没有相对运动，是拉格朗日求解，所以避免了欧拉法中处理对流项的困难。在下一时间步中，变形后的背景网格被抛弃，仍采用未变形的背景网格，物质信息被映射到网格结点，从而避免了拉格朗日法中因网格畸变而产生的数值困难。

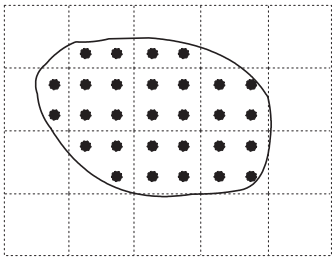


图 2.1　物质点法示意图，实线为连续体，圆点为离散后的物质点，虚线是背景网格

2.1　控制方程和离散

根据参考构型选择的不同，拉格朗日法可以分为两类，更新拉格朗日（Updated Lagrangian formulation，UL）和完全拉格朗日（Total Lagrangian formulation，TL）[139]。它们都使用拉格朗日描述，即相关物理量都看做是物质坐标 X_i 和时间 t 的函数。在 TL 中，取初始构型为参考构型，物理量也对物质坐标 X_i 求导。而在 UL 中，取现时构型为参考构型，物理量都是对空间坐标 x_i 求导。这两种格式可以相互转化，一般根据需要选择更方便的格式。通常在两种格式中，会选择不同的应力和应变度量，一般在 TL 中应变用全应变表达，在 UL 中，应变由应变率表达，使用率形式的本构方程。

采用更新拉格朗日描述，用柯西应力张量 σ_{ij} 和 变形率张量 D_{ij} 描述应力和应变率，连续体运动的控制方程为

$$\text{质量守恒：}\rho(X_i,t)J(X_i,t)=\rho_0(X_i) \tag{2-1}$$

$$\text{动量方程：}\sigma_{ij,j}+\rho f_i=\rho\ddot{u}_i \tag{2-2}$$

$$\text{能量方程：}\dot{E}=JD_{ij}\sigma_{ij}=Js_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}-Jp\dot{\varepsilon}_{kk} \tag{2-3}$$

$$\text{本构关系：}\sigma_{ij}^{\nabla}=S(D_{ij},\sigma_{ij},\cdots) \tag{2-4}$$

$$\text{变 形 率：}D_{ij}=\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i}) \tag{2-5}$$

边界条件为

$$\sigma_{ij}n_j=t_i(t)\quad\forall x_i\in\Gamma_t \tag{2-6}$$

$$v_i(X_i,t)=\bar{v}_i(t)\quad\forall x_i\in\Gamma_v \tag{2-7}$$

初始条件为

$$\dot{u}(X_i,0)=\dot{u}_0(X_i)\quad u(X_i,0)=u_0(X_i) \tag{2-8}$$

其中，下标 i,j 表示空间坐标分量，应用 Einstein 求和约定，即重复指标在其取值范围内求和。σ_{ij} 是 Cauchy 应力，ρ是当前密度，f_i 是体力密度，$v_i=\dot{u}_i$ 是速度，$\ddot{u}_i$ 是加速度。J 是变形梯度矩阵的行列式，可用来表示变形过程中体元的体积变化。$\dot{E}$ 是单位体积内能的变化率，

$$s_{ij}=\sigma_{ij}+p\delta_{ij} \tag{2-9}$$

是偏应力张量，δ_{ij} 是 Kronecker 符号，

$$p=-\frac{1}{3}\sigma_{kk} \tag{2-10}$$

是压力，为应力球量的相反数。σ_{ij}^{∇} 是 Jaumann 应力率。Γ_t 和 Γ_v 分别是力边界和位移边界，n_j 是单位外法线方向。

在 MPM 中，每个质点携带的质量在运动过程中保持不变，因此质量守恒自动满足。

动量方程的等效积分弱形式为

$$\delta\Pi = \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i \mathrm{d}V + \int_V \rho \sigma_{ij}^s \delta u_{i,j} \mathrm{d}V - \int_V \rho f_i \delta u_i \mathrm{d}V - \int_{\Gamma_t} t_i \delta u_i \mathrm{d}\Gamma = 0 \quad (2\text{-}11)$$

其中 $\sigma_{ij}^s = \sigma_{ij}/\rho$ 是比应力，δu_i 是虚位移。

由于质点和背景网格固结在一起，质点位移 u_{pi} 及其导数 $u_{pi,j}$ 可利用背景网格上的 标准有限元形函数由结点位移 u_{gi} 及其导数 $u_{gi,j}$ 插值而得

$$u_{pi} = \sum_{g=1}^{8} N_{pg} u_{gi} \quad (2\text{-}12)$$

$$u_{pi,j} = \sum_{g=1}^{8} N_{pg,j} u_{gi} \quad (2\text{-}13)$$

其中下标 p 表示质点携带的变量，下标 g 表示背景网格结点携带的变量，$N_{pg} = N_g(x_{pi})$ 是结点 g 的形函数在 x_{pi} 点的取值。对三维问题，采用以正六面体为单元的正交背景网格，如果质点在六面体内，形函数为：

$$N_g = \frac{1}{8}(1+\xi\xi_g)(1+\eta\eta_g)(1+\zeta\zeta_g), \quad g = 1, 2, \cdots 8 \quad (2\text{-}14)$$

其中 (ξ, η, ζ) 是质点在六面体内的自然坐标，ξ_g, η_g 和 ζ_g 根据不同结点 g 取值 ± 1。如果质点在六面体外，$N_g = 0$。

质点质量集中于一点，故密度 ρ 可写为

$$\rho(x_i) = \sum_{p=1}^{n_p} M_p \delta(x_i - x_{pi}) \quad (2\text{-}15)$$

其中 n_p 是物质点总数，M_p 是物质点 p 的质量，δ 是Dirac δ，x_{pi} 表示物质点 p 的坐标。

将公式 (2-12)，(2-13) 和 (2-15) 带入弱形式 (2-11) 并考虑到 δu_{hi} 的任意性有

$$\dot{p}_{hi} = f_{hi}^{\mathrm{int}} + f_{hi}^{\mathrm{ext}}, \quad h = 1, 2, \cdots, n_g \quad (2\text{-}16)$$

其中 n_g 网格结点总数，

$$p_{hi} = \sum_{g=1}^{n_g} m_{hg} \dot{u}_{gi} \quad (2\text{-}17)$$

是第 h 个网格结点 i 方向的动量。$m_{hg}=\sum_{p=1}^{n_p}M_pN_{ph}N_{pg}$ 是质量矩阵，如果采用集中质量阵 $m_h=\sum_{p=1}^{n_p}M_pN_{ph}$，动量 p_{hi} 可简化成

$$p_{hi}=m_h\dot{u}_{hi} \tag{2-18}$$

另外，

$$f_{hi}^{\text{int}}=-\sum_{p=1}^{n_p}V_pN_{ph,j}\sigma_{pij} \tag{2-19}$$

和

$$f_{hi}^{\text{ext}}=\sum_{p=1}^{n_p}M_pN_{ph}f_{pi}+\sum_{p=1}^{n_p}M_pN_{ph}t_{pi}^{s}h^{-1} \tag{2-20}$$

分别是内力和外力，其中 V_p 是质点体积，$t_{pi}^{s}=t_{pi}/\rho$，h 是边界厚度，$\sigma_{pij}=\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}_p)$，$f_{pi}=f_i(\boldsymbol{x}_p)$。

2.2　时间积分

爆炸冲击问题中的载荷时间短、变化快，而且需要考虑应力波的作用，一般多采用显式积分求解[10]。时间积分采用可变步长的中心差分

$$p_{hi}^{n+1/2}=p_{hi}^{n-1/2}+(f_{hi}^{\text{int},n}+f_{hi}^{\text{ext},n})\Delta t^n \tag{2-21}$$

其中上标“n”、“$n-1/2$”和“$n+1/2$”分别表示 t^n 、$t^{n-1/2}$ 和 $t^{n+1/2}$ 时刻的值，$\Delta t^{n+1/2}=t^{n+1}-t^n$，$\Delta t^n=t^{n+1/2}-t^{n-1/2}=\frac{1}{2}(\Delta t^{n-1/2}+\Delta t^{n+1/2})$，如图 2.2 所示。

质点的位置和速度由下式更新

$$x_{pi}^{n+1}=x_{pi}^{n}+\sum_{h=1}^{n_g}\frac{p_{hi}^{n+1/2}}{m_h^n}N_{ph}^n\Delta t^{n+1/2} \tag{2-22}$$

$$v_{pi}^{n+1/2}=v_{pi}^{n-1/2}+\sum_{h=1}^{n_g}\frac{f_{hi}^{n}}{m_h^n}N_{ph}^n\Delta t^{n} \tag{2-23}$$

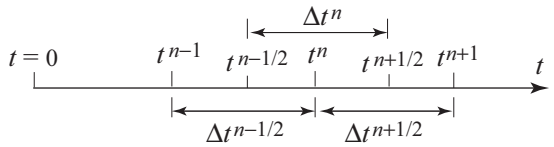


图 2.2　可变步长的中心差分

其中$f_{hi}^n = f_{hi}^{\text{int},n} + f_{hi}^{\text{ext},n}$。

在显式积分中，为保证数值稳定性，CFL（Courant－Friedrichs－Lewy）条件要求在一个时间步内，任何信息移动的距离不能超过一个网格。在 MPM 模拟中，采用在空间固定的背景网格并在网格结点上进行时间积分，所以在确定临界时间步长时，与采用拉格朗日网格的方法不同，除了声速还需要考虑质点速度[140]。特别是在超高速碰撞问题中，质点速度和材料声速处于同一量级，影响不可忽略。故在 MPM 模拟中，临界时间步长 Δt_{cr} 的计算应采取

$$\Delta t_{\text{cr}} = \min_e \frac{d_c}{c + |u|} \tag{2-24}$$

其中 d_c 是背景网格的结点间距，u 是质点速度，c 是声速。声速是扰动传播的速度，对于显式动力学程序而言，材料中的最大声速也是确定临界时间步长的主要依据。

无论固体还是流体，材料的绝热声速（Adiabatic sound speed）均可统一的表示为[26]

$$c = \left(\frac{4G}{3\rho} + \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_S \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2-25}$$

其中下标“S”表示等熵。

材料的压力 p 是密度 ρ 和单位初始体积内能 E 的函数，即 $p = p(\rho, E)$，因此有

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_S = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_E + \left.\frac{\partial p}{\partial E}\right|_\rho \left.\frac{\partial E}{\partial \rho}\right|_S \tag{2-26}$$

由热力学第一定律，对于等熵过程有 $\mathrm{d}E = -p\mathrm{d}V$，故

$$\left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_S = -p \tag{2-27}$$

其中 $V = v/v_0$ 是相对体积。利用关系式 $\rho V = \rho_0$ 可得

$$\left.\frac{\partial E}{\partial \rho}\right|_S = \left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_S \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho} = \frac{pV^2}{\rho_0} \tag{2-28}$$

材料的声速最终可写为：

$$c = \left(\frac{4G}{3\rho} + \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_E + \frac{pV^2}{\rho_0}\left.\frac{\partial p}{\partial E}\right|_\rho\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2-29}$$

对于线弹性材料，$p = -K\ln V$，故有

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_S = \left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_S \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho} = \frac{K}{\rho} \tag{2-30}$$

其中

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{2-31}$$

为体积模量，这里的 E 是弹性模量，ν 为泊松比。将 (2-30) 式代入声速表达式 (2-25) 中，可得线弹性材料的声速为：

$$c = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} \tag{2-32}$$

对于其他材料，需要考虑状态方程，根据压力和密度之间的关系由 (2-29) 式来计算其声速。

2.3　求解格式

根据具体计算步骤的不同，物质点法可有不同的实现格式。

Sulsky 等[41]建议在具体格式的推导中尽可能使用动量而不是速度，Nairn[89]指出其关键在于计算质点应变前对速度的处理。Bardenhagen[141]讨论了在 MPM 中时间步开始或结束时更新应力这样两种格式对能量守恒情况的影响，并将这两种格式分别称为 USF（Update Stress First）和 USL（Update Stress Last）。Nairn[89]对几种不同的应力更新方式（USF、USL、MUSL、USAVG）进行了总结和讨论。

为了更新应力，利用更新后的网格结点速度得到质点上的应变率 $\dot{\varepsilon}_{pij}$

$$\dot{\varepsilon}_{pij}^{n+1/2}=\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{8}\left(v_{hi}^{n+1/2}N_{ph,j}^{n}+v_{hj}^{n+1/2}N_{ph,i}^{n}\right) \tag{2-33}$$

其中网格结点的速度 $v_{hi}^{n+1/2}$ 的计算方法不同，决定了不同的格式：

（1）USL 格式直接用结点动量来计算结点速度：$v_{hi}^{n+1/2}=p_{hi}^{n+1/2}/m_{hi}^{n}$。

（2）MUSL（Modified USL）格式是对 USL 格式的改进，它利用质点动量映射回网格结点来计算结点速度：$v_{hi}^{n+1/2}=\sum_{p=1}^{n_p}M_p v_{pi}^{n+1/2}N_{ph}^{n}/m_h^n$

（3）USF 格式在每个时间步的计算中首先计算应变率并更新应力，即利用更新前的结点动量 $p_{hi}^{n-1/2}$ 计算结点速度 $v_{hi}^{n-1/2}$，代入 (2-33) 式得到 $\dot{\varepsilon}_{pij}^{n-1/2}$。

MUSL 和 USF 格式基本相同，区别只在于映射得到结点速度时形函数不同：MUSL 使用 N_{ph}^{n}，而 USF 使用 N_{ph}^{n+1}。Bardenhagen 的研究表明[141]，USL 具有较强的数值耗散，而 USF 具有较好的能量守恒性。本文中的计算均采用 MUSL 格式。

2.4　广义插值物质点法

在 MPM 中，当变形过程中质点穿过背景网格时，会出现应力的震荡，被称为跨网格噪音（cell-crossing noise）。这主要是由于采用线性形函数的背景网格导致背景网格形函数的导数在网格间不连续造成的。

针对这一问题，Bardenhagen 等[84] 基于Petrov-Galerkin 离散方案对 MPM 进行推广，发展了广义插值的物质点法（Generalized Interpolation Material Point method，GIMP）。

GIMP 基于 Petrov-Galerkin 离散方案，通过选择不同的试探函数和形函数，定义了一类方法。引入质点特征函数 $\chi_p(x)$，物理量的近似可以写成

$$f(x)=\sum_{p}f_p\chi_p(x) \tag{2-34}$$

其中下标 p 表示质点携带的变量。采用式 (2-34) 表示密度和应力，并且将位移 (2-13) 代入到等效积分弱形式 (2-11)，就可以得到和 (2-16) 类似的动量方程。于

是经典 MPM 中的 N_{hp} 和 $N_{hp,j}$ 被替换为

$$S_{hp} = \frac{1}{V_p}\int_{\Omega_p \bigcap \Omega} \chi_p(x) N_h(x) \mathrm{d}\Omega \tag{2-35}$$

$$S_{hp,j} = \frac{1}{V_p}\int_{\Omega_p \bigcap \Omega} \chi_p(x) N_{h,j}(x) \mathrm{d}\Omega \tag{2-36}$$

当采用不同的质点特征函数和背景网格形函数作为试探函数和权函数，就可以得到不同的 GIMP 方法。如果采用 Delta 函数作为质点特征函数，即

$$\chi_p(x) = \delta(x - x_p)V_p \tag{2-37}$$

以及有限元形函数 (2-14) 作为背景网格形函数，就退化为经典的 MPM。如果采用下式作为质点特征函数

$$\chi_p(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega_p \\ 0 & x \notin \Omega_p \end{cases} \tag{2-38}$$

就意味着一个质点代表一块连续的物质，就得到了所谓连续质点 GIMP 方法[84]。对于一维问题，假设初始时一个网格中布置两个质点，并且假设在变形过程中质点的大小保持不变，那么式 (2-35) 可以简化为

$$S(\xi) = \begin{cases} \dfrac{7 - 16\xi^2}{8} & \xi \leqslant 0.25 \\ 1 - \xi & 0.25 < \xi \leqslant 0.75 \\ \dfrac{(5 - 4\xi)^2}{16} & 0.75 < \xi \leqslant 1.25 \\ 0 & \xi > 1.25 \end{cases} \tag{2-39}$$

其中 $\xi = |(x_p - x_h)/d_c|$，d_c 是网格长度。对三维问题而言，$S_{hp}(x) = S(\xi)S(\eta)S(\zeta)$。这种简化的连续质点 GIMP 方法和采用 Delta 函数作为质点特征函数并且用 (2-39) 作为网格形函数是等效的，这种形函数如图 2.3 所示。

和经典 MPM 中 C^0 连续的形函数相比，GIMP 中的形函数具有连续的导数，尽管增加了计算量，但在精度和稳定性上有了很大的改善，质点经过网格时的数值噪声也得以被控制[84,142]。

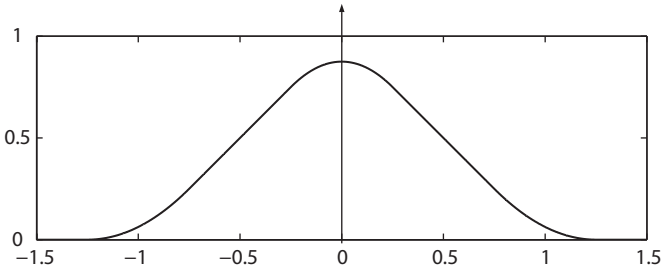


图 2.3　GIMP 形函数

2.5　接触算法

从MPM的计算步骤可以看出，质点速度由网格结点映射而来，因而速度场具有单值性，物质点法自动满足无滑移的接触条件。对于超高速碰撞等问题，物质界面的滑移可以忽略，直接应用 MPM 可以高效的进行分析，并且接触面不会发生穿透。针对低速问题，这种自动满足的接触条件使物体难以分离，并且无法相互滑动，需要对接触加以考虑。

York 等[85]和 Bardenhagen 等[86,87]分别提出了接触判断方法以及允许分离的接触释放算法。Hu 等提出了多重网格来实现接触算法[88]。他们的接触算法原理近似，都是利用网格结点上的速度信息来设定接触判据。如图 2.4 所示。物体 r 和 s 发生接触，对 r 而言，发生接触的判据为：

$$(v_{hi}^r - v_{hi})n_{hi}^r > 0 \tag{2-40}$$

其中 n_{hi}^r 是物体 r 在结点 h 的单位外法线方向，法线方向可以通过计算物体的质量梯度得到。v_{hi} 为考虑所有物体时计算得到的结点速度，而 v_{hi}^r 表示只考虑物体 r 时映射到结点的速度。当发生接触时，需要调整速度以满足无嵌入条件，并且设置法向接触力为

$$f_h^r = -m_h^r[(v_{hi}^r - v_{hi})n_{hi}^r]/\Delta t \tag{2-41}$$

Nairn[89]在此基础上改进接触算法用于处理裂纹表面的自接触。Pan等[90]对接触力的计算方法进行了改进，要求加速度和速度均显式的满足接触条件，使能量守恒得到更好的满足。

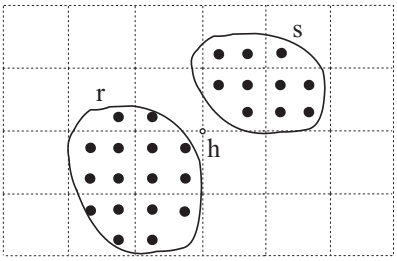


图 2.4　两物体接触示意图

2.6　小结

本章对物质点法的基本理论和实现过程进行了介绍。首先叙述了所采用的控制方程和物质点法的离散方案，讨论了不同求解格式的区别。然后介绍了对物质点法进行扩展的广义插值物质点法的思路，最后对物质点法接触算法的进展作了简要介绍。

第 3 章　冲击爆炸的基本理论和程序编制

冲击爆炸问题的研究是涉及多个学科的交叉领域。材料和结构在强载荷下，特别是快速变化载荷作用下，变形过程具有高应变率、高温、高压的特点，一般可认为是绝热过程。

一些国内外的著作或译本，对冲击爆炸相关的问题的研究做了全面的介绍[27,143,144]，对爆炸力学的应用[145]和相关理论[2,146–149]，爆炸力学数值模拟的相关技术[7,21]也有系统的阐述。本章主要对程序实现涉及到的相关理论作简要叙述，并对程序编制中的一些问题进行讨论。

3.1　冲击波

冲击波也叫激波，可以简单的定义为压力、温度（内能）和密度的间断。在一定条件下，固体和流体中均会产生冲击波。常规爆炸产生的压力可高达 50 GPa[143]，是大多数固体材料屈服应力的几十倍。因此对于固体而言，当载荷大大超过材料的动态屈服强度时，静水压力可能远大于剪切应力。此时对固体中冲击波的研究方法和对流体的是一样的。

冲击波的数学处理方法最初是 Rankine 和 Hugoniot 研究流体而提出的[143]。为了对冲击波进行分析，作出以下基本假设：冲击波是个间断，没有明显厚度；材料剪切模量为零，没有弹塑性行为，不发生相变；绝热，忽略热传导。

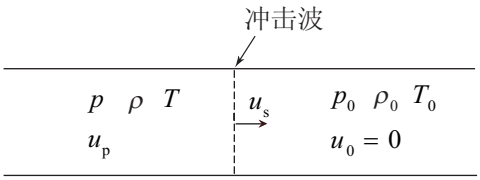


图 3.1　冲击波波阵面示意图

考查一维应变下的冲击波，即正冲击波。冲击波的波阵面及其前后区域，如图 3.1 所示。在波阵面前，压力为 p_0、密度为 ρ_0、温度为 T_0。在波阵面后压力为 p、密度为 ρ、温度为 T。波阵面的速度为 u_s，波阵面前粒子静止，速度

$u_0 = 0$，波阵面上和波阵面后的粒子以速度 u_p 运动。以冲击波的波阵面为参考系，经过 $\mathrm{d}t$ 时间，单位面积上从右侧流入的质量为 $\rho_0 u_s \mathrm{d}t$，被压缩后的物质从左侧流出的质量为 $\rho(u_s - u_p)\mathrm{d}t$。根据质量守恒，有

$$\rho_0 u_s = \rho(u_s - u_p) \tag{3-1}$$

动量变化为 $\rho(u_s - u_p)\mathrm{d}t u_p = \rho_0 u_s \mathrm{d}t u_p$，压力的总冲量为 $(p - p_0)\mathrm{d}t$，根据动量守恒定理，有

$$p - p_0 = \rho_0 u_s u_p \tag{3-2}$$

能量守恒要求 p 所做的功等于波阵面两边总能量的差

$$p u_p = \frac{1}{2}\rho(u_s - u_p)u_p^2 - e_0\rho_0 u_s + e\rho(u_s - u_p) \tag{3-3}$$

其中 e 是单位质量的内能。将质量守恒方程 (3-1) 式代入，得到能量守恒方程

$$p u_p = \frac{1}{2}\rho_0 u_s u_p^2 + \rho_0 u_s(e - e_0) \tag{3-4}$$

式 (3-1)、(3-2) 和 (3-4) 就是冲击波波阵面前后应该满足的三个守恒方程。

从质量守恒方程 (3-1) 和动量守恒方程 (3-2) 中消去 u_p，并引入比容 $v = 1/\rho$，可得到

$$\rho_0^2 u_s^2 = \frac{p - p_0}{v_0 - v} \tag{3-5}$$

上式描述了在 $p - v$ 平面上，斜率为 $-\rho_0^2 u_s^2$ 的一条直线，这条线被称为 Rayleigh 线。$(p - p_0)/(v - v_0)$ 是 Rayleigh 线的斜率，可以看出，这个斜率和冲击波速度 u_s 的平方成正比。

利用 (3-5) 式和动量守恒 (3-2) 式，将能量守恒方程 (3-4) 式中的 u_p 和 u_s 消去，可以导出能量守恒方程的另一种形式

$$e - e_0 = \frac{1}{2}(p + p_0)(v_0 - v) \tag{3-6}$$

这个方程被称为 Rankine-Hugoniot 方程。对给定的状态方程 $p = p(v, e)$，可将式 (3-6) 中的 e 消去，于是得到 $p - v$ 平面上的曲线，称为 Hugoniot 曲线[21]，也叫冲击绝热线[150]，需要注意的是，Hugoniot 线是一条由实验数据确定的状

态线，而不是过程线。即它不代表某一冲击过程中压强随比容的变化，而是代表在同一初态对材料进行一系列不同强度的冲击压缩达到的不同末态。因此 Hugoniot 线上的每一个点代表一个冲击压缩状态，Hugoniot 线实质上描述的是材料的特性。如图 3.2 所示，对于一次初始于 (p_0, v_0) 的加载过程，可认为加载路径沿 Rayleigh 线达到终态 (p_H, v_H)，这表示穿过非平衡态是瞬间完成的。这一过程能量的变化由 (3-6) 式 给出。忽略热传导，卸载沿等熵线，固体材料的等熵线和 Hugoniot 线很接近，当卸载到初始压力时，材料相对初始状态体积膨胀且温度升高[27,143]。

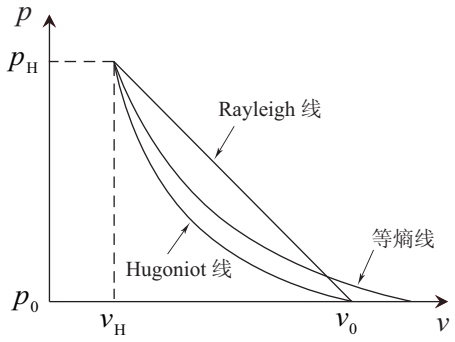


图 3.2　典型的 Hugoniot 线和等熵线

上述守恒方程中有五个变量需要处理：压力 p、能量 e、密度 ρ（比容 v）、质点速度 u_p 和冲击波速度 u_s，还需进一步补充方程才能求解。冲击波速度 u_s 和质点速度 u_p 的关系可由实验确定，一般可表示成如下的多项式方程

$$u_s = C_0 + S_1 u_p + S_2 u_p^2 + \cdots \tag{3-7}$$

其中 S_1 和 S_2 是拟合的参数，C_0 是压力为 0 时材料中的声速，它们都可以通过拟合（u_s, u_p）实验数据得到。实验表明，大多数金属材料在没有发生相变时，冲击波速度 u_s 和粒子速度 u_p 间近似满足线性关系，因此，式 (3-7) 就简化为：

$$u_s = C_0 + S_1 u_p \tag{3-8}$$

联立方程 (3-1)、(3-2) 和 (3-8)，消去 u_p 和 u_s，可以得到如下压力和比容之间的关系

$$p = p_0 + \frac{\rho_0 c_0^2 (1 - v/v_0)}{[1 - S_1(1 - v/v_0)]^2} \tag{3-9}$$

3.2　爆轰

炸药的化学反应可分为三种[2]，第一种是缓慢的热分解，反应速率慢，难以察觉；第二种为燃烧，反应界面以亚声速（对炸药来说）推进；第三种为爆炸，反应界面以超声速（对炸药来说）推进，理论界也称为爆轰。

3.2.1　爆轰波的CJ理论

爆轰波是沿爆炸物传播的一种伴随有高速化学反应的强冲击波，炸药在爆轰波的强冲击下引起高速化学反应，将炸药转化为高温高压的气体爆轰产物，化学反应释放的能量又支持对后面的炸药进行冲击压缩，因此爆轰波可以不衰减的传播下去[2,148,149]。

Chapman 和 Jouguet 于 20 世纪初各自独立提出了关于爆轰波的平面一维流体动力学理论（简称为爆轰波的 CJ 理论），将爆轰波中的化学反应区近似为一个强间断面，认为化学反应在无限薄的波阵面上完成，且不考虑热传导、热辐射和耗散效应，从而可以用流体力学方法处理爆轰波，而不必考虑化学反应的过程。爆轰反应区的宽度一般为 10^{-7}m 量级[2]，远小于炸药装药尺寸；爆轰波通过化学反应区的时间为 10^{-7}s 量级，因此将反应区近似为一个强间断面是合理的。

爆轰波是强冲击波，因此 3.1 节中关于冲击波的三个守恒方程以及其他规律在这里都适用，只要把冲击波速度 u_s 替换为爆轰波的波速 D，并在能量方程计入爆轰所释放的化学能，即：

$$\rho_0 D = \rho(D - u_p) \tag{3-10}$$

$$p - p_0 = \rho_0 D u_p \tag{3-11}$$

$$e - e_0 = \frac{1}{2}(p + p_0)(v_0 - v) + Q_v \tag{3-12}$$

其中 Q_v 是爆轰释放出的单位质量化学能。由式 (3-5) 知，可由 (3-10) 和 (3-11) 推出压力 p 和比容 v 满足的关系式

$$\frac{p - p_0}{v_0 - v} = \rho_0^2 D^2 \tag{3-13}$$

式 (3-13) 在 $p - v$ 平面上为从初始状态 (p_0, v_0) 发出的一系列直线，称为爆轰波

的波速线或 Rayleigh 线，其斜率为 $-\rho_0^2 D^2$，不同斜率的 Rayleigh 线对应不同的爆速 D。

式 (3-10)、(3-11) 和 (3-12) 是由三个守恒方程建立的爆轰波基本关系式，再加上爆轰产物的状态方程，共有四个方程。为了确定五个描述爆轰波状态的参数：p、ρ、u、e 和 D，还需补充一个方程。Chapman 和 Jouguet 通过研究爆轰波在炸药中稳定传播的条件，建立了第五个方程，即爆轰波稳定传播的 CJ 条件。

由于有反应热 Q_v 放出，爆轰产物的 Hugoniot 线在原始炸药 Hugoniot 线的右上方，如图 3.3 所示。过初始状态点 $O(p_0, v_0)$ 做两条 Rayleigh 线，水平线 OB（爆速 $D=0$）和竖直线 OA（爆速 $D=\infty$），可将爆轰产物的 Hugoniot 线分为三段：MA 段、AB 段和 BL 段。在 AB 段中，$p>p_0$，$v>v_0$，由式 (3-13) 知爆速 D 为虚数，没有物理意义，所以 AB 段不是实际爆轰的状态，在图 3.3 中用虚线表示。在 B 点，$p=p_0$，$v>v_0$，$D=0$，该点对应于定压燃烧状态。在 BL 段，爆速 D 为正实数，由 (3-10) 知 $u_p=D(v_0-v)/v_0<0$，即波后粒子速度方向于波速相反，因此 BL 段对应于燃烧过程，称为爆燃分支。在 A 点，$p>p_0$，$v=v_0$，$D=\infty$，对应于定容爆轰。在 AM 段，$p>p_0$，$v<v_0$，爆速 D 和粒子速度 u_p 均大于零，波速和粒子速度方向相同，对应于爆轰状态，AM 段称为爆轰分支。

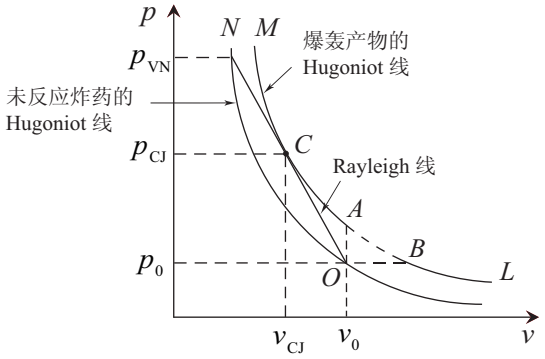


图 3.3　Hugoniot 线

从图 3.3 可以看到，以爆速 D 传播的爆轰波，波阵面前的未反应炸药在遭受冲击而尚未发生化学反应时，其状态由初始点 $O(p_0, v_0)$ 突跃到 Rayleigh 线和 Hugoniot 线的交点，该点对应压力为 von Neumann 压力峰 p_{VN}。在化学反应完成后，爆轰产物的状态必定在 Rayleigh 线和爆轰产物 Hugoniot 线的交点或切

点。爆速不同，爆轰产物达到的状态点也不同，爆轰产物的 Hugoniot 线就是初态为 (p_0, v_0) 的炸药经过不同强度爆轰波传过后所有可能终态 (p, v) 的集合。Chapmann 和 Jouguet 的理论研究指出，爆轰产物的状态必须位于Rayleigh 线和爆轰产物 Hugoniot 线的切点，即图 3.3 中的 C 点，爆轰波才能定常传播。C 点称为 CJ 点，与该点对应的状态称为 CJ 状态，相应的物理量用下标 CJ 表示。CJ 点对应的爆速等于爆轰产物的当地声速 C 与粒子速度 u_p 之和，即

$$D = (u_p)_{\mathrm{CJ}} + C_{\mathrm{CJ}} \tag{3-14}$$

上式称为 CJ 条件。满足 CJ 条件时，爆轰波阵面后的稀疏波就赶不上爆轰波，因此爆轰波反应区内释放出的能量不会损失，而全部用来支持爆轰波定常传播。可以证明[148,149]，图 3.3 中的 C 点是 Rayleigh 线、Hugoniot 线和等熵线的公切点。

引入爆轰产物状态方程后就可以确定爆轰参数，记

$$k = -\left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln v}\right)_s = -\frac{v}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s \tag{3-15}$$

由过 C 点的等熵线与 Rayleigh 线的相切条件有

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = \frac{p_{\mathrm{CJ}} - p_0}{v_0 - v_{\mathrm{CJ}}} \tag{3-16}$$

将式 (3-16) 代入式 (3-15) 并忽略初始压力 p_0，可得

$$\frac{v_0}{v_{\mathrm{CJ}}} = \frac{k+1}{k}, \quad \rho_{\mathrm{CJ}} = \frac{k+1}{k}\rho_0 \tag{3-17}$$

将上式代入 (3-13) 式和质量守恒方程 (3-10)，可得 CJ 状态的压力和质点速度：

$$p_{\mathrm{CJ}} = \frac{1}{k+1}\rho_0 D^2 \tag{3-18}$$

$$(u_p)_{\mathrm{CJ}} = \frac{1}{k+1}D \tag{3-19}$$

如果已知炸药的 ρ_0、D 和 爆轰产物的参数 k，就可以得到爆轰波 CJ 点的参数。参数 k 和状态方程有关。考虑多方过程

$$pv^{\gamma} = \text{常数} \tag{3-20}$$

式中 γ 称为多方指数，γ 值不同代表不同的过程。$\gamma=0$ 是等压过程，$\gamma=1$ 是等温过程，$k=\infty$ 时，是等容过程，$\gamma=C_p/C_v$ 是等熵过程，此时 γ 为绝热指数（也称等熵指数或比热比）。炸药爆炸产物的膨胀过程本身就是一种多方过程，高压下 k 近似等于 3，随着膨胀进行，k 逐渐减小，常压下近似等于 1.4。

对式 (3-20) 两边取自然对数并微分后代入式 (3-15) 中，可得

$$k=-\frac{v}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s=\gamma \tag{3-21}$$

CJ 模型与真实爆轰过程有一定差别，但在工程上还是得到了广泛的应用，取得较好效果。一个重要的原因是，炸药的状态方程通常是半理论半经验的，其参数也往往由实验确定，这样通过调整状态方程参数，可以使计算结果和实验结果符合的很好。实际上是在调整状态方程参数时把 CJ 理论的误差也“修正”了[2]。为了更好的描述爆轰波阵面上的化学反应区，20 世纪 40 年代，苏联科学家 Zeldovich、美国科学家 von Neumann 和德国科学家 Doring 在 CJ 模型的基础上，分别独立提出了简单的爆轰波结构模型（ZND模型），认为化学反应不是瞬时完成，而是在具有一定厚度的区域内按一定反应率完成的。ZND 模型比 CJ 模型更真实的反映了爆轰波的结构。

3.2.2　爆轰的数值模拟

爆轰是流体力学和化学反应动力学相互耦合的一种复杂过程。对爆轰的数值模拟就是要用计算机求解这一耦合的方程组，以正确反映这一爆轰过程[147]。要准确的模拟爆轰中的化学反应动力学过程非常困难，通常只采用一些唯象的模型。除三个守恒方程之外，还需要加入化学反应速率方程

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=F(p,e,\lambda) \tag{3-22}$$

和状态方程

$$p=p(\rho,e,\lambda) \tag{3-23}$$

采用反应率函数后，状态方程变为

$$p=\lambda p_{\mathrm{eos}} \tag{3-24}$$

其中 λ 为反应率函数，在 0 到 1 之间变化，p_{eos} 为爆轰产物状态方程计算得到的压力。爆轰后，化学能作为初始能量 E_0，加入到爆轰产物的状态方程中。

定常爆轰的反应率函数处理起来较为简单，最早使用的反应率函数是 Wilkins 函数[147]，也称为程序燃烧[21,26]

$$\lambda_1 = \begin{cases} \dfrac{(t-t_L)D}{1.5h} & t > t_L \\ 0 & t \leqslant t_L \end{cases} \tag{3-25}$$

其中 t 是当前时间，t_L 是点火时间，D 是爆速，h 为特征尺寸，在有限元中一般取为单元的最小宽度，在物质点法模拟中取为网格间距 d_c。系数 1.5 参考 LS-DYNA[26]，实际给出了冲击波波阵面（反应区）的宽度，使得波阵面上变量可以连续而不是一个间断。不同的单元或质点拥有不同的点火时间 t_L 值，它反映了爆轰波以爆速 D 从起爆点传播到该单元或质点需要的时间，如果定义了多个起爆点，则 t_L 由最近的起爆点确定。

另一种反应率函数是 CJ 比体积燃烧函数[147]，或称为 β 燃烧函数[26]：

$$\lambda_2 = \beta(1-V) \tag{3-26}$$

其中

$$\beta = \frac{\rho_0 D^2}{p_{\text{CJ}}} = \frac{1}{1-V_{\text{CJ}}} = \gamma + 1 \tag{3-27}$$

p_{CJ}为 CJ 压力，$V = v/v_0$ 是相对体积，V_{CJ} 为 CJ 点的相对体积。这个函数反映了爆轰波传到之处，炸药开始受压，比体积下降，$\lambda > 0$，从而使化学反应被触发。

以上两种反应率函数经常配合使用[21]，即取

$$\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2) \tag{3-28}$$

非定常爆轰的反应率函数可以部分反映化学反应的效果，模拟爆轰的引爆和发展过程，可以用于对非理想爆轰的模拟。比较常用的是 Lee-Tarvar 反应率函数，也叫点火成长模型[26,147]。

3.3　应力更新、材料模型和状态方程

3.3.1　人工体积粘性

冲击波导致压力、密度、质点速度、能量在波阵面前后发生突变，为了在计算程序中捕捉冲击波，需要在压力项 p 添加人工体积粘性项[26]，成为 $p+q$。其中的粘性项

$$q=\begin{cases}c_0\rho l_e^2\left(\dot{\varepsilon}_{kk}\right)^2-c_1\rho l_e c\dot{\varepsilon}_{kk} & \dot{\varepsilon}_{kk}<0\\ 0 & \dot{\varepsilon}_{kk}\geqslant 0\end{cases} \tag{3-29}$$

其中 l_e 是特征长度，在 MPM 模拟中取为背景网格结点间距 d_c，$\dot{\varepsilon}_{kk}$ 是体应变率，c 是声速，c_0 和 c_1 无量纲常数，缺省值分别为 1.5 和 0.06[26]。

引入人工粘性 q 后，相当于在系统中引入了阻尼，阻尼比为

$$\xi=-\frac{q}{\rho l_e c_e\dot{\varepsilon}_{kk}}=\frac{Q}{c_e} \tag{3-30}$$

于是有

$$Q=\begin{cases}c_1c_e-c_0l_e\dot{\varepsilon}_{kk} & \dot{\varepsilon}_{kk}<0\\ 0 & \dot{\varepsilon}_{kk}\geqslant 0\end{cases} \tag{3-31}$$

因此，引入人工体积粘性后，临界时间步长为：

$$\Delta t_e=\frac{l_e}{Q+\left(Q^2+c_e^2\right)^{1/2}} \tag{3-32}$$

3.3.2　应力更新算法

积分率形式本构方程的数值算法为应力更新算法[10]。时刻 $t+\mathrm{d}t$ 的应力可通过对应力率 $\dot{\sigma}_{ij}$ 积分得到

$$\sigma_{ij}(t+\mathrm{d}t)=\sigma_{ij}(t)+\dot{\sigma}_{ij}\mathrm{d}t \tag{3-33}$$

由于柯西应力张量的物质导数 $\dot{\sigma}_{ij}$ 受刚体转动影响，不是客观张量，因此在本构关系中应使用 Jaumann 应力率 σ_{ij}^{∇}。柯西应力张量的物质导数 $\dot{\sigma}_{ij}$ 和 Jaumann 应力率 σ_{ij}^{∇} 的关系为：

$$\dot{\sigma}_{ij}=\sigma_{ij}^{\nabla}+\sigma_{jk}\omega_{ik}+\sigma_{ik}\omega_{kl} \tag{3-34}$$

其中

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) \tag{3-35}$$

是旋率张量（spin tensor），是个反对称张量。Jaumann 应力率 σ_{ij}^{∇} 可根据本构关系 (2-4) 式由变形率张量 $D_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$更新。

在显式积分中，程序存储 t^n 时刻的应力 σ_{ij}^n 和 $t^{n+1/2}$ 时刻的旋率张量 $\omega_{ij}^{n+1/2}$，因此 $t^{n+1/2}$ 时刻的应力率 $\dot{\sigma}_{ij}^{n+1/2}$ 可近似表示为

$$\dot{\sigma}_{ij}^{n+1/2} = \sigma_{ij}^{\nabla n+1/2} + \sigma_{jk}^n \omega_{ik}^{n+1/2} + \sigma_{ik}^n \omega_{kl}^{n+1/2} \tag{3-36}$$

利用 (3-33) 式积分可以得到 t^{n+1} 时刻的柯西应力张量

$$\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^n + r_{ij}^n + \sigma_{ij}^{\nabla n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \tag{3-37}$$

其中

$$r_{ij}^n = \left[\sigma_{jk}^n \omega_{ik}^{n+1/2} + \sigma_{ik}^n \omega_{kl}^{n+1/2}\right] \Delta t^{n+1/2} \tag{3-38}$$

柯西应力张量 σ_{ij} 分解为静水压力 p 和偏应力张量 s_{ij} 分别更新。以线弹性材料为例，压力的更新格式为

$$p^{n+1} = p^n - K\dot{\varepsilon}_{kk}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \tag{3-39}$$

其中 K 为体积模量。偏应力更新格式为

$$s_{ij}^{n+1} = s_{ij}^n + (s_{jk}^n \omega_{ik}^{n+1/2} + s_{ik}^n \omega_{kl}^{n+1/2} + 2G\dot{\varepsilon}_{ij}'^{n+1/2}) \Delta t^{n+1/2} \tag{3-40}$$

其中 G 为剪切模量，$\dot{\varepsilon}_{ij}'$ 为偏应变率张量

$$\dot{\varepsilon}_{ij}' = \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} \tag{3-41}$$

在冲击爆炸问题中，压力 p 需要通过状态方程来更新。因为压力一般是体积和内能的函数，在计算压力前，需要先对能量方程 (2-3) 积分，计算 t^{n+1} 时刻的内能

$$\begin{aligned} e^{n+1} &= e^n + V_0 \dot{E}^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \\ &= e^n + V^{n+1/2} s_{ij}^{n+1/2} \Delta\varepsilon_{ij}^{n+1/2} - V^{n+1/2}(p^{n+1/2} + q^{n+1/2}) \Delta\varepsilon_{kk}^{n+1/2} \end{aligned} \tag{3-42}$$

其中 V_0 为质点初始体积，V^n 为质点在 t^n 时刻的体积，

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{n+1/2} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{n+1/2}\Delta t^{n+1/2} \tag{3-43}$$

$$V^{n+1/2} = \frac{1}{2}(V^n + V^{n+1}) \tag{3-44}$$

$$s_{ij}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(s_{ij}^n + s_{ij}^{n+1}) \tag{3-45}$$

考虑到 $V^{n+1/2}\Delta\varepsilon_{kk}^{n+1/2} = V^{n+1} - V^n = \Delta V$，$p^{n+1/2} = (p^n + p^{n+1})/2$，式 (3-42) 可以写成

$$e^{n+1} = e^{*n+1} - \frac{1}{2}\Delta V p^{n+1} \tag{3-46}$$

其中

$$e^{*n+1} = e^n - \frac{1}{2}\Delta V p^n - \Delta V q^{n+1/2} + V^{n+1/2}s_{ij}^{n+1/2}\Delta\varepsilon_{ij}^{n+1/2} \tag{3-47}$$

为 t^{n+1} 时刻内能的估计值。

如果状态方程是线性的，那么计算 t^{n+1} 时刻压力的状态方程可以写成如下形式

$$p^{n+1} = A^{n+1} + B^{n+1}E^{n+1} \tag{3-48}$$

其中 $E^{n+1} = e^{n+1}/V_0$ 是单位初始体积的内能。

将 (3-46) 式代入 t^{n+1} 时刻压力的表达式 (3-48) 中，可得到求解 t^{n+1} 时刻压力的格式为

$$p^{n+1} = \frac{A^{n+1} + B^{n+1}E^{*n+1}}{1 + \frac{1}{2}B^{n+1}\frac{\Delta V}{V_0}} \tag{3-49}$$

其中 $E^{*n+1} = e^{*n+1}/V_0$。由上式求出 t^{n+1} 时刻压力后，可由 (3-46) 式求出 t^{n+1} 时刻的内能 e^{n+1}。

3.3.3　弹塑性模型

描述金属材料的塑性行为通常采用 Von Mises 屈服模型。在 Von Mises 屈服模型中，初始屈服应力和压力无关，因此屈服面在主应力空间中是以

$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ 为轴线的圆柱面。考虑与压力无关的屈服面，加载条件可以写为

$$F(s_{ij},a_k)=f(s_{ij})-\sigma_y(a_k)=0 \tag{3-50}$$

其中 $f(s_{ij})$ 决定了屈服面形状，$\sigma_y(a_k)$ 决定了屈服面的尺寸和平移量，a_k 是度量塑性变形的内变量。工程上通常取等效塑性应变 ε^p 为内变量[151]。

加载曲面演化规律可以很复杂，最常用的两种模型分别是等向强化（isotropic hardening）模型和随动强化（kinematic hardening）模型。对于等向强化情况，圆柱面随着塑性变形的增长而均匀膨胀，始终与初始圆柱面保持几何相似。本文中暂不考虑随动强化的情况。

根据塑性正交法则，塑性应变可由屈服函数求得

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p}=\lambda\frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \tag{3-51}$$

其中 λ 为比例常数，塑性应变增量 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p}$ 垂直于屈服面。

进行应力更新时，首先假定材料仍处于弹性阶段，由 (3-40) 式，偏应力张量的试探值可写为

$${}^{*}s_{ij}^{n+1}=s_{ij}^{R^n}+2G\Delta\varepsilon_{ij}^{\prime\,n+1/2} \tag{3-52}$$

其中

$$s_{ij}^{R^n}=s_{ij}^{n}+(s_{jk}^{n}\omega_{ik}^{n+1/2}+s_{ik}^{n}\omega_{kl}^{n+1/2})\Delta t^{n+1/2} \tag{3-53}$$

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{\prime\,n+1/2}=\dot{\varepsilon}_{ij}^{\prime\,n+1/2}\Delta t^{n+1/2} \tag{3-54}$$

此时有效应力的试探值为

$$s^{*\,n+1}=\left(\frac{3}{2}{}^{*}s_{ij}^{n+1}{}^{*}s_{ij}^{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3-55}$$

如果有效应力试探值 $s^{*\,n+1}$ 大于屈服应力 σ_y^{n+1}，Mises 条件

$$F=\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}-\sigma_y^2\leqslant 0 \tag{3-56}$$

不满足，说明试探应力点落在了屈服面外。此时利用径向返回法将试探应力 ${}^{*}s_{ij}^{n+1}$ 按比例缩小

$$s_{ij}^{n+1}=m{}^{*}s_{ij}^{n+1} \tag{3-57}$$

使其回到屈服面上，其中系数

$$m = \frac{\sigma_y^{n+1}}{s^{*n+1}} \tag{3-58}$$

从总偏应变增量 $\Delta\varepsilon'_{ij}$ 中减去弹性偏应变增量 $(s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^{R^n})/2G$，得到塑性应变增量

$$\Delta\varepsilon_{ij}^p = \Delta\varepsilon'_{ij} - \frac{1}{2G}\left(s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^{R^n}\right) \tag{3-59}$$

由 (3-52) 式知

$$\Delta\varepsilon'_{ij} = \frac{{}^*s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^{R^n}}{2G} \tag{3-60}$$

代入到 (3-59) 式得

$$\Delta\varepsilon_{ij}^p = \frac{{}^*s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^{n+1}}{2G} \tag{3-61}$$

将 (3-57) 式代入到上式得

$$\Delta\varepsilon_{ij}^p = \left(\frac{1-m}{2G}\right){}^*s_{ij}^{n+1} \tag{3-62}$$

利用 (3-55)、(3-58) 和 (3-62) 可求得等效塑性应变增量为

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon^p &= \left(\frac{2}{3}\Delta\varepsilon_{ij}^p\Delta\varepsilon_{ij}^p\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2}{3}\left(\frac{1-m}{2G}\right)^2\frac{2}{3}\left(s^{*n+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{s^{*n+1} - \sigma_y^{n+1}}{3G}\end{aligned} \tag{3-63}$$

对等向强化有

$$\sigma_y^{n+1} = \sigma_y^n + E^p\Delta\varepsilon^p \tag{3-64}$$

其中 E^p 为塑性硬化模量

$$E^p = \frac{EE^t}{E - E^t} \tag{3-65}$$

其中 E^t 为切线模量，E 为弹性模量。

将 (3-64) 式代入 (3-63) 式，可以得到

$$\Delta\varepsilon^p = \frac{s^{*n+1} - \sigma_y^n}{3G + E^p} \tag{3-66}$$

综上，塑性本构模型的计算步骤可总结如下：如果有效应力的试探值 s^{*n+1} 大于屈服应力 σ_y^n，则

1，求解塑性应变增量

$$\Delta\varepsilon^p = \frac{s^{*n+1} - \sigma_y^n}{3G + E^p} \tag{3-67}$$

2，更新塑性应变

$$\varepsilon^{pn+1} = \varepsilon^{pn} + \Delta\varepsilon^p \tag{3-68}$$

3，更新屈服应力

$$\sigma_y^{n+1} = \sigma_y^n + E^p\Delta\varepsilon^p \tag{3-69}$$

4，利用新屈服强度计算比例系数

$$m = \frac{\sigma_y^{n+1}}{s^{*n+1}} \tag{3-70}$$

5，利用径向返回算法使应力点回到屈服面上

$$s_{ij}^{n+1} = m^* s_{ij}^{n+1} \tag{3-71}$$

3.3.4　高应变率下的弹塑性材料模型

大量实验表明，材料的屈服应力会随应变率增大而增大，在冲击爆炸问题中，应变率可以达到 $10^4\mathrm{s}^{-1}$ 或更高，应变率效应是爆炸冲击载荷下材料塑性响应的一个显著特征。

Johnson-Cook 模型[152]考虑了材料在冲击载荷下的应变率强化效应和热软化效应。在 Johnson-Cook 模型中，材料的动态屈服应力表示为

$$\sigma_y = (A + B\varepsilon^n)(1 + C\ln\dot{\varepsilon}^*)(1 - T^{*m}) \tag{3-72}$$

其中 ε 是等效塑性应变，$\dot{\varepsilon}^* = \dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0$ 是 $\dot{\varepsilon}_0 = 1.0\,\mathrm{s}^{-1}$ 下的无量纲的塑性应变率，$T^* = (T - T_{\mathrm{room}})/(T_{\mathrm{melt}} - T_{\mathrm{room}}) \in [0, 1]$ 是无量纲温度。A、B、n、C 和 m 是材料常数，可以通过 Taylor 杆实验来确定。尽管 Johnson-Cook 是个纯经验模型，但由于其简洁有效，描述冲击爆轰载荷作用下的材料行为取得了良好的效果，得到广泛的应用。

Zerilli-Armstrong 材料模型[153]考虑了材料的微观结构，高应变率下的材料相应和其微观结构的演化密切相关，材料的缺陷、裂纹、相变及其相互作用决定了材料的力学性能。Zerilli 和 Armstrong 基于热激活位错理论分析了典型面心立方结构和体心立方结构金属中温度和应变率情况，并注意到两种材料间存在的差异。

对于压力更大和应变率更大的情况，也可以使用 Steinberg 系列的材料模型[154]。当压力大于 10 GPa 的高压和应变率大于 $10^5\ \mathrm{s}^{-1}$ 时[155]，Steinberg 材料模型考虑压力和温度变化对剪切模量和屈服应力产生的影响。

3.3.5　材料的损伤失效模型

材料在冲击爆炸载荷的作用下，不可避免的会发生损伤破坏的现象。材料的动态损伤失效是个复杂的问题，根据不同的载荷方式，不同的材料微观结构，可能发生断裂破坏的模式也不同，进而需要采用不同的损伤失效模型。对材料不同破坏模式的分析足以分别形成几个专题，比如绝热剪切带、层裂等。

最简单并且在数值模拟中最常使用的两种失效模型分别是最大塑性应变模型和最大拉力模型[26]。这两种失效模型的判别准则分别为

$$\varepsilon^{\mathrm{p}} > \varepsilon^{\mathrm{p}}_{\max} \tag{3-73}$$

$$p < p_{\min} \tag{3-74}$$

其中 ε^{p} 是等效塑性应变，$\varepsilon^{\mathrm{p}}_{\max}$ 是最大允许塑性应变，$p_{\min}$ 是最大允许拉力，一般小于零。在这两种失效模型中，当质点一旦满足上述失效准则，则立刻失效，而根据实验观察到的现象，许多材料的失效是有一个演化过程的，在数值模拟中，经常用一个从 0 到 1 逐渐变化的损伤量 D 来表示。

Johnson-Cook 失效模型[156]就是一种用损伤量来描述材料失效过程的模型，在 Johnson-Cook 失效模型中，破坏应变按下式定义

$$\varepsilon^{f} = [D_1 + D_2 \exp(D_3\sigma^*)][1 + D_4 \ln \dot{\varepsilon}^*][1 + D_5 T^{*m}] \tag{3-75}$$

其中应力比 $\sigma^* = \sigma_m/\bar{\sigma}$ 被称为应力三轴度（triaxiality），$\sigma_m = -p$ 是平均应力，$\bar{\sigma}$ 是 Von Mises 等效应力，其他变量和 Johnson-Cook 材料模型相同，D_1 到 D_5

是需要由实验确定的材料参数。损伤量 D 按下式计算

$$D = \sum \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon^f} \tag{3-76}$$

其中 $\Delta\varepsilon$ 是单个时间步中塑性应变的增量，当 D 达到 1.0 时，材料即发生破坏。

失效后的质点不能承受剪力，偏应力分量均置为零，对于静水压力 p，一般认为失效质点不能承受拉力，只能承受压力。在压力更新时，如果质点受压则正常更新，如果质点受拉，则将 p 也置零，同时将质点体积恢复到上一时刻的体积。

以上模型相对简单，在工程中具有实用性，不过并没有考虑损伤对材料性能的影响，对于一些对精度要求较高的问题，可以选择对材料损伤过程有更细致的描述，能更好的反映损伤断裂本质的模型。比如一些损伤模型考虑到微空洞、微裂纹的成核、成长，考虑损伤量对材料参数，如剪切模量、屈服强度等的削弱作用，用于层裂的计算[157]可取得更好的效果。

3.3.6　固体状态方程

超高速碰撞和爆炸作用下的材料行为涉及高温高压，相对低速下的材料响应而言，热力学效应更加明显。因此需要使用状态方程来描述压强、密度和内能之间的关系，考虑物质的压缩效应和非可逆的热力学过程。状态方程有时也被称为物态方程。

一般来说，固体受到压缩时，体积总是随着压强的增大而减小，体积模量则随压强的增大而增大[150]。在 100 GPa 以内的压力下，可以把物质的压缩性看作是各个“完整”原子相互作用的结果，即物质的压缩性基本上只取决于决定化学性质的外层电子，这时可用晶体点阵的谐振子模型等比较简单的理论模型来建立物质的状态方程。我们关心的超高速碰撞和爆炸问题中产生的压力通常不超出这个范围。在这一基础下，一般的状态方程可以用半经验半理论的方法获得。

Mie-Grüneisen 状态方程，也称为 Grüneisen 状态方程，是由热力学和统计力学方法得到的，可以很好的描述绝大多数金属固体在冲击载荷作用下的热力学行为。Grüneisen 状态方程具有如下形式[150]

$$p - p_c = \frac{\Gamma}{v}(e - e_c) \tag{3-77}$$

其中 p_c 和 e_c 表示冷压和冷能，即物体在绝对零度下的压力和内能。Γ 称为 Grüneisen 系数，它和比容 v 相关，Γ 和 v 的关系可用下面这个常用的经验公式来描述

$$\frac{\Gamma_0}{v_0}=\frac{\Gamma}{v} \tag{3-78}$$

因为冲击状态也满足 (3-77) 式

$$p_H-p_c=\frac{\Gamma}{v}(e_H-e_c) \tag{3-79}$$

将 (3-77) 和 (3-79) 相减可以得到

$$p=p_H+\frac{\Gamma}{v}(e-e_H) \tag{3-80}$$

这就是冲击爆炸（流体动力学）计算常用的以 Hugoniot 线为参考线的 Grüneisen 状态方程。由于参考线是 Hugoniot 线，所以此方程原则上只适用于压缩态。通常 p_H 远大于 p_0，因此可以在参考线上的压力比容关系 (3-9) 式中忽略 p_0 得到

$$p_H=\frac{\rho_0 c_0^2(1-v/v_0)}{[1-S_1(1-v/v_0)]^2}=\frac{\rho_0 c_0^2\mu(1+\mu)}{[1-(S_1-1)\mu]^2} \tag{3-81}$$

其中 $\mu=v_0/v-1=\rho/\rho_0-1$ 为材料的压缩系数，它反映了材料的压缩程度。注意到当分母 $1-(S_1-1)\mu=0$ 时，p_H 将达到无穷大，上式给出了一个压缩可达到的最大密度 $\rho=S_1\rho_0/(S_1-1)$。

对于参考线上的内能表达式 (3-6)，取 $p_0=0$，$e_0=0$ 可以得到

$$e_H=\frac{p_H}{2\rho_0}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right) \tag{3-82}$$

将上式代入 Grüneisen 状态方程 (3-80) 式有

$$p=p_H(1-\frac{\Gamma\mu}{2})+\Gamma\rho e \tag{3-83}$$

这就是在计算中实用形式的 Grüneisen 状态方程，适用于材料压缩情况，即 $\mu\geqslant 0$ 时，其中 p_H 按 (3-81) 式计算。也可以将 (3-81) 式在 $\mu=0$ 处做 Taylor 展开，并保留到三次项，即得到如下的多项式形式

$$p_H\approx\rho_0 c_0^2[\mu+(2S_1-1)\mu^2+(S_1-1)(3S_1-1)\mu^3] \tag{3-84}$$

当材料膨胀，即 $\mu < 0$ 时，压力计算采用[26]

$$p = \rho_0 c_0^2 \mu + \Gamma \rho e \tag{3-85}$$

或者[7,27,59]

$$p = \rho_0 c_0^2 \mu (1 - \frac{\Gamma \mu}{2}) + \Gamma \rho e \tag{3-86}$$

在超高速碰撞中经常使用的另一状态方程是 Tillotson 状态方程[9]。Tillotson 状态方程覆盖了更大的压力范围，它将 $p - v$ 平面分成四个区域，分别以不同形式的方程来描述，常被用来模拟固体材料在超高速碰撞问题中出现的极高压状态，以及融化和气化的相变现象。

对于水下爆炸问题，通常主要考虑水的压缩性，因此可以用 Grüneisen 状态方程将水模拟为可压缩流体[158]。

3.3.7　气体的状态方程

3.3.7.1　多方指数状态方程

多方指数状态方程

$$p = A\rho^k \tag{3-87}$$

式中 k 称为多方指数，k 值不同代表不同的过程。$k = 0$ 是等压过程，$k = 1$ 是等温过程，$k = C_p/C_v = \gamma$ 是等熵过程，$k = \infty$ 时，是等容过程。炸药爆炸产物的膨胀过程本身就是一种多方过程，高压下 k 近似等于 3，随着膨胀进行，k 逐渐减小，常压下近似等于 1.4，即等价于理想气体状态方程。

多方指数状态方程由于形式简单，常用于解析估算。

3.3.7.2　理想气体状态方程

理想气体状态方程为

$$p = (\gamma - 1)\frac{\rho}{\rho_0} E \tag{3-88}$$

其中 γ 是比热比，E 是单位初始体积的内能。对双原子分子构成的气体，通常取 $\gamma = 1.4$。

3.3.8　爆轰产物状态方程

爆轰产物的状态方程可分为两类[148,159]，一类是考虑炸药化学成分和化学反应，是显含化学反应的状态方程，可称为热力学状态方程。另一类不显含化学反应，可称为动力学状态方程。

BKW 状态方程是半经验的热力学状态方程，在预估炸药爆轰参数方面取得很好效果[27,148]。HOM 状态方程[148,160]是来源于热力学计算结果拟合的动力学状态方程。Mader 把 BKW 程序计算的爆轰产物的压力、温度和能量用最小二乘法拟合成温度的函数，称为 HOM 状态方程。

JWL（Jones-Wilkins-Lee）状态方程[146]是不显含化学反应的经验状态方程，由实验确定参数，是典型的动力学状态方程。它能较好的描述爆轰产物膨胀做功的过程，是爆炸力学计算中应用最为广泛的状态方程，其形式为

$$p = A(1 - \frac{\omega}{R_1 V})e^{-R_1 V} + B(1 - \frac{\omega}{R_2 V})e^{-R_2 V} + \frac{\omega E}{V} \tag{3-89}$$

其中 $V = v/v_0$ 是相对体积，A、B、R_1、R_2 和 ω 是炸药的材料常数，一般通过圆筒试验来确定。需要注意的是 JWL 状态方程是根据实验数据总结出来的经验状态方程，其参数和实验方式有一定的相关性，可能不同实验方式确定的参数会有所不同，因此在使用中要考虑到其局限性。

3.4　一些具体问题

3.4.1　温度计算

在冲击爆炸问题中，材料通常都是经历高应变率的变形过程，变形过程很短暂，可以忽略热传导效应。比如在应变率 $10^3 \mathrm{s}^{-1}$时，铜试件在 5 ms 时间内的热扩散距离只有 1.5 mm[143]。因此高应变率的变形过程一般都认为是绝热过程。使材料温度升高的热量主要来自于不可逆的塑性变形产生的塑性功。故联系塑性功和相应温度升高的公式为[161]

$$\rho c_p \dot{T} = \beta \dot{W}^p \tag{3-90}$$

其中ρ是密度，c_p是定压比热，W^p 是塑性功，β为材料常数，是塑性功转化为热的转化率。对于某些材料，β 会和应变以及应变率相关[161]，但通常可以简单

假设 β 为 0.85 至 1.00 之间的常数。$\beta = 0.9$ 对大多数金属而言是可以接受的近似[143]。温度由每一时间步计算的温度增量累加而得，并在 Johnson-Cook 模型中用来考虑热软化的计算中使用。积分 (3-90) 式得到每一时间步温度的升高

$$\Delta T = \frac{\beta}{\rho c_p} \Delta W^p \tag{3-91}$$

其中 ΔW^p 是单位体积的塑性功增量。只有在试探应力超过当前屈服应力时才会计算塑性功，第 k 步到第 $k+1$ 步的塑性功增量为

$$\Delta W^p = \frac{1}{2}(\sigma_y^k + \sigma_y^{k+1}) \Delta \varepsilon^p \tag{3-92}$$

3.4.2　质点体积的计算

欧拉描述下的质量守恒方程为

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0 \tag{3-93}$$

整理为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -v_{i,i} \mathrm{d}t \tag{3-94}$$

将上式从 t^k 到 t^{k+1} 积分得到

$$\rho^{k+1} = \rho^k e^{-v_{i,i}\Delta t} \tag{3-95}$$

若用 $V = m_p/\rho$ 表示质点所代表物体的体积，那么代入上式则质点的体积更新公式可写为

$$V^{k+1} = V^k e^{v_{i,i}\Delta t} = V^k e^{\Delta \varepsilon_{ii}} \tag{3-96}$$

将上式做 Taylor 展开并保留一阶项有

$$V^{k+1} = V^k (1 + \Delta \varepsilon_{ii}) \tag{3-97}$$

上式也可以通过微元分析得到。考虑一个立方体微元，原体积为 V_0，一个时间步后，三个方向分别发生正应变 ε_{11}、ε_{22} 和 ε_{33}，那么微元新的体积应为

$$V_0(1+\varepsilon_{11})(1+\varepsilon_{22})(1+\varepsilon_{33}) = V_0(1+\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}+O(\varepsilon^2)) \tag{3-98}$$

忽略掉高阶项，即 (3-97) 式。

3.5　程序设计与考核

3.5.1　程序设计

本文采用 C++ 语言编制了可用于冲击爆炸问题模拟的三维物质点法程序 MPM3DPP 。其中引入了弹性、弹塑性材料模型、Johnson-Cook 材料模型以及高能炸药的材料模型，加入了 Grüneisen 状态方程、理想气体状态方程和用于爆轰产物模拟的 JWL 状态方程。加入了最大拉力失效、最大等效塑性应变失效和 Johnson-Cook 损伤失效模型。为了处理冲击波，添加了人工体积粘性。

在编制程序时尽可能利用 C++ 语言面对对象的特性，可以使程序有更好的可维护性，有良好的可扩充性，易于添加新的模型。MPM3DPP 程序具有较好的通用性和可扩展性，用户可以通过输入文件设定不同的几何模型，指定不同的算法以及选择不同的材料模型、状态方程和损伤失效模型。从而可以计算多种不同的问题，而不是局限于某些特定问题。

不同的材料模型均继承于一个虚基类 CMatGeneric，如图 3.4 所示。所有材料公有的属性，如密度，属于基类，每个材料模型对应一个继承类，可以定义自己的材料参数。这种组织方式有利于程序扩展，开发者只需要添加一个继承类就可以添加新的材料模型。状态方程和失效模型也用类似的方式处理。

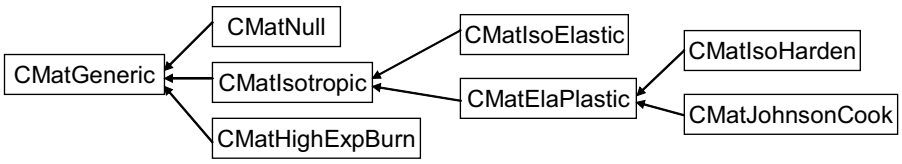


图 3.4　材料模型类的继承关系

物质点法只需要将物质区域离散为质点和划分规则的背景网格，因此前处理相对有限元而言更加方便。对于形状规则的物体，如长方体、圆柱体、球体等，可以直接在输入文件中指定，由程序自动生成正交方式布置的质点。对于复杂的区域，尽管还没有成熟的前处理软件可供使用，但通过自编程序仍然可以处理不规则物体的质点离散。一个有效的办法是借助比较成熟的有限元商业软件，利用其中划分网格的功能，首先对复杂的三维几何体划分网格，然后导出结点位置和单元信息，一般单元采用六面体或由六面体退化的四面体。通过程序，可以将有限单元转变成位于单元形心的质点，质点的质量等于单元的质

量 $m_p = m_e = \rho_0 V_e$，单元体积 V_e 可用 Grandy 给出的算法进行计算[162]。

MPM 中的质点携带了所有物质信息，后处理时可以将质点直接画出。MPM3DPP 程序提供了可供 Tecplot 软件读取的输出文件，可以直接利用 Tecplot 绘制质点的运动情况以及依据材料、应力等变量绘制云图。另外，MPM3DPP 也提供了在背景网格结点上输出变量的功能，结点上变量的值利用结点上的形函数，通过质点信息插值即可得到。

3.5.2　程序的考核

3.5.2.1　爆轰波传播

考查一 10 cm 长的 TNT 板条从固定端起爆，爆轰波以爆速向另一端传播。Shin 等和 Liu 等曾经用有限元和 SPH 分别模拟过这一问题[72,163]。这个问题也可以作为模拟高能炸药爆轰的程序的一个标准考题。

在这一模拟中，炸药选用 TNT，其材料参数为[52]密度 $\rho = 1630\ \mathrm{kg/m^3}$，爆速 $D = 6930\ \mathrm{m/s}$，JWL 状态方程的参数为 $A = 3.712 \times 10^{11}\ \mathrm{N/m^2}$，$B = 0.0321 \times 10^{11}\ \mathrm{N/m^2}$，$R_1 = 4.15$，$R_2 = 0.95$，$\omega = 0.3$，单位体积的内能 $E_0 = 6993 \times 10^6\ \mathrm{J/m^3}$。

MPM3DPP 是三维 MPM 程序，为了模拟这个一维问题，沿 x 方向布置一列共 2000 个质点，用 1000 个背景网格覆盖。所有质点都在 y 和 z 方向被约束。为了进行比较，采用 LS-DYNA 用 1000 个有限单元模拟此问题。用这两个程序模拟得到的不同时刻压力和密度分布的结果如图 3.5 和图 3.6 所示，其中 MPM 结果是提取自背景网格结点上的。从图中看出 MPM3DPP 的结果和 LS-DYNA 的结果基本一致。对于 TNT 炸药，在理论公式 (3-17) 和 (3-18) 中取 $k = 2.727$[21]，可得 CJ 爆压的理论值为 $p_{\mathrm{CJ}} = 21.0$ GPa，CJ 状态下密度的理论值为 $\rho_{\mathrm{CJ}} = 2.23\ \mathrm{g/cm^3}$，在图中以虚线表示。模拟结果的峰值压力和密度与理论的 CJ 爆压和密度比较接近，误差在 5% 以内。

在 MPM 的模拟中有两个因素可以造成数值震荡，一个是由于质点穿越网格造成，在本例中采用 GIMP 方法加以抑制。另一个是由于冲击波引起，在应用人工体积粘性后，也得到有效的抑制，人工体积粘性的参数为 $c_0 = 3.0$ 和 $c_1 = 0.3$。

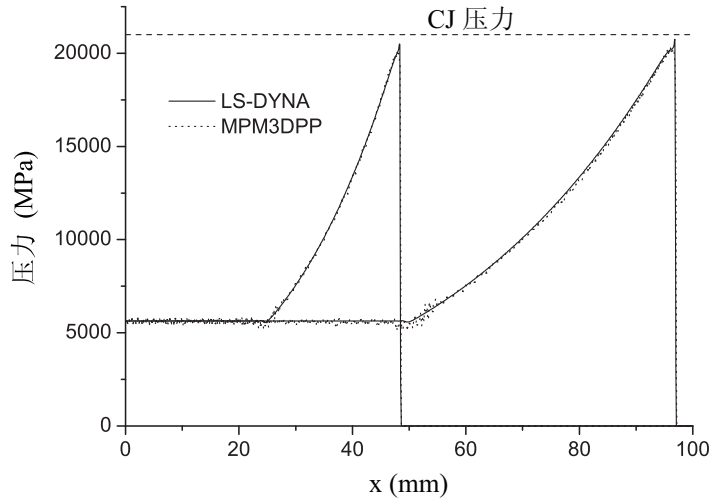


图 3.5　TNT 爆轰, 7μs 和 14μs 时刻压力分布

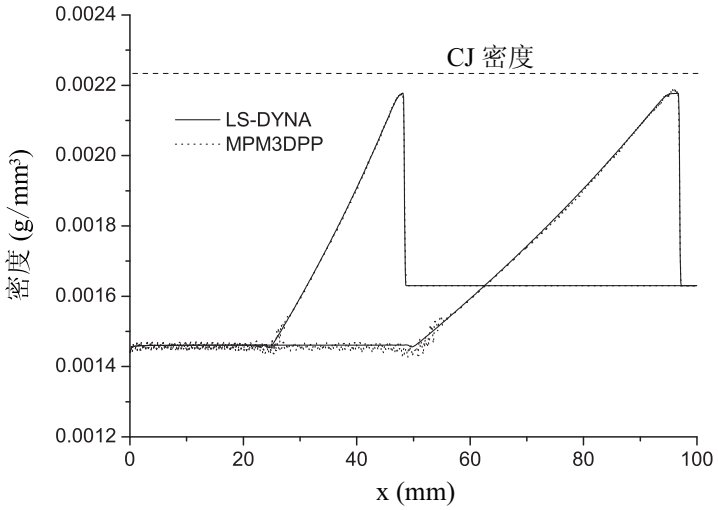


图 3.6　TNT 爆轰, 7μs 和 14μs 时刻密度分布

3.5.2.2　Sedov 冲击波问题

Sedov 冲击波问题考虑的是在强点源爆轰后，冲击波在初始静止的理想气体中的传播规律。Sedov 曾利用相似原理分析这一问题，对球对称、圆柱对称、平面情况分别给出了解析解[164]，解析解可用已有程序进行计算[165]。

考虑柱对称情况，用 MPM 模拟时，布置一层背景网格，将质点限制在 $x-y$ 平面内运动。采用理想气体状态方程 (3-88) 式，点源爆轰效果采用设置中心质点的 E_0 来实现。所有数据无量纲，初始条件为 $E_0=10000$，$\rho_0=1.0$，$\gamma=1.4$，计算区域半径 $R=0.4$，模拟时间 $t=0.001$，考虑到对称性，用 $1/4$ 模型进行模拟。注意到在柱对称解析解的计算中密度 ρ_0 的量纲为 [ML^{-2}] ，所以在用 MPM3DPP 程序模拟时，质点初始密度的设置应与初始条件给出的密度相差一系数，这个系数为质点间距 d_p。

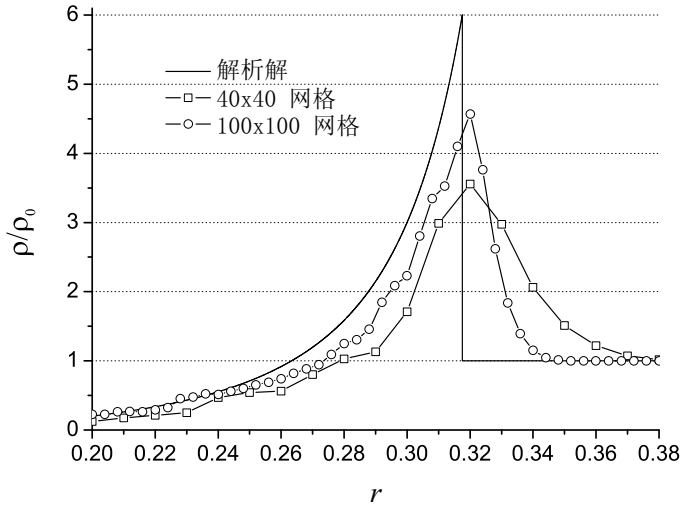


图 3.7　Sedov 问题，沿 x 方向密度分布

分别采用 40×40 和 100×100 两种不同密度的背景网格，每个网格中布置 2×2 个质点，这两种情况下，半径为 0.4 的 $1/4$ 圆盘分别被离散为 5027 个质点和 31419 个质点。x 方向的密度分布曲线与解析解的对比如图 3.7所示，其中 MPM 模拟结果的数据取自背景网格结点。在模拟中，启用了 GIMP 算法，人工体积粘性系数设置为 $c_0=6.0$ 和 $c_1=0.6$。

3.5.2.3　层裂问题

层裂（spallation）是冲击爆炸问题中常见的一种破坏模式，中厚板在冲击载荷作用下，压缩波在自由面反射形成拉伸波，从而造成材料在自由面附近的拉伸破坏。

表 3.1　Johnson-Cook 模型材料参数[143]

	A(MPa)	B(MPa)	n	c	m	比热容(J/kg K)	融化温度(K)
铝	265	426	0.34	0.015	1.0	875	775
铁	175	380	0.32	0.06	0.55	452	1811

表 3.2　材料参数、Grüneisen 状态方程参数和失效参数[143]

	$\rho(\mathrm{kg/m^3})$	E(GPa)	ν	$C_0(\mathrm{m/s})$	S_1	Γ_0	$\varepsilon^p_{\max}$	$p_{\min}$(MPa)
铝	2770	75.0	0.33	5330	1.34	2.0	2.0	-4000
铁	7890	210.0	0.3	3570	1.92	1.8	2.0	-4000

本算例的来自于 Johnson 等的模拟[65]，圆柱形弹丸的材料是 2024-T351 铝，直径 12.7 mm，厚 6.4 mm，圆柱形靶板材料为工业纯铁，直径 102 mm，厚 25.4 mm，材料参数见表 3.1 和表 3.2。弹丸初速度为 4000 m/s，如图 3.8 所示。考虑到对称性，采用 $1/4$ 模型进行模拟，弹丸离散为 3248 个质点，靶板离散为 823488 个质点。图 3.9(a) 给出了 A 点的压力时间历程曲线，峰值压力达到约 10 GPa，略高于 Johnson 的模拟结果[65]。图 3.9(b) 给出了自由面上 B 点的速度时程曲线，出现层裂后，自由面速度在 350 m/s 左右震荡。图 3.10 给出了按材料和按失效绘制的云图，为了能够清晰的显示，只绘制了中心截面的一层质点。

3.6　小结

冲击爆炸问题中涉及到复杂的应力波效应，爆轰又是一个复杂的物理化学过程，对这类问题的数值模拟需要对其理论进行适当的简化，对于冲击波以及爆轰波等强间断也需要恰当的处理。本章对冲击波和爆轰波的数学处理方式进行了介绍，对用数值方法模拟爆轰需要采取的方法做了归纳。

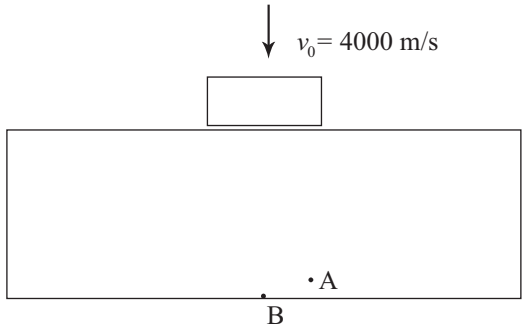


图 3.8　层裂示意图

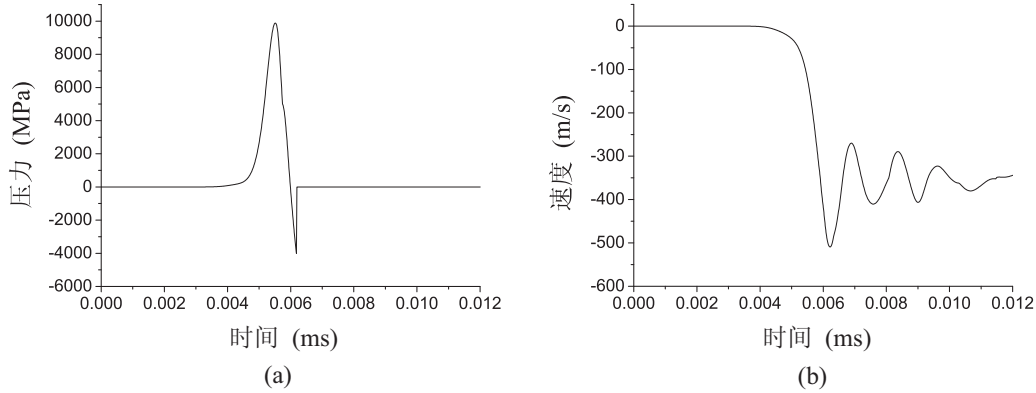


图 3.9　层裂问题中的时程曲线 (a) A 点的压力 (b) B 点的速度

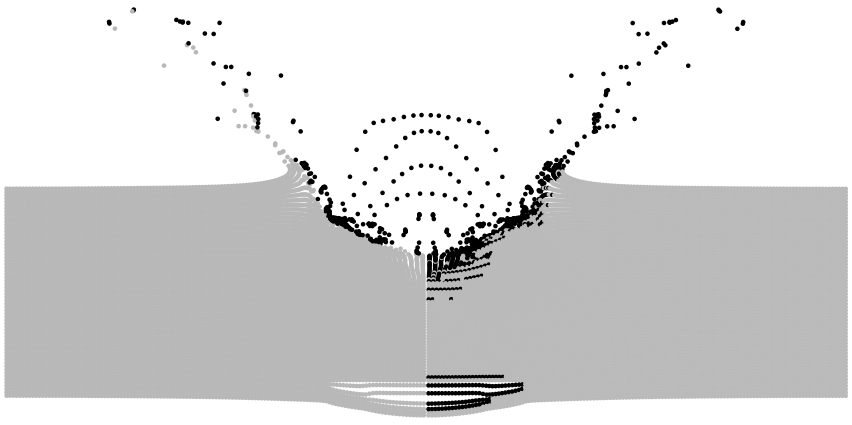


图 3.10　层裂问题 12 μs 时刻中心截面变形图，左半边中黑点为弹丸材料质点，右半边中黑点为失效的质点，

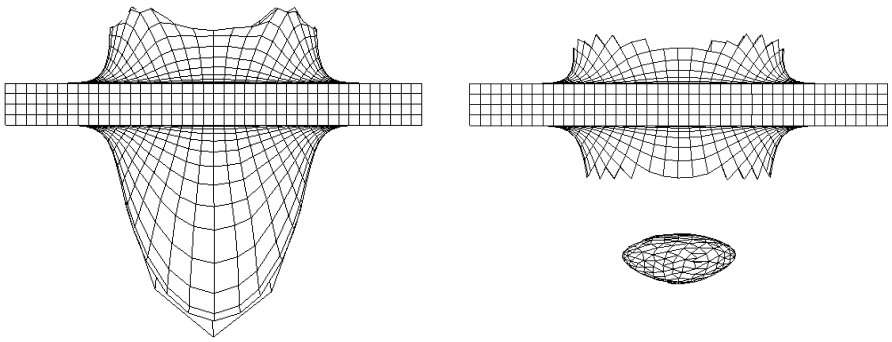
另外，由于冲击爆炸问题设计比较极端的载荷情况，需要考虑高应变率、高温高压等因素的影响，在数值模拟中需要考虑特别的材料模型和状态方程。本章对数值模拟中的应力更新算法，需要考虑的各种材料模型、状态方程和损伤失效模型做了介绍。对数值模拟中温度计算、质点体积计算等问题进行了讨论。

最后，本章对冲击爆炸程序程序的实现方式以及程序编制相关的前后处理等问题的具体处理方式做了介绍，并通过爆轰波传播、Sedov 冲击波问题和层裂问题几个典型算例对程序进行了考核。

第 4 章　物质点有限元法

4.1　拉格朗日有限元网格畸变的解决办法

传统的显式拉格朗日有限元在求解超高速碰撞问题时，由于一些区域变形过大，容易发生网格畸变，给计算带来困难，甚至会导致计算中断。在传统的显式有限元程序中采用的办法是将变形过大的单元侵蚀（erosion）[26]，即当单元变形过大，达到一定阈值（拉力，等效塑性应变等）时，则将单元删除。尽管这种处理方式在侵彻等问题中取得了一定成功，但是由于单元删除造成质量不守恒，进而也对计算带来扰动。并且，在实际物理过程中，变形较大的物体并不会消失，简单的侵蚀处理使物体质量减小是一种不真实的描述。特别是对于超高速碰撞问题，侵蚀的处理办法根本无法对超高速碰撞薄板形成的碎片云进行描述。如图 4.1 所示，采用显式有限元软件 LS-DYNA 模拟球形弹丸以 3 km/s 的速度超高速碰撞薄板，无论是直接计算还是采用侵蚀算法，都无法刻画出碎片云的形貌。



(a)　　(b)

图 4.1　用 LS-DYNA 计算超高速碰撞问题。(a) 直接计算 (b) 采用单元侵蚀

另外一种解决网格畸变的办法网格重分区对于此类问题也难以发挥作用。由于超高速碰撞问题中，弹靶均破碎成大量碎块，网格重分区的办法不仅计算

量上代价很大，也无法实际模拟弹靶的破碎以及碎片云的形成。

近年来，在质点类无网格法取得一定发展后，人们也尝试将有限元中畸变单元的处理方式与新的质点方法结合，取得一定成功，如 Johnson 等提出了将冲击变形过程中扭曲的有限单元转化成质点的方法[65,66]，并用这种方法模拟侵彻问题。由于转化的质点一般均已失效，不能承受拉力，因此这一方法也避免了质点方法常见的拉伸不稳定性问题。

本章针对有限元在大变形区域网格畸变的问题，借鉴物质点法的思想，在大变形区域引入背景网格，提出物质点有限元法（Material Point Finite Element Method，MPFEM）。在物质点有限元法中，材料仍旧被离散为有限单元。在大变形区域布置背景网格，被网格覆盖的结点被看成物质点，像 MPM 一样，动量方程在预先设置的计算网格上求解，而在其他区域的结点则仍然是有限元结点，在原有的有限元网格上求解。如果不设置背景网格，则这种方法退化为有限元，如果在所有的时间步中背景网格覆盖所有的结点，则这种方法和 MPM 的结果完全一样。MPFEM 的一个重要优点是它的求解过程与已有的显式有限元非常相似，很容易加入到 DYNA3D 等已有的显式有限元程序中。

4.2　物质点有限元法的求解方案

控制方程参见 2.1 节。动量方程的等效积分弱形式为

$$\delta\Pi=\int_V\rho\ddot{x}_i\delta x_i\mathrm{d}V+\int_V\rho\sigma_{ij}^s\delta x_{i,j}\mathrm{d}V-\int_V\rho f_i\delta x_i\mathrm{d}V-\int_{\Gamma_t}t_i\delta x_i\mathrm{d}\Gamma=0 \qquad (4\text{-}1)$$

其中 V 是材料所占据的区域，Γ_t 是力边界，$\sigma_{ij}^s=\sigma_{ij}/\rho$ 是比应力，δx_i 是虚位移。

尽管本章中提出的求解格式是针对三维问题的，这里为了便于说明问题，考查一个二维杆的冲击问题，如图 4.2 所示。一个二维杆被离散为有限单元，杆的下部在冲击作用下产生很大的变形，因而产生了严重的单元畸变，如图 4.2(b) 所示。为了解决网格畸变的问题，引入了一个固定在空间的背景网格用于辅助计算。

为了便于区分，我们称被背景网格覆盖的结点为质点，其余结点称为有限元结点。在一个时间步中，结点可能进入或者离开背景网格覆盖的区域，因此质点

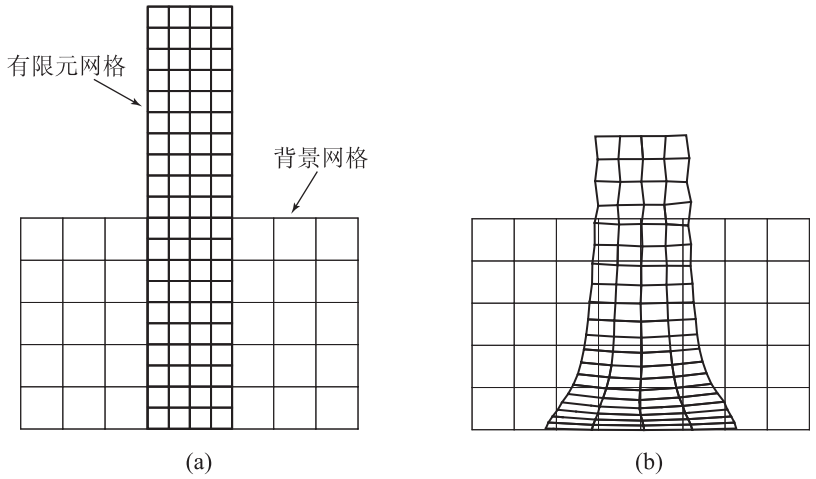


图 4.2　有限元网格和背景网格，(a) 初始时刻 (b) 变形后

数会随时间的变化而变化。在图 4.3 中，结点 a ∼ f 是有限元结点，结点 g ∼ i 是质点，A ∼ D 是背景网格上的结点，称为网格点。

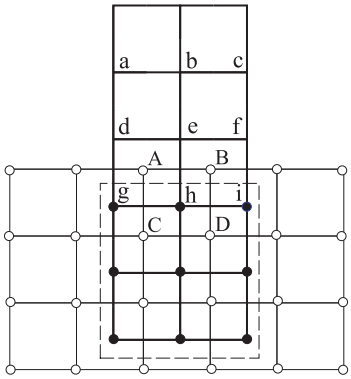


图 4.3　求解方案

4.2.1　在背景网格上求解动量方程

对于背景网格覆盖的材料子域，求解方案与 MPM 一样，动量方程在背景网格上求解。在这个过程中，质点和背景网格固连在一起。在得到背景网格上的变量后，变量被映射回质点以更新质点信息。在每个时间步，变形后的背景网格被抛弃，重新使用规则的背景网格。从这个意义上说，网格畸变的问题得以消除。

计算公式与 MPM 一样。质点的质量

$$m_p = \frac{1}{8}\sum_e \rho_e V_e \tag{4-2}$$

其中 ρ_e 和 V_e 是质点 p 周围 8 个单元的密度和体积。通过弱形式和离散，得到建立在背景网格结点上的动量方程：

$$\dot{p}_{hi} = f_{hi}^{\text{int}} + f_{hi}^{\text{ext}} \tag{4-3}$$

其中

$$p_{hi} = \sum_{g=1}^{n_g} m_{gh}\dot{x}_{gi} \tag{4-4}$$

是第 h 个背景网格结点在方向 i 上的动量，其中结点质量阵为

$$m_{gh} = \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{pg} N_{ph} \tag{4-5}$$

在显式有限元和物质点法中，一般都采用集中质量阵，式 (4-4) 成为

$$p_{hi} = m_h \dot{x}_{hi} \tag{4-6}$$

其中 m_h 是集中质量阵

$$m_h = \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{ph} \tag{4-7}$$

另外，式 (4-3) 中的

$$f_{hi}^{\text{int}} = -\sum_{p=1}^{n_p} V_p N_{ph,j}\sigma_{pij} \tag{4-8}$$

和

$$f_{hi}^{\text{ext}} = \sum_{p=1}^{n_p} M_p N_{ph} f_{pi} + \int_{\Gamma t} N_h t_i \mathrm{d}\Gamma \tag{4-9}$$

是第 h 个背景网格结点在方向 i 的内力和外力。$V_p = M_p/\rho_p$ 是质点体积、ρ_p 以及 σ_{pij} 是质点 p 当前的密度和应力，f_{pi} 是第 p 个质点 i 方向上的体力密度。

4.2.2　在有限元网格上求解动量方程

对于没有被背景网格覆盖的区域，动量方程的求解像传统的有限元法一样，在拉格朗日的有限元网格上进行。

材料上任意一点 X_α 的位置可以由有限元结点的插值函数给出

$$x_i(X_\alpha, t) = \sum_{p=1}^{n_f} \phi_p x_{pi}(t) \tag{4-10}$$

其中 n_f 是有限元结点的总数，ϕ_p 是 第 p 个有限元结点上的标准有限元形函数在 x_i 点的取值。x_{pi} 是第 p 个有限元结点 i 方向坐标的取值。弱形式 (4-1) 式中在材料域 V 上的积分可以由在所有单元上积分的和来近似。将 (4-10) 式代入到 (4-1) 式中，并采用集中质量阵，可得到建立在有限元结点上的动量方程

$$m_p \ddot{x}_{pi} = f_{pi}^{\text{int}} + f_{pi}^{\text{ext}} \tag{4-11}$$

其中

$$f_{pi}^{\text{int}} = -\sum_e \int_{V_e} \phi_{p,j} \sigma_{ji} \mathrm{d}V \tag{4-12}$$

$$f_{pi}^{\text{ext}} = \sum_e \left(\int_{V_e} \rho \phi_p f_i \mathrm{d}V + \int_{\Gamma_{te}} \phi_p t_i \mathrm{d}\Gamma \right) \tag{4-13}$$

需要注意的是有限元区和物质点区交界处附近，部分被背景网格覆盖的单元，比如在图4.3中的单元 d-g-h-e 和 e-h-i-f，它们需要对质点 g、h 和 i 贡献结点力。这一部分贡献需要在建立物质点区的动量方程时以外力形式映射到背景网格结点上。在物质点区，背景网格结点上的外力的计算公式 (4-9) 应改写为

$$f_{hi}^{\text{ext}} = \sum_{p=1}^{n_p} N_{ph} (M_p f_{pi} + f_{pi}^{\text{ele}}) + \int_{\Gamma_t} N_{ph} t_i \mathrm{d}\Gamma \tag{4-14}$$

其中 f_{pi}^{ele} 是部分被背景网格覆盖的单元对第 p 个质点在方向 i 上力的贡献，可用式 (4-12) 来计算。

对于超高速碰撞问题，通常采用显式时间积分。式 (4-12) 和 (4-13) 中的体积积分采用单点积分来计算，即

$$f_{pi}^{\text{int}} = -\sum_e \phi_{ep,j} \sigma_{eji} V_e \tag{4-15}$$

$$f_{pi}^{\text{ext}} = \sum_e M_e \phi_{ep} f_{ei} + \sum_e \int_{\Gamma_{te}} \phi_{ep} t_i \mathrm{d}\Gamma \tag{4-16}$$

其中 $M_e = \rho_e V_e$。下标 e 表示在单元 e 中心的取值。

通过数值试验发现，在 MPFEM 中沙漏模态很容易被激发出来，如图 4.4(a) 所示。此时必须采用一定的沙漏模态控制方案[26,166]，在本文中，在动量方程的右端增加了以下控制项：

$$f_{pi}^{\Gamma} = -\sum_{\alpha=1}^{4} \beta_h h_{i\alpha} \Gamma_{\alpha p} \tag{4-17}$$

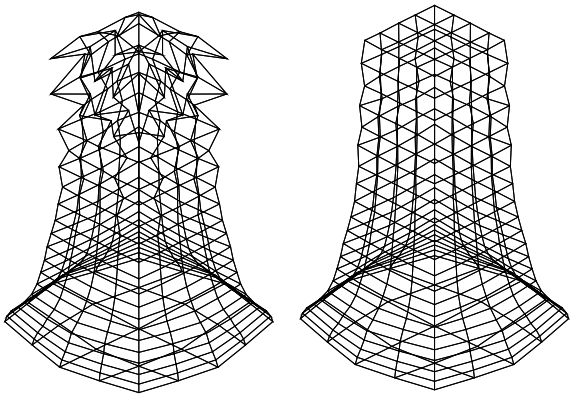
其中

$$\beta_h = \frac{1}{4} Q_{hg} \rho V_e^{2/3} c \tag{4-18}$$

$$h_{i\alpha} = \sum_{k=1}^{8} v_{ki} \Gamma_{\alpha k} \tag{4-19}$$

其中 c 为声速，Q_{hg} 是用户指定的无量纲常数，通常设定数值在 0.05 和 0.15 之间。另外，$\Gamma_{\alpha k}$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4;\ k = 1, 2, \cdots, 8)$ 是沙漏基矢量。

通过采用上述沙漏模态控制方案，沙漏模态可以在被有效的控制，图 4.4 显示了沙漏模态控制的效果。



(a)　(b)

图 4.4　沙漏模态：(a) 没有采用沙漏模态控制；(b) 采用了沙漏模态控制

4.2.3　时间积分

时间积分采用可变时间步长的中心差分，物质点区的计算与 2.2 节所述相同。

有限元区上，由 (4-11)，有限元结点上 t^k 时刻的加速度为

$$\ddot{x}_{pi}^{k} = (f_{pi}^{k,\mathrm{int}} + f_{pi}^{k,\mathrm{ext}})/M_p \tag{4-20}$$

$t^{k+1/2}$ 时刻的结点速度和 t^{k+1} 时刻的结点位置按下式计算

$$\dot{x}_{pi}^{k+1/2} = \dot{x}_{pi}^{k-1/2} + \ddot{x}_{pi}^{k}\Delta t^{k} \tag{4-21}$$

$$x_{pi}^{k+1} = x_{pi}^{k} + \dot{x}_{pi}^{k+1/2}\Delta t^{k+1/2} \tag{4-22}$$

其中，时间步长 $\Delta t^{k+1/2}$ 由下式确定

$$\Delta t^{k+1/2} = \min(L_e/c) \tag{4-23}$$

其中 $L_e = V_e/A_{e\max}$ 是单元 e 的特征长度，$A_{e\max}$ 是单元 e 最大一个面的面积，c 是材料声速。

4.2.4　算法描述

MPFEM 的实现方法和传统有限元非常相似，很容易加入到 DYNA3D 等显式有限元程序中。具体算法如下：

1. 输入步：读入有限元结点坐标、单元信息、材料参数和初始条件。
2. 初始化：由式 (4-5) 计算所有结点的质量 m_p，建立空间中固定的背景网格。
3. 求解步：循环，直到当前时间 t^k 大于终止时间 t^f：
   (a) 对所有结点循环，计算系统动能。
   (b) 对所有结点循环，设置其为有限元结点或质点。
   (c) 对包括有限元结点和质点的所有结点循环，计算其外力。
   (d) 对所有质点循环，更新其应力。
   (e) 对没有被背景网格完全覆盖的有限单元循环，更新其应力和形心。对有限元结点，依据式 (4-12) 和式 (4-17) 计算内力和沙漏控制力。依据式 (4-23) 确定新的时间步长 Δt^{k+1}。

(f) 对所有质点循环依据 (4-8) 和 (4-14) 计算背景网格结点上的内力和外力。

(g) 对所有背景网格结点循环，积分动量方程，施加位移边界条件。

(h) 对所有质点循环，更新其速度和位置。

(i) 对所有有限元结点循环，按 (4-11) 计算其加速度，并施加位移边界条件。

(j) 对所有有限元结点循环，按 (4-21) 和 (4-22) 更新其速度和位置。

(k) 更新时间 $t^{k+1} = t^k + \Delta t^{k+1}$.

4. 结束循环。

4.3　算例

4.3.1　弹性杆撞击刚性墙

为了说明和验证 MPFEM 方法，首先考查一个直径为 2 mm，高度为 10 mm 的弹性杆撞击刚性墙的算例。如图 4.5 所示，在背景网格覆盖的区域，动量方程在背景网格结点上求解，而在其他区域则在有限元结点上求解。弹性杆的材料参数为密度 $\rho = 8.9 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$，弹性模量 $E = 10^5\,\mathrm{MPa}$，以及泊松比 $\nu = 0.3$。初始速度为 $v_0 = 200\,\mathrm{m/s}$。

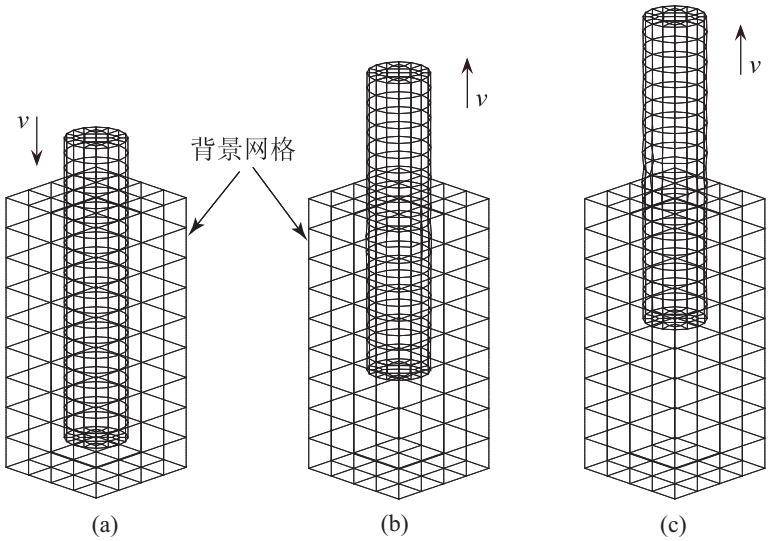


图 4.5　弹性杆撞击刚性墙

弹性杆在与刚性墙撞击后，以 200 m/s 左右的速度弹回，杆的动能变化如图 4.6 所示。计算在所有质点都离开背景网格后终止。

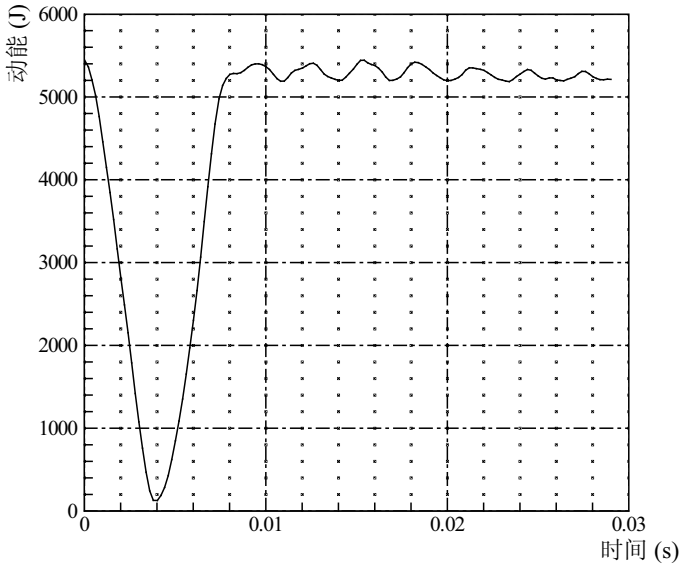


图 4.6　弹性杆的动能

4.3.2　Taylor杆问题

Taylor 杆碰撞实验是 1948 年由 Taylor 提出的一个柱状金属圆杆正面高速碰撞刚性墙的一个实验。Taylor 杆碰撞实验较易实现，能够反映材料在较大应变和较高应变率下的行为，常用来获得材料本构关系的参数[152]，研究不同材料的塑性流动规律。另外，由于这个问题有较充沛的实验结果，Taylor 杆问题也是用来检验动力学程序的经典考题。

为了定量比较计算和实验得到的最终构型，Johnson 和 Holmquist[152]提出了以下的平均误差计算公式

$$\overline{\Delta} = \frac{1}{3}\left(\frac{|\Delta L|}{L} + \frac{|\Delta D|}{D} + \frac{|\Delta W|}{W}\right) \tag{4-24}$$

其中 L、D 和 W 分别是金属杆变形后的长度、底部直径和距离底部 $0.2L_0$ 处的直径，如图 4.7。ΔL、ΔD 和 ΔW 是计算结果和实验结果的误差。

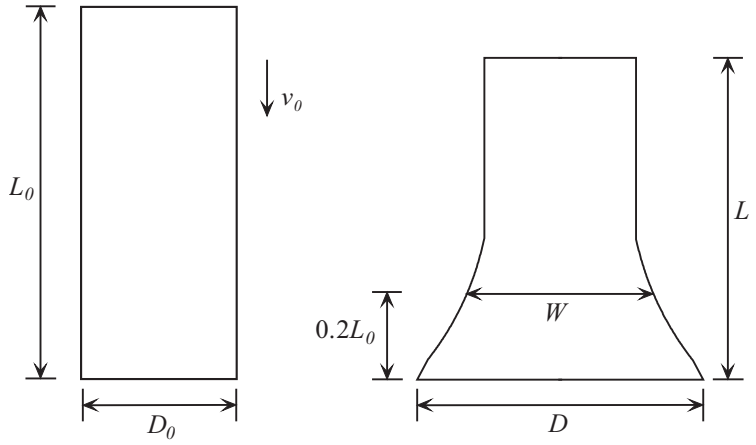


图 4.7　Taylor杆碰撞示意图

表 4.1　材料模型参数

ρ (kg/m^3)	E (MPa)	ν	A (MPa)	B (MPa)	n	C
8930	117×10^3	0.35	157	425	1.0	0.0

圆柱材料为铜，采用 Johnson-Cook 模型，材料常数见表4.1[152]。初始长度、直径和初始速度分别为 $L_0 = 25.4\,\mathrm{mm}$、$D_0 = 7.6\,\mathrm{mm}$ 和 $v_0 = 190\mathrm{m/s}$。圆柱被离散成 299×67 个单元，332×68 个结点。如图 4.8(a)。采用三种不同的方式进行计算。第一种不采用背景网格，则求解过程和传统有限元是完全一样的（FEM）。第二种采用结点间距为 1mm，$21 \times 21 \times 26$ 的规则背景网格覆盖整个圆柱，则这种计算方式和物质点法完全等同（MPM）。第三种方式采用 1mm，$21 \times 21 \times 26$ 的规则背景网格覆盖圆柱的下半部分（MPFEM）。表 4.2 中对三种方案的计算结果和实验数据进行了比较。数值模拟的结果和试验结果吻合的很好，圆柱冲击变形后的最终构型见图4.8。

表 4.2　Taylor杆问题数值模拟结果和实验结果的比较

	L(mm)	D(mm)	W(mm)	$\overline{\Delta}$
实验结果	16.2	13.5	10.1	-
FEM	16.27	13.33	10.18	0.008
MPM	16.35	13.4	9.9	0.012
MPFEM	16.38	13.4	9.9	0.013

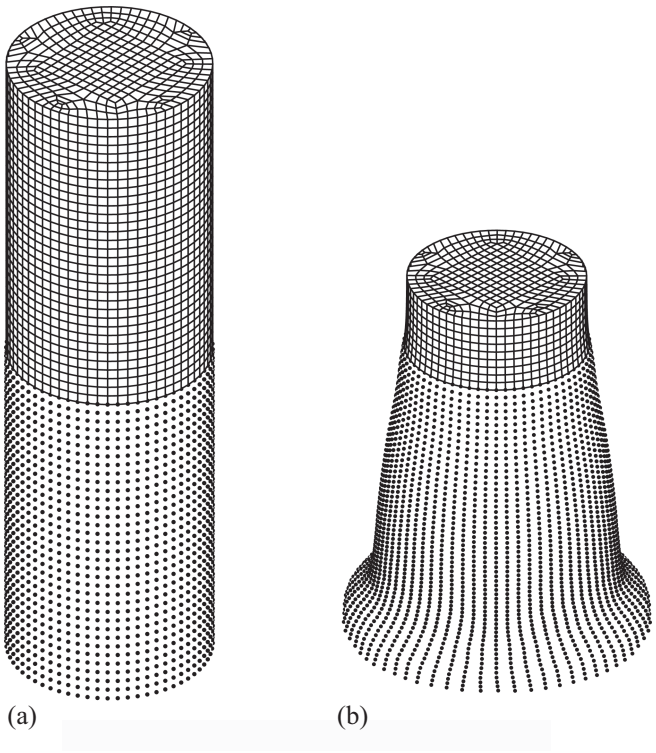


图 4.8　用 MPFEM 计算 Taylor 杆问题 (a) 初始构型和离散结果 (b) 最终构型

为了考查网格畸变的情况，定义如下度量

$$\chi = \min_{e} A_{e\,\min}/A_{e\,\max} \tag{4-25}$$

其中 $A_{e\,\min}$ 和 $A_{e\,\max}$ 是单元 e 最大和最小面的面积。由于材料具有塑性硬化效应，网格畸变并不严重。为了进一步考查在网格会出现畸变的情况下 MPFEM 的计算效果，把材料参数设置为理想弹塑性，即将表4.1中的 B 设置为零。表4.3中针对 FEM 和 MPFEM 比较了网格畸变情况、时间步长和 CPU 时间。尽管两种方法模拟结果的几何构型很相似，如图 4.9，但 FEM 的模拟由于网格畸变造成时间步长（$=\min(L_e/c)$）显著的减小，使得计算量显著增大。而 MPFEM 的时间步长则基本保持不变。两种方法所花费的 CPU 时间大约是 3:1。

表 4.3　网格畸变情况和时间步长大小

	$\chi_{\max}$	$\chi_{\min}$	$\Delta t_{\max}$(ms)	$\Delta t_{\min}$(ms)	时间步长	CPU 时间(s)
FEM	7.849×10^{-2}	8.298×10^{-6}	9.264×10^{-6}	7.893×10^{-7}	17987	5969
MPFE	7.849×10^{-2}	7.573×10^{-2}	9.264×10^{-6}	9.242×10^{-6}	5443	1744

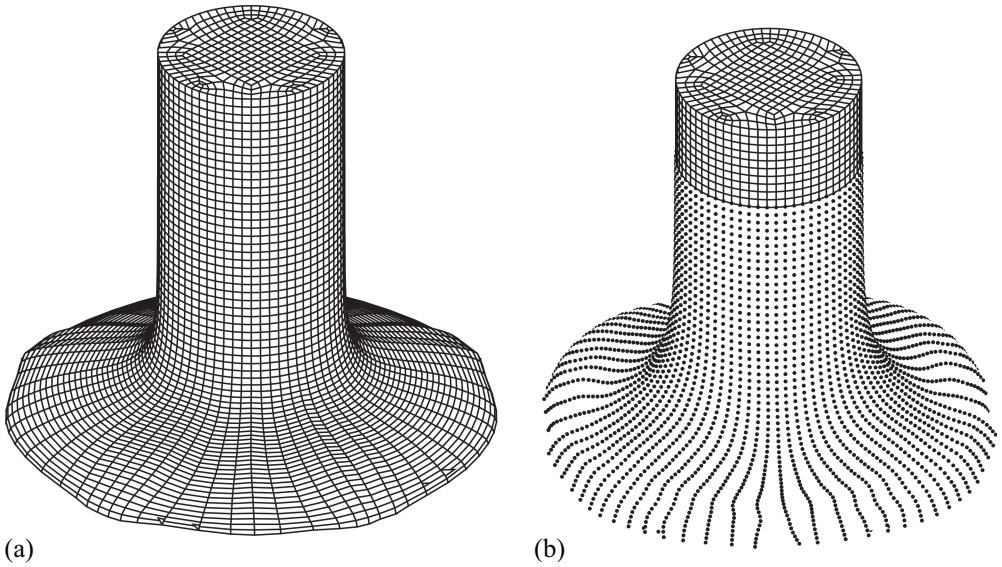


图 4.9　Taylor 杆问题使用理想弹塑性材料时模拟结果，$t = 50\,\mu s$ (a) FEM (b) MPFEM

4.3.3　空间碎片防护问题

随着航天技术的发展，越来越多的人造卫星或者航天器被发射到地球轨道。作为发射活动带来的副产品，大量抛弃物以及空间物体碰撞产生的碎片等被留在地球轨道上，一般称为空间碎片。空间碎片飞行速度极快，对航天器的安全造成了严重的威胁，因此需要对空间碎片引起的破坏效应进行研究，也需要设计有效的防护结构形式。航天器碎片防护多采用在舱体表面一定距离设置薄板或采用双层板的设计，超高速弹丸冲击薄板往往形成碎片云，甚至被液化气化，其动能被大大消耗，完整性也被破坏。

常规的有限元在模拟空间碎片防护等超高速问题时，由于特大的变形造成严重的网格畸变，很难有效的进行模拟，也无法描述碎片云的形貌。对于此类问题，采用 MPFEM 是一种有效的解决办法。

为了说明 MPFEM 模拟超高速碰撞问题的能力，这里分析弹丸以 6.6 km/s 的速度超高速碰撞薄板的问题。弹丸的直径是 8 mm，靶板厚度为 3 mm。弹丸和靶板的材料均为铜，采用的 Johnson-Cook 材料模型参数见表 4.4。采用 Mie-Grüneisen 状态方程来更新压力，参数见表 4.5。

表 4.4　弹丸和靶板的 Johnson-Cook 模型材料参数

$\rho\,(\mathrm{kg/m^3})$	E (MPa)	ν	A (MPa)	B (MPa)	n	C
8930	117×10^3	0.35	90	392	0.5	0.0

表 4.5　铜的 Mie-Grüneisen 状态方程的参数

$c_0(\mathrm{m/s})$	λ	γ_0
3940	1.49	1.96

在这一问题中，弹丸和靶板的中心部分会发生很大的变形，为了消除网格畸变带来的困难，在这一区域布置结点间距 1 mm 的背景网格，如图 4.10 所示，这一区域中的结点被视为物质点，动量方程在背景网格上求解，在其他区域上仍在有限元网格上求解。考虑到对称性，用一半模型进行模拟，对称面设置对称边界条件。弹丸由 4,984 个四面体单元离散，共有 1,085 个结点，靶板由 30,000 个六面体单元离散，共 36,057 个结点。考虑到三维问题，总的自由度是 111,426。

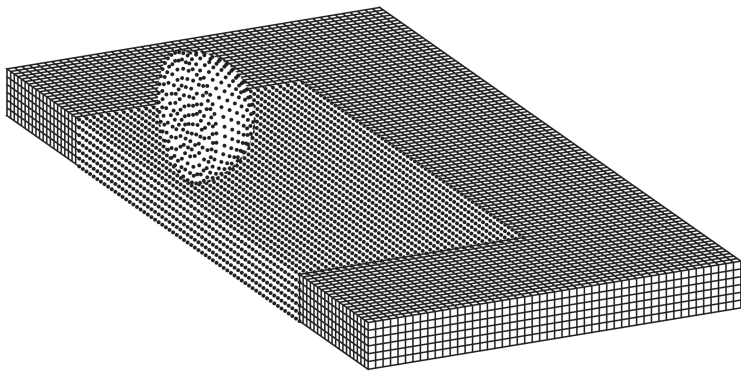
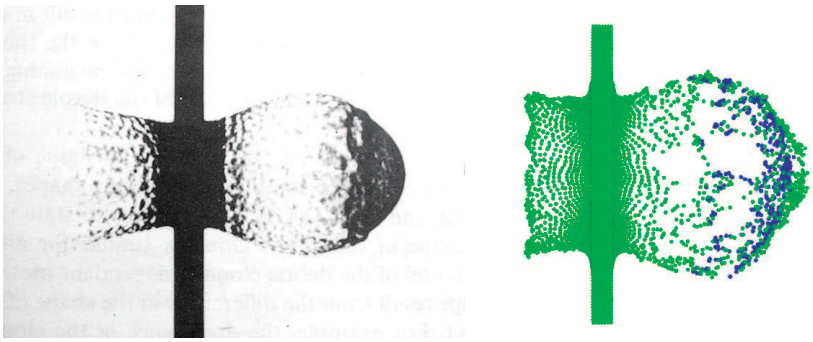


图 4.10　弹丸超高速碰撞薄板的初始构型和离散结果

图 4.11(a) 显示了典型的球形弹丸超高速碰撞薄板形成的碎片云[167]。采用 MPFEM 模拟得到的碎片云如图 4.11(b) 所示。文献[167]并没有给出实验所采用的材料，因此这个算例中，MPFEM 模拟和实验所用的材料并不相同，但这个例子仍然可以说明，MPFEM 的模拟基本可以反映出弹靶背后碎片云的形貌，可以用于对此类问题的分析。



(a)　　(b)

图 4.11　碎片云 $t = 9\mu s$, (a) 实验结果[167], (b) MPFEM 结果

MPM 的一些特性也给 MPFEM 模拟超高速碰撞问题带来了一些便利。由于 MPM 可以自动处理无滑移接触，所以在 MPFEM 的物质点区，不需要特殊处理，即可以处理无滑移接触，确保发生碰撞的两物体不会相互嵌入，避免了有限元中处理接触的麻烦。另外，在 MPM 中，当两个物质点距离大于背景网格间距时，这两个物质点便没有相互作用，这可以看作是对破坏现象的粗略描述，在超高速碰撞问题的模拟中，材料的破坏可以用这种方式近似模拟。

4.4　小结

针对有限元在求解超高速碰撞问题遇到的网格畸变这一困难，本章借鉴物质点法的思想，提出了物质点有限元法。在物质点有限元的模拟中，仍用有限单元离散物体，在大变形区域布置背景网格，被背景网格覆盖的区域将结点视为物质点，用物质点法进行计算，其他区域仍用有限元法求解，从而解决有限元法中网格畸变的问题。物质点有限元法的求解过程与已有的显式有限元非常相似，很容易加入到 DYNA3D 等显式有限元程序中。

将物质点有限元法用于 Taylor 杆碰撞的模拟，和有限元法相比，显著的提高了求解效率。

将物质点有限元法用于弹丸超高速碰撞薄板的模拟，解决了有限元法网格畸变的困难以及无法刻画碎片云的问题，较好的描述了碎片云的形成过程。

第 5 章　自适应物质点法求解爆炸冲击问题

5.1　数值断裂

材料的断裂和破坏是冲击爆炸问题的数值模拟中需要关心的一个重要的问题。在数值模拟中出现的材料断裂，可能由两种原因造成。一种是材料达到其断裂强度，发生真实的物理破坏，这时需要在数值模拟的程序中对发生破坏的单元或质点进行相应处理来表达这种物理的破坏；另一种是由于数值方法的因素导致材料虚假的破坏，也可以被称为“数值断裂”。

比如在 SPH 中由于拉伸不稳定性（Tensile instability）的影响，在一些问题中就会造成数值断裂[63]。尽管 MPM 不存在拉伸不稳定性的问题，但在一些情况下，也可能出现非物理的数值断裂。如图 5.1 所示，B 和 C 两个质点在变形过程中距离变大，以至于两质点间相隔了一个完整的背景网格，于是这两个质点就不会发生相互作用，此时质点 B 和 C 之间实际上就已经发生了断裂。而质点A和B处于相邻的网格中，仍有相互作用，就没有发生断裂。

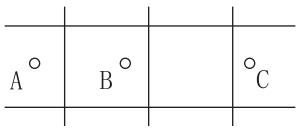


图 5.1　MPM中的数值断裂

当两个物质点距离大于背景网格间距时发生的数值断裂，可以看作是对破坏现象的粗略描述，并且在超高速碰撞问题的模拟中取得不错的效果。但这种处理方式回避了一个重要的问题，就是如何区分由于物理因素所引起的真实破坏和由于数值方法因素所引起的虚假破坏。

因此，本章中提出自适应分裂质点的方案，当质点变形较大，特别是发生拉伸和体积膨胀到一定程度时，即将质点分裂，保证在变形过程中质点分布不会过于稀疏，从而尽可能避免 MPM 模拟过程中可能出现的数值断裂。在避免了虚假的数值断裂后，要求材料的断裂必须依据物理量的判据，以期尽可能反

映真实的物理断裂。

5.2　自适应分裂质点方案

在一些大变形问题的模拟中，物体可能在局部发生极大的变形，对于基于网格的方法往往有必要对网格进行调整，对于质点方法而言，就需要添加质点以确保精度。Moresi 等[168]将 MPM 进行修改，变形为一种在欧拉网格中采用拉格朗日积分点的有限单元法，用于地质学研究中模拟粘弹性材料。在这一方法中，在积分点所代表体积的边界用无重量的标记点来跟踪质点的变形情况，从而建立一种根据变形情况分裂积分点的方法。在 MPM 中，质点携带所有的物理量，可以反映质点的变形情况，因此本章提出一种可以利用质点携带的物理量来确定质点分裂的准则。分裂只在三个互相垂直的坐标方向进行。可定义质点第 k 个时间步 i 方向的累积应变 ε_i 由下式计算

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^{N} \Delta\varepsilon_i^k = \sum_{k=1}^{N} \dot{\varepsilon}_{ii}^k \Delta t \tag{5-1}$$

其中 $\Delta\varepsilon_i$ 是应变增量，根据式 (2-33) 得到的应变率计算。质点在 i 方向的等效长度可以定义为

$$L_i = L_0(1+\varepsilon_i) \tag{5-2}$$

其中 $L_0 = \sqrt[3]{m_p/\rho_0}$ 初始质点长度，$(1+\varepsilon_i)$ 表示质点在 i 方向的伸长量。进行质点分裂的准则为

$$L_i > \alpha d_c \tag{5-3}$$

其中 α 是由用户指定的自适应因子，d_c 为背景网格间距。通常 α 的取值要求小于 1.0 以确保每个网格中有足够的质点。如果质点的变形使其等效长度达到了分裂准则，那么质点将在 i 方向上一分为二，如图 5.2 所示。

分裂后的两个质点间距设为 $0.5\alpha d_c$。在质点分裂后，和物质量有关的变量，如质量 m_p、体积、内能也被一分为二，分别赋予两个新质点。而其他变量，如应力、应变和温度等，将直接赋予新质点。新质点携带的累积应变 ε_i 的调整应确保新质点在分裂方向上的等效长度为原来的一半，而在另外两个方向上保持

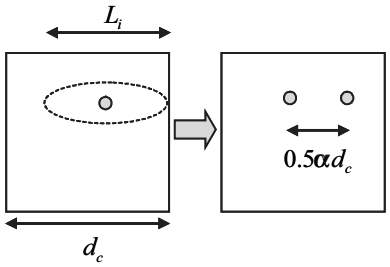


图 5.2　自适应分裂质点的方案

不变，也就是需要根据以下条件来确定

$$L_i' = \begin{cases} 0.5L_i & \text{在分裂方向} \\ L_i & \text{另外两个方向} \end{cases} \tag{5-4}$$

其中 L_i' 分裂后新质点的等效长度。注意到新质点的质量是原质点的一半，那么有 $L_0' = \sqrt[3]{0.5}L_0$。根据等效长度的定义 (5-2) 式，把质点分裂前后的等效长度代入到 (5-4) 式，则可以得到调整后的累积应变应为

$$\varepsilon_i' = \begin{cases} 0.63\varepsilon_i - 0.37 & \text{在分裂方向} \\ 1.26\varepsilon_i + 0.26 & \text{另外两个方向} \end{cases} \tag{5-5}$$

5.3　激波管问题

对激波的研究涉及到 Riemann 问题，即在初始时刻，给定一个物理量的间断面，进而研究这个初始间断随时间发展，逐步分解产生的解，如图 5.3 所示。一维的 Riemann 问题可以得到解析解[169]，常用来对模拟可压缩流体问题的数值算法或程序进行测试和考核。通常所说的激波管问题是 Riemann 问题初始速度为 0 的特例。

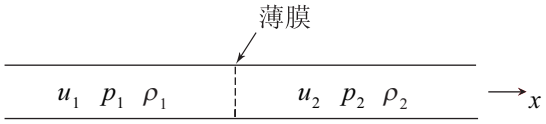


图 5.3　Riemann问题的初始条件

Sod 曾通过对激波管问题的数值模拟研究几种不同差分格式的特性[170]，他

采用的模型问题被认为是一个标准测试，许多新的数值方法都要通过这个算例来验证其性能。在这个问题中，激波管的中部由薄膜分为两个具有不同密度和压力的区域，两个区域中的气体在初始状态下都是静止的。所有参数均无量纲，初始密度和压力分别为 $\rho_1 = 1.0$，$p_1 = 1.0$，$\rho_2 = 0.125$，$p_2 = 0.1$。在时间 $t > 0$ 时，薄膜破裂，激波和接触面会以不同的速度从左向右运动。通常观察 $t = 0.143$ 时，激波前进了大约 0.25 时刻的结果。

气体的状态方程采用理想气体状态方程 (3-88) 式，其中 $\gamma = 1.4$。在用 MPM3DPP 程序模拟一维问题时的设置与 3.5.2.1 节相同。计算结果均取自背景网格结点上。

图 5.4 和 图 5.5 比较了采用自适应分裂质点方案和没有采用自适应分裂质点方案的速度分布结果。初始时，每个背景网格设置两个质点，总共 400 个质点均匀分布，应用了 GIMP 方法。设置自适应分裂因子 $\alpha = 0.55$，在整个计算过程中，质点数从 400 增加到 556。在应用自适应分裂质点后，计算结果更加平滑，更接近解析解。对质点和网格加密后，可以得到更好的结果。初始布置 2000 质点在 1000 个背景网格中，在时间达到 $t = 0.143$ 后，经过自适应分裂，总质点数变为 2661 个质点。

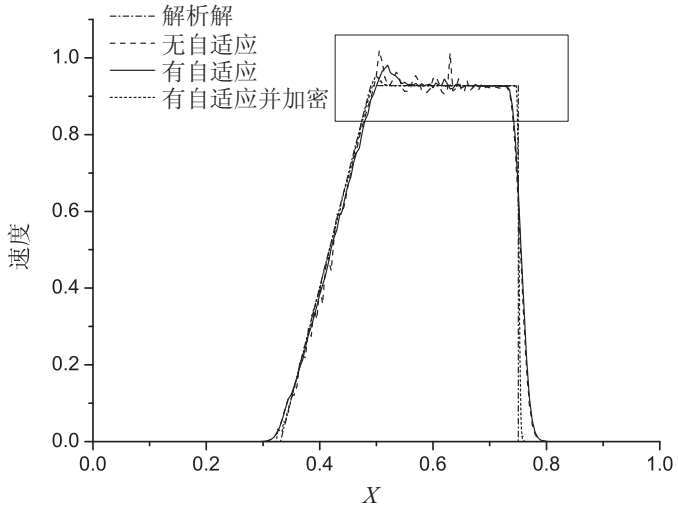


图 5.4　$t = 0.143$ 时激波管的速度分布

York 等[98] 曾采用 MPM 模拟过此激波管问题，在他的结果中观察到显著的数值震荡。根据我们的模拟结果分析，这种数值震荡应该是由于跨网格噪音造

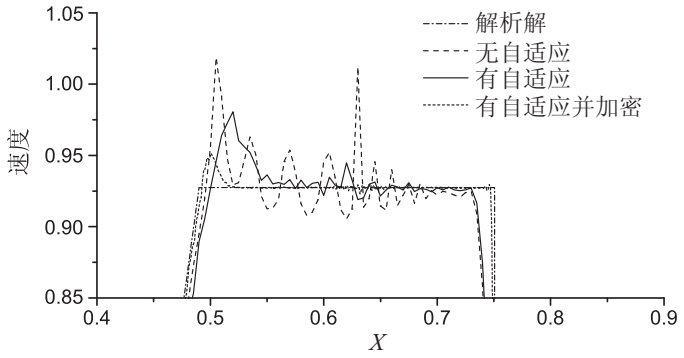


图 5.5　$t = 0.143$ 时激波管的速度分布，局部放大图

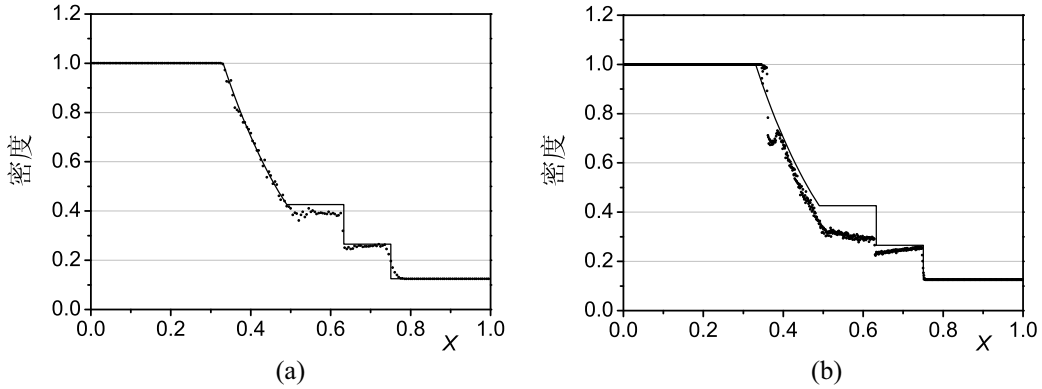


图 5.6　MPM 计算得到的密度分布曲线（点）和解析解（实线）的比较 (a) 200 个网格，(b) 1000 个网格

成的。为了考查跨网格噪音对 MPM 计算的影响，考虑两个算例，分别采用 200 个和 1000 个背景网格。在高密度区，每个网格布置 4 个物质点，在低密度区，每个网格布置 2 个物质点，故两个算例分别使用了 600 个质点和 3000 个质点。MPM 采用不同网格密度的密度、速度、压力和比内能分布结果如图 5.6、5.7、5.8 和 5.9 所示。当试图通过加密网格获得更精细结果时，质点穿过网格造成的数值噪音成为了障碍。在精密的网格下，由于会出现更多的质点穿越网格现象，造成各变量分布曲线的误差反而变得更大。通过采用 GIMP 方法，这个问题可以得到解决。如图 5.10 所示，采用 GIMP 方法，当采用 1000 个背景网格，质点按上述方式布置时，得到的密度、速度、压力和比内能的分布曲线与解析解吻合的很好。

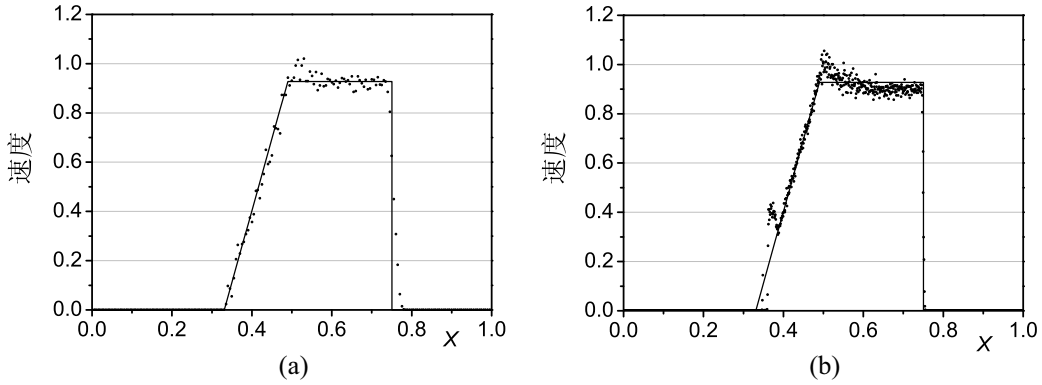


图 5.7　MPM 计算得到的速度分布曲线（点）和解析解（实线）的比较 (a) 200 个网格, (b) 1000 个网格

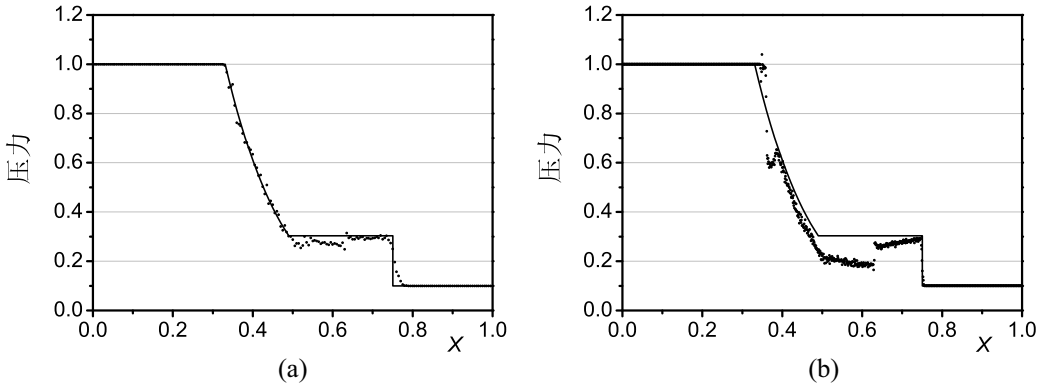


图 5.8　MPM 计算得到的压力分布曲线（点）和解析解（实线）的比较 (a) 200 个网格, (b) 1000 个网格

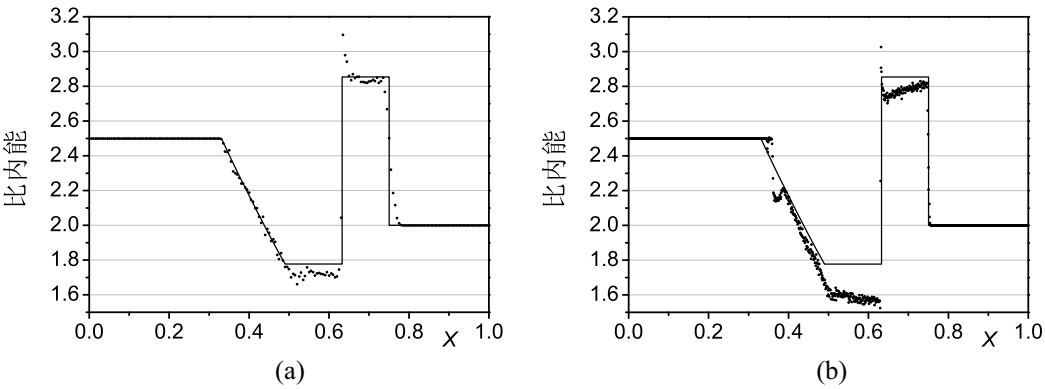


图 5.9　MPM 计算得到的能量分布曲线（点）和解析解（实线）的比较 (a) 200 个网格, (b) 1000 个网格

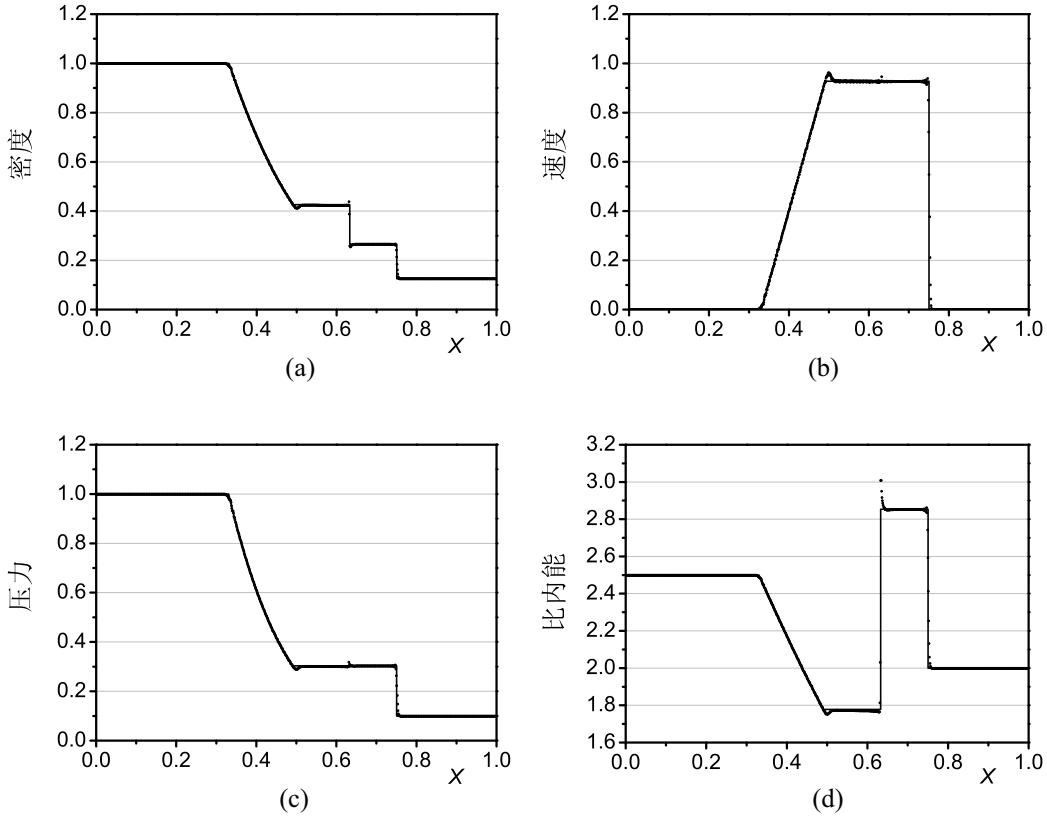


图 5.10　密度、速度、压力和比内能的分布与解析解的比较，黑点为 GIMP 采用 1000 个背景网格结果

5.4　爆轰驱动飞片问题

爆轰驱动飞片实验是测量炸药性能常用的一个实验，可以考察炸药爆炸后对周围材料的加速作用。

在本算例中炸药为 TNT，材料参数同 3.5.2.1 节，被加速的飞片材料为钢。考虑平面二维问题，如图 5.11 所示，钢板置于炸药右侧，在炸药左侧采用线起爆。对这一问题，采用两种不同的计算模型进行模拟：有限板和无限板。无限板模型进一步将模型简化为一维，只用一列质点，限制其在两个和运动方向垂直方向的位移。有限板模型则用如图 5.11 所示的二维模型，在与飞片飞行方向垂直的方向设置有限长度。

炸药与材料的相互作用最重要的经验公式是 Gurney 方程[143,146]。1943 年 Gurney 提出了一种可预测爆炸加速装置终态速度的简捷方法。通过大量爆炸试

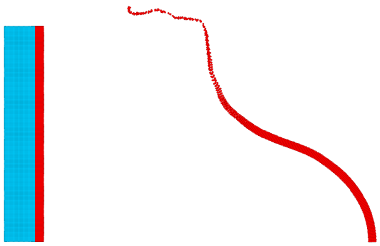


图 5.11　爆轰驱动飞片，初始构型和起爆后 250 μs 的飞片变形情况

验中对破片速度进行测定，他得出结论：破片速度取决于破片（M）与炸药（C）间的质量比。基于动量和能量守恒，Gurney 假设炸药爆炸的化学能全部转化为爆炸产物和金属破片的动能，从而得到了不同装药下破片速度和 M/C 的关系式。具体公式和各种炸药的 Gurney 能（$\sqrt{2E}$）参见 [143] 的 9.2 节。TNT 的 Gurney 能为 2.37 mm/μs。Gurney 公式相当可靠和简单，当然这里有误差抵消（offsetting errors）的因素[27]。对有限尺寸的装药，横向效应需要考虑，可将多余部分从 C 中扣除。

被加速飞片的终点速度可以由 Gurney 公式计算。在 $M/C > 0.1$ 时，Gurney 方程和实验结果符合的都比较好。考虑开口结构，飞片的最终速度可以写为

$$V = \sqrt{2E}\left[\frac{3}{1+5(M/C)+4(M/C)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5-6}$$

既然 Gurney 方程只预测最终速度，我们将模拟时间设置的足够长，使加速过程结束，飞片速度基本不再增加。不同 M/C 比值下的 MPM3DPP 模拟得到的飞片最终速度结果和 Gurney 公式(5-6) 的比较如图 5.12所示。飞片的速度按板的厚度方向平均得到。

从图 5.12 可以看出，数值模拟结果基本和 Gurney 公式一致。不同的计算模型略有区别。无限板模型总体比 Gurney 公式的估计偏大，随 M/C 的增加，越来越接近。除了无限板模型，另外计算了三组有限板模型。在 A 组和 B 组中，飞片的横向宽度固定，通过变化炸药和飞片的厚度改变 M/C 的值。对于较大的 M/C 值，A 组的结果比 Gurney 公式略小，可能是横向效应造成的。Kennedy 建议，为了考虑到横向效应，装药质量应从总装药质量中减去边上约 30 度的区

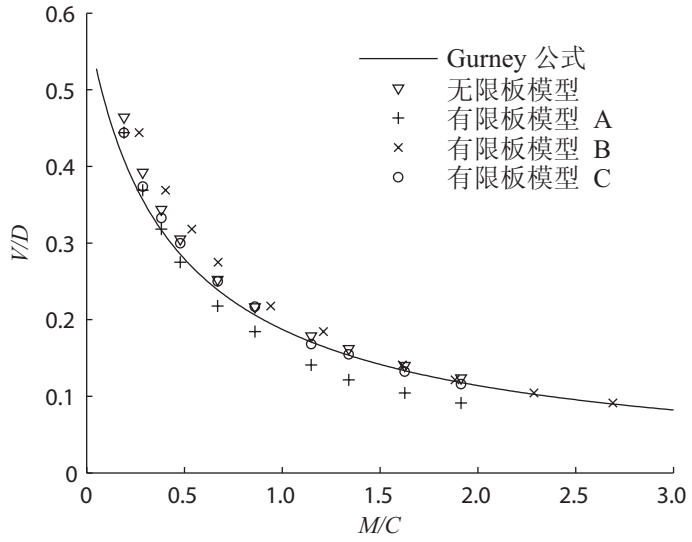


图 5.12　不同质量比 M/C 下，飞片的最终速度与炸药爆速 D 之比

域。B 组中的结果就是在 A 组的基础上考虑了横向效应，进行了质量修正后的结果。B 组结果在较大 M/C 的区域与公式吻合较好，但在较小 M/C 区域似乎过度修正了。C 组是固定板的宽厚比得到的，宽厚比设为 50，和 A 组中最大的宽厚比一样。C 组结果和 Gurney 公式吻合效果最好。考虑到 Gurney 公式是在无限板假设下推导的，并且 Gurney 能是由实验确定的，因此相对更薄的板拟合结果更好是合理的。

对于无限板情况，也考查了自适应分裂质点对结果的影响。对炸药材料采用自适应分裂质点后，飞片的最终速度略微变大，但变化幅度不超过 1%，这飞片的加速情况对自适应选项并不敏感。在图 5.12 中的结果均为没有采用自适应分裂质点得到的。

5.5　聚能射流问题

聚能效应是爆炸力学的重要应用之一。聚能效应通常指利用了一定的装药形状，通过爆炸驱动金属药型罩向小空间聚集，形成高能量密度的射流或弹丸的物理过程。最常见的药型罩是锥形的，可形成高速射流，也有球壳形状的药型罩，爆炸后形成所谓爆炸成型弹丸（Explosively Formed Projectile, EFP）。通常聚能装药是指锥形药型罩，最终形成射流的情况。聚能装药可用来穿透装甲、

岩石、混凝土等高强度目标，在国防工业以及石油工业有重要应用。

在炸药爆炸、射流形成以及射流穿甲的过程中涉及非常大的变形，金属药型罩形成射流时的应变甚至可达到 10[27]。因此，对聚能射流的数值模拟较多采用基于欧拉方法的流体动力学代码[30,171]。然而 拉格朗日程序由于其可以追踪变形历史，易于处理物质界面的特性，也有其优势，Molinari 采用对网格重分区的办法用有限元对射流形成的过程进行了模拟[172]。物质点法处理大变形问题具有优势，在聚能射流问题的模拟中有较好应用前景。

5.5.1　射流形成过程的二维模拟

线性聚能装药可以作为二维的平面应变问题来考虑。采用 MPM3DPP 程序来模拟，可以只用一层背景网格，其中布置一层质点，在与之垂直的方向加以约束来模拟平面应变问题。聚能装药的初始构型如图 5.13，半锥顶角 α 为 38 度。考虑到对称性，取一半的模型进行模拟。共采用 76840 个质点离散，其中药型罩 7000 个质点，平均的质点间距为 0.1 mm，背景网格结点间距设为 0.4 mm。炸药为 TNT，其 JWL 状态方程参数同前例。外壳和药型罩材料为铜，其 Johnson-Cook 材料模型参数和 Grüneisen 状态方程参数列在表 5.1 中。 炸药

表 5.1　铜的材料参数

A (MPa)	B (MPa)	n	c	m	比热容(J/kg K)	融化温度(K)
90	292	0.31	0.025	1.09	383	1356
ρ (kg/m^3)	E (GPa)	ν	C_0 (m/s)	S_1	γ_0	
8930	117	0.35	3940	1.49	1.96	

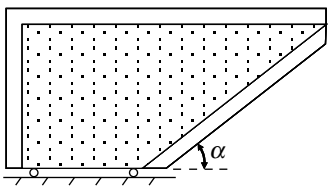


图 5.13　聚能装药的初始构型

在没有药型罩的一端同时起爆。图 5.14 比较了分别采用 MPM 和自适应 MPM 模拟射流形成过程的效果。通过采用自适应分裂质点的方案，避免了数值断

裂。在这个算例中，是否采用 GIMP 方法对最终射流的构型没有显著影响。对于炸药材料，是否采用自适应分裂质点，也对最终的射流构型没有显著影响，因此只对金属药型罩应用了自适应算法。

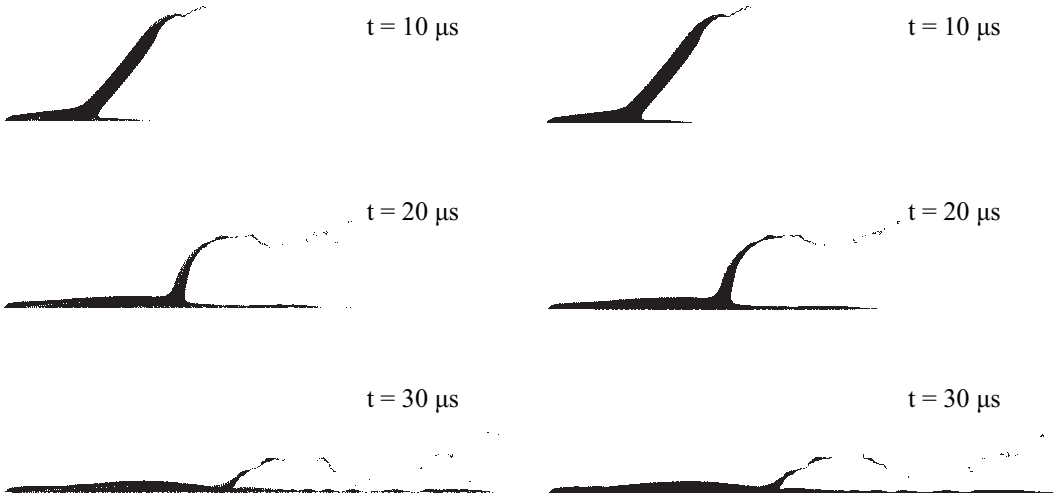


图 5.14　t = 10, 20, 30 μs 时刻的射流构型，左图为 MPM 结果，出现了数值断裂，而右图为使用自适应 MPM 的模拟结果，数值断裂得以避免。为了效果清晰，表示爆轰产物的质点没有画出。

射流尖端的速度和杵的速度可以由 Birkhoff 等人提出的理论模型[143]进行估计。在他们的理论模型中，把药型罩视作无粘不可压缩的流体并假设药型罩稳态坍塌。射流速度主要由药型罩与装药的质量比和锥角来决定。根据理论估计，本例中射流尖端速度应为 3.7 km/s，杵的速度应为 0.6 km/s。图 5.15 显示了模拟得到的 21 μs 时刻的 x 方向的速度分布。模拟得到的速度结果和理论估计基本吻合。图 5.15 显示了射流中温度的分布情况，射流尖端和射流柱体中心的部分变形最大，也是最高的温度出现的地方。最高温度可达到 1500 K 以上，根据计算的结果，铜射流的主要部分仍然保持为固体状态，但中心部分可能已经融化。

为了更清晰的观察药型罩在形成射流过程中的变形情况，可以将药型罩分段染成不同颜色，以便追踪观察。如图 5.16 所示。在本例中，平均的质点间距设为 0.2 mm，其他条件与上例相同。可以看到，药型罩中心部分的材料经历了

最大的变形，从射流尖端拉伸到杵的尾部，

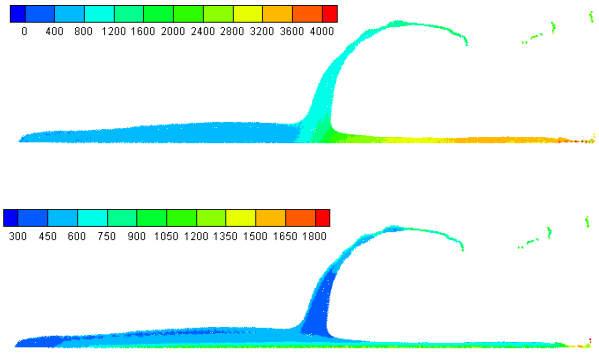
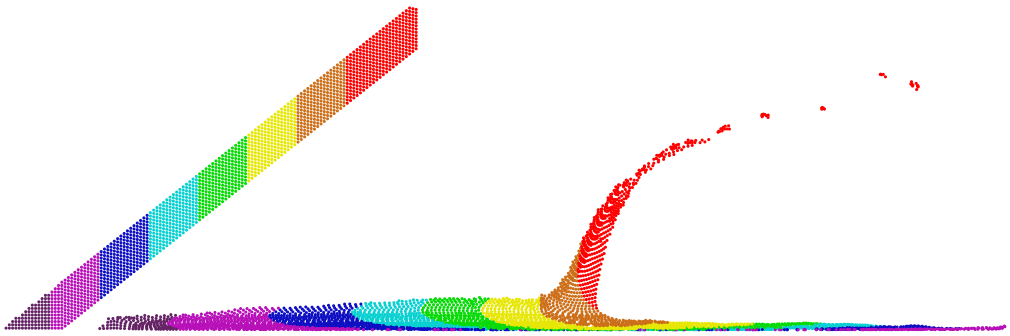


图 5.15　上图为射流中的速度分布，下图为射流中的温度分布，时间 t = 21 μs.



(a)



(b)

图 5.16　从数值模拟的结果观察药型罩的变形情况，(a) 初始时刻和 t = 20 μs 时药型罩的变形 (b) t = 20 μs 时射流部分的放大图

5.5.2　三维射流模拟

考虑三维聚能装药，几何模型按图 5.13 绕对称轴旋转得到，材料参数与上

节相同。射流速度和杵的速度按理论估计应为 4.1 km/s 和 0.7 km/s。射流形成过程中的速度分布如图 5.17 所示。射流速度和杵的速度与理论估计基本符合。

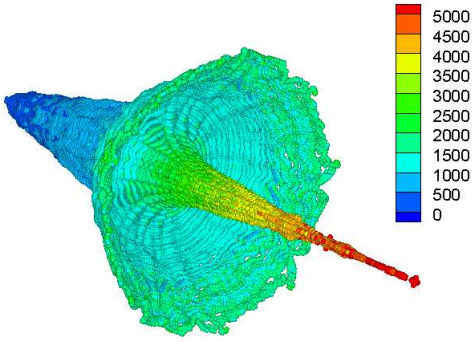


图 5.17　三维聚能射流问题，t = 20 μs 时刻速度分布

5.6　小结

针对物质点法存在的数值断裂问题，本章提出了在 MPM 中自适应分裂质点的方案，使质点可以根据累计应变，在变形最大的方向上自适应分裂，从而避免了数值断裂。

将自适应分裂质点物质点法用于激波管、爆轰驱动飞片、聚能射流等问题的模拟和分析，取得了较好的效果。

第 6 章 物质点法和SPH的比较和分析

6.1 质点类方法

质点类方法能够处理大变形，自然的描述材料的破坏，比较适合模拟超高速碰撞问题。SPH 法作为质点类方法的典型代表，得到了最为广泛的应用。SPH 在其最早得到应用的天体力学以及流体力学领域仍然发挥着作用[173]，而且，SPH 以及 SPH 的各种改进方法在冲击动力学问题中也得到了有效的应用[58]。一些商业软件，如 AUTODYN[174]，PAM-SHOCK[175]，LS-DYNA[26] 已经将 SPH 方法作为一个模块加入到求解器中。

MPM 也属于质点类方法，适用于求解大变形问题，并且被用于超高速碰撞问题的模拟[176]，展现了较好的应用前景。本章对 MPM 和 SPH 这两种质点方法进行了比较和分析。

控制方程和 MPM 的基本原理参见第 2 章。

6.2 SPH的基本原理

和 MPM 类似，SPH 也用一组质点来离散材料域 V。 每个质点质量 m_J，占据空间 $\Delta V_J = m_J/\rho_J$，其中 ρ_J 是第 J个 质点的密度。位移 $u_i(\boldsymbol{x})$ 由核近似（积分形式）表达

$$u_i(\boldsymbol{x}) \simeq u_i^h(\boldsymbol{x}) = \int_V u_i(\bar{\boldsymbol{x}}) W(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}, h) \mathrm{d}V_{\bar{\boldsymbol{x}}} \tag{6-1}$$

其中 W 是核函数，要求满足归一性和紧支性，h 是光滑长度，定义了核函数W的影响域。W 在 h 趋近于 0 时，趋近于 δ 函数。

核函数的散度 $u_{i,i}(\boldsymbol{x})$ 近似为

$$u_{i,i}(\boldsymbol{x}) \simeq u_{i,i}^h(\boldsymbol{x}) = \int_V u_{i,\bar{i}}(\bar{\boldsymbol{x}}) W(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}, h) \mathrm{d}V_{\bar{\boldsymbol{x}}} \tag{6-2}$$

其中下标 ‘,$\bar{i}$’ 表示求导对 $\bar{x}_i$ 进行，即 $u_{i,\bar{i}} = \sum_{i=1}^{3} \partial u_i / \partial \bar{\boldsymbol{x}}_i$。分部积分并且应用散度定理，对支撑域在材料域内的质点，式 (6-2) 可化为

$$\begin{aligned} u^h_{i,i}(\boldsymbol{x}) &= -\int_V u_i(\bar{\boldsymbol{x}}) W_{,\bar{i}}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}, h)\mathrm{d}V_{\bar{\boldsymbol{x}}} \\ &= \int_V u_i(\bar{\boldsymbol{x}}) W_{,i}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}, h)\mathrm{d}V_{\bar{\boldsymbol{x}}} \end{aligned} \tag{6-3}$$

其中，$W_{,\bar{i}}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}, h) = -W_{,}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}, h)$。

将材料域 V 离散成一组质点后，式 (6-1) 和式 (6-3) 可由

$$u^h_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{J=1}^{N} W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_J, h)\frac{m_J}{\rho_J}u_{iJ} \tag{6-4}$$

$$u^h_{i,i}(\boldsymbol{x}) = \sum_{J=1}^{N} W_{,i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_J, h)\frac{m_J}{\rho_J}u_{iJ} \tag{6-5}$$

计算，其中下标 J 表示和第 J 个质点相关的量。$u_{iJ} = u_i(\boldsymbol{x}_J)$ 是第 J 个质点 x_i 方向的位移，N 是点 $\boldsymbol{x}$ 的影响域内的质点数。

根据式 (6-4) 和 (6-5)，第 I 个质点的 $u_i(\boldsymbol{x})$ 及其散度 $u_{i,i}(\boldsymbol{x})$ 可近似为

$$u^h_i(\boldsymbol{x}_I) = \sum_{J=1}^{N} W_{IJ}\frac{m_J}{\rho_J}u_{iJ} \tag{6-6}$$

$$u^h_{i,i}(\boldsymbol{x}_I) = \sum_{J=1}^{N} W_{IJ,i}\frac{m_J}{\rho_J}u_{iJ} \tag{6-7}$$

其中

$$W_{IJ} = W(\boldsymbol{x}_I - \boldsymbol{x}_J) \tag{6-8}$$

$$W_{IJ,i} = W_{,i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_J)|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_I} \tag{6-9}$$

场函数的导数可以近似为[44]：

$$u^h_{i,i}(\boldsymbol{x}_I) = \frac{1}{\rho_I}\left[\sum_{J=1}^{N} m_J(u_{iJ}-u_{iI})W_{IJ,i}\right] \tag{6-10}$$

$$u^h_{i,i}(\boldsymbol{x}_I) = \rho_I\left[\sum_{J=1}^{N} m_J\left(\frac{u_{iJ}}{\rho_J^2}+\frac{u_{iI}}{\rho_I^2}\right)W_{IJ,i}\right] \tag{6-11}$$

在上面两式中，场函数是以一对质点的形式出现。

在 SPH 中，连续性方程 (2-1) 式、动量方程 (2-2) 式和能量方程 (2-3) 式在质点上计算。将 SPH 近似应用于这些方程就得到 SPH 的求解格式[44,51,52]：

$$\ddot{u}_{iI} = \sum_{J=1}^{N} m_J \left(\frac{\sigma_{Iij}}{\rho_I^2} + \frac{\sigma_{Jij}}{\rho_J^2} \right) W_{IJ,i} \tag{6-12}$$

$$\dot{\rho}_I = \sum_{J=1}^{N} m_J (v_{iI} - v_{iJ}) W_{IJ,i} \tag{6-13}$$

$$\dot{e}_I = \frac{1}{2} \sum_{J=1}^{N} m_J \left(\frac{p_I}{\rho_I^2} + \frac{p_J}{\rho_J^2} \right) (v_{iI} - v_{iJ}) W_{IJ,i} + \frac{1}{\rho_I} s_{Iij} \dot{\varepsilon}_{Iij} \tag{6-14}$$

其中 $\sigma_{Iij} = \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}_I)$，$s_{Iij} = s_{ij}(\boldsymbol{x}_I)$，$\varepsilon_{Iij} = \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}_I)$，$e = E/\rho J$ 是单位质量的内能。

Libersky 等[59,177]在 1990 年将 SPH 的应用扩展到固体的动力学响应问题。由于采用拉格朗日描述及其质点方法的特性，SPH 容易处理大变形问题，在超高速碰撞问题的模拟得到了应用[58,63]。SPH 以及在它的基础上进行修正或改进得到的方法，是近年来模拟超高速碰撞问题最流行和有效的方法之一。

6.3 物质点法和SPH的比较

6.3.1 影响点搜索

所有求解偏微分方程的数值方法都需要建立结点间的关联，以求解场变量的空间导数。在 FEM 中结点关联通过有限单元来建立，在无网格法中通过搜索近似插值函数覆盖域内的邻居结点来建立。在无网格法中，尽管“Meshless”被广泛用于命名近似函数建立在一组离散点上的方法。在这些方法中，结点关联对于计算近似函数的空间导数仍然是至关重要的，然而在这些方法中，每个时间步中的结点关联都可能改变。而有限元等基于网格的方法结点关联则是不能改变的。因此，在表达无网格法的概念时，“Meshfree”可能比“Meshless”更为合适。

和大多数的无网格方法类似，SPH 中场函数的空间导数是基于一组质点来计算的。因此在 SPH 中需要搜索距离最近的邻居质点来建立结点关联。在超高速碰撞等变形非常大的问题中，给定质点的邻居质点是可以变化的，因

此搜索邻居质点的工作每一步都需要进行。一些有效的搜索算法，如树型方法[178–180]，盒子方法[59,181,182]已经得到使用，一些复杂的算法可以使搜索效率达到 $O(N\log N)$量级。对于大规模问题，邻居质点的搜索仍然是很费时的一部分工作。

在 MPM 中，结点关联是基于背景网格的，在所有时间步中都使用同样的规则背景网格，背景网格并不随时间变化。从式 (2-13) 可以看出，第 p 个质点的位移的空间导数由它所在的立方体网格的结点来计算。第 p 个质点所在的网格的编号很容易由以下几条 Fortran 程序计算得到：

```
NumCellx = int((SpanX(2)-SpanX(1))/DCell + 0.5)
NumCelly = int((SpanY(2)-SpanY(1))/DCell + 0.5)
NumCellxy = NumCellx * NumCelly

ix = ceiling((xp-SpanX(1))/DCell)
iy = ceiling((yp-SpanY(1))/DCell)
iz = ceiling((zp-SpanZ(1))/DCell)
InWhichCell = (iz - 1)*NumCellxy + (iy - 1)*NumCellx + ix
```

其中 xp， yp 和 zp 是第 p 个质点的坐标， DCell 网格大小， SpanX， SpanY 和 SpanZ 定义的整个背景网格最小和最大的坐标值，InWhichCell 是网格的编号。

在得到了网格的编号后，相应的背景网格结点将可以从数组中直接得到而不需要额外的计算开销。因此，MPM 在定义结点关联上的计算开销要比 SPH 小的多。

6.3.2 近似函数

SPH 一个重要的特点是近似函数和积分的计算都不需要网格。函数的积分形式表示及其导数式 (6-1) 和 (6-3) 被转化成对$\boldsymbol{x}$点支持域内所有质点求和的离散形式，即式 (6-4) 和 (6-5) 或 (6-6) 和 (6-7)。为了确保精度和数值稳定性，需要取足够大的支撑域，也就是求和中要包含足够的质点（积分点）。

和 SPH 相比，MPM 中使用传统的有限元近似函数来计算场变量及其导数。由式 (2-12) 和 (2-13)，近似函数建立在背景网格结点上，质点上的值由质点所在网格的结点信息来计算。MPM 中只需要对 8 个结点求和，SPH 中则需要对 N

个邻居质点求和，见 (6-6) 式和 (6-7) 式，而 N 通常都是大于 8 的。因此用于计算近似函数及其导数的计算量，SPH 也大于 MPM。

在 Bardenhagen 等[84]提出的 GIMP 方法中，近似函数可以具有连续的导数。这种方法增加了计算量，但在精度和稳定性上有所提高。图 6.1 显示了 SPH、MPM 和 GIMP 典型的近似函数。

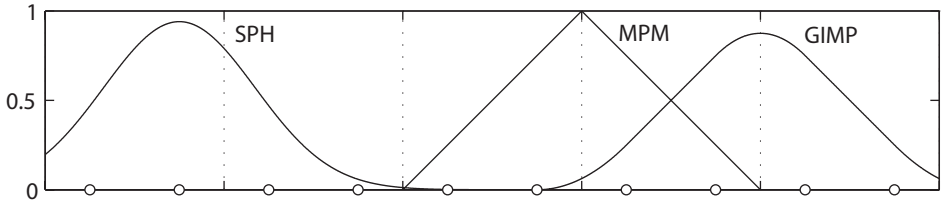


图 6.1　典型的SPH、MPM 和 GIMP 的一维近似函数，圆圈表示质点位置。

由于在每个时间步中都使用相同的规则背景网格，传统有限元中网格畸变的问题在 MPM 得以避免。

值得注意的是在 SPH 计算中，经常采用以下的密度近似公式[58]

$$\rho(x_i) = \sum_{J=1}^{N} m_J W_J(x_i) \tag{6-15}$$

这种方式使得密度场被核函数光滑了。SPH 和 MPM 中的质点都携带质量，区别在于式 (6-15) 中的核函数在 MPM 中被 δ 函数代替，如式 (2-15)。

6.3.3　形函数的一致性

要保证一个数值方法的收敛性，这个方法所采用的形函数必须满足一定的一致性（consistency）条件。零阶一致性条件为

$$\sum_{J=1}^{N} W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_J, h)\frac{m_J}{\rho_J} = 1 \tag{6-16}$$

一阶一致性条件为

$$\sum_{J=1}^{N} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_J) W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_J, h)\frac{m_J}{\rho_J} = 0 \tag{6-17}$$

而在 SPH 中，由于质点是任意分布的，在以下两个条件下，一致性条件就不能得到满足

1. 质点位于边界上或边界附近，其支撑域和边界相交，即便质点是规则分布的。
2. 质点不规则分布，即便质点位于域内，其支撑域和边界不相交。

尽管用不同方式可以对一致性问题进行修正[58,62]，但在一些动力学问题的模拟中，仍可能带来负密度或负能量等问题[52]，甚至造成整个计算终止。

在采用了密度近似 (6-15) 式后，近似函数变成了 Shepard 函数，零阶一致性得以满足，计算结果也得到改进，但在以上两个条件下，一阶一致性仍然不能满足。

在 MPM 中，由于采用了传统有限元的形函数，零阶一致性和一阶一致性均得到满足。对 GIMP 而言，其形函数与核函数近似。均匀背景网格的情况下，除了在边界，两个一致性条件均可以满足。

6.3.4 不稳定性

在 SPH 被拓展到固体动力学后，拉伸不稳定性（tensile instability）的问题暴露出来[71,183]。其原因是在 SPH 以往的应用领域，天体物理和流体力学，通常不会有拉伸应力的状态。在 SPH 的计算中，如果材料处于拉伸应力状态，质点就容易出现聚集，从而形成空洞。有时，这种不稳定性会造成非物理的数值断裂。

SPH 将支撑域上的积分转为对若干质点的求和，这和无网格 EFG 法中采用的结点积分[184]类似。然而不足的采样点会造成数值不稳定。当质点在拉应力的状态下，质点的运动会不稳定，在计算中造成质点聚集堆积甚至飞散[71]，这被称为拉伸不稳定性。研究者提出了几种方法改进拉伸不稳定性问题，如采用特殊的光滑函数[185]，或者修正 SPH 方法（CSPH）[186]，施加人工力[187]，或增加应力点[188,189]。

与 SPH 不同，在 MPM 中采用背景网格结点来建立近似函数，而物质点作为积分点。通常物质点的数量是多于结点的，因此在 MPM 中并不存在拉伸不稳定性的问题。

在一些 MPM 的计算中，在变形过程中，当物质点穿过网格边界时，会造成

应力或速度结果产生数值振荡。造成振荡的原因，一是在质点穿过网格时，造成结点质量发生突变，另外有限元形函数的 C^0 连续性，造成场函数的导数突变。Bardenhagen 等提出了广义插值的物质点法 GIMP[84]，对解决数值振荡问题提供了有效的工具。

6.3.5 时间积分

在 SPH 和 MPM 均采用显式时间积分，因此需要满足稳定性要求的临界时间步长，Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件：

$$\Delta t_{\mathrm{cr}} = \frac{h}{c} \tag{6-18}$$

其中 c 是材料声速，h 是单元或者质点的特征长度。临界时间步长，在 SPH 中由最小光滑长度决定[188]，而在 MPM 中则由背景网格结点间距[94]决定。由于 MPM 在整个计算过程中采用同样的背景网格，因此可以采用常时间步长。在 SPH 中，光滑长度 h 会随质点间距的变化而变化。在大变形问题中，当材料压缩时，光滑长度就会减小，从而造成时间步长的减小。

6.3.6 边界条件

值得注意的是，式(6-3) 在边界并不成立。其原因是在分部积分时，边界余项

$$\int_S u_i(\bar{\boldsymbol{x}}) W(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}, h) n_i \mathrm{d}S_{\bar{\boldsymbol{x}}} \tag{6-19}$$

并不消失。因此，施加边界条件并不像有限元中那么容易。早期 SPH 在流体动力学中的应用并不需要施加边界条件或者仅需要很简单的边界条件。同时，SPH 的近似函数不满足插值条件，质点上近似函数的值不等于原变量的值。这也给位移边界条件的施加增添了困难。

一些学者提出了对边界条件处理的改进方案。Campbell 等[190]在处理带有梯度的方程时把边界余项 (6-19) 考虑在内。另外也可以用添加虚拟质点的办法[58,59,158,191]来处理边界条件问题。

MPM 的求解格式从虚功方程 (2-11) 导出，因此自由界面上的边界条件自动满足。力边界条件需要选择一组物质点来表示边界，见式 (2-20)。由于采用彼岸准的有限元形函数，位移边界条件可以像有限元中一样，很容易施加到背景网格结点上。然而，对于 GIMP 方法而言，由于采用了光滑的，有更大影响域的形函数，边界条件的施加也需要进一步处理。类似 SPH 中边界条件的处理方式，可以通过在边界外再添加一层虚拟背景网格结点来施加位移边界条件。

6.3.7 接触算法

SPH 可以对接触边界不加特殊处理来模拟冲击问题。这时可以在搜索邻居质点时，将两个物体接触面附近的质点不加区分，从而自动的处理两物体接触。不过 SPH 并不保证单值的速度场，所以接触面难免出现一定的穿透和混合。为解决这个问题，Campbell 等[192]利用罚函数的方法来处理质点之间的接触。

与 SPH 不同，MPM 中的速度场是单值的，因此接触面不会发生材料嵌入，无滑移的接触条件自动满足。为了使得 MPM 模拟的接触界面在不嵌入的同时可以滑动，学者提出了允许接触滑移和分离的接触算法[85,86,88]。如果接触面处的两物体互相靠近，就求解动量方程 (2-16)，内力 f_{hi}^{int} 由所有接触物体贡献，则由 MPM 的算法自动保证无嵌入条件。如果两物体相互远离，则分别计算两物体的速度场，分别求解两个物体的动量方程，即

$$\dot{p}_{hi}^{I} = f_{hi}^{I,\text{int}} + f_{hi}^{I,\text{ext}}, \quad h = 1, 2, \cdots, n_g \tag{6-20}$$

其中内力 $f_{hi}^{I,\text{int}}$ 只由物体 I 贡献。这种接触算法的计算量和物体数量线性相关，不需迭代，只要遍历一次所有物体即可完成接触计算。因此比较适合处理大量物体的接触，如颗粒物质问题[86,90]。

6.4 算例比较

下面通过几个数值算例对 MPM 和 SPH 的计算精度和计算效率进行比较。在下面的算例中，SPH 模拟是采用 LS-DYNA 的 970 版本，MPM 是用我们编制的 MPM3D 程序。

6.4.1　单时间步比较

本节中暂不考虑时间步长的因素，只考虑在单个时间步中两种方法的计算量情况。

TPZC 是 Time Per Zone Cycle 的缩写，即每一质点在一个时间步的计算中耗费的时间。在 LS-DYNA 的输出中，TPZC 有专门记录，这个值反映了除时间步长因素外这个算法的计算量。SPH 的 TPZC 值主要和影响点搜索的效率相关，所以随质点数 N_p 增加，这个值也是不断增加的。MPM 中 TPZC 主要和背景网格结点数 N_g 与质点数 N_p 的比例相关，由于一般初始布置中，一个背景网格中都有多个质点，所以在进行网格和质点加密时，随着 N_p 的增加往往 N_g/N_p 一般不会显著增大，因而 TPZC 值也不会有显著变化，见表 6.1，其中 TPC=N_p×TPZC，反映了每个时间步所用计算时间。图 6.2 显示了两种方法的 TPC 随质点数 N_p 的变化，质点数越多，MPM 在效率上的优势越明显。

为了排除掉物体变形对计算效率的影响，在计算中，考查一没有变形的平动算例。因此所计算问题是边长 $L = 10$ mm 的方块以 200 m/s 的速度平动。

表 6.1　SPH 和 MPM 模拟中 TPZC 值以及 TPC 值的比较

N_p	SPH-TPZC (ns)	SPH-TPC (s)	MPM-TPZC (ns)	MPM-TPC (s)
1000	4424	0.00442	2038	0.00204
8000	11061	0.08849	2445	0.01956
64000	12859	0.82298	3236	0.20710
512000	14587	7.46854	3362	1.72134
1000000	14310	14.3100	3401	3.40100

6.4.2　Taylor 杆问题

考查铜杆以 190 m/s 的速度撞击刚性墙。在 SPH 模拟中，光滑长度分别设为 1.2 和 1.4，其中 1.2 是 LS-DYNA 的缺省值，将光滑长度变大，会增加计算量也会增加每个质点的邻居质点数。在下面图表中，这两种情况的计算结果分别用 SPH1 和 SPH2 来标识。我们也采用单点积分的显式有限元程序来计算这个问题以便进行比较。

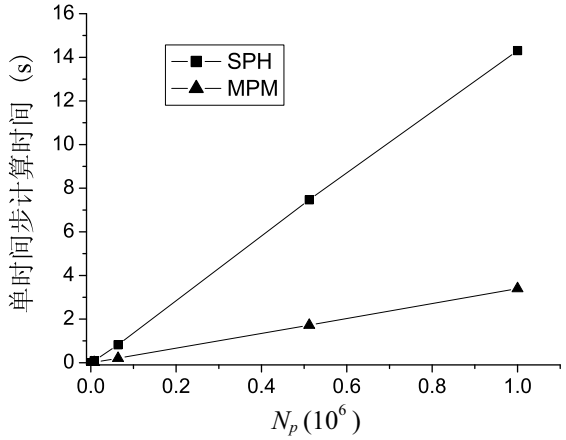


图 6.2　不同计算规模（N_p）下，单步运行时间（TPC）的比较

铜杆的初始长度为 $L_0 = 25.4$ mm，初始直径为 $D_0 = 7.6$ mm。初始时质点均匀分布，质点间距设为 0.38 mm。总共采用 21172 个质点来离散。采用 Johnson-Cook 材料模型，参数见表 6.2。

表 6.2　材料参数[152]

ρ (kg/m^3)	E (GPa)	ν	A (MPa)	B (MPa)	n	C
8930	117	0.35	157	425	1.0	0.0

模拟时间为 80μs，此时动能达到零基本不再变化。表 6.3 对 SPH 和 MPM 的模拟结果和试验结果进行了比较。结果表明在这一算例中，MPM 比 SPH 精度更好，而采用更大光滑长度的 SPH 方法精度也会有所提高。平均误差 $\bar{\Delta}$ 按式 (4-24) 的定义。

表 6.4 比较了最大时间步长 $\Delta t_{\max}$，最小时间步长 $\Delta t_{\min}$，以及 SPH 和 MPM 模拟中的实际时间步数。对所有计算，时间步长因子 α 都设为 0.8。

图 6.3 和 6.4 比较了两种方法金属杆的最终构型的模拟结果。从图 6.4(a) 可以看出由于拉伸不稳定性，SPH 算法会造成数值断裂的现象。而增大了光滑长度的 SPH2 会缓解数值断裂问题。另外，从表 6.4 也可以看到，增大光滑长度可以增大临界时间步长，减少时间步，但同时也增加了影响点个数，从而增加了单步运行的时间，总的计算时间还是会有所增加。

表 6.3　计算结果误差比较

	L (mm)	D (mm)	W (mm)	$\bar{\Delta}$
实验	16.2	13.5	10.1	-
SPH1	15.4	15.6	9.9	0.075
SPH2	15.5	14.7	10.0	0.047
MPM	16.3	13.0	9.6	0.031
FEM	16.3	13.2	10.1	0.009

表 6.4　时间步长的变化

	$\Delta t_{\max}$ (μs)	$\Delta t_{\min}$ (μs)	时间步
SPH1	0.120	0.118	672
SPH2	0.140	0.138	576
MPM	0.133	0.133	604
FEM	0.0398	0.0123	5486

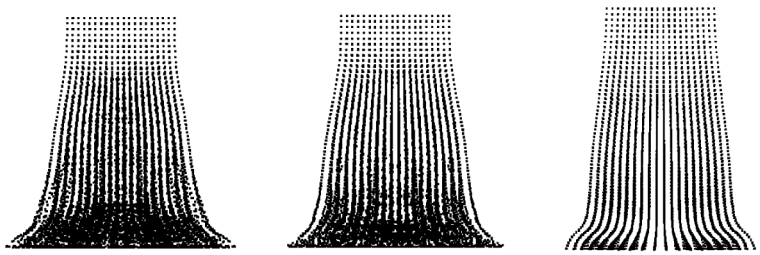


图 6.3　最终时刻铜杆的构型。(a) SPH1，(b) SPH2，(c) MPM

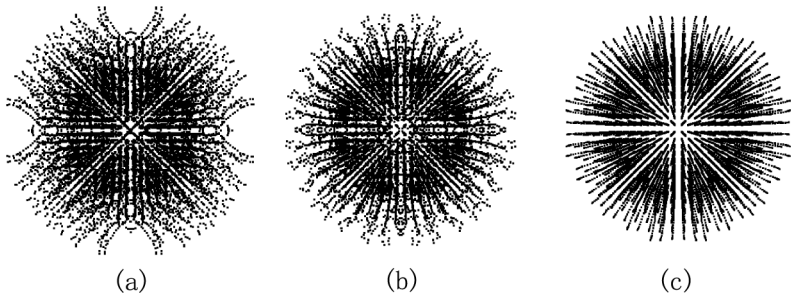


图 6.4　最终时刻铜杆的构型（俯视图）。(a) SPH1，(b) SPH2，(c) MPM

6.4.3　超高速碰撞问题

碎片云是由弹丸超高速碰撞薄板形成的。Beissel 等[67]采用可以将畸变的有限单元转变成无网格质点的耦合方法 模拟了球形铝弹丸超高速碰撞铝薄板的问题。这里，我们分别采用 SPH 和 MPM 来模拟这个铝铝碰撞的问题。球形弹丸直径为 16 mm，圆盘形靶板的厚度为 0.8 mm，直径为 60 mm。几何尺寸和原算例略有差别，但不至于对结果造成影响。弹丸速度为 6150 m/s。质点间距设置为 0.2 mm，总共采用 550848 个质点离散。采用线性强化的弹塑性模型以保证两种方法中的材料参数完全一致，材料参数见表 6.5。Grüneisen 状态方程的参数[21]为：$C_0 = 5300$ m/s, $S_1 = 1.34, \Gamma_0 = 2.0$。

表 6.5　铝的材料参数

	$\rho(\mathrm{kg/m^3})$	E(GPa)	ν	σ_y(MPa)	E_t(MPa)	$\varepsilon^p_{\max}$	$p_{\min}$(MPa)
弹	2790	72.4	0.33	276	200	2.5	-5000
靶	2700	68.9	0.33	276	200	2.0	-4000

图 6.5 显示了碰撞后 8μs 的碎片云计算结果和试验结果的比较。SPH 模拟得到的碎片云中的碎片比 MPM 得到的更大，如前述分析，这可能是由于拉伸不稳定性引起的质点团聚造成的。从碎片云外形来说，SPH模拟结果也和试验结果差别较大。针对 SPH 法的不稳定性和不一致性，研究者提出了数种改进方案，并且其中的一些在高速碰撞的模拟中取得较好的效果[68]，然而由于处理方案多样，尚没有足够成熟而得到普遍的认可的方法，在 LS-DYNA 的 970 版本中还没有引入对不稳定性和不一致性的特殊处理。

MPM 模拟的结果反映碎片云形貌的效果相对和实验图像更为接近。在这一算例中，如果采用 GIMP 算法，对碎片云构型的结果没有显著影响，因此仍旧采用了效率更高的 MPM。

从表 6.6 中时间步长的对比可以看出，由于材料剧烈的压缩，SPH 模拟的临界时间步长显著的减小了。因此在初始时间步长基本一样的情况下，完成同样计算，SPH 要比 MPM 需要更多的时间步。

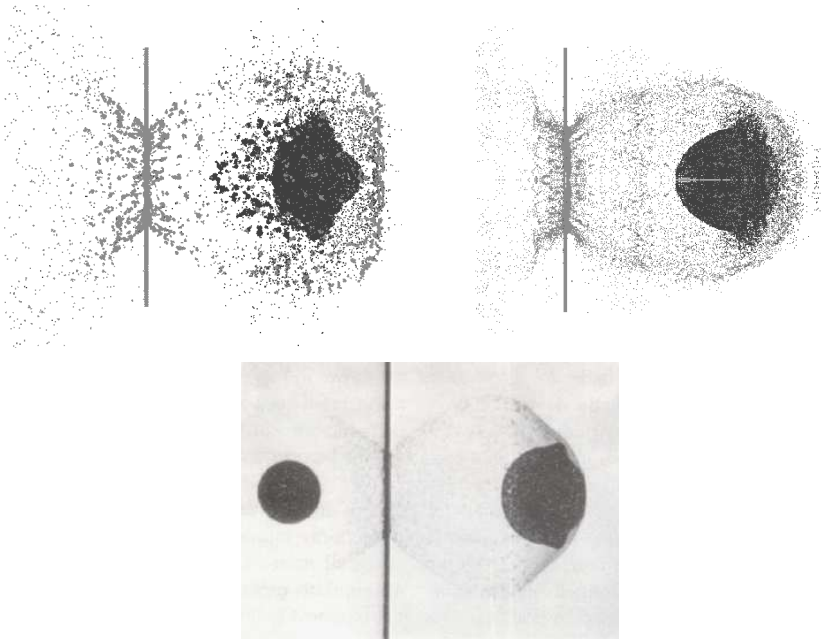


图 6.5　碰撞后 8μs 的碎片云构型，SPH（左上），MPM（右上）和实验[67]（下）

表 6.6　在碎片云模拟中时间步长的变化情况

	$\Delta t_{\max}$ (μs)	$\Delta t_{\min}$ (μs)	时间步
SPH	0.0282	0.0074	1059
MPM	0.0290	0.0290	276

6.5　小结

SPH 和 MPM 是两种比较适合用于冲击爆炸问题的质点方法。本章从影响点搜索、形函数特点、稳定性、时间积分、边界条件和接触算法等方面对两种方法进行了比较，通过 Taylor 杆问题和超高速碰撞问题的模拟对两种方法进行比较和分析。

第 7 章　结论

7.1　研究成果

针对有限元在求解超高速碰撞问题遇到的网格畸变这一困难，借鉴物质点法的思想，提出了物质点有限元法。在物质点有限元的模拟中，仍用有限单元离散物体，在大变形区域布置背景网格，被背景网格覆盖的区域将结点视为物质点，用物质点法进行计算，其他区域仍用有限元法求解，从而解决有限元法中网格畸变的问题。通过 Taylor 杆碰撞的模拟，说明此方法和有限元相比，显著的提高了求解效率。将物质点有限元法用于弹丸超高速碰撞薄板的模拟，解决了有限元无法刻画碎片云的问题，较好的描述了碎片云的形成过程。

针对物质点法存在的数值断裂问题，本文提出了在物质点法中自适应分裂质点的方案，使质点可以根据累计应变，在变形最大的方向上自适应分裂，从而克服了物质点法的数值断裂问题。将自适应分裂质点物质点法用于激波管、爆轰驱动飞片、聚能射流等问题的数值模拟和分析，取得了较好的效果。

对物质点法和 SPH 两种质点类方法，从影响点搜索、形函数特点、稳定性、时间积分、边界条件和接触算法等方面进行了比较，通过 Taylor 杆问题和超高速碰撞问题的模拟对两种方法的效率和精度进行了比较和分析。

编制了可用于冲击爆炸问题模拟的三维显式物质点法程序 MPM3DPP，引入多种弹塑性模型、状态方程和损伤失效模型，用该程序对超高速碰撞问题和爆炸问题进行了三维数值模拟。

本文的工作主要有以下三个创新点：

1，提出物质点有限元法，用于超高速碰撞的模拟。

2，提出了物质点法的质点自适应分裂方案，避免了数值断裂，并将自适应物质点法用于激波管、爆轰驱动飞片、聚能射流等问题的数值模拟。

3，在理论和算法研究的基础上，研制了可用于冲击爆炸问题的三维显式物质点法程序，为进一步的开发和应用提供了一个有效的平台。

7.2　需进一步开展的工作及展望

冲击爆炸问题非常复杂，本文只是对应用于冲击爆炸问题的数值方法进行了初步的研究，还需要在以下几个方面进一步开展研究工作。

本文引入几种材料模型和状态方程，对几种典型的冲击爆炸问题进行了模拟，但还需要对问题进行更深入的分析。这就需要根据问题的要求引入更精确的材料模型和状态方程。比如混凝土和岩石在冲击载荷下的破坏是工程界非常关注的问题，如何引入合适的材料模型对这类材料进行模拟还有待进一步研究。对于含铝炸药等非理想爆轰的研究也需要考虑非定常的反应率函数。

对 MPM3DPP 程序的进一步验证与确认。从工程的角度来看，一个计算机程序，如果没有经过验证和确认（Verification and validation，V&V），其模拟结果是不可信的。美国的国防部与能源部是 V&V 相关概念形成和研究工作开展的主要推动者[193]。国内学者也很重视计算机程序的可靠性研究，邓小刚等对验证与确认的研究进行了综述[194]。对 MPM3DPP 程序还需要进一步的验证与确认，需要用更多的算例对程序进行考核。

进行大规模并行计算是当今数值模拟研究的趋势，利用 MPI、OpenMP 等技术实现可靠的大规模计算，才能充分发挥计算机硬件的效率和数值模拟的作用，对所研究的问题有更深入了解。

借助于分子动力学、第一原理计算等方法进行材料的微观模拟，以及利用多尺度方法进行材料模拟，有助于对材料动态响应有更本质和更深入的理解。

参考文献

[1] 张庆明, 黄风雷. 超高速碰撞动力学引论. 北京, 科学出版社, 2000.

[2] 恽寿榕, 赵衡阳. 爆炸力学. 北京: 国防工业出版社, 2005.

[3] 王礼立. 应力波基础. 北京: 国防工业出版社, 2005.

[4] Quinn M J. Parallel programming in C with MPI and OpenMP. 北京: 清华大学出版社, 2005.

[5] http://www.top500.org/.

[6] Computational Science: Ensuring America's Competitiveness. Technical report, President's Information Technology Advisory Committee, 2005.

[7] 恽寿榕, 涂侯杰, 梁德寿, 等. 爆炸力学计算方法. 北京: 北京理工大学出版社, 1995.

[8] Johnson N L. The Legacy and Future of CFD At Los Alamos. Technical Report LA-UR-96-1426, Los Alamos National Laboratory, 1996.

[9] Zukas J A. Introduction to Hydrocodes. Elsevier Science, 2004.

[10] 张雄, 王天舒. 计算动力学. 北京: 清华大学出版社, 2007.

[11] 洪友士. 郑哲敏对应用力学和技术科学的贡献. 力学进展, 2005, 35(1):1–4.

[12] Anderson J D. Computational Fluid Dynamics, the Basics with Applications. 北京: 清华大学出版社, 2002.

[13] McGlaun J M, Thompson S L, Elrick M G. CTH: A three-dimensional shock wave physics code. International Journal of Impact Engineering, 1990, 10:351–360.

[14] Scheffler D R. Modeling non-eroding perforation of an oblique aluminum target using the Eulerian CTH hydrocode. International Journal of Impact Engineering, 2005, 32:461–472.

[15] Huerta M, Vigil M G. Design, analyses, and field test of a 0.7 m conical shaped charge. International Journal of Impact Engineering, 2006, 32(8):1201–1213.

[16] Berger M, Oliger J. Adaptive Mesh Refinement For Hyperbolic Partial-Differential Equations. Journal of Computational Physics, 1984, 53(3):484–512.

[17] Berger M, Colella P. Local Adaptive Mesh Refinement for Shock Hydrodynamics. Journal of Computational Physics, 1989, 82(1):64–84.

[18] MacNeice P, Olson K M, Mobarry C, et al. PARAMESH: A parallel adaptive mesh refinement community toolkit. Computer Physics Communications, 2000, 126:330–354.

[19] Luketa-Hanlin A, Attaway S. Massively parallel computations of damage to a thin-walled structure from blast. Proceedings of ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Seattle, WA: Amer Soc Mechanical Engineers, 2007. 887–891.

[20] http://www.sandia.gov/media/NewsRel/NR2001/cth.htm.

[21] Wilkins M L. Computer Simulation of Dynamic Phenomena. Spinger, 1999.

[22] Wingate C A, Stellingwerf R F, RF D, et al. Models of High Velocity Impact Phenomena. International Journal of Impact Engineering, 1993, 14:819–830.

[23] Meyer H W Jr. A Modified Zerilli-Armstrong Constitutive Model Describing the Strength and Localizing Behavior of Ti-6Al-4V. Technical Report ARL-CR-0578, Army Research Laboratory, 2006.

[24] Attaway S W, Brown M J, Heinstein M W, et al. PRONTO3D User's Instructions: A Transient Dynamic Code for Nonlinear Structural Analysis. Sandia National Laboratory, 1998.

[25] Bessette G C, Bixler N E, Hewson J C, et al. Methodology Assessment and Recommendations for the Mars Science Laboratory Launch Safety Analysis. Technical Report SAND2006-4563, Sandia National Laboratories, 2006.

[26] Hallquist J O. LS-DYNA Theoretical Manual. Livermore Software Technology Corporation, 1998.

[27] Zukas J A, (eds.). High Velocity Impact Dynamics. John Wiley & Sons, 1990.

[28] 宁建国, 刘凯欣, 何长江, 等., 编. 第四届全国计算爆炸力学会议论文集, 2008.

[29] 马天宝, 郝莉, 宁建国. Euler多物质流体动力学数值方法中的界面处理算法. 计算物理, 2008, 25(2):133–138.

[30] Ma T B, Wang C, Ning J G. Multi-material Eulerian Formulations and Hydrocode for the Simulation of Explosions. CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2008, 33(2):155–178.

[31] 刘军, 何长江, 梁仙红. 三维弹塑性流体力学自适应欧拉方法研究. 高压物理学报, 2008, 22(1):72–78.

[32] 冯其京, 郝鹏程, 杭义洪, 等. 聚能装药的欧拉数值模拟. 爆炸与冲击, 2008, 28:138–143.

[33] 王景焘, 张德良, 刘凯欣. 基于CE/SE方法的二维Euler 型多物质流体弹塑性问题计算. 计算物理, 2007, 24(4):395–401.

[34] Wang G, Zhang D L, Liu K X. An improved CE/SE scheme and its application to detonation propagation. Chinese Physics Letters, 2007, 24(12):3563–3566.

[35] Wang J, Liu K, Zhang D. An improved CE/SE scheme for multi-material elastic-plastic flows and its applications. Computers & Fluids, 2009, 38(3):544–551.

[36] 张雄, 陆明万, 王建军. 任意拉格朗日-欧拉描述法研究进展. 计算力学学报, 1997, 14(1):91–102.

[37] Alme M L, Rhoades C E. A Computational Study Of Projectile Melt in Impact With Typical Whipple Shields. International Journal of Impact Engineering, 1995, 17:1–12.

[38] Souli M, Ouahsine A, Lewin L. ALE formulation for fluid-structure interaction problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, 190:659–675.

[39] Harlow F H. The particle-in-cell computing method for fluid dynamics. Methods in Computational Physics, 1964, 3:319–345.

[40] Sulsky D, Chen Z, Schreyer H L. A Particle Method for History-Dependent Materials. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, 118(1-2):179–196.

[41] Sulsky D, Zhou S J, Schreyer H L. Application of a Particle-in-Cell Method to Solid Mechanics. Computer Physics Communications, 1995, 87(1-2):236–252.

[42] Lucy L. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. Astrophysical journal, 1977, 82:1013.

[43] Gingold R A, Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. Monthly notices of the Royal Astronomical Society, 1977, 181:375–389.

[44] Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics. Annual review of astronomy and astrophysics, 1992, 30:543–574.

[45] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element free Galerkin methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37:229–256.

[46] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless methods: An overview and recent developments. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139(1-4):3–47.

[47] Li S, Liu W K. Meshfree and particle methods and their applications. Applied Mechanics Reviws, 2002, 55(1):1–34.

[48] 张雄, 刘岩, 马上. 无网格法的理论与应用. 力学进展, 2009, 39:1–36.

[49] 张雄, 刘岩. 无网格法. 北京: 清华大学出版社/Springer, 2004.

[50] Atluri S N. The Meshless Method (MLPG) for Domain & BIE Discretizations. Tech. Science Press, 2004.

[51] Li S, Liu W K. Meshfree Particle Methods. Springer, 2004.

[52] Liu G R, Liu M B. Smoothed Particle Hydrodynamics: a meshfree particle method. World Scientific, 2003.

[53] 李长生, 熊尚武, Rodrigues J, 等. 金属塑性加工过程无网格数值模拟方法. 沈阳: 东北大学出版社, 2004.

[54] 刘更, 刘天祥, 谢琴. 无网格法及其应用. 西安: 西北工业大学出版社, 2005.

[55] Idelsohn S R, Onate E. To mesh or not to mesh. That is the question... Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195(37-40):4681–4696.

[56] Idelsohn S R, Onate E, Del Pin F. The particle finite element method: a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 61(7):964–989.

[57] Brackbill J U. Particle methods. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2005, 47(8-9):693–705.

[58] Randles P W, Libersky L D. Smoothed particle hydrodynamics: Some recent improvements and applications. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139(1-4):375–408.

[59] Libersky L, Petschek A G, Carney T C, et al. High strain largrangian hydrodynamics – a three-dimensional SPH code for dynamics material response. Journal of Computational Physics, 1993, 109:67–75.

[60] Stellingwerf R, Wingate C. Impact modeling with smooth particle hydrodynamics. International Journal of Impact Engineering, 1993, 14:707–718.

[61] Benz W, Asphaug E. Simulations of Brittle Solids Using Smooth Particle Hydrodynamics. Computer Physics Communications, 1995, 87(1-2):253–265.

[62] Johnson G R, Beissel S R. Normalized smoothing functions for SPH impact computations. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996, 39(16):2725–2741.

[63] Johnson G R, Stryk R A, Beissel S R. SPH for high velocity impact computations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139(1-4):347–373.

[64] Johnson G R, Beissel S R, Stryk R A. A Generalized Particle Algorithm for high velocity impact computations. Computational Mechanics, 2000, 25(2-3):245–256.

[65] Johnson G R, Beissel S R, Stryk R A. An improved generalized particle algorithm that includes boundaries and interfaces. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 53(4):875–904.

[66] Johnson G R, Stryk R A. Conversion of 3D distorted elements into meshless particles during dynamic deformation. International Journal of Impact Engineering, 2003, 28(9):947–966.

[67] Beissel S R, Gerlach C A, Johnson G R. Hypervelocity impact computations with finite elements and meshfree particles. International Journal of Impact Engineering, 2006, 33(1-12):80–90.

[68] Rabczuk T, Eibl J. Modelling dynamic failure of concrete with meshfree methods. International Journal of Impact Engineering, 2006, 32(11):1878–1897.

[69] Riedel W, Nahme H, White D M, et al. Hypervelocity impact damage prediction in composites: Part II - experimental investigations and simulations. International Journal of Impact Engineering, 2006, 33(1-12):670–680.

[70] Michel Y, Chevalier J M, Durin C, et al. Hypervelocity impacts on thin brittle targets: Experimental data and SPH simulations. International Journal of Impact Engineering, 2006, 33(1-12):441–451.

[71] Swegle J W, Attaway S W. On the feasibility of using smoothed particle Hydrodynamics for underwater explosion calculations. Computational Mechanics, 1995, 17(3):151–168.

[72] Liu M B, Liu G R, Zong Z, et al. Computer simulation of high explosive explosion using smoothed particle hydrodynamics methodology. Computers & Fluids, 2003, 32(3):305–322.

[73] Liu M B, Liu G R, Lam K Y, et al. Meshfree particle simulation of the detonation process for high explosives in shaped charge unlined cavity configurations. Shock Waves, 2003, 12(6):509–520.

[74] Wingate C A, Stellingwerf R F. Smooth Particle Hydrodynamics - The SPHINX and SPHC Codes. Technical Report LA-UR-93-1938, Los Alamos National Laboratory, 1993.

[75] Mandell D A, Wingate C A. Prediction of material strength and fracture of glass using the SPHINX smooth particle hydrodynamics code. Technical Report LA-12830, Los Alamos National Laboratory, 1994.

[76] Hayashida K, Hill S. Comparisons of hydrocode simulation results using CTH and SPHINX. Proceedings of AIAA Space Programs and Technologies Conference, Huntsville, 1995.

[77] Wilson L T, Hertel E, Schwalbe L, et al. Benchmarking the SPHINX and CTH shock physics codes for three problems in ballistics. Technical Report sand-98-0414c, Sandia National Laboratory, 1998.

[78] Fahrenthold E P, Horban B A. An improved hybrid particle-element method for hypervelocity impact simulation. International Journal of Impact Engineering, 2001, 26(1-10):169–178.

[79] Park Y K, Fahrenthold E P. A kernel free particle-finite element method for hypervelocity impact simulation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, 63(5):737–759.

[80] Han Z D, Liu H T, Rajendran A M, et al. The application of Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approaches in High Speed Impact, Penetration and Perforation Problems. CMES: Computer Modeling in Engineering & Science, 2006, 14:119–128.

[81] Brackbill J U, Ruppel H M. FLIP: a method for adaptively zoned, particle-in-cell calculations in two dimensions. Journal of Computational Physics, 1986, 65:314–343.

[82] Brackbill J U, Kothe D B, Ruppel H M. FLIP: a low-dissipation, particle-in-cell method for fluid flow. Computer Physics Communications, 1988, 48:25–38.

[83] Sulsky D, Schreyer H L. Axisymmetric form of the material point method with applications to upsetting and Taylor impact problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139(1-4):409–429.

[84] Bardenhagen S G, Kober E M. The generalized interpolation material point method. Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2004, 5(6):477–495.

[85] York A R, Sulsky D, Schreyer H L. The material point method for simulation of thin membranes. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 44(10):1429–1456.

[86] Bardenhagen S G, Brackbill J U, Sulsky D. The material-point method for granular materials. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, 187(3-4):529–541.

[87] Bardenhagen S G, Guilkey J E, Roessig K M, et al. An improved contact algorithm for the material point method and application to stress propagation in granular material. Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2001, 2(4):509–522.

[88] Hu W, Chen Z. A multi-mesh MPM for simulating the meshing process of spur gears. Computers & Structures, 2003, 81(20):1991–2002.

[89] Nairn J A. Material point method calculations with explicit cracks. Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2003, 4(6):649–663.

[90] Pan X F, Xu A G, Zhang G C, et al. Three-dimensional multi-mesh material point method for solving collision problems. Communications in Theoretical Physics, 2008, 49(5):1129–1138.

[91] Tan H L, Nairn J A. Hierarchical, adaptive, material point method for dynamic energy release rate calculations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, 191(19-20):2095–2109.

[92] Love E, Sulsky D L. An energy-consistent material-point method for dynamic finite deformation plasticity. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 65(10):1608–1638.

[93] Love E, Sulsky D L. An unconditionally stable, energy-momentum consistent implementation of the material-point method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195(33-36):3903–3925.

[94] Sulsky D, Kaul A. Implicit dynamics in the material-point method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193(12-14):1137–1170.

[95] Zhang X, Sze K Y, Ma S. An explicit material point finite element method for hyper-velocity impact. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 66(4):689–706.

[96] Cummins S J, Brackbill J U. An implicit particle-in-cell method for granular materials. Journal of Computational Physics, 2002, 180(2):506–548.

[97] Guilkey J E, Weiss J A. Implicit time integration for the material point method: Quantitative and algorithmic comparisons with the finite element method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 57(9):1323–1338.

[98] York A R, Sulsky D, Schreyer H L. Fluid-membrane interaction based on the material point method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 48(6):901–924.

[99] Guo Y, Nairn J A. Calculation of J-integral and stress intensity factors using The Material Point Method. Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2004, 6(3):295–308.

[100] Nairn J A. On the calculation of energy release rates for cracked laminates with residual stresses. International Journal of Fracture, 2006, 139(2):267–293.

[101] Wang B, Karuppiah V, Lu H, et al. Two-dimensional mixed mode crack simulation using the material point method. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2005, 12(6):471–484.

[102] Daphalapurkar N P, Lu H, Coker D, et al. Simulation of dynamic crack growth using the generalized interpolation material point (GIMP) method. International Journal of Fracture, 2007, 143(1):79–102.

[103] Chen Z, Hu W, Shen L, et al. An evaluation of the MPM for simulating dynamic failure with damage diffusion. Engineering Fracture Mechanics, 2002, 69(17):1873–1890.

[104] Chen Z, Feng R, Xin X, et al. A computational model for impact failure with shear-induced dilatancy. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 56(14):1979–1997.

[105] Chen Z, Shen L, Mai Y W, et al. A bifurcation-based decohesion model for simulating the transition from localization to decohesion with the MPM. Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Physik, 2005, 56(5):908–930.

[106] Shen L M, Chen Z. A multi-scale simulation of tungsten film delamination from silicon substrate. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42(18-19):5036–5056.

[107] Shen L M, Chen Z. A silent boundary scheme with the material point method for dynamic analyses. Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2005, 7(3):305–320.

[108] Schreyer H L, Sulsky D L, Zhou S J. Modeling delamination as a strong discontinuity with the material point method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, 191(23-24):2483–2507.

[109] Sulsky D, Schreyer L. MPM simulation of dynamic material failure with a decohesion constitutive model. European Journal of Mechanics a-Solids, 2004, 23(3):423–445.

[110] Bardenhagen S G, Brydon A D, Guilkey J E. Insight into the physics of foam densification via numerical simulation. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2005, 53(3):597–617.

[111] Brydon A D, Bardenhagen S G, Miller E A, et al. Simulation of the densification of real open-celled foam microstructures. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2005, 53(12):2638–2660.

[112] Wieckowski Z, Youn S K, Yeon J H. A particle-in-cell solution to the silo discharging problem. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 45(9):1203–1225.

[113] Wieckowski Z. The material point method in large strain engineering problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193(39-41):4417–4438.

[114] Bardenhagen S G, Brackbill J U, Sulsky D. Numerical study of stress distribution in sheared granular material in two dimensions. Physical Review E, 2000, 62(3):3882–3890.

[115] Coetzee C J, Basson A H, Vermeer P A. Discrete and continuum modelling of excavator bucket filling. Journal of Terramechanics, 2007, 44(2):177–186.

[116] Ayton G, Bardenhagen S G, McMurtry P, et al. Interfacing continuum and molecular dynamics: An application to lipid bilayers. Journal of Chemical Physics, 2001, 114(15):6913–6924.

[117] Ayton G, Smondyrev A M, Bardenhagen S G, et al. Interfacing molecular dynamics and macro-scale simulations for lipid bilayer vesicles. Biophysical Journal, 2002, 83(2):1026–1038.

[118] Guilkey J E, Hoying J B, Weiss J A. Computational modeling of multicellular constructs with the material point method. Journal of Biomechanics, 2006, 39(11):2074–2086.

[119] Ionescu I, Guilkey J E, Berzins M, et al. Simulation of soft tissue failure using the material point method. Journal of Biomechanical Engineering-Transactions of the Asme, 2006, 128(6):917–924.

[120] Lee W H, Painter J W. Material void-opening computation using particle method. International Journal of Impact Engineering, 1999, 22:1–22.

[121] Hu W Q, Chen Z. Model-based simulation of the synergistic effects of blast and fragmentation on a concrete wall using the MPM. International Journal of Impact Engineering, 2006, 32(12):2066–2096.

[122] Hu W. A Model-Based Simulation Tool for Impact/Blast-Resistent Structure Design[D]. University of Missouri-Columbia, 2004.

[123] Guilkey J E, Harman T B, Banerjee B. An Eulerian-Lagrangian approach for simulating explosions of energetic devices. Computers & Structures, 2007, 85(11-14):660–674.

[124] Parker S G, Guilkey J, Harman T. A component-based parallel infrastructure for the simulation of fluid-structure interaction. Engineering with Computers, 2006, 22(3-4):277–292.

[125] Huang P, Zhang X, Ma S, et al. Shared Memory OpenMP Parallelization of Explicit MPM and Its Application to Hypervelocity Impact. CMES: Computer Modeling in Engineering & Science, 2008, 38(2):119–147.

[126] Zhang H W, Wang K P, Chen Z. Material point method for dynamic analysis of saturated porous media under external contact/impact of solid bodies. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, 198(17-20):1456–1472.

[127] Shen Y L, Li W, Sulsky D L, et al. Localization of plastic deformation along grain boundaries in a hardening material. International Journal of Mechanical Sciences, 2000, 42(11):2167–2189.

[128] Borodin O, Bedrov D, Smith G D, et al. Multiscale modeling of viscoelastic properties of polymer nanocomposites. Journal of Polymer Science Part B-Polymer Physics, 2005, 43(8):1005–1013.

[129] Xue L P, Borodin O, Smith G D. Modeling of enhanced penetrant diffusion in nanoparticle-polymer composite membranes. Journal of Membrane Science, 2006, 286(1-2):293–300.

[130] Xue L P, Borodin O, Smith G D, et al. Micromechanics simulations of the viscoelastic properties of highly filled composites by the material point method (MPM). Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 2006, 14(4):703–720.

[131] Zhou S J, Stormont J, Chen Z. Simulation of geomembrane response to settlement in landfills by using the material point method. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1999, 23(15):1977–1994.

[132] Sulsky D, Schreyer H, Peterson K, et al. Using the material-point method to model sea ice dynamics. Journal of Geophysical Research-Oceans, 2007, 112(C2):C02S90.

[133] 王宇新, 顾元宪, 孙明. 无网格MPM法在冲击载荷问题中的应用. 工程力学, 2006, 23(5):46–51.

[134] 王宇新. 多相介质爆炸冲击响应物质点法分析[博士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2006.

[135] 王宇新, 陈震, 孙明. 滑移爆轰问题无网格MPM法模拟. 力学与实践, 2006, 29(3):20–25.

[136] 郑勇刚, 顾元宪, 陈震. 薄膜破坏过程数值模拟的MPM方法. 力学学报, 2006, 38(3):347–355.

[137] 马上, 张雄, 邱信明. 超高速碰撞问题的三维物质点法. 爆炸与冲击, 2006, 26(3):273–278.

[138] 王津龙, 刘天云, 张楚汉. 堆石体柱状试件成型过程的材料点法仿真. 清华大学学报（自然科学版）, 2005, 45(12):1604–1607.

[139] Belytschko T, Liu W K, Moran B. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. John Wiley & Sons, 2000.

[140] Anderson C E Jr. An overview of the theory of hydrocodes. International Journal of Impact Engineering, 1987, 5:33–59.

[141] Bardenhagen S G. Energy conservation error in the material point method for solid mechanics. Journal of Computational Physics, 2002, 180(1):383–403.

[142] Wallstedt P C, Guilkey J E. Improved velocity projection for the material point method. Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2007, 19(3):223–232.

[143] Meyers M A. Dynamic Behavior of Materials. John Wiley & Sons, 1994.

[144] Meyers M A 原著, 张庆明, 刘彦, 黄风雷, 等 译. 材料的动力学行为. 北京: 国防工业出版社, 2006.

[145] 李翼祺, 马素贞. 爆炸力学. 北京: 科学出版社, 1992.

[146] Zukas J A, Walters W P, (eds.). Explosive effects and applications. Springer, 1998.

[147] 孙锦山, 朱建士. 理论爆轰物理. 北京: 国防工业出版社, 1995.

[148] 陈朗, 龙新平, 冯长根, 等. 含铝炸药爆轰. 北京: 国防工业出版社, 2004.

[149] 张国伟, 韩勇, 苟瑞君, 编. 爆炸作用原理. 北京: 国防工业出版社, 2006.

[150] 汤文辉, 张若棋. 物态方程理论及计算概论. 长沙: 国防科技大学出版社, 1999.

[151] 王仁, 黄文彬, 黄筑平. 塑性力学引论. 北京: 北京大学出版社, 1992.

[152] Johnson G R, Holmquist T J. Evaluation of cylinder-impact test data for constitutive model constants. Journal of Applied Physics, 1988, 64(8):3901–3910.

[153] Zerilli F J, Armstrong R W. Dislocation-mechanics-based consitutive relations for material dynamics calculations. Journal of Applied Physics, 1987, 61(5):1816–1825.

[154] 彭建祥. Johnson-Cook本构模型和Steinberg本构模型的比较研究[博士学位论文]. 北京: 中国工程物理研究院, 2006.

[155] Steinberg D J, Cochran S G, Guinan M W. A Consitutive model for metals applicable at high-strain rate. Journal of Applied Physics, 1980, 51(3):1498–1504.

[156] Johnson G R, Cook W H. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. Engineering fracture mechanics, 1985, 21(1):31–48.

[157] 王永刚, 贺红亮, 陈登平, 等. 延性金属层裂模型比较. 爆炸与冲击, 2005, 25(5):467–471.

[158] Liu M B, Liu G R, Lam K Y. Investigation into water mitigations using a meshless particle method. Shock Waves, 2002, 12(3):181–195.

[159] Fiserova D. Numerical Analyses of Buried Mine Explosions with Emphasis on Effect of Soil Properties on Loading[D]. Cranfield University, 2006.

[160] Mader C L. Numerical Modeling of Explosives and Propellants. CRC Press, 1998.

[161] Mason J J, Rosakis A J, Ravichandran G. On the Strain and Strain-Rate Dependence of the Fraction of Plastic Work Converted to Heat - an Experimental-Study Using High-Speed Infrared Detectors and the Kolsky Bar. Mechanics of Materials, 1994, 17(2-3):135–145.

[162] Grandy J. Effecient Computation of Volume of Hexahedral Cells. Technical report, Lawrence Livermore National Laboratory, 1997.

[163] Shin Y S, Chisum J E. Modeling and simulation of underwater shock problems using coupled lagrangian-eulerian analysis approach. Shock and Vibration, 1997, 4(1):1–10.

[164] Sedov L I. Similarity and Dimensional Methods in Mechanics. 10th ed., CRC Press, 1993.

[165] http://flash.uchicago.edu/˜ahaque/sedov.html.

[166] Flangan D P, Belytschko T. A uniform strain hexahedron and quadrilaterial with orthogonal hourglass control. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1981, 17:679–706.

[167] Anderson C E, Timothy J, Trucano G, et al. Debris cloud dynamics. International Journal of Impact Engineering, 1990, 9(1):89–113.

[168] Moresi L, Dufour F, Muhlhaus H B. A Lagrangian integration point finite element method for large deformation modeling of viscoelastic geomaterials. Journal of Computational Physics, 2003, 184(2):476–497.

[169] Knight D D. Elements of Numerical Methods for Compressible Flows. Cambridge University Press, 2006: P.33–36.

[170] Sod G A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. Journal of Computational Physics, 1978, 27:1–31.

[171] Lee W H. Computer Simulation of Shaped Charge Problems. World Scientific, 2006.

[172] Molinari J F. Finite element simulation of shaped charges. Finite Elements in Analysis and Design, 2002, 38(10):921–936.

[173] Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics. Reports on Progress in Physics, 2005, 68(8):1703–1759.

[174] Faraud M, Destefanis R, Palmieri D, et al. SPH simulations of debris impacts using two different computer codes. International Journal of Impact Engineering, 1999, 23(1):249–260.

[175] Groenenboom P H L. Numerical simulation of 2D and 3D hypervelocity impact using the SPH option in PAM-SHOCK(TM). International Journal of Impact Engineering, 1997, 20(1-5):309–323.

[176] 马上. 超高速碰撞问题的三维物质点法模拟[硕士学位论文]. 清华大学, 2005.

[177] Libersky L D, Petschek A G. Smooth particle hydrodynamics with strength of materials. Advances in the Free-Lagrange Method, Lecture Notes in Physics, 1990, 395:248–257.

[178] Hernquist L, Katz N. Treesph: a unification of SPH with the hierarchical tree method. The Astrophysical Journal Supplement Series, 1989, 70:419–446.

[179] Waltz J, Page G L, Milder S D, et al. Aperformance comparison of tree data structures forN-body simulation. Journal of Computational Physics, 2002, 178:1–14.

[180] Capuzzo-Dolcetta R, Miocchi P. A comparison between the fast multipole algorithm and the tree-code to evaluate gravitational forces in 3-D. Journal of Computational Physics, 1998, 143:29–48.

[181] Munjiza A, Andrews K R F. NBS contact detection algorithm for bodies of similar size. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, 43:131–149.

[182] Batra R C, Zhang G M. Search algorithm, and simulation of elastodynamic crack propagation by modified smoothed particle hydrodynamics (MSPH) method. Computational Mechanics, 2007, 40:531–546.

[183] Balsara D S. Von-Neumann Stability Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics - Suggestions for Optimal-Algorithms. Journal of Computational Physics, 1995, 121(2):357–372.

[184] Beissel S, Belytschko T. Nodal integration of the element-free Galerkin method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139:49–74.

[185] Morris J P. Analysis of smoothed particle hydrodynamics with applications[D]. Monash University, 1996.

[186] Chen J K, Beraun J E, Jih C J. An improvement for tensile instability in smoothed particle hydrodynamics. Computational Mechanics, 1999, 23:279–287.

[187] Monaghan J J. SPH without a tensile instability. Journal of Computational Physics, 2000, 159:290–311.

[188] Dyka C T, Randles P W, Ingel R P. Stress points for tension instability in SPH. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, 40(13):2325–2341.

[189] Randles P W, Libersky L D. Normalized SPH with stress points. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 47:1445–1462.

[190] Campbell P M. Some new algorityms for boundary value problems in smoothed particle dynamics. DNA Report, 1989, DNA-TR-88-286.

[191] Monaghan J J. Simulating free surface flow with SPH. Journal of Computational Physics, 1994, 110:399.

[192] Campbell J, Vignjevic R, Libersky L. A contact algorithm for smoothed particle hydrodynamics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, 184(1):49–65.

[193] Oberkampf W L, Trucano T G, Hirsch C. Verification, validation, and predictive capability in computational engineering and physics. Applied Mechanics Reviews, 2004, 57(5):345–384.

[194] 邓小刚, 宗文刚, 张来平, 等. 计算流体力学中的验证与确认. 力学进展, 2007, 37(2):279–288.

致　谢

衷心感谢导师张雄教授对本人的精心指导，他的言传身教将使我终生受益。感谢陆明万教授、邱信明副教授、周旭研究员对我的指导和帮助。

感谢计算动力学实验室同窗们，与他们的讨论使我收获良多。

本课题承蒙国家自然科学基金（10472052，10872107）资助，特此致谢。

感谢 THUTHESIS 模板，它让我的论文写作轻松了许多。

感谢家人的鼓励和支持。

声　明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签　名：_____ 日　期：_____

附录 A MPM3DPP 程序的输入文件

MPM3DPP 程序的输入文件由关键字及相应的参数构成，程序功能的扩充只要添加相应的关键字即可。输入文件的格式为自由格式，即关键字以及各个参数之间用空格或逗号分隔均可，对列数没有要求。可以用 注释符“#”在输入文件中的任意位置添加注释，写一些说明文字，其后的内容将不被程序读取。

一个典型输入文件的例子如下：

```
mpm3d *** demo input file    # 定义标题
# Unit: mm g ms N MPa mJ

domain {
  nbbd 1              # 定义体的个数
  nmat 1              # 定义材料组数
  view   0  100   0  10   0  10 # 定义后处理绘制质点的范围

  material 1 pla1    # 定义第一组材料为理想弹塑性模型
  {
     bulk 1.5  0.06 # 人工体积粘性系数
     dens 8.9e-3     # 材料密度
     youn 100.0e3    # 杨氏模量
     pois 0.3e0      # 泊松比
     yield 300       # 屈服应力
     eos grun        # 定义状态方程为 Gruneisen 状态方程
     {
        c0 3940
        S1 1.49
        gamma  1.96
     }
     fail eps        # 设置最大塑性应变失效
     {
        epmax 1.0
     }
  }

  Body block         # 定义一个长方体
  {
     mat 1           # 采用第一组材料
     pmass 1.116e-3 # 质点质量
     dp 0.5          # 质点间距
     ox 0.0          # 原点坐标 x
     oy 0.0          # 原点坐标 y
```

```
      oz 0.0          # 原点坐标 z
      nx 20           # x 方向布置质点数
      ny 1            # y 方向布置质点数
      nz 1            # z 方向布置质点数

      vel 10.0  0.0  0.0 # 定义初速度
   }

   grid {         # 背景网格信息
     x0  0.0
     x1  50.0
     y0  0.0
     y1  3.0
     z0  0.0
     z1  3.0

     dcel 1.0    # 背景网格结点间距
#    gimp 1      # 是否采用 GIMP 算法
#         x0  xn  y0  yn  z0  zn
     boun  2   0   2   2   2   2  # 定义边界条件
   }
}

Result {
   rpttime 0.5e-4  # 报告计算状态的时间步长

   tecp 1.0e-4     # 输出后处理数据的时间步长
   prof 2  0.0 0.0 # 输出背景网格某一条线上结点的变量信息

   outr pres       # 在后处理文件中输出质点压力信息
   outr dens       # 在后处理文件中输出质点密度信息
   curv dens 0.0 0.0 0.0 # 输出某质点密度的时程曲线
}

solve {
   dtscale 0.2    # 时间步长系数
   endt 0.005     # 计算终止时间
   warn vol       # 若出现负体积则给出警告

   inte explicit # 采用显式积分
}

stop              # 输入文件结束
```

个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果

个人简历

1979 年 9 月出生于宁夏回族自治区银川市。

1998 年 9 月免试进入北京大学力学与工程科学系，2002 年 7 月本科毕业并获得理学学士学位。

2002 年 9 月免试进入清华大学工程力学系，2005 年 7 月毕业并获得工学硕士学位。

2005 年 9 月进入清华大学航天航空学院攻读工学博士学位至今。

发表的学术论文

[1] Ma S, Zhang X, Lian Y, Zhou X. Simulation of high explosive explosion using adaptive material point method. CMES-Computer Modeling In Engineering & Sciences, 2009, 39:101-123 （SCI 收录，检索号 427IU；EI 收录，检索号 20091412016946）

[2] Ma S, Zhang X, Qiu X M. Comparison study of MPM and SPH in modeling hypervelocity impact problems. International Journal of Impact Engineering, 2009, 36:272-282（SCI 收录，检索号 393QC；EI 收录，检索号 20085111794276）

[3] 马上, 张雄. 聚能射流问题的自适应物质点法模拟. 固体力学学报 , 2009（已接收，EI 源刊）

[4] Ma S, Zhang X. Material point method for impact and explosion problems. In: Proceedings of International Symposium on Computational Mechanics (ISCM) Beijing 2007. 156-166（国际会议）

[5] Huang P, Zhang X, Ma S, Wang H K. Shared Memory OpenMP Parallelization of Explicit MPM and Its Application to Hypervelocity Impact. CMES-Computer Modeling In Engineering & Sciences, 2008, 38:119-147. （SCI 收录，检索号 421YG；EI 收录，检索号 20091311979890）

[6] 张雄, 刘岩, 马上. 无网格法的理论及应用. 力学进展, 2009, 39(1):1-36.

[7] Zhang X, Sze K Y, Ma S. An explicit material point finite element method for hyper-velocity impact. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 66:689-706 （SCI 收录，检索号 038NR；EI 收录，检索号 2006189848508）

研究成果

[1] 张雄, 马上. 冲击爆炸三维物质点法数值仿真软件 (软件著作权登记，已申请)