高效稳定的无网格法若干问题的研究

(申请清华大学工学博士学位论文)

培 养 单 位：航天航空学院

学　　科：力学

研 究 生：潘 小 飞

指 导 教 师：陆 明 万 教 授

副指导教师：张 雄 教 授

二〇〇六年六月

The Research of Some Problems of Efficient and Stable Meshless Methods

Dissertation Submitted to

Tsinghua University

in partial fulfillment of the requirement

for the degree of

Doctor of Science

by

Pan Xiaofei
(Mechanics)

Dissertation Supervisor : Professor Lu MingWan

Associate Supervisor : Professor Zhang Xiong

June, 2006

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：

清华大学拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：（1）已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；（2）为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供校内师生阅读，或在校园网上供校内师生浏览部分内容；（3）根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》，向国家图书馆报送可以公开的学位论文。

本人保证遵守上述规定。

（保密的论文在解密后应遵守此规定）

作者签名：_____ 导师签名：_____

日　　期：_____ 日　　期：_____

摘　要

无网格方法是近十年来迅速兴起的一种数值分析方法，该方法构造形函数时不需要网格，可以显著减少网格畸变的影响，所以在高速碰撞、超大变形、断裂破坏、金属成型等问题的分析中具有明显的优势，在这些领域中无网格方法是有限元法的很好的补充。

基于伽辽金法的无网格法需要在背景网格或子域积分，这类无网格法计算效率很低；基于配点法的无网格法会遇到不稳定和精度差的问题。本文主要的研究工作是提出能兼顾效率、精度和稳定性的无网格法并用于求解固体力学问题。

参数对无网格法的精度和稳定性有很大的影响，本文比较了各种参数对几种无网格法的影响，得到了一套经验参数，对无网格法中参数的选择具有指导意义。针对MWLS对边界条件敏感的问题，本文提出了伽辽金最小二乘法（MGLS），对MWLS进行改进。MGLS效率要远高于伽辽金型无网格法（GBMM），而精度和稳定性并未下降多少。

本文提出了伽辽金配点无网格法（MGDC），通过小变形静力学问题算例表明该方法是稳定的而且精度较高。和MGLS一样，MGDC只在边界上很薄的一层区域（伽辽金域）内积分，因此效率要远高于GBMM。本文将MGDC应用到显式时间积分动力学问题当中，质量阵可以像有限元那样写成对角矩阵的形式，效率很高。

本文建立了质点积分无网格伽辽金（PIEFG）法。用质点积分无网格伽辽金法分析了小变形弹性静力学问题和超弹性大变形问题，结果表明该方法具有很好的稳定性，且计算效率远高于无单元伽辽金法。

金属加工成型过程涉及到材料、几何、边界条件的高度非线性。目前采用无网格法模拟金属加工成型的还处于起步阶段，由于计算效率的限制，主要模拟的是轴对称的问题。本文给出了质点积分无网格伽辽金法（PIEFG）的完全拉格朗日和更新的拉格朗日格式，采用显式时间积分成功模拟了三维金属挤压成型过程，并和有限元软件LS-DYNA进行了比较，表明了质点积分无网格伽辽金法在计算金属加工成型方面的优势。

关键词： 无网格法；移动最小二乘法；伽辽金法；配点法；质点积分

Abstract

The meshless method is one of the new numerical analysis methods, and it was developed rapidly in recent ten years. Mesh is not required for the interpolation in the meshless method so that the influence of the mesh distortion is reduced evidently. The mesh-free methods possess distinct advantages in the simulation of high-speed impact, extremely large deformation, fracture and fragmentation, metal forming problems. Meshless method offers tremendous potential in industrial applications.

Galerkin-based meshless methods are computational intensive because one of the major difficulties in the implementaton of Galerkin-based meshless method (GBMM) is how to evaluate integrals in weak form. In contrast, collocation-based meshless methods (CBMM) suffers from instability and inaccuracy. The main work in this paper is to develop meshless methods which are efficient, accuracy and stable.

The parameters have significant effects on the result of meshless methods. In this paper, several parameters are studied systematically to observe the accuracy and stability of the Meshless Weighted least-square method (MWLS), Galerkin-based Meshless method and Collocation-based meshless method (CBMM). Optimal parameters are obtained from the studies and they can be directive to the selection of parameters in the meshless methods. The Meshless Galerkin least-square method is developed to improve the Meshless Weighted least-square method which is impressible to the boundary conditions. MGLS is more efficient than GBMM, and the accuracy and stability is close to GBMM.

The Meshless Galerkin Collocation method (MGDC) is developed and applied to the linear small-deformed and static problems which indicate that MGDC is much more stable and accurate than CBMM. Because the integral domain in MGDC is a thin layer close to the boundary, MGDC is much more efficient than GBMM. MGDC is applied to the dynamics problems by using the explicit time integration. In MGDC, the lumped mass matrix can be used to improve the efficiency.

Particle Integral element-free Galerkin method (PIEFG) is developed. The linear small-deformed static problems and hyperelastic large-deformed problems are analyz.

The PIEFG is sable and much more efficient than GBMM.

The metal forming is a highly nonlinear problem involving material nonlinearity, geometrical nonlinearity and boundary nonlinearity. The meshless methods are promising in the simulation of the metal forming process. In this paper, PIEFG is applied successfully on the 3-D extrusion of metal forming.

Key Words: meshless; Moving Least-square Method; galerkin; collocation; particle integration

目　录

第 1 章　引言 1
1.1 引言 1
1.2 无网格方法的历史及研究现状 1
1.3 无网格方法小结 5
1.4 金属加工成型的数值模拟 7
1.5 本文主要工作 9
第 2 章　最小二乘型无网格方法 11
2.1 引言 11
2.2 移动最小二乘近似 11
2.2.1 基本原理 12
2.2.2 权函数 14
2.2.3 计算点的定义域 16
2.3 加权最小二乘无网格法 19
2.3.1 基本原理 19
2.3.2 数值算例 23
2.3.2.1 受集中载荷作用的悬臂梁 23
2.3.2.2 具有中心圆孔的无限大方板 27
2.3.3 加权最小二乘无网格法的进一步研究 28
2.3.3.1 受集中载荷作用的悬臂梁 30
2.3.3.2 具有中心圆孔的无限大方板 36
2.4 伽辽金最小二乘无网格法 43
2.4.1 受集中载荷作用的悬臂梁 45
2.4.2 具有中心圆孔的无限大平板 47
2.5 小结 50

第 3 章　伽辽金配点无网格法 52
3.1 引言 52
3.2 MGCM求解弹性小变形静力问题 52
3.2.1 一般格式 52
3.2.2 算例分析 53
3.2.2.1 受集中载荷作用的悬臂梁 54
3.2.2.2 具有中心圆孔的无限大方板 55
3.3 MGCM求解弹性波传播问题 57
3.3.1 显式时间积分格式 57
3.3.2 弹性波动问题算例 60
3.3.2.1 一维波传播问题 60
3.3.2.2 二维杆弹性碰撞问题 62
3.4 小结 63
第 4 章　质点积分无网格伽辽金法 65
4.1 引言 65
4.2 质点积分无网格伽辽金法的积分方案 65
4.3 弹性小变形静力问题算例 68
4.3.1 一维杆 68
4.3.2 受集中载荷作用的悬臂梁 68
4.4 非线性动力学问题 71
4.4.1 超弹性材料大变形分析 73
4.4.1.1 平面应变压缩 74
4.4.1.2 平面应变拉伸 74
4.5 小结 76
第 5 章　质点积分无网格伽辽金法在金属成型中的应用 79
5.1 引言 79
5.2 本构关系和应力更新算法 79
5.3 接触条件 81
5.4 离散方案 84
5.4.1 完全的拉格朗日描述 84
5.4.2 更新的拉格朗日描述 86

5.5 算例分析 88
5.5.1 Taylor杆碰撞 88
5.5.2 金属材料的正向挤压 92
5.5.3 金属材料的反向挤压 95
5.6 本章小结 99
第 6 章　结　论 101
6.1 本文主要工作和结论 101
6.2 本文主要创新点 102
6.3 展望 102
参考文献 104
致谢与声明 112
个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果 113

第 1 章 引言

1.1 引言

近几十年来，有限元法已经成为科学与工程中的主要数值计算方法，并且在科学技术的各个领域中得到了广泛的应用。但有限元法在处理下列问题的时候遇到了困难：

1. 金属冲压成型，模拟大变形下材料的流动；

2. 超高速碰撞过程材料的穿透、侵彻、飞溅等；

3. 裂纹动态扩展；

4. 流固耦合；

5. 局部化和奇异性等特殊问题；

当采用拉格朗日法时，有限元网格会发生畸变，严重影响解的精度，降低计算效率甚至导致计算终止，这时需要重新划分网格。重新划分网格对于二维问题来说，不会很困难，但是对于三维问题，重新划分网格计算费用昂贵，是一件极其困难而富有挑战性的工作。欧拉法难以地跟踪材料界面，在一定程度上限制了它在固体力学方面的应用。鉴于有限元的这些缺陷，近十年来，国际上许多著名学者，如T. Belytschko、W. K. Liu，S. N. Atluri等[1–4]都对无网格方法进行了大量的研究。无网格方法的形函数采用基于点的近似，不需要网格的初始划分或重构，材料发生畸变的时候也可以保证计算的精度，在上述这些领域中具有很重要的研究价值和应用前景。

1.2 无网格方法的历史及研究现状

最早的无网格方法是光滑质点流体动力学方法（Smoothed Particle Hydrodynamics，简称SPH），它是由Lucy[5]和Gingold等人[6]在1977年提出的，并且成功地应用于天体物理领域中[7]。上世纪80年代，Monaghan等人[8–10]在该方法的研究和应用中做出了突出贡献，他们将SPH解释为核函数法，并用来模拟流场中的

激波强间断现象。90年代，Swegle[11]、Dyka[12]和Chen[13]等人提出了SPH方法不稳定的起因以及稳定化方案；Johnson[14]等提出了归一化光滑函数算法，使其通过分片试验，可以正确模拟常应变状态，提高了SPH算法的精度；Vignjevic[15]等人提出了克服零能模态的具体方案。随着SPH方法研究的深入，该方法被应用于冲击波模拟[16]，流体动力学[17,18]，水下爆炸仿真模拟[19]，高速碰撞等材料动态响应的数值模拟[20–25]领域。近几年来，我国的学者也开始关注SPH法，张锁春[26]对SPH方法进行了综述，贝新源等[27]将SPH方法用于高速碰撞问题。目前，LS-DYNA3D、AUTODYN-2D等商业软件都引入了SPH算法，北京理工大学的张庆明等人采用LS-DYNA3D模拟了金属的超高速过程，并和实验结果进行了对比，二者吻合的很好。

Nayroles等人[28]在1992将Lancaster等人提出的移动最小二乘近似法（Moving Least-sqare Method，简称MLS）[29]引入到Galerkin法中，提出了散射元法（Diffuse Element Method，简称DEM），并且用这种方法分析了Possion方程和弹性问题。1994年，美国Northwestern University的学者Belyschko[30]等人对DEM法进行了两点改进，在采用MLS计算形函数导数时保留了被Nayroles 忽略的所有项，并利用拉格朗日乘子法引入本质边界条件，提出了无单元伽辽金法（the element-free Galerkin method，EFG），掀起了无网格法的研究高潮。这类方法比SPH计算费用高，但具有较好的稳定性。Belyschko等人采用EFG方法进行动态裂纹扩展的数值模拟[31–38]，克服了有限元方法在模拟裂纹扩展方面需要不断进行网格重新划分的缺点。为了提高EFG的计算效率以及避免使用背景网格，Beissel[39]等人采用节点积分方案来代替EFG中背景网格的积分，提出了节点积分无单元伽辽金法（简称为NIEFG）。和有限元中的单点高斯积分一样，节点积分无单元伽辽金法也会出现因零能模态不受控制而产生的不稳定现象。Beissel等人建议将平衡方程残差的平方引入到伽辽金弱形式中来消除节点积分的不稳定性，但是降低了解的精度。Chen[40]等人采用光滑应变稳定化的方法来消除节点积分的不稳定性，提出了稳定化节点积分法（stablized conforming nodal integration method，SCNI），但是这种方法在计算刚度矩阵的时候需要在各节点子域的边界上进行积分，大幅度地增加了节点积分的计算量。

Northwestern University的另一位学者Liu WK[41,42] 根据函数积分变换的思想，提出了再生核粒子法（Reproducing Kernel Particle Method，简称为RKPM），并结合小波概念，构造了多尺度再生核粒子法（Multi Scale Reproducing Kernel

Particle Method，简称MRKPM）[43–45]，通过构造一系列可同时伸缩和平移的窗函数，实现了RKPM的自适应分析，可用于对局部问题进行细致的数值分析。其后Liu等人使用RKPM方法对大量问题进行了数值分析，如声学分析[45]、结构动力学问题[46]、流体动力学[47]、动态断裂和局部化[48,49]、应力集中[50]、大变形[51–57]、金属加工成型[58,59]、中厚板梁[60]和微机电系统[61]等。

1995年，Oden和Duarte等[62–64]提出了"Hp-Clouds"无网格方法，该方法利用最小二乘原理建立单位分解函数，用来进行场量近似，然后通过Galerkin变分原理建立离散模型。Oden严格证明了通过在Hp-Clouds空间引入单位分解函数[63]，可以建立任意阶连续光滑的基函数。Oden、Duarte和Zienkiewicz等[65]又将有限元形函数作为单位分解函数，提出了"New Clouds-Bases FEM"，这种方法需要借助有限元网格，虽然破坏了"无网格"的部分特性，但给解决问题带来了方便。Liszka等[66]改用配点格式，避免了Galerkin格式中用于积分计算的背景网格，提出了hp无网格云团法（hp meshless clouds method）。

1996年，西班牙学者Onate和Idelsohn等[67,68]提出了有限点法（Finite Point Method，简称FPM），该法采用MLS来构造形函数，采用配点格式进行离散，是一种无需背景网格的完全无网格方法，它主要应用于流体动力学领域。

著名的力学家Atluri将边界元法的思想引入到无网格方法的研究当中，发展了局部边界积分法（Local boundary integral equation method，简称LBIE）[69–71]和局部Petrov伽辽金无网格法（Meshless Local Petrov-Galerkin Method，简称MLPG）[72–74]。它们都是基于移动最小二乘原理来建立对场函数的近似，而且在积分时不需要背景网格，是完全的无网格方法。

径向基函数（radial basis function，简称为RBF）具有形式简单，各向异性等优点，数学界对其进行了大量的研究，已被成功地应用于多变量插值中。Frank[75]比较了29种离散数据插值方法，发现Hardy提出的MQ函数[76]和Duchon提出的TPS插值函数精度最高。这两类函数是常用的径向基函数。Kansa[77,78]将径向基函数引入配点法中，用以求解双曲，椭圆和抛物型问题。Kansa和Sharan等人[79]都发现MQ函数具有指数收敛性，而且计算效率极高。在Kansa的配点法中，系数矩阵是非对称的。Fasshauer[80]采用Hermite型方法，得到的系数矩阵在某些特殊的偏微分方程中是对称或反对称的。Wendland[81]将径向基函数引入Galerkin法中，建立了相应的无网格格式。Coleman[82]用径向基函数求解椭圆型边值问题。吴宗敏[83] 和Franke等人[84]证明了用径向基函数进行

离散数据插值和求解偏微分方程的优越性，并给出了误差估计。陈文[55,57]采用径向基函数提出了边界点法，只需要对求解域的边界用节点进行离散，而不需要离散求解域。Hon[85]等人采用径向基函数求解了两相流问题。将径向基函数引入配点法以求解偏微分方程具有很多优点，例如该方法是真正的无网格方法，不需要任何网格；该方法与空间维数无关，其收敛率为$O(h^{d+1})$，其中h为配点密度，d为空间维数。然而径向基函数一般是定义在全求解域的，得到的系数矩阵的条件数很大。目前已经提出多种方法来解决这一问题，如优化调整MQ函数的形状参数[86,87]以及采用紧支径向基函数[88–90]。吴宗敏[88]给出来了正定紧支径向基函数的构造法则，并构造了一系列正定系数；Buhmann[89]给出了基于TPS函数的正定紧支径向基函数；Wendland[90] 给出的正定紧支径向基函数与吴宗敏的相似，但他们具有最小的自由度。张雄等[91,92]将紧支距离函数应用于配点法中，建立了相应的无网格法，用于求解固体力学问题。虽然紧支距离函数具有很多优势，但他们不能满足完备性条件，甚至不能正确描述常应变状态，宋康祖等[93]提出了满足完备性的紧支距离函数，并建立了相应的配点型无网格格式，大幅度提高了计算精度，但也增加了计算量。

基于伽辽金法的无网格法精度高，但它需要进行数值积分，不但计算量大而且需要引入背景网格。基于配点法的无网格法效率高，但其精度低，稳定性差。张雄等人[94]基于最小二乘法提出了最小二乘配点法和加权最小二乘无网格方法[95]，很好的解决了这一问题。

与有限元法不同，无网格法中使用的近似函数大都不具有插值特性，因此在基于Galerkin法的无网格法中处理本质边界条件具有一定的困难。目前已经提出了直接配点法[96,97]、拉格朗日乘子法[30,98]、修正变分原理[96,97]、罚函数法[72,91]、与有限元耦合法[99,100]、容许近似法[101]、达朗贝尔原理[102]、修正配点法[103]、变换法[52]、位移约束方程法[104]和奇异权函数法[105]等方法。

刘桂荣等人[106,107]建立了点插值法，其近似函数具有点插值特性，施加本质边界条件的方法和有限元类似。但这种算法有时需要移动节点的位置。

Sulsky等人将FLIP[108,109]扩展到固体力学中，提出了物质点法（Material Point Method，MPM）[110,110]，MPM将连续体离散成一组带有质量的质点。质点携带了所有物质信息，其运动代表了物质的变形。背景网格可以固定或自由布置，用于动量方程的求解和空间导数的计算。物质点发挥了拉格朗日方法和欧拉方法各自的长处，克服了其弱点，非常适合于分析超高速碰撞等问

题。Sulsky等人将MPM的轴对称格式用于Taylor杆碰撞问题和柱状坯段的锻压问题[111]。York等人将MPM用于薄膜模拟[112]以及气囊膨胀等流体和薄膜相互作用的问题[113]。Bardenhangen等提出接触算法并将MPM用于模拟颗粒物质[114]以及颗粒物质中应力波的传播问题[115]。Tan等在MPM中采用自适应的级进背景网格，并用于动态能量释放率的计算[116]。Nairn等人用MPM模拟裂纹扩展问题[117]。马上等人将物质点应用到三维超高速碰撞问题中[118]。张雄等人把有限元法和物质点法相结合，提出了显式物质点有限元法[119]，并将它应用到超高速碰撞问题中。

1.3 无网格方法小结

目前已提出十余种无网格方法，如表1.1所示。

各种无网格法之间的区别主要在于所使用的试探函数（如移动最小二乘近似、重构核函数近似、单位分解法、径向基函数法、点插值法等）和微分方程的等效形式（如伽辽金法、配点法、最小二乘法、Petrov-Galerkin法等）。建立近似函数时不借助于网格，基于函数逼近近似而非插值是无网格法与有限元法的主要区别。采用定义在离散节点上具有紧支特性的函数来构造近似函数，而不用定义在全域上的级数展开形式是无网格法与经典加权残量法的主要区别。无网格法具有以下优点：

1. 无网格法的近似函数没有网格依赖性，减少了因网格畸变而引起的困难，适合于处理高速碰撞、动态断裂、塑性流动、流固耦合等涉及大变形和需要动态调整节点位置（网格）的各类应用问题。

2. 无网格的基函数可以包含能够反映待求问题特性的函数系列，适应于分析各类具有高梯度和奇异性等特殊性质的应用问题。

3. 采用紧支函数的无网格法和有限元一样具有带状稀疏系数矩阵的特点。适用于求解大型科学与工程问题。

4. 无网格法的自适应很强。h自适应分析中不需要重新划分网格，且极易实现p适应分析，若引进小波函数还具有多尺度分析功能。

5. 无网格法的前处理只要节点位置信息，不用网格信息，容易分析复杂的三维结构。

表 1.1　无网格方法总结

名称	离散方案	背景网格
光滑质点流体动力学方法（SPH）	伽辽金法	无
散射单元法（DEM）	伽辽金法	有
无单元伽辽金法（EFG）	伽辽金法	有
再生核粒子法（RKPM）	伽辽金法	有
hp云法（hp-clouds）	伽辽金法	有
hp无网格法（hp-Meshless clouds）	配点法	无
单位分解法（PUM）	伽辽金法	有
有限点法（FPM）	配点法	无
边界积分法（LBLE）	Petrov-Galerkin法	无
局部Petrov-Galerkin法	Petrov-Galerkin法	无
径向基函数无网格法	配点法	无
点插值法	伽辽金法	无
最小二乘配点无网格法（LSC）	配点法	无
加权最小二乘配点无网格法（MWLS）	配点法	无
物质点法（MPM）	伽辽金法	有

6. 无网格法计算的结果是光滑连续的，不必再进行应力光滑等后处理。

无网格方法相对于有限元在处理大变形问题上面有很大的优势，但无网格法才刚刚起步，在严格的数学论证、计算效率、边界条件处理和大量应用实例方面都不能和成熟的有限元方法相媲美，更未形成有效的通用软件。现在的无网格方法主要有以下缺点：

1. 用MLS和RKPM建立无网格近似函数时，都涉及到矩阵求逆，计算量较大。
2. 与有限元方法不同，无网格的近似函数大都不是多项式，因而基于伽辽金法的无网格方法（比如EFG，RKPM等）需要在每个背景网格或节点子域中使用高阶高斯积分以保证其精度，因此伽辽金型无网格法的计算量一般远大于有限元法。
3. 基于配点法的无网格法（比如SPH，FPM）等只是在节点上形成方程，计算效率高，但是精度和稳定性都很差。
4. 无网格近似函数大都不具有δ函数的性质，施加本质边界条件的时候不如有限元方便。

如何提高无网格法的计算效率和稳定性也是近年来的研究热点。虽然无网格法还远不成熟，但由于它不需要网格，因此在超高速碰撞，爆炸，裂纹扩展，金属加工成型等领域中具有广阔的发展前景。

1.4 金属加工成型的数值模拟

金属材料加工成型在现代制造业（比如汽车、航空等）中有广泛的应用，按照加工的工艺可以分为以下几类

1. 铸造（casting）
2. 煅压（煅造和冲压，forging，upsetting，stamping）；
3. 轧制（rollinig）；
4. 拔制（drawing）；
5. 挤压（extrusion）；

6. 切削（cutting）；

7. 模具（die）；

金属加工成型设计一般开发设计周期长，试模次数多，生产成本高，采用数值方法来模拟金属加工成型的过程是解决这些困难的有效途径之一。

目前国际上金属成型的软件主要采用有限元法，比如Dynaform。它采用BT单元（Belyschko）-Tsay 壳单元），是由美国ETA公司和LSTC公司联合开发的用于板成型模拟的专用软件包，可以帮助模具设计人员显著减少模具开发设计时间及试模周期，Dynaform可以预测成形过程中板料的裂纹，起皱，减薄，划痕，回弹，评估板料的成型性能。另外还有AutoForm（采用三点膜弯曲组合元），Pamstamp等。这些软件主要是用来模拟板材加工成型的，这类问题一般不涉及到板壳单元或者膜单元的扭曲、畸变，因此对于薄板成型问题用有限元法能够很好地模拟。DEFORM是一套基于有限元的工艺仿真系统，用于分析金属成形及其相关工业的各种成形工艺和热处理工艺，它是由美国SFTC 公司开发的。DEFORM主要由三部分组成：DEFORM-3D是针对复杂金属成形过程的三维金属流动分析的功能强大的过程模拟分析软件；DEFORM-2D 针对多种金属成形过程二维流动分析的基于有限元法即FEM的模拟仿真软件；DEFORM-HT 是针对热处理过程边界分析的功能强大的分析软件。

目前我国做金属加工成型的数值模拟也主要采用有限元方法。华中科技大学塑性成型模拟及模具国家重点实验室于1995年建成并对外开放，主要研究塑性成形及模具的基本理论和关键技术。已经开发出FASTAMP，该软件对板料成型进行计算机模拟。此外东北大学轧制技术及连轧自动化国家重点实验室也对金属加工成型数值模拟进行了研究。吉林大学车身与模具研究所的胡平等[120]从1985年以来，在冲压件成型计算机仿真以及模具设计与制造方面进行了长期的，深入细致的基础理论研究工作。

目前采用无网格法对金属加工成型的研究还在起步阶段，J. S. Chen 等人[40]采用RKPM分析了环形体压缩过程，并和有限元软件ABAQUS的计算结果进行了比较，发现RKPM在分析金属大变形问题中有很大的优势；并采用RKPM分析了金属煅压成型的过程，和实验值很接近。他们分析的都是二维轴对称的情况。Sangpil Yoon和J. S. Chen等人[121]采用稳定化节点积分法（stablized conforming nodal integration method，SCNI）分析了三维金属挤压过

程。Northwestern University的HongSheng Lu等人[122]采用三维RKPM分析了板料金属成型过程中的屈曲和后屈曲现象。韩国高等科学和技术研究所的Kie-Chan Kwon等人[123]采用最小二乘无网格法分析了环形体压缩和金属煅压成型过程，他们分析的也是二维轴对称情况。Northwester University的Shangwu Xiong等人[124]采用RKPM分析了轴对称环形体压缩，并和实验值进行了比较，二者吻合的很好，并分析了金属反向挤压成型的轴对称问题，和有限元进行了比较。有限元在计算过程中必须重新划分网格才能继续计算。

国内也有不少学者采用无网格方法对金属成型过程进行了数值模拟，清华大学机械工程系的娄路亮等人[125]采用EFG 模拟了金属墩粗的过程，并和DEFORM进行了对比，发现EFG只要适时改变节点影响域半径的值就可以很好的模拟大变形，并且可以一次计算到底，中间无需调整或增减节点，而DEFORM必须重新划分网格。东北大学轧制技术及连轧自动化国家重点实验室的崔青玲等人[126]用EFG模拟了平板轧制的过程，并和刚塑性有限元的计算结果以及文献中的实验数据吻合得很好。崔青玲等人[127]采用RKPM模拟了理想塑性材料的二维平面无摩擦镦粗过程，并于解析解做比较，工件形状和应变参数吻合得很好。

1.5 本文主要工作

本文主要针对现有无网格方法的缺点，提出了几种新型高效稳定的无网格方法，并将其应用到力学计算中，本文分为五章。

第一章对无网格方法的历史和研究现状进行综述，对金属成型的数值模拟现状进行综述。

第二章系统研究了各种参数对加权最小二乘无网格法、直接配点法、伽辽金无网格法的精度和稳定性的影响，为无网格法中的参数选择提供了可借鉴的经验。针对加权最小二乘无网格法对边界条件敏感的问题，提出了伽辽金最小二乘无网格法，该方法边界条件施加方式和EFG一样，而计算效率远大于后者。

第三章提出了伽辽金配点无网格法。伽辽金最小二乘无网格法在求解动力学问题时，无法采用显式时间积分格式的缺点，本章针对这一缺点提出了伽辽金配点无网格方法，并将它应用到显式动力学分析中。

第四章提出了质点积分无网格伽辽金法。该方法把求解区域离散成一系列质点，把对求解区域的积分化为质点上的积分，采用移动最小二乘法在节点上构

造形函数。该方法相对于EFG来说，效率提高了很多，而且克服了节点积分无单元法存在的不稳定现象。本章将质点积分无网格伽辽金法成功应用到橡胶材料的超大变形分析中。

第五章给出了质点积分无网格伽辽金法的完全的拉格朗日和更新的拉格朗日格式。通过显式时间积分模拟了三维金属挤压成型的过程。并和有限元软件LS-DYNA进行了比较，表明了质点积分无网格伽辽金法在金属成型领域中具有良好的应用前景。

论文最后是结论和展望。

第 2 章　最小二乘型无网格方法

2.1　引言

目前无网格方法的离散方案可以归纳为两类：一类基于伽辽金法，这类无网格法需要进行数值积分，精度高，但由于无网格方法中使用的近似函数不是多项式，因此需要高阶高斯积分，计算量很大。基于配点法的无网格方法（如SPH、FPM、hp-Meshless Clouds、径向基函数无网格法等）不需要进行积分，计算量小，但这类方法精度低，稳定性差，并且系数矩阵是不对称的。

为了改善配点型无网格方法，张雄等人提出了加权最小二乘无网格法（MWLS）[95]。与配点型无网格方法（CBMM）相比，MWLS对控制方程的残差在所有节点（包括边界点）上予以消除，精度高，稳定性好，并且系数矩阵也是对称的。与伽辽金型无网格方法（GBMM）相比，MWLS不需要进行高斯积分，因此效率比伽辽金型无网格方法要高很多。本章系统地分析了各种参数对MWLS、GBMM、CBMM的稳定性和精度的影响。

与伽辽金法不同，MWLS的欧拉方程不是系统的原始微分方程，而为该方程的高阶导数，因此施加不合适的边界条件可能导致虚假的解答。本章提出了伽辽金最小二乘无网格方法，改进了MWLS，克服了MWLS的缺点，并兼顾了它效率高，稳定性好的优点。

2.2　移动最小二乘近似

与有限元不同，无网格的近似函数建立在一系列的离散点而不是网格上，目前在无网格法中使用的近似函数主要有：移动最小二乘近似、核函数近似、重构核函数、单位分解函数、点插值和径向基函数等。移动最小二乘近似对包含于基函数组的任何函数都可以精确计算，所以它很容易实现p适应。移动最小二乘近似的权函数为紧支函数，具有局部近似的特点，形成的系数矩阵是带状的。由于以上优点，移动最小二乘近似在无单元伽辽金法（EFG）、散射单元（DEM）、有限点法（FPM）和局部彼得洛夫-伽辽金法等方法中得到了广泛的应用。本文也采用移动最小二乘近似来构造形函数。

2.2.1　基本原理

设函数$u(x)$在求解区域Ω内的近似为$u^h(\mathbf{x})$，$\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_N\}$为域中插值节点的集合。移动最小二乘近似采用如下方式：

$$u(\mathbf{x})\approx u^h(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{m}p_i(\mathbf{x})\cdot a_i(\mathbf{x})=\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{a}(\mathbf{x}), \tag{2-1}$$

其中，$p_i(\mathbf{x})$是基函数，m是基函数的个数，$a_i(\mathbf{x})$是相应的系数。

与传统的最小二乘方法不同，近似式中的系数$a_i(x)$不是常数，而是空间坐标的函数，因此被称为移动最小二乘近似。基函数通常使用单项式，当然也可以使用其它任何函数。只要基函数之间满足线形无关条件即可。一维空间的单项式基函数为

$$\begin{aligned}&\text{线性基：}\ p^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})=[1,x],m=2\\&\text{二次基：}\ p^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})=[1,x,x^2],m=3\end{aligned} \tag{2-2}$$

二维空间中单项式基函数为

$$\begin{aligned}&\text{线性基：}\ p^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})=[1,x,y],m=3\\&\text{二次基：}\ p^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})=[1,x,y,x^2,xy,y^2],m=6\end{aligned} \tag{2-3}$$

三维空间中单项式基函数为

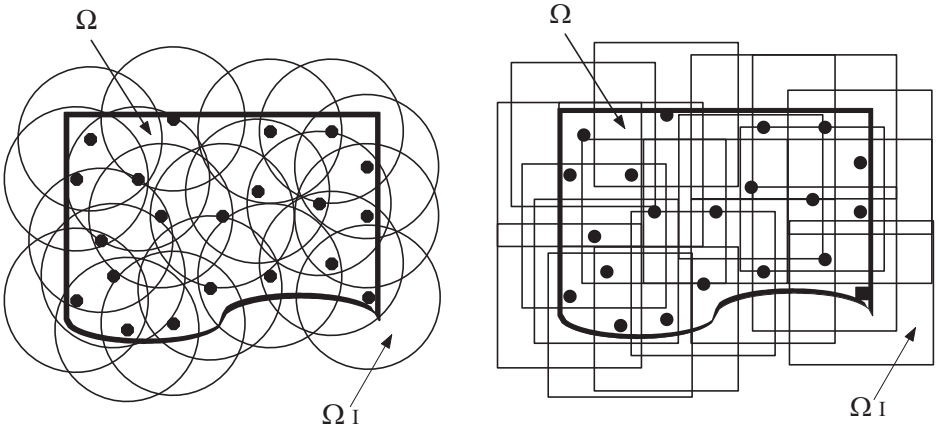
$$\begin{aligned}&\text{线性基：}\ p^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})=[1,x,y,z],m=4\\&\text{二次基：}\ p^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})=[1,x,y,z,x^2,xy,y^2,yz,z^2,xz],m=10\end{aligned} \tag{2-4}$$

近似式(2-1)中的系数$a_i(\mathbf{x})$的选取要求使近似函数$u^h(\mathbf{x})$在计算点$\mathbf{x}$的邻域$\Omega_{\mathbf{x}}$内是待求函数$u(\mathbf{x})$在某种最小二乘意义下的最佳近似。计算点$\mathbf{x}$的邻域$\Omega_{\mathbf{x}}$称为MLS近似函数在该计算点处的定义域，简称为计算点$\mathbf{x}$的定义域。

将求解域Ω用N个节点离散，在每个节点$\mathbf{x}_I$（$I=1,2,\cdots$）处定义一个权函数$w_I(\mathbf{x})=w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)$。权函数$w_I(\mathbf{x})$只在节点$\mathbf{x}_I$周围的一个有限区域$\Omega_I$中大于零，而在域$\Omega_I$外为零，即该函数是紧支的。区域$\Omega_I$称为权函数$w_I(\mathbf{x})$的支撑域，也称为节点$\mathbf{x}_I$的支撑域或节点$\mathbf{x}_I$的影响域，如图2.1所示。设计算点$\mathbf{x}$的邻域$\Omega_x$包

括N个节点，近似函数$u^h(\mathbf{x})$在这些节点处的误差的加权平方和为

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{k} w_I(\mathbf{x}) \cdot [\sum_{i=1}^{m} p_i(\mathbf{x}_I) \cdot a_i(\mathbf{x}) - u_I]^2, \tag{2-5}$$



(*a*) 圆形支撑域　　(*b*) 矩形支撑域

图 2.1　节点的支撑域

由于J取极小,所以:

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = 0, \tag{2-6}$$

根据上式可得:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}, \tag{2-7}$$

式中:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{k} w_I(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_I), \tag{2-8}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [\ w_1(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \quad w_2(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \quad \cdots \quad w_k(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_k)\ ], \tag{2-9}$$

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \cdots u_k]^{\mathrm{T}}. \tag{2-10}$$

求解(2-7)可得到节点$\mathbf{x}$处的系数$a(\mathbf{x})$，然后把$a(\mathbf{x})$代入到式(2-1),就得到了移动最小二乘近似的最终形式:

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \tag{2-11}$$

或者改写成:

$$u^h(\mathbf{x}) = N_I(\mathbf{x})u_I, \tag{2-12}$$

其中重复指标I表示在其取值范围内求和。形函数$\mathbf{N}(\mathbf{x})$如下:

$$\mathbf{N}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}). \tag{2-13}$$

如果MLS近似中将权函数$w_I(\mathbf{x})$取为

$$w_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_I \\ 0 & \forall \mathbf{x} \notin \Omega_I \end{cases} \tag{2-14}$$

则MLS近似退化为标准的最小二乘近似（LSQ）。

与有限元不同，近似函数$u^h(\mathbf{x})$在节点$\mathbf{x}_I$处的值并不等于$u(\mathbf{x})$在该节点处的值$u(\mathbf{x}_I)$。

2.2.2　权函数

权函数$w_I(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$在MLS近似中具有很重要的作用，它在节点$\mathbf{x}_I$ 处的值最大，且具有紧支性，即当$r = \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_I \| / d_{mI} > 1$时$w(r) = 0$，如果将$r$定义为$r = \sqrt{(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2}/d_{mI}$，则节点$\mathbf{x}_I$的支撑域为圆。常用的权函数有：

1. WF1（高斯型）

$$w(r) = \begin{cases} \frac{e^{-\beta^2 r^2} - e^{-\beta^2}}{1 - e^{-\beta^2}} & r \le 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \tag{2-15}$$

其中β 是常数。

2. WF2（指数型）

$$w(r) = \begin{cases} e^{-(r/\alpha)^2} & 0 \le r \le 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \tag{2-16}$$

其中α 是常数。

3. WF3（二次样条型）

$$w(r)=\begin{cases}1-6r^2+8r^3-3r^4 & 0\le r\le 1\\ 0 & r>1\end{cases} \tag{2-17}$$

4. WF4（三次样条型）

$$w(r)=\begin{cases}1-10r^3+15r^4-6r^5 & 0\le r\le 1\\ 0 & r>1\end{cases} \tag{2-18}$$

5. WF5（立方样条型）

$$w(r)=\begin{cases}\frac{2}{3}-4r^2+4r^3 & 0\le r<0.5\\ \frac{4}{3}-4r+4r^2-\frac{4}{3}r^3 & 0.5\le r\le 1\\ 0 & r>1\end{cases} \tag{2-19}$$

6. WF6

$$w(r)=\begin{cases}1-3r^2+2r^3 & 0\le r\le 1\\ 0 & r>1\end{cases} \tag{2-20}$$

7. WF7

$$w(r)=\begin{cases}1-2r^2 & 0\le r<0.5\\ 2(1-r)^2 & 0.5\le r\le 1\\ 0 & r>1\end{cases} \tag{2-21}$$

8. WF8

$$w(r)=\begin{cases}(1-r^2)^n & 0\le r\le 1\\ 0 & r>1\end{cases} \tag{2-22}$$

其中$n\ge 2$，在本文中取为2。

各节点的支撑域也可以取为矩形，其权函数为

$$w_I(\mathbf{x}) = w\left(\frac{x-x_I}{d_{xI}}\right) w\left(\frac{y-y_I}{d_{yI}}\right) \tag{2-23}$$

其中d_{xI}和d_{yI}为矩形支撑域在x方向和y方向上的边长。矩形支撑域对于节点规则分布的情况具有优势。

如果权函数$w_I(\mathbf{x})$和它的前n阶导数是连续的，那么移动最小二乘形函数$\mathbf{N}(\mathbf{x})$和它的形函数的前n阶导数也是连续的，所以权函数的选取在MLS近似中具有重要的作用。

2.2.3　计算点的定义域

由式（2-13）可见，只有支撑域覆盖了计算点$\mathbf{x}$的那些节点（即$w_I(\mathbf{x}) \neq 0$，称之为点$\mathbf{x}$的影响点）才对MLS近似函数有贡献，因此MLS近似函数$u^h(\mathbf{x})$在计算点$\mathbf{x}$处的定义域为这些节点的支撑域的并集，如图2.2所示。

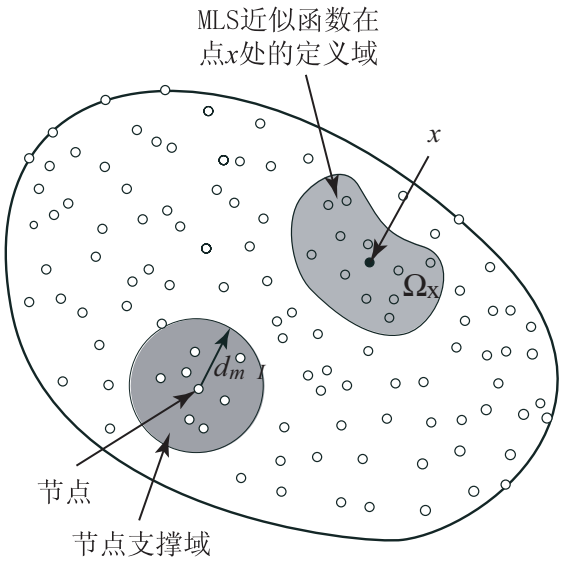


图 2.2　节点的支撑域

本文中，采用如下几种定义节点支撑域以及计算点定义域的选取方法

1. 固定支撑域法（FSR）），这种方法域内所有节点的支撑域大小相同。支撑域覆盖到点$\mathbf{x}$的节点取为点$\mathbf{x}$ 的影响点。对于圆形支撑域来说假设支撑域半径为R，影响点选取流程图为：

- 搜索所有节点$\mathbf{x}_I$（$I=1,2,\cdots,N$）
  - 计算节点$\mathbf{x}_I$与点$\mathbf{x}$的距离$s=\| \mathbf{x}-\mathbf{x}_I \|$
  - 判断s是否小于支撑域半径R，若是则进行如下操作
    - 影响点数加1，即$InflPtsNb=InflPtsNb+1$
    - 把当前节点号加入到影响点数组中：$InflPts[InflPtsNb]=I$
- 循环结束

对于矩形影响域来说，需要比较每个方向的距离与支撑域半径的大小。

固定影响域法适合于那些域内节点布置比较均匀的问题。

2. 初始影响点选取法（ISR）

这种方法通过预设的影响点数来确定节点的支撑域半径，流程图为

- 搜索所有节点$\mathbf{x}_I$（$I=1,2,\cdots,N$）
  - 计算节点$\mathbf{x}_J$与当前节点$\mathbf{x}_I$的距离$s[J]=\| \mathbf{x}_J-\mathbf{x}_I \|$，$J=1,2,\cdots,N$
  - 按升序排列数组s，对应的节点编号数组为id
  - 定义中间变量$size=s[k]\times Scale$
  - 判断d_{mI}是否小于$size$，若小于后者，则把$size$赋给d_{mI}
  - 判断编号为$id[1],id[2],\cdots,id[k]$的节点的支撑域半径是否小于$size$，若小于后者，则把$size$赋给它
- 循环结束

选取点$\mathbf{x}$的影响点的时候可以把支撑域覆盖到点$\mathbf{x}$的节点都包括进去，这种选点方法称为ISRA；也可以只选取其中的k个影响点，虽然可能有多于k个节点的支撑域覆盖了点$\mathbf{x}$，这种方法称之为ISRS，该选点法减少了影响点数，提高了计算形函数的效率。选取影响点的流程图如下

- 定义变量$MaxSel=N$，代表最多可以选取的节点个数，默认为所有节点
- 判断选点方法是否为ISRS，若是则$MaxSel=k$，只选择其中的k个节点
- 计算点$\mathbf{x}$与节点$\mathbf{x}_J$的距离$s[J]=\| \mathbf{x}_J-\mathbf{x} \|$，$J=1,2,\cdots,N$

- 按升序排列数组s，对应的节点编号数组为id
- 初始化影响点个数$InflPtsNb = 0$
- 循环$J = 1,2,\cdots,N$
  - 判断d_{mJ}是否大于$s[J]$，若是执行下列操作
    - 影响点数增加1，$InflPtsNb = InflPtsNb + 1$
    - 加入当前节点号到影响点数组中，$InflPts[InflPtsNb] = id[J]$
    - 判断影响点数$InflPtsNb$是否大于$MaxSel$，如果是则退出循环
- 结束循环

3. 变支撑域选取法（VSR），采用ISRA和ISRS这两种选点方法可能使影响点在各个方向不均匀，我们通过改变节点支撑域的方法来克服这个问题，预设影响点数为k，以点$\mathbf{x}$为圆心，把点$\mathbf{x}$离点$\mathbf{x}$第k近的节点距离乘以放大倍数$scale$为半径作一个圆，把该圆作为该计算点的定义域。定义域内所有的节点影响半径都为圆半径。具体的流程图为：

   - 计算点$\mathbf{x}$与节点$\mathbf{x}_J$的距离$s[J] = \| \mathbf{x}_J - \mathbf{x} \|$，$J = 1,2,\cdots,N$
   - 按升序排列数组s，对应的节点号数组为id
   - 初始化影响点数$InflPtsNb = 0$
   - 循环J，$J = 1,2,\cdots,N$
     - 定义中间变量$size = s[k] \times scale$
     - 判断$s[J]$ 是否小于$size$，若是则进行如下操作
       - 影响点数增加1，$InflPtsNb = InflPtsNb + 1$
       - 加入当前节点号到影响点数组中，$InflPts[InflPtsNb] = id[J]$
       - 把$size$赋给当前节点的支撑域半径，$d_{id[j]} = s[k] \times scale$
     - 如果$s[J]$ 大于$size$，代表定义域内的节点已经搜索完毕，退出循环。
   - 循环结束

从上面的流程图可以看出，FSR最简单，不需要对计算点和节点的距离进行排序，但是这种选择定义域的方法只适合于那些节点布置比较均匀的问

题。ISRA，ISRS和VSR更适合于那些节点布置不均匀的情况。对于矩形支撑域来说只能采用FSR算法。

此外还可以参考分子动力学法中的Linked-Cell-List算法[128]。把空间区域划分成一系列的格子，搜索影响点的时候只需要搜索和计算点相邻的那些格子内的节点就可以了。该方法可以大幅度的提高搜索的效率。

2.3　加权最小二乘无网格法

2.3.1　基本原理

考虑二维弹性小变性静力学问题，控制方程为：

$$\sigma_{ij,j}+\bar{f}_i=0 \qquad \text{在}\Omega\text{内} \tag{2-24}$$

$$\sigma_{ij}n_j-\bar{t}_i=0 \qquad \text{在}\Gamma_t\text{上} \tag{2-25}$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad \text{在}\Gamma_u\text{上} \tag{2-26}$$

其中，$\bar{\mathbf{f}}$为域Ω中给定的体力，Γ_t为给定的面力边界，$\bar{\mathbf{t}}$为给定的面力，Γ_u为给定的位移边界，$\bar{\mathbf{t}}$为给定的位移。

配点型无网格方法的基本思想是令域内各节点满足平衡方程（2-24），边界Γ_t上各节点满足力边界条件（2-26），边界Γ_u上满足位移边界条件（2-25）即

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}_k)+\bar{f}_i(\mathbf{x}_k)=0 \qquad \mathbf{x}_i\in\Omega;\quad i=1,2,\cdots,N-N_u-N_t \tag{2-27}$$

$$\sigma_{ij}n_j(\mathbf{x}_k)-\bar{t}_i(\mathbf{x}_k)=0 \qquad \mathbf{x}_i\in\Gamma_u;\quad i=1,2,\cdots,N_u \tag{2-28}$$

$$u_i(\mathbf{x}_k)-\bar{u}_i(\mathbf{x}_k)=0 \qquad \mathbf{x}_i\in\Gamma_t;\quad i=1,2,\cdots,N_t \tag{2-29}$$

将移动最小二乘近似函数（2-11）代入到（2-27）$\sim$（2-29）中，得到

$$\sum_{I=1}^{N}\mathbf{H}_I(\mathbf{x}_k)\mathbf{u}_I=-\bar{\mathbf{f}}_k \qquad \mathbf{x}_i\in\Omega;\quad i=1,2,\cdots,N-N_u-N_t \tag{2-30}$$

$$\sum_{I=1}^{N}\mathbf{Q}_I(\mathbf{x}_k)\mathbf{u}_I=\bar{\mathbf{t}}_k \qquad \mathbf{x}_i\in\Gamma_u;\quad i=1,2,\cdots,N_u \tag{2-31}$$

$$\sum_{I=1}^{N}\mathbf{N}_I(\mathbf{x}_k)\mathbf{u}_I=\bar{\mathbf{u}}_k \qquad \mathbf{x}_i\in\Gamma_t;\quad i=1,2,\cdots,N_t \tag{2-32}$$

式中

$$\mathbf{H}_I(\mathbf{x}_k)=\frac{E_0}{1-\nu_0^2}\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_I(\mathbf{x}_k)}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 N_I(\mathbf{x}_k)}{\partial y^2} & \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 N_I(\mathbf{x}_k)}{\partial x\partial y} \\ \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 N_I(\mathbf{x}_k)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 N_I(\mathbf{x}_k)}{\partial y^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 N_I(\mathbf{x}_k)}{\partial x^2} \end{bmatrix} \tag{2-33}$$

$$\mathbf{Q}_I(\mathbf{x}_k)=\frac{E_0}{1-\nu_0^2}\begin{bmatrix} l\frac{\partial N_I(\mathbf{x}_k)}{\partial x}+m\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial N_I(\mathbf{x}_k)}{\partial y} & l\nu\frac{\partial N_I(\mathbf{x}_k)}{\partial y}+m\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial N_I(\mathbf{x}_k)}{\partial x} \\ m\nu\frac{\partial N_I(\mathbf{x}_k)}{\partial x}+l\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial N_I(\mathbf{x}_k)}{\partial y} & m\frac{\partial N_I(\mathbf{x}_k)}{\partial y}+l\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial N_I(\mathbf{x}_k)}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{2-34}$$

$$\mathbf{N}_I(\mathbf{x}_k)=\begin{bmatrix} \mathbf{N}_I(\mathbf{x}_k) & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_I(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} \tag{2-35}$$

$$\mathbf{u}_I=\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{1I} \\ \mathbf{u}_{2I} \end{bmatrix},\quad \bar{\mathbf{f}}_k=\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_1(\mathbf{x}_k) \\ \bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix},\quad \bar{\mathbf{t}}_k=\begin{matrix} \bar{\mathbf{t}}_1(\mathbf{x}_k) \\ \bar{\mathbf{t}}_2(\mathbf{x}_k) \end{matrix},\quad \bar{\mathbf{u}}_k=\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x}_k) \\ \bar{\mathbf{u}}_2(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} \tag{2-36}$$

将（2-30）～（2-32）写成矩阵的形式，有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix}\mathbf{U}=\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}} \\ \bar{\mathbf{t}} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \tag{2-37}$$

其中

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}}=[\ \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_1)\quad \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_2)\quad \cdots\quad \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_{N-N_u-N_t})\ ] \tag{2-38}$$

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}=[\ \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_1)\quad \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_2)\quad \cdots\quad \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_{N_t})\ ] \tag{2-39}$$

$$\mathbf{N}^{\mathrm{T}}=[\ \mathbf{N}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_1)\quad \mathbf{N}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_2)\quad \cdots\quad \mathbf{N}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_{N_u})\ ] \tag{2-40}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_i)=[\ \mathbf{H}_1(\mathbf{x}_i)\quad \mathbf{H}_2(\mathbf{x}_i)\quad \cdots\mathbf{H}_N(\mathbf{x}_i)\ ] \tag{2-41}$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}_i)=[\ \mathbf{Q}_1(\mathbf{x}_i)\quad \mathbf{Q}_2(\mathbf{x}_i)\quad \cdots\mathbf{Q}_N(\mathbf{x}_i)\ ] \tag{2-42}$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}_i)=[\ \mathbf{N}_1(\mathbf{x}_i)\quad \mathbf{N}_2(\mathbf{x}_i)\quad \cdots\mathbf{N}_N(\mathbf{x}_i)\ ] \tag{2-43}$$

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = [\ u_{11} \quad u_{12} \quad \cdots \quad u_{N1} \quad u_{N2}\ ] \tag{2-44}$$

$$\bar{\mathbf{f}}^{\mathrm{T}} = [\ \bar{\mathbf{f}}_1^{\mathrm{T}} \quad \bar{\mathbf{f}}_2^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{f}}_{N-N_u-N_t}^{\mathrm{T}}\ ] \tag{2-45}$$

$$\bar{\mathbf{t}}^{\mathrm{T}} = [\ \bar{\mathbf{t}}_1^{\mathrm{T}} \quad \bar{\mathbf{t}}_2^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{t}}_{N_t}^{\mathrm{T}}\ ] \tag{2-46}$$

$$\bar{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}} = [\ \bar{\mathbf{u}}_1^{\mathrm{T}} \quad \bar{\mathbf{u}}_2^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{u}}_{N_u}^{\mathrm{T}}\ ] \tag{2-47}$$

N为节点总数，N_u是位于Γ_u上的节点数，N_t 是位于Γ_t上的节点数式，配点型的无网格法具有如下特点：

1. 只需在各节点上计算形函数及其导数，不需要任何积分，易于实现，且计算效率高；

2. 需要在各节点处计算形函数的二阶导数；

3. 系数矩阵$\mathbf{K}$是非对称的。

4. 在某些情况下，形成的求解方程是病态的，其解不稳定，且精度较差。

张雄等人在配点法的基础上，提出了最小二乘配点法[94]，该方法除N个节点外又引入了N_a个辅助点，控制方程要求在所有的节点上（包括边界点）上和辅助点处满足，边界条件要求在相应的N_b个点上满足。近似函数仍然只用节点来构造，因而引入辅助点并没有增加系统的未知数。对于二维系统而言，共有$2(N+N_a+N_b)$ 个方程，$2N$个未知数，方程数大于未知数，需要用最小二乘来求解。研究表明该方法的计算量远小于Galerkin型无网格函数，而精度和稳定性要远高于配点型无网格方法。该方法的缺点是系数矩阵非对称，且方程数多于未知数，需要用最小二乘法来求解。

张雄等人[95]使用最小二乘法来建立系统的变分原理，并由此推导出一种新型高效无网格法— 加权最小二乘无网格法。与配点法相比本方法对控制方程的残差要求在所有节点（包括边界节点）予以消除，精度高，稳定性好，并且系数矩阵是对称的。与Galerkin法相比，本方法不需要进行高斯积分，因而效率高。加权最小二乘法要求控制方程（2-24）～（2-26）的残量的加权平方和

$$\begin{aligned}\Pi \;&=\; \int_{\Omega} \sigma_{ik,k}(\sigma_{ij,j}+\bar{f}_i)\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_u} \lambda_u u_i(u_i-\bar{u}_i)\mathrm{d}\Gamma \\ &+\; \int_{\Gamma_t} \lambda_t \sigma_{ik} n_k(\sigma_{ij}n_j-\bar{t}_i)\mathrm{d}\Gamma = 0\end{aligned} \tag{2-48}$$

取最小值，即

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= \int_{\Omega}\delta\sigma_{ik,k}(\sigma_{ij,j}+\bar{f}_i)\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_u}\lambda_u\delta u_i(u_i-\bar{u}_i)\mathrm{d}\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_t}\lambda_t\delta\sigma_{ik}n_k(\sigma_{ij}n_j-\bar{t}_i)\mathrm{d}\Gamma=0 \end{aligned} \tag{2-49}$$

其中λ_u和λ_t是引入边界条件的罚函数，本章取$\lambda_t=10^t$，$\lambda_u=\lambda_u[E/(1-\nu^2)]^2$。

类似于伽辽金法，式（2-49）需要在求解域Ω中积分，计算量很大。在伽辽金法中，泛函为系统的总势能，需要尽可能准确积分，以提高解的精度。而在最小二乘法中，泛函（2-48）为控制方程残量的加权平方和，积分只是用来消除控制方程残量的，因而在最小二乘法中解的精度对泛函积分精度的敏感度远低于伽辽金法。为了完全消除式（2-48）中的积分,本文采用一种离散格式，即

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= \sum_{s=1}^{N}\delta\sigma_{ik,k}(\sigma_{ij,j}+\bar{f}_i)\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s}+\sum_{s=1}^{N_u}\lambda_u\delta u_i(u_i-\bar{u}_i)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s} \\ &+ \sum_{s=1}^{N_t}\lambda_t\delta\sigma_{ik}n_k(\sigma_{ij}n_j-\bar{t}_i)\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s}=0 \end{aligned} \tag{2-50}$$

其中N是总的节点数，N_u是位移边界Γ_u上的节点数，N_t是位移边界Γ_t上的节点数。

将移动最小二乘近似函数2-11代入到2-50中，得到

$$\mathbf{KU}=\mathbf{P} \tag{2-51}$$

其中

$$\mathbf{K}=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}(\mathbf{x}_i)^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(\mathbf{x}_i)+\sum_{j=1}^{N_u}\lambda_u\mathbf{N}(\mathbf{x}_j)^{\mathrm{T}}\mathbf{N}(\mathbf{x}_j)+\sum_{k=1}^{N_t}\lambda_t\mathbf{Q}(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}(\mathbf{x}_k) \tag{2-52}$$

$$\mathbf{P}=-\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}(\mathbf{x}_i)^{\mathrm{T}}\mathbf{f}+\sum_{j=1}^{N_u}\lambda_u\mathbf{N}(\mathbf{x}_j)^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{u}}+\sum_{k=1}^{N_t}\lambda_t\mathbf{Q}(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{t}} \tag{2-53}$$

式中$\mathbf{H}(\mathbf{x}_i)$，$\mathbf{Q}(\mathbf{x}_j)$，$\mathbf{N}(\mathbf{x}_k)$的定义由式（2-33）～（2-35）给出。

将式（2-37）左边乘以[$\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$　$\lambda_u\mathbf{N}^{\mathrm{T}}$　$\lambda_t\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$]，就得到式（2-52）和（2-53）相同的格式

$$\mathbf{K}=\sum_{i=1}^{N-N_u-N_t}\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_i+\sum_{j=1}^{N_u}\lambda_u\mathbf{N}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{N}_j+\sum_{k=1}^{N_t}\lambda_t\mathbf{Q}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_k, \tag{2-54}$$

$$\mathbf{P}=-\sum_{i=1}^{N-N_u-N_t}\mathbf{H}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{f}+\sum_{j=1}^{N_u}\lambda_u\mathbf{N}_j^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{u}}+\sum_{k=1}^{N_t}\lambda_t\mathbf{Q}_k^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{t}}, \tag{2-55}$$

如果式（2-52）中的控制方程残差项拿掉边界节点的那一部份，式（2-52）和（2-53）中的刚度矩阵$\mathbf{K}$以及$\mathbf{P}$就和式（2-54），（2-55）中完全一样，也就是说加权最小二乘法和直接配点法的不同之处在于怎么样处理边界节点控制方程的残差。在配点法中控制方程的残差仅在域内节点（不包括边界节点）上进行消除，而在加权最小二乘配点法中控制方程的残差在所有节点上予以消除。所以，如果在式（2-49）中忽略掉边界节点的控制方程残差，计算结果应该和配点法的结果相同。

2.3.2　数值算例

在这一节我们将通过两个算例来比较MWLS、CBMM以及GBMM的精度和稳定性，为了估计每种方法的精度，引入下面两个误差范数：

$$L_u=\frac{\sqrt{\int_\Omega(\hat{\mathbf{u}}-\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\cdot(\hat{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\mathrm{d}\Omega}}{\sqrt{\int_\Omega\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{u}\mathrm{d}\Omega}}\times 100\%$$
$$L_\sigma=\frac{\sqrt{\int_\Omega(\hat{\sigma}-\sigma)^{\mathrm{T}}\cdot(\hat{\sigma}-\sigma)\mathrm{d}\Omega}}{\sqrt{\int_\Omega\sigma^{\mathrm{T}}\cdot\sigma}}\times 100\%$$

其中$\hat{\mathbf{u}}$和$\mathbf{u}$ 分别是点$\mathbf{x}$处位移的的近似值和精确值；$\hat{\sigma}$和σ点$\mathbf{x}$处应力的近似值和精确值。

2.3.2.1　受集中载荷作用的悬臂梁

如图2.3（a）所示的受端部载荷作用悬臂梁的精确解由式（2-56）和（2-57）给出。无量纲参数取为$E=1.0\times 4$，$\nu=1/3$，$P=6$，$D=2$和$L=12$。计算中采用如图2.3（b）所示的17×5规则分布节点，在梁的右端部施加与式（2-57）对应的面力，在梁的左端施加由式（2-56）所确定的位移，梁的上下表面为自由边界。

$$\begin{cases} u_x=-\frac{P}{6EI}(y-\frac{D}{2})[(6L-3x)x+(2+\nu)(y^2-Dy)] \\ u_y=\frac{P}{6EI}[3\nu(y-\frac{1}{2}D)^2(L-x)+\frac{1}{4}(4+5\nu)D^2x+(3L-x)x^2] \end{cases} \tag{2-56}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -\frac{P}{I}(L-x)(y-\frac{1}{2}D) \\ \sigma_{yy} = 0 \\ \sigma_{xy} = -\frac{Py}{2I}(y-D) \end{cases} \tag{2-57}$$

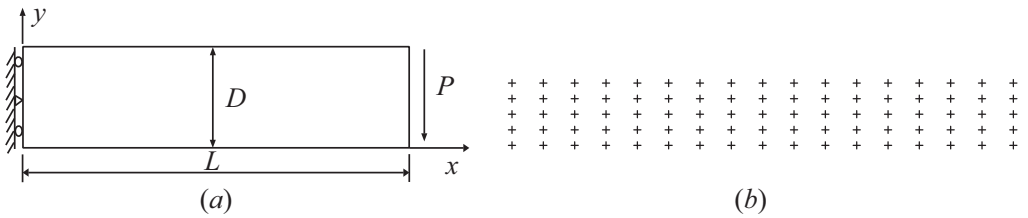


图 2.3　节点的支撑域

在分析中采用了高斯型权函数（2-15），分别取$\beta = 2.0$，3.0和4.0，而对每一个给定的β值，又分了三种情况，前两种情况，选点方法为ISRS，选点数目k分别为9和12，第三种情况，选点方法为ISRA，初始影响点数为9。

表2.1 ～ 2.3分别比较了用加权最小二乘法（MWLS）、配点型无网格法（CBMM）和伽辽金型无网格法（GBMM）得到的位移和应力。从表2.1∼2.2可以看出，MWLS 的精度要远高于CBMM。众所周知，CBMM是不稳定的，其结果在很大程度上依赖于权函数的类型和形状以及计算点的影响点数。在GBMM计算中，本质边界条件用罚函数施加，采用16×4均匀背景网格计算积分，每个背景网格采用3高斯积分。从表2.1和2.3可以看出，当采用ISRS选点方法时，MWLS和GBMM结果相差不多，对于MWLS，当$k = 9$时精度要好于$k = 12$时的精度，GBMM则相差不大。当选点方法采用ISRS 时，计算点数目明显增加，平均影响点数为30，GBMM的精度有显著的提高，但计算量也显著增加；MWLS精度有所下降。

对本问题也采用了16×4均匀网格进行了有限元（FEA）分析，其误差分别为$L_u = 5.64$和$L_\sigma = 19.46$。

图2.4比较了用MWLS、CBMM、GBMM和FEA四种方法得到的梁下表面各点处的竖直位移和应力σ_{xx}。在所有计算中β取2，选点方法为ISRI，$k = 9$，从图中可以看出，CBMM的计算的结果不正确，而MWLS，GBMM的计算结果都要比FEA的结果要好。

表 2.1　MWLS的误差范数

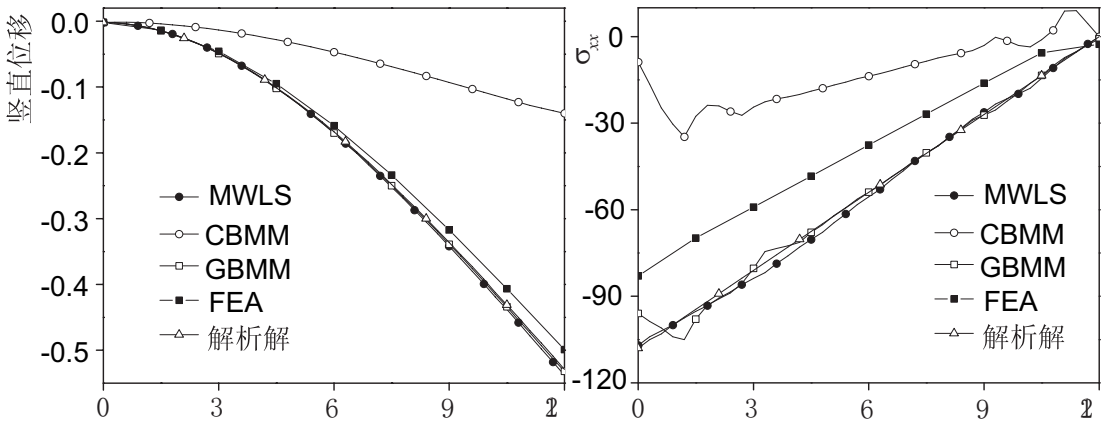
β	2.0			3.0			4.0		
工况	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$L_u(\%)$	2.786	3.353	15.02	2.373	8.314	5.014	1.718	4.155	11.64
$L_\sigma(\%)$	4.715	9.121	19.45	5.456	13.51	6.992	3.439	6.494	12.31

表 2.2　CBMM的误差范数

β	2.0			3.0			4.0		
工况	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$L_u(\%)$	98.14	343.7	134.1	22.64	16.34	3.767	72.51	186.4	28.14
$L_\sigma(\%)$	101.9	903.9	219.5	24.01	178.0	5.452	75.14	193.4	29.62

表 2.3　GBMM的误差范数

β	2.0			3.0			4.0		
工况	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$L_u(\%)$	3.834	4.577	0.063	1.943	2.401	0.005	0.779	0.895	0.029
$L_\sigma(\%)$	15.57	17.30	3.482	10.383	11.34	0.187	6.121	6.514	0.616



(a) 梁下表面各点竖直方向位移　　(b) 梁下表面各点应力σxx分布

图 2.4　悬臂梁位移及应力计算结果比较

为了比较MWLS的计算量，将此问题用81×21均匀节点进行求解，FEM分析的时间是0.14秒，其误差范数分别是$L_u=0.24$和$L_\sigma=2.13$。表2.4～2.6比较了用MWLS，CBMM和GBMM三种方法分析所用的CPU时间和计算结果的误差范数，在分析中采用了高斯型权函数（2-15），分别取$\beta=2.0$，3.0和4.0，而对每一个给定的β值，由分了三种情况，前两种情况，选点方法为ISRS，选点数目k分别为9和12，第三种情况，选点方法为ISRA，初始影响点数为9。在GBMM分析中，采用80×20均匀背景网格，在每个网格中采用3×3高斯积分。这里时间只包括了形成和求解方程所用的CPU时间，没有包括选取影响点所用的时间。

表 2.4　81×21均匀节点MWLS分析的误差范数

β	2.0			3.0			4.0		
工况	1	2	3	1	2	3	1	2	3
时间（s）	1.031	1.252	3.265	1.000	1.282	3.345	1.022	1.282	3.265
$L_u(\%)$	0.196	0.652	3.370	0.146	0.953	1.000	0.223	0.963	1.278
$L_\sigma(\%)$	0.283	0.740	4.096	0.309	1.055	1.133	0.473	1.076	1.902

从表2.4～2.6可以看出，CBMM所用的时间最少，但是它的稳定性和精度很差，GBMM所需时间最多，当选点方法采用IRSI时，MWLS的精度要好于GBMM，

表 2.5　81×21均匀节点CBMM分析的误差范数

β	2.0			3.0			4.0		
工况	1	2	3	1	2	3	1	2	3
时间（s）	0.430	0.501	1.332	0.400	0.491	1.352	0.410	0.491	1.342
$L_u(\%)$	2.379	12.03	15.62	1.635	9.076	7.794	2.471	8.703	4.822
$L_\sigma(\%)$	2.442	24.88	171.3	1.703	50.28	7.783	2.580	8.670	5.013

表 2.6　81×21均匀节点GBMM分析的误差范数

β	2.0			3.0			4.0		
工况	1	2	3	1	2	3	1	2	3
时间（s）	3.545	4.617	15.97	3.545	4.737	15.68	3.615	4.627	15.69
$L_u(\%)$	0.486	0.948	0.017	0.365	0.639	0.002	0.164	0.199	0.002
$L_\sigma(\%)$	5.707	9.117	0.959	4.896	7.140	0.441	3.450	4.106	0.952

而计算时间只是后者的2/7左右。当选点方法采用IRSA时，计算量要增加4倍左右。对于三维问题，MWLS和GBMM计算量的差距将更大。

2.3.2.2　具有中心圆孔的无限大方板

考虑一在x方向受均匀拉应力σ_0作用的具有中心圆孔（半径为a）的无限大平板，其解析解由式（2-58）和（2-59）给出。

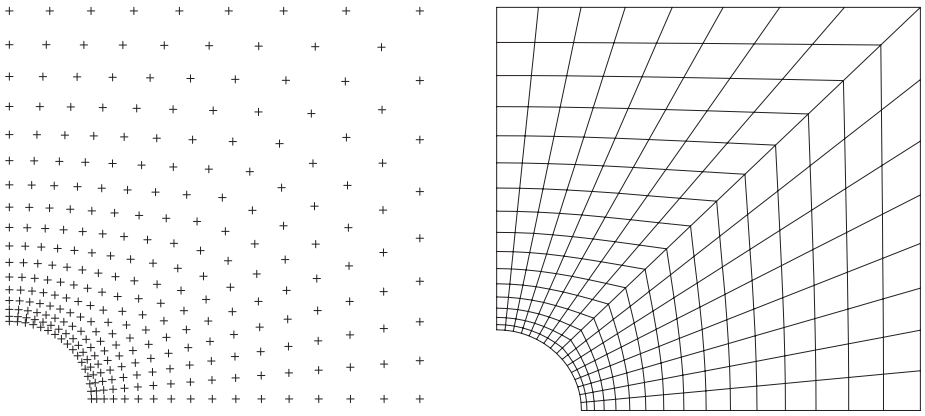
$$\begin{cases} \sigma_x(x,y)=\sigma_0\left\{1-\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{3}{2}\cos2\theta+\cos4\theta\right)+\frac{3a^4}{2r^4}\cos4\theta\right\} \\ \sigma_y(x,y)=-\sigma_0\left\{\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\cos2\theta-\cos4\theta\right)-\frac{3a^4}{2r^4}\cos4\theta\right\} \\ \tau_{xy}(x,y)=-\sigma_0\left\{\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\sin2\theta+\sin4\theta\right)+\frac{3a^4}{2r^4}\sin4\theta\right\} \end{cases} \tag{2-58}$$

$$\begin{cases} u_r=\frac{\sigma_0}{4G}\left\{r\left[\frac{\kappa-1}{2}+\cos2\theta\right]+\frac{a^2}{r}\left[1+(1+\kappa)\cos2\theta\right]-\frac{a^4}{r^3}\cos2\theta\right\} \\ u_\theta=\frac{\sigma_0}{4G}\left\{(1-\kappa)\frac{a^2}{r}-r-\frac{a^4}{r^3}\right\}\sin2\theta \end{cases} \tag{2-59}$$

其中

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)},\quad \kappa=\begin{cases}3-4\nu & \text{平面应变}\\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{平面应力}\end{cases}$$

(r,θ) 是起始点在孔中心的极坐标系统。由于对称性，只取板的四分之一（尺寸为$5a\times 5a$）计算。设板处于平面应力状态，无量纲弹性模量为$E=1.0\times 10^3$，泊松比$\nu=1/3$。拉应力σ_0取为1。在板的右边界和上边界施加与解析解（2-58）相应的面力，而在板的左边界和下边界给定由解析解（2-59）给出的位移。圆孔的内边界为自由边界。图2.5 给出了节点布置情况。



(a)无限大平板的289节点离散方案　　(b)有限元分析用网格

图 2.5　无限大平板

表2.7~2.9分别比较了由MWLS、CBMM和GBMM对不同β 值得到的位移和应力范数。所有的参数和悬臂梁算例中选取的相同。表2.7和表2.8 表明，MWLS可以得到合理的结果，而CBMM则是不稳定的。在GBMM计算中，采用图2.5（b）所示的合理的背景网格，在每个背景网格中采用3×高斯积分。采用罚函数施加本质边界条件。

为了与有限元进行对比，采用图2.5所示的网格进行了分析，位移和应力范数分别是$L_u=0.51$和$L_\sigma=3.73$。

2.3.3　加权最小二乘无网格法的进一步研究

为了研究加权二乘无网格法的稳定性，下面通过两个算例（悬臂梁和开孔

表 2.7　MWLS的误差范数

β	2.0			3.0			4.0		
工况	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$L_u(\%)$	6.227	4.437	3.936	4.819	4.866	5.774	7.011	6.178	1.544
$L_\sigma(\%)$	8.970	6.152	9.690	6.186	5.942	6.713	8.952	8.199	2.254

表 2.8　CBMM的误差范数

β	2.0			3.0			4.0		
工况	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$L_u(\%)$	3.988	129.6	230.8	11.62	4.416	1.213	0.396	0.727	0.375
$L_\sigma(\%)$	6.536	302.1	288.0	81.50	7.492	3.087	1.088	1.790	1.368

表 2.9　GBMM的误差范数

β	2.0			3.0			4.0		
工况	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$L_u(\%)$	5.877	8.030	4.274	4.783	6.488	3.836	4.236	5.533	3.807
$L_\sigma(\%)$	20.48	26.51	9.206	15.09	21.75	6.559	10.65	22.78	6.129

无限大方板）来研究以下参数对MWLS，CBMM和GBMM的影响：

1. 无网格近似函数的类型：MLS近似和LSQ近似

2. 用于构造无网格近似函数的节点数，即影响点数k；

3. MLS近似中权函数的类型（共分析了8种权函数，见式（2-15）～（2-22））；

4. 权函数式（2-15）中参数β和式（2-16）中的α；

5. 参数$scale$。

2.3.3.1　受集中载荷作用的悬臂梁

首先考虑2.3.2.1节中的悬臂梁，采用33×9均匀节点分析各种参数对计算结果的影响。图2.6～2.12比较了由MWLS、CBMM和GBMM取不同的参数而得到的位移和应力误差范数，在所有图中，(a)和(b)分别给出了$k=9$和$k=12$时的位移误差范数，而(c)和(d)分别给出了$k=9$和$k=12$时的应力误差范数。在所有GBMM计算中，采用32×8均匀背景网格积分，在每个网格中采用3×3高斯积分点。采用罚函数施加本质边界条件。

图2.6～2.8比较了采用权函数WF1时MWLS、CBMM、GBMM的误差范数，从这些结果可以看出，参数β对计算结果影响很大，而此时参数$scale$对计算结果的影响较小。此外，不同的无网格方法具有不同的β的最优值。 图2.9比较了采用权函数WF2时MWLS、CBMM和GBMM得到的误差范数。权函数的参数α对计算结果影响很大。

众所周知，配点法是不稳定的，其结果在很大程度上依赖于权函数中的参数。例如，当$\alpha\times scale=0.6$时，CBMM的位移精度很高，而当$\alpha\times scale=0.4$时，CBMM的位移精度又很低。本算例的计算结果表明，MWLS是稳定的。

图2.10～2.12 比较了采用权函数WF3～WF8（见式（2-17）～（2-22））时MWLS、CBMM和GBMM 所得到的误差范数。结果表明，权函数对计算结果影响很大。在此例中，采用权函数WF3和WF5时MWLS 的计算结果最好。另外当采用权函数WF3～WF5时，参数$scale$对结果有显著的影响，建议取$scale$取为2.0。

表2.10比较了采用LSQ近似函数时误差范数随参数k的变化情况。尽管LSQ近似不如MLS 近似精度高，但它仍给出了合理的结果。当节点数增

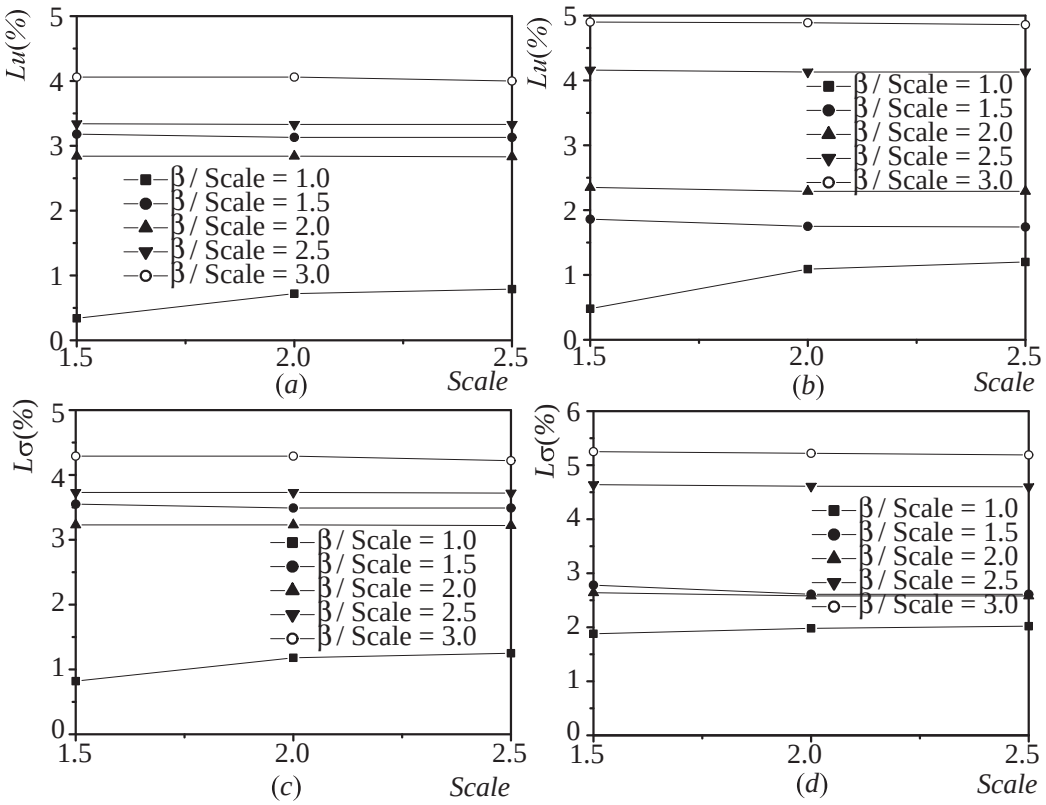


图 2.6　采用权函数WF1时MWLS的误差范数

加时，LSQ近似的精度也相应的提高。在分析爆炸和碰撞等问题中一般需要布置大量的节点以准确的模拟冲击波的传播过程，此时可采用LSQ近似在保证计算精度的同时降低计算量。

表 2.10　采用LSQ近似函数时悬臂梁的误差范数（%）

	MWLS		CBMM		GBMM	
k	9	12	9	12	9	12
$L_u(\%)$	3.19	7.80	6.5	96	1.05	2.02
$L_\sigma(\%)$	3.79	12.06	7.08	328	12.7	25.5

在这个例子中，当$k=9$和$k=12$时，GBMM的位移精度稍高于MWLS，其应力精度却远低于MWLS。将支撑域覆盖了计算点**x**的所有节点都取为其影响点可

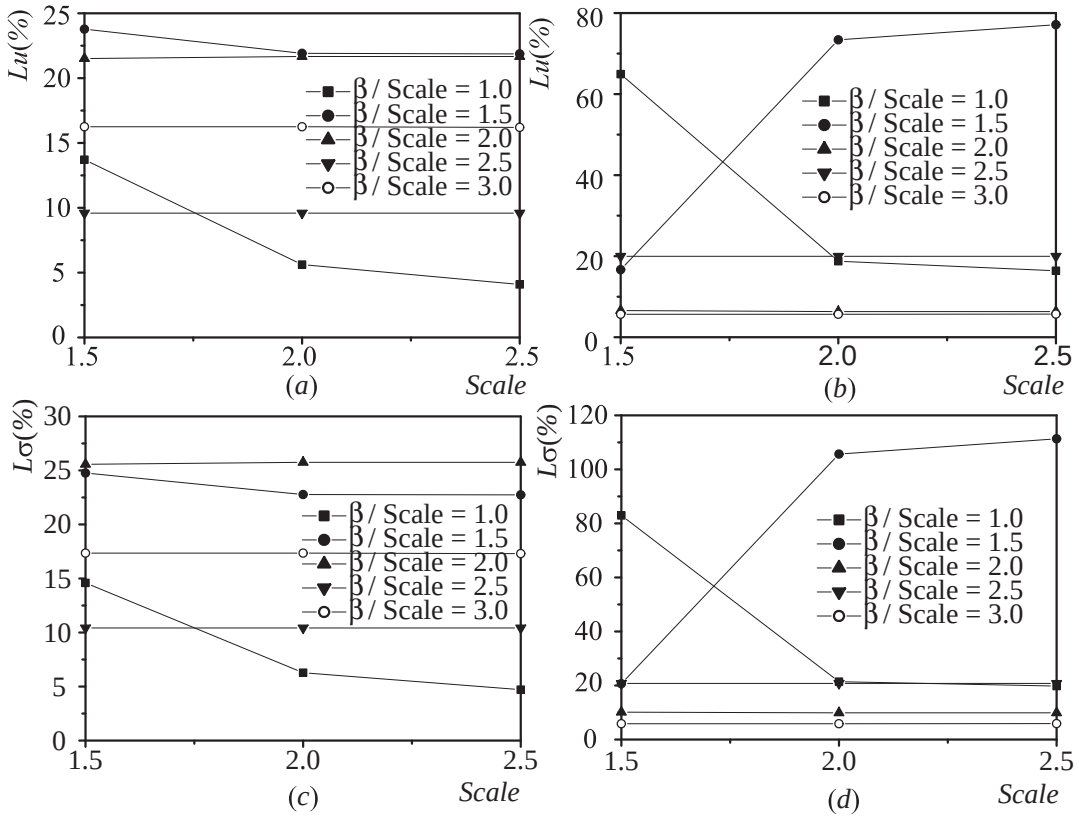


图 2.7　采用权函数WF1时CBMM的误差范数

以大幅度提高GBMM的精度，但由于显著的增加了影响点的数目，因而也大幅度的增加了计算量。

图2.13比较了MWLS、CBMM和GBMM的收敛率，$k=9$，$scale=2.0$。其中(*a*)和(*b*)分别给出了采用权函数WF3时位移和应力的收敛曲线，(*c*)和(*d*)分别给出了采用权函数WF5时位移和应力的收敛曲线。在这个例子中，MWLS的位移收敛率和GBMM相当，但MWLS的应力收敛率要高于GBMM。

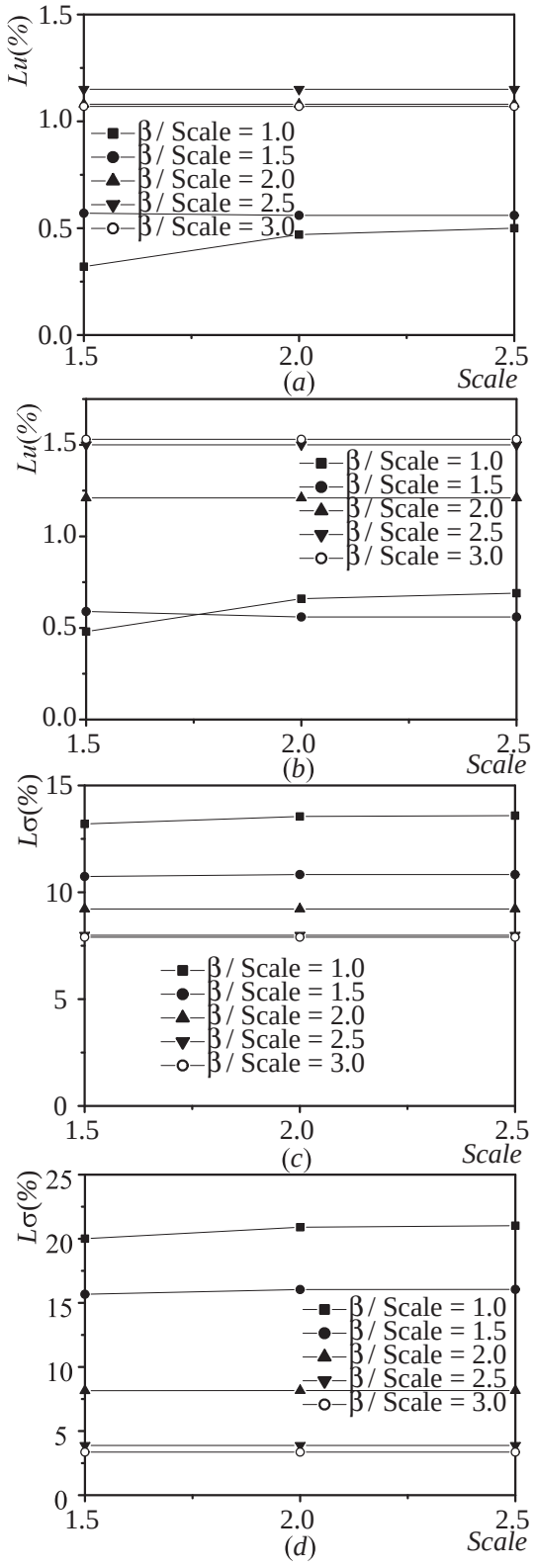


图 2.8　采用权函数WF1时GBMM的误差范数

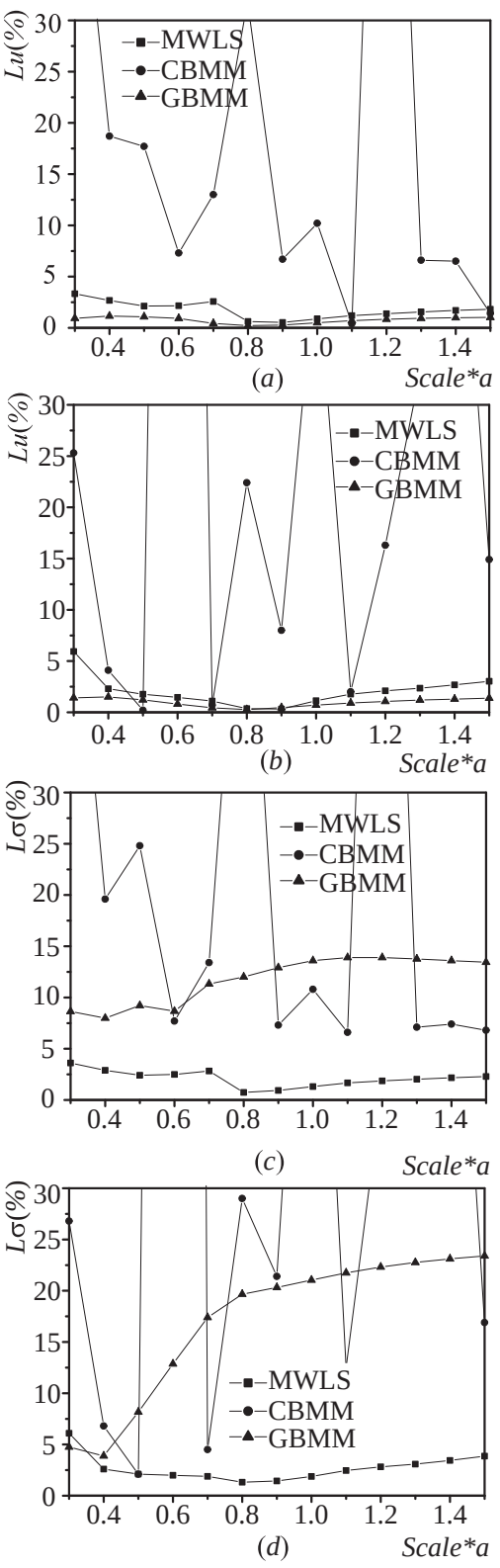


图 2.9　采用权函数WF2时的MWLS的误差范数

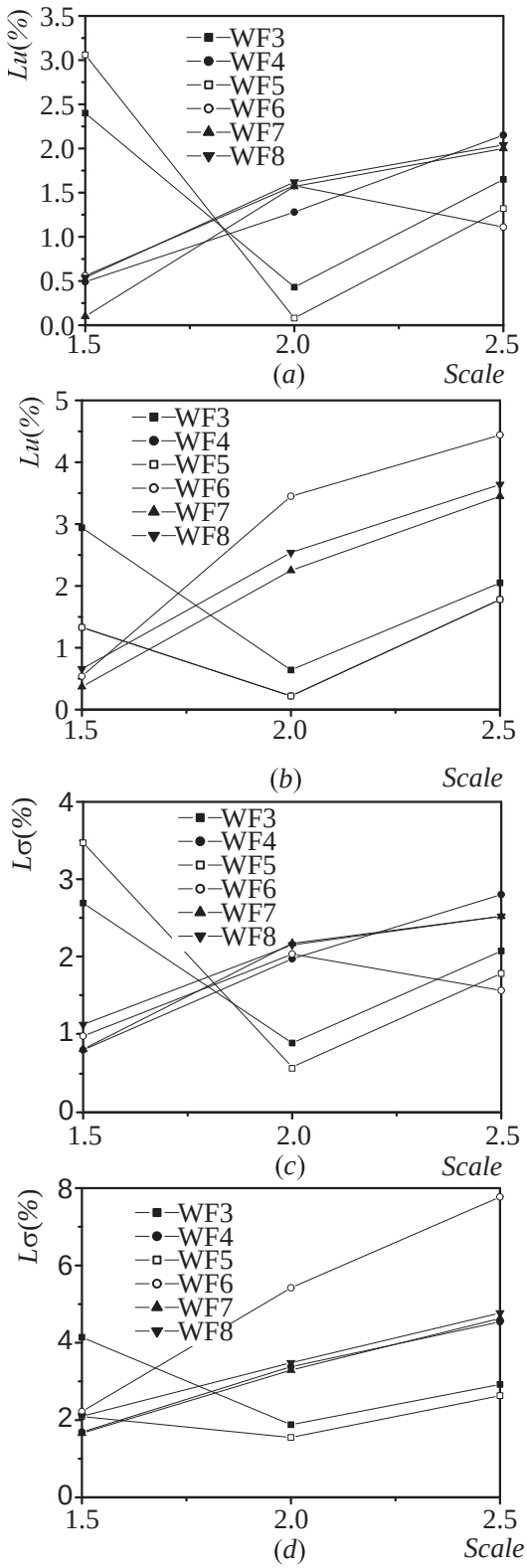


图 2.10　采用权函数WF3∼WF8时的误差范数（MWLS）

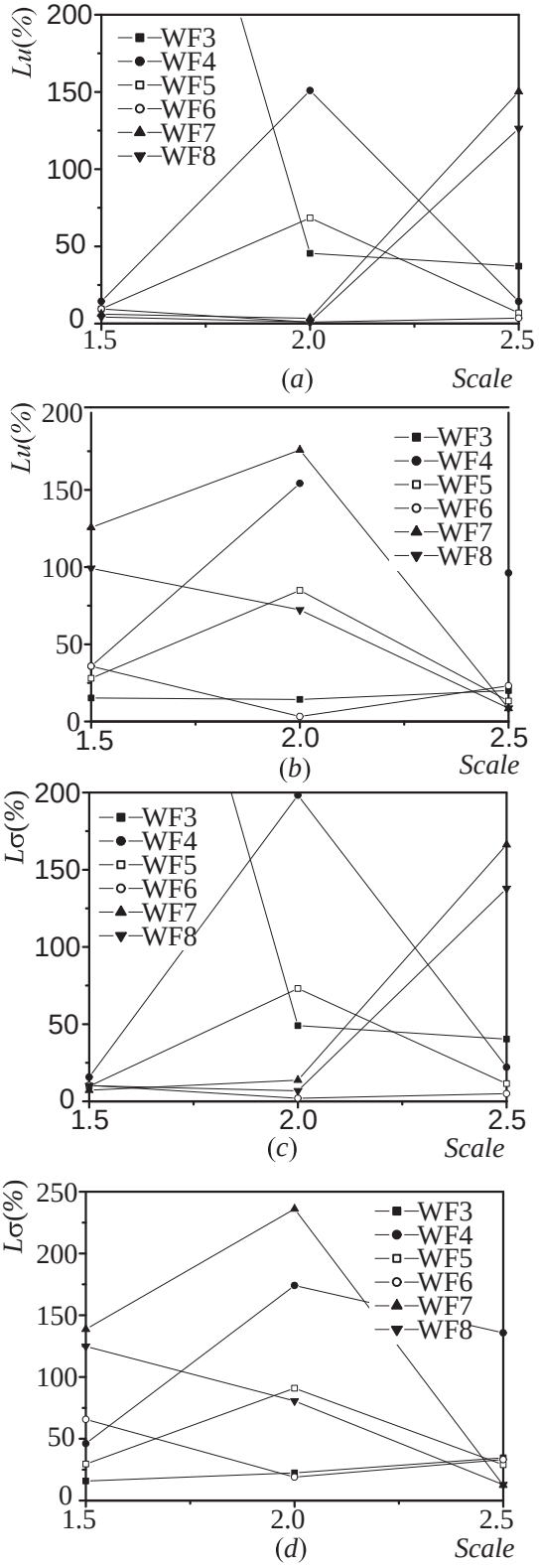


图 2.11　采用权函数WF3∼WF8时的误差范数（CBMM）

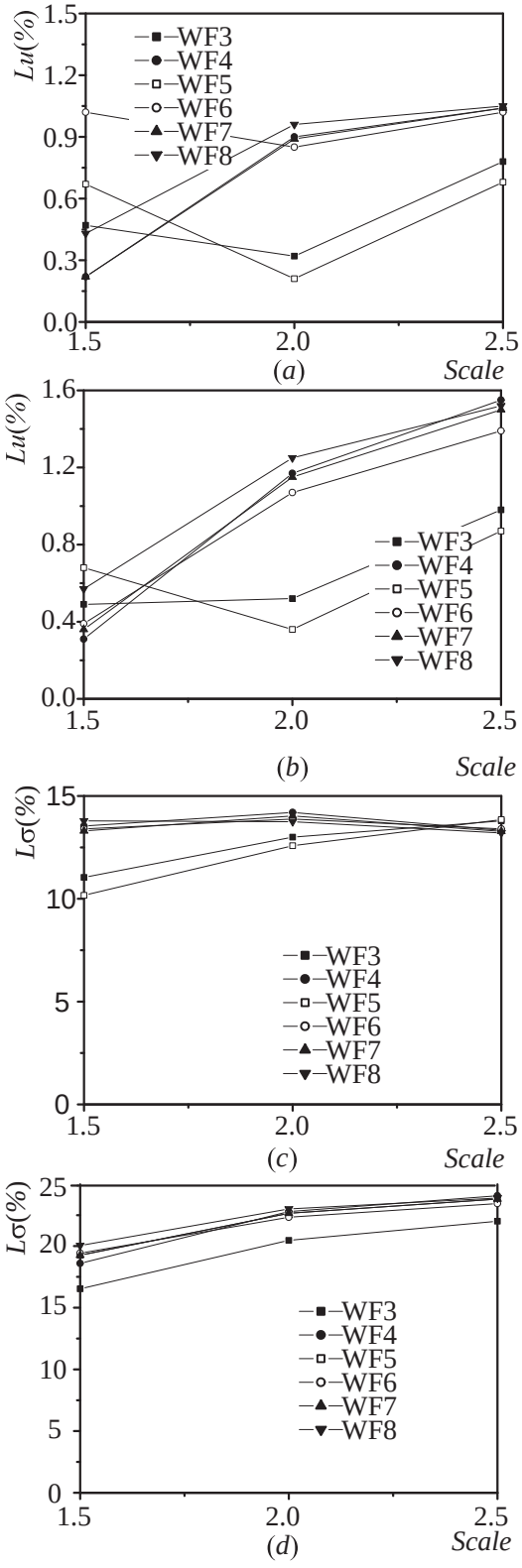


图 2.12　采用权函数WF3～WF8时的误差范数（GBMM）

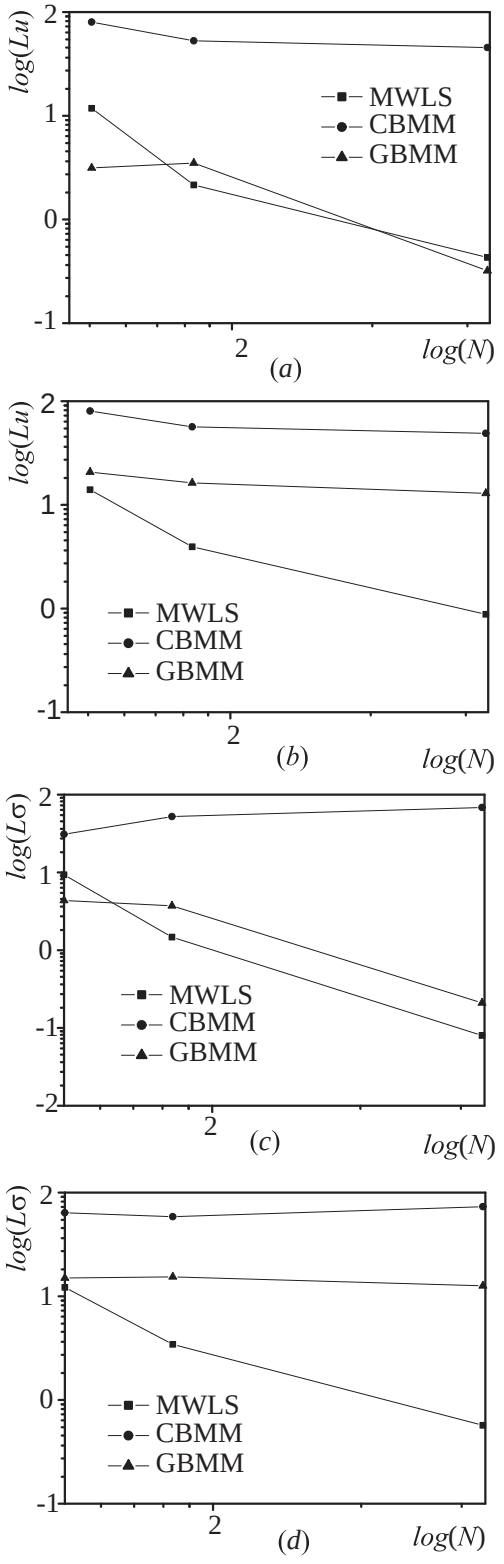


图 2.13　采用权函数WF3和WF5时的收敛曲线

2.3.3.2　具有中心圆孔的无限大方板

进一步对2.3.2.2节中的均匀拉伸开孔大方板进行分析。采用289节点（如图2.5*a*所示）分析各种参数对计算结果的影响。

图2.14～2.20比较了由MWLS、CBMM和GBMM取不同的参数而得到的位移和应力误差范数，在所有图中，(*a*)和(*b*)分别给出了$k=9$和$k=12$时的位移误差范数，而(*c*)和(*d*)分别给出了$k=9$和$k=12$时的应力误差范数。在所有GBMM计算中，采用如图2.5*b*所示的背景网格积分，在每个网格中采用3×3高斯积分点。采用罚函数施加本质边界条件。

图2.14～2.16比较了采用权函数WF1时MWLS、CBMM、GBMM的误差范数，从这些结果可以看出，参数β对计算结果影响很大，而此时参数*scale*对计算结果的影响较小。在这个例子中，对MWLS来说$k=9$时$\beta/scale=3.0$计算结果较好，而当$k=12$时$\beta/scale=1.0$的计算结果较好。

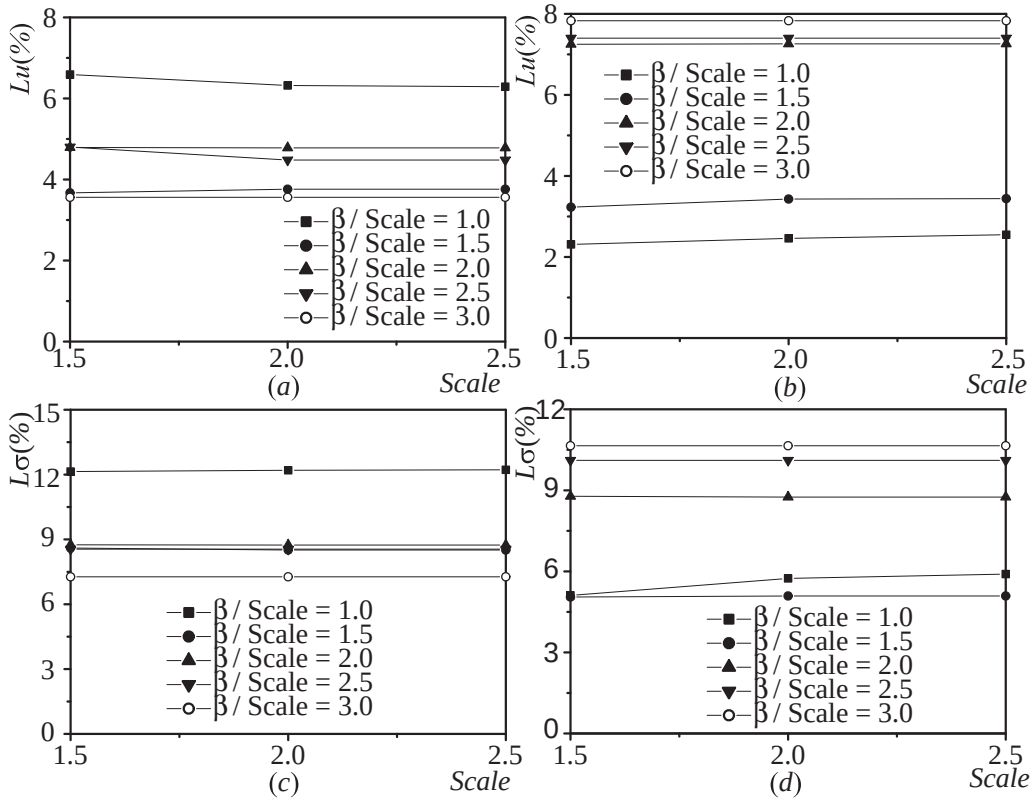


图 2.14　采用权函数WF1时MWLS的误差范数

图2.17比较了采用权函数WF2时MWLS、CBMM和GBMM得到的误差范

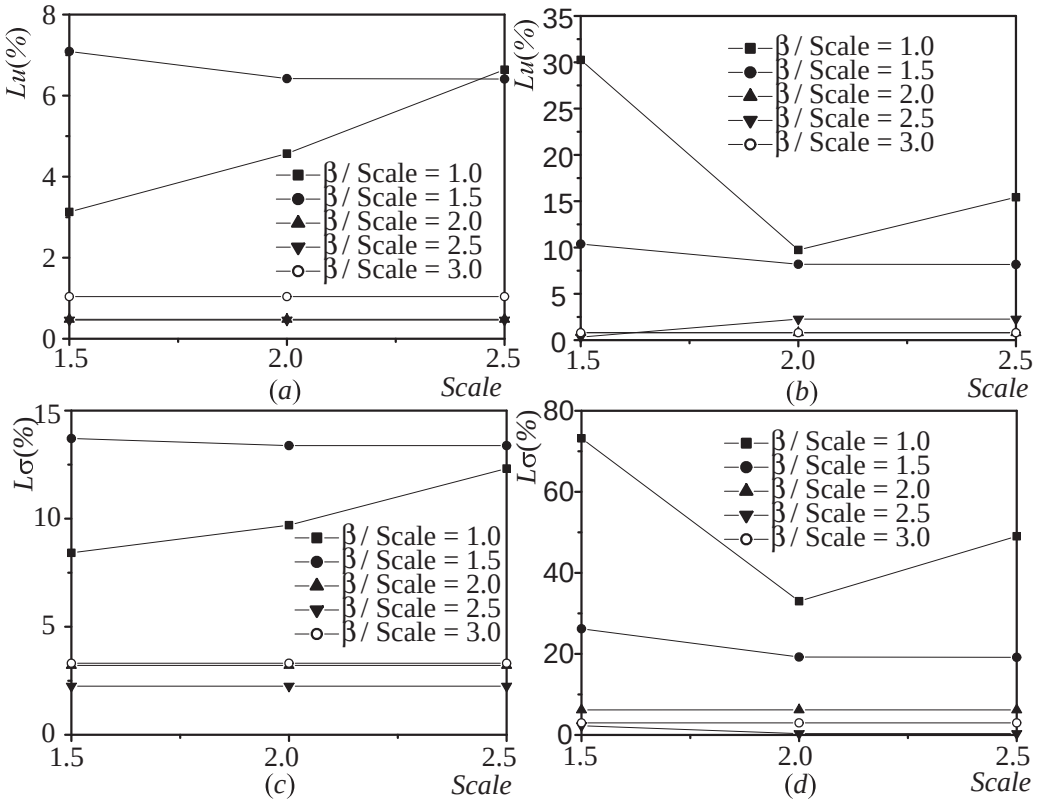


图 2.15　采用权函数WF1时CBMM的误差范数

数。权函数的参数α对计算结果的影响很大，在该算例中，对MWLS来说$k=9$时$scale\times\alpha=0.6\sim0.7$的计算结果较好，而当$k=12$时$scale\times\alpha=0.8\sim0.9$的计算结果较好。图2.17也表明了CBMM是不稳定的，而MWLS是稳定的。

图2.18~2.20 比较了采用权函数WF3~WF8时MWLS、CBMM和GBMM 所得到的误差范数。结果表明，权函数对计算结果有很大影响。在此例中，采用权函数WF3和WF5时MWLS 的计算结果最好。另外当采用权函数WF3~WF5时，参数$scale$对结果有显著的影响，建议取$scale=2.0$。

表2.11比较了采用LSQ近似函数时误差范数随参数k的变化情况。尽管LSQ近似不如MLS 近似精度高，但MWLS仍给出了合理的结果，而CBMM却不能得到正确的结果。

本算例也表明了当$k=9$和$k=12$时GBMM的位移精度稍高于MWLS，其应力精度却远低于MWLS。

图2.21比较了MWLS、CBMM和GBMM的收敛率，影响点数$k=12$，影响半

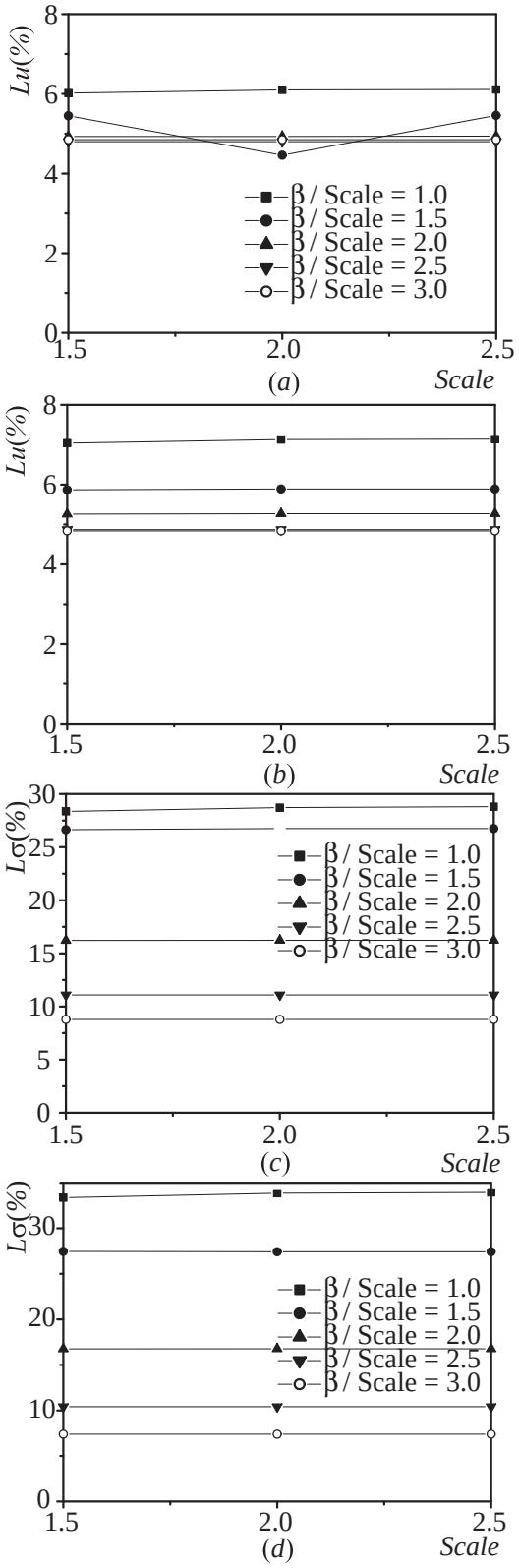


图 2.16　采用权函数WF1时的误差范数（GBMM）

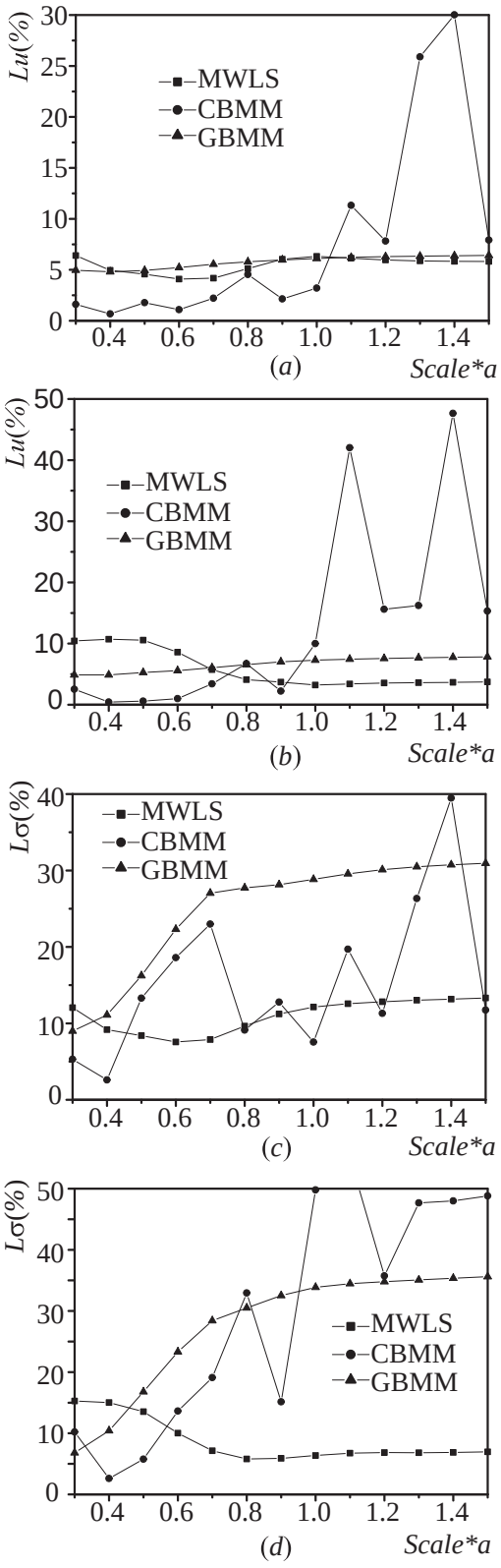
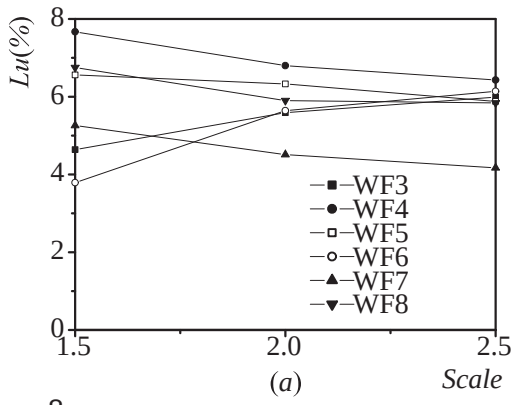
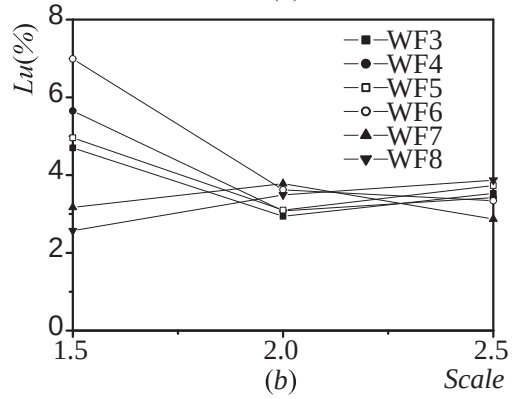
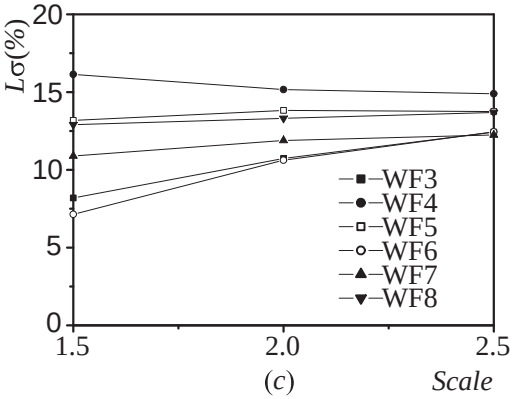


图 2.17　采用权函数WF2时的误差范数（MWLS，CBMM和GBMM）







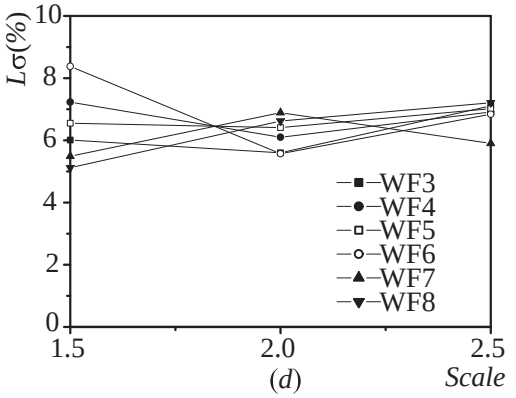
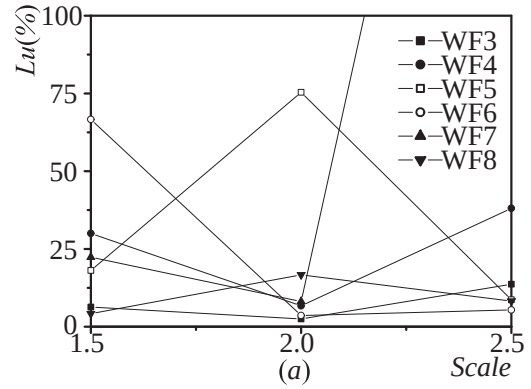
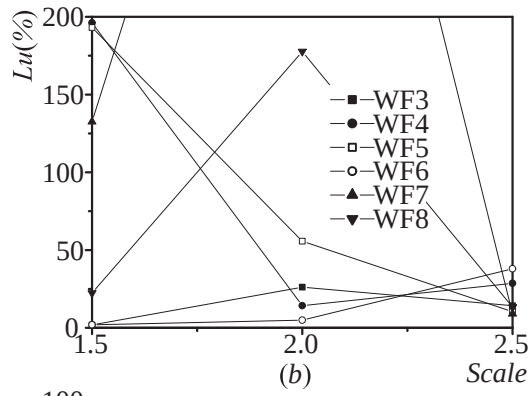
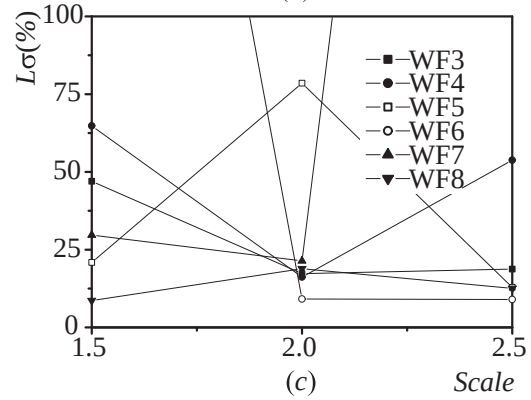


图 2.18　采用权函数WF3∼WF8时的误差范数（MWLS）







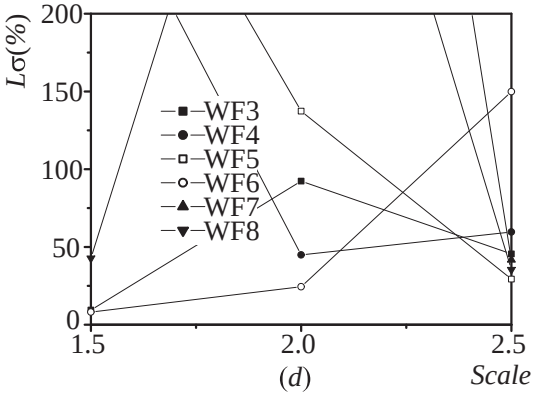


图 2.19　采用权函数WF3∼WF8时的误差范数（CBMM）

表 2.11　采用LSQ近似函数时开孔方板的误差范数（%）

	MWLS		CBMM		GBMM	
k	9	12	9	12	9	12
$L_u(\%)$	6.46	4.29	-	-	6.63	7.83
$L_\sigma(\%)$	15.11	8.14	-	-	31.8	37.0

径放大系数$scale = 2.0$。其中(a)和(b)分别给出了采用权函数WF3时位移和应力的收敛曲线，(c)和(d)分别给出了采用权函数WF5时位移和应力的收敛曲线。在这个例子中，MWLS的位移收敛率和GBMM相当，但MWLS的应力收敛率要高于GBMM。

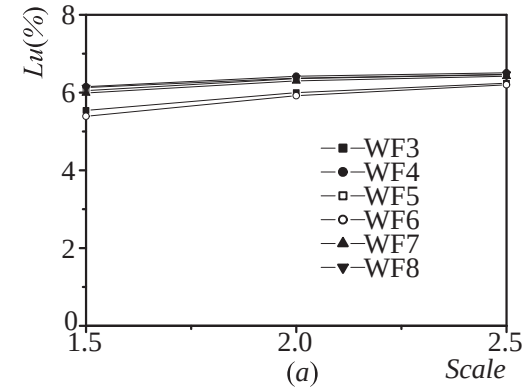
根据这些算例分析，我们可以得出以下结论：

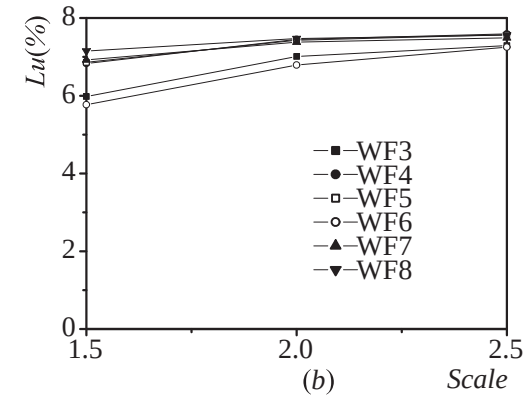
1. CBMM是不稳定的，其精度在很大程度上取决于权函数的类型以及参数k和$scale$。与CBMM不同，MWLS是稳定的。从加权残量法的观点来看，CBMM和MWLS的本质差别在于如何处理边界节点处的平衡方程的残差。CBMM没有考虑边界点处方程的残差，而MWLS另边界点处平衡方程的残量在最小二乘意义下取最小值。因此配点法不稳定的原因可能是由于边界点处不满足平衡方程，也就是说平衡方程的残量在边界上没有按照一定的方式予以消除。

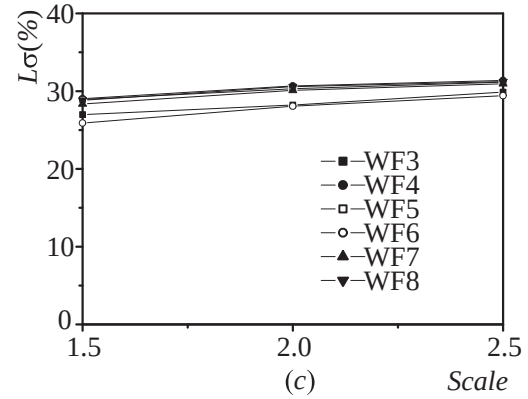
2. 权函数对无网格法的计算结果影响很大，因此必须慎重选取。对权函数WF1和WF2，当参数β和α取某些值时，无网格法可以给出非常好的结果，然后参数β和α的最优值是和待求解问题相关的，很难确定。权函数WF3～WF8不需要任何参数，便于使用。根据上面的数值分析，建议采用权函数WF3（见式(2-17)）和WF5（见式(2-19)）。

3. 当采用权函数WF1和WF2时，参数$scale$对结果的影响很小。而当采用权函数WF3～WF5时，参数$scale$ 对结果影响很大。建议$scale$取2.0。

4. LSQ近似的计算量小于MLS近似的计算量。当节点较多时，采用LSQ近似可以得到满意的结果。因此在分析高速碰撞和爆炸等问题时，可以使用LSQ近似在保证精度的同时减低计算量。







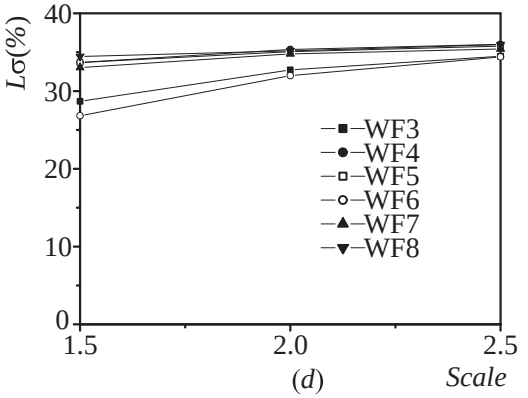
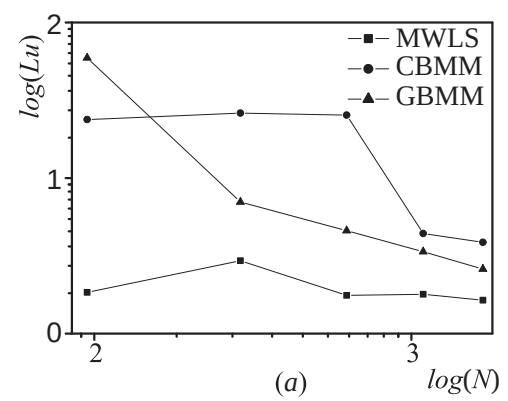
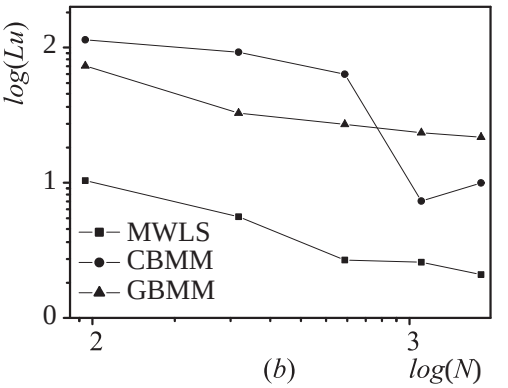
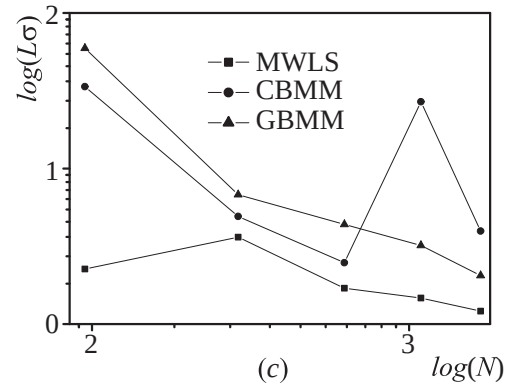


图 2.20　采用权函数WF3∼WF8时的误差范数（GBMM）







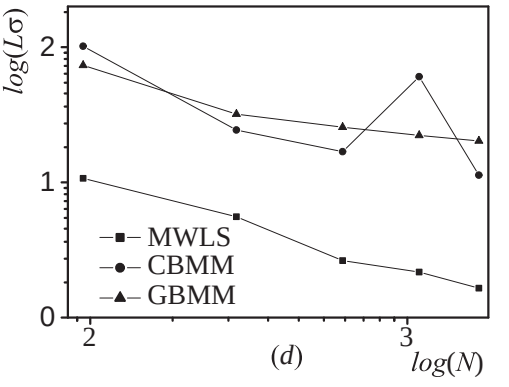


图 2.21　采用权函数WF3和WF5时的收敛曲线（MWLS，CBMM和GBMM）

5. 当采用$k=9$和$k=12$时，MWLS的位移精度与GBMM相当，但其应力精度要高于GBMM。在GBMM中，为了得到满意的结果，可以将支撑域覆盖了计算点$\mathbf{x}$的所有节点都取为其影响点。这样可以大幅度地提高GBMM的精度，但同时也显著地增加了计算量。

6. 尽管MWLS的精度在有些情况下高于GBMM，但它对权函数的敏感程度高于GBMM。

2.4　伽辽金最小二乘无网格法

与伽辽金法不同，最小二乘法的欧拉方程不是系统的原始微分方程，而是该方程的高阶导数，但求解过程中施加的边界条件仍然只是位移和力的边界条件，这对方程的求解显然是不够的。因此不恰当的边界条件可能会导致虚假的解答。为了克服这个问题，本节将伽辽金法和最小二乘法结合起来，建立了伽辽金-最小二乘无网格法（MGLS）。该方法将求解域划分为两个区域，即内部区域（最小二乘域Ω_1）和边界区域（伽辽金域Ω_2），如图2.22所示。在内部区域中采用最小二乘法，而在边界区域中采用伽辽金法，系统泛函的变分为：

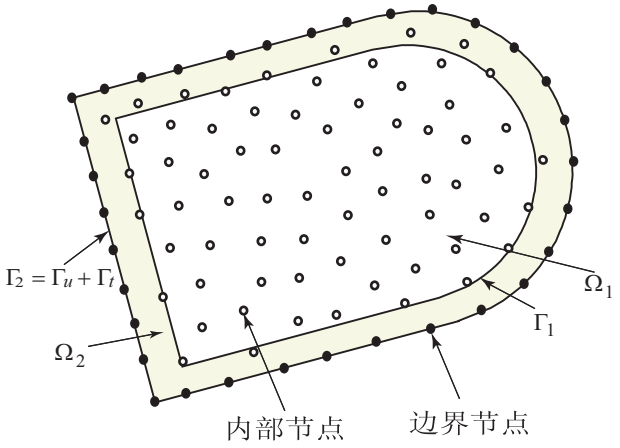


图 2.22　求解域

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= -\lambda\int_{\Omega_1}\delta\sigma_{ik,k}(\sigma_{ij,j}+\bar{f}_i)\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_2}\delta u_i(\sigma_{ij,j}+\bar{f}_i)\mathrm{d}\Omega\\ &- \int_{\Gamma_t}\delta u_i(\sigma_{ij}n_j-\bar{t}_i)\mathrm{d}\Gamma=0\end{aligned}\tag{2-60}$$

式中Γ_t为区域边界Γ_2的给定面力部分，λ为权系数，为了保证上式中各项量级相当，可取$\lambda=1/E$。

对上式第二项进行分部积分，得

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= -\lambda\int_{\Omega_1}\delta\sigma_{ik,k}(\sigma_{ij,j}+\bar{f}_i)\mathrm{d}\Omega-\int_{\Omega_2}\delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_2}\delta u_i\bar{f}_i\mathrm{d}\Omega\\ &+ \int_{\Gamma_t}\delta u_i\bar{t}_i\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_1}\delta u_i\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}\Gamma=0\end{aligned}\tag{2-61}$$

上式中第一项的积分是用来在内部域Ω_1中在最小二乘意义下消除平衡方程

的残量的，将该项用其离散形式来代替，得

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= -\lambda\sum_{s=1}^{N_1}\delta\sigma_{ik,k}(\sigma_{ij,j}+\bar{f}_i)\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_s}-\int_{\Omega_2}\delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_2}\delta u_i\bar{f}_i\mathrm{d}\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_t}\delta u_i\bar{t}_i\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_1}\delta u_i\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}\Gamma=0 \end{aligned} \tag{2-62}$$

其中N_1为最小二乘域Ω_1中的结点总数，一般取为除了边界节点外的所有节点。将无网格近似函数（2-11）代入到式（2-62）中，并考虑到节点虚位移δu_{iI}的任意性，得

$$\mathbf{KU}=\mathbf{P} \tag{2-63}$$

其中

$$\mathbf{K}=\int_{\Omega_1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_1}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathrm{d}\Gamma+\sum_{s=1}^{N_2}\lambda\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{H}(\mathbf{x}) \tag{2-64}$$

$$\mathbf{P}=\int_{\Omega_1}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{f}}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_t}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{t}}\mathrm{d}\Gamma-\sum_{s=1}^{N_2}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{f}} \tag{2-65}$$

式中矩阵$\mathbf{H}(\mathbf{x})$，$\mathbf{Q}(\mathbf{x})$，$\mathbf{Nx}$分别由式（2-41）～式（2-43）给出，

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_N}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_N}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_N}{\partial y} & \frac{\partial N_N}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{2-66}$$

$$\mathbf{D} = \frac{E_0}{1-\nu_0^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu_0 & 0 \\ \nu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_0}{2} \end{bmatrix}\text{（平面应力问题）} \tag{2-67}$$

本方法只需要在伽辽金域Ω_2中计算积分。一般情况下，只需要在区域边界附近设置一很薄的伽辽金区域（只包含一层背景网格），伽辽金区域Ω_2要小得多，因此该方法的计算量要远小于伽辽金法，接近于配点法，而边界条件的施加却和伽辽金法相同。算例表明该方法是稳定的。

下面通过两个算例说明伽辽金-最小二乘无网格方法的优势。在下面的计算中，采用立方样条权函数（2-19），选点方法采用VSR（变支撑域选取法），初始影响点$k=12$，支撑域放大系数$scale=1.2$。

2.4.1　受集中载荷作用的悬臂梁

考虑2.3.2.1节中受集中载荷作用的悬臂梁，采用均匀分布的85个节点（如图2.23 所示）对求解域进行离散。为了考察边界条件对加权最小二乘无网格法的影响，这里分析了两种边界条件。图2.24 给出了悬臂梁左端完全固定时梁下表面应力σ_{xx}的数值计算结果，图2.25给出了悬臂梁左端按精确解指定位移时下表面应力σ_{xx}的数值计算结果。可以发现，当悬臂梁左端完全固定时，MWLS给出了虚假的解答，而加辽金- 最小二乘无网格法（MGLS）则给出了正确的结果。在伽辽金-最小二乘计算中，在边界附近布置了一层伽辽金区域，相应的背景网格如图2.23 所示，在每个网格中采用3高斯积分。

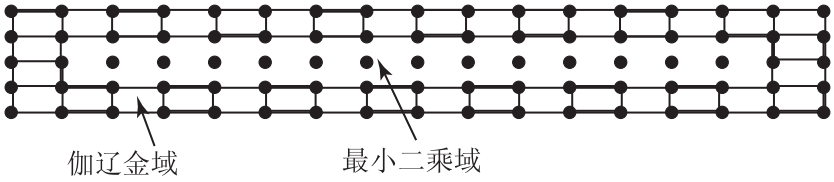


图 2.23　悬臂梁节点布置及区域划分

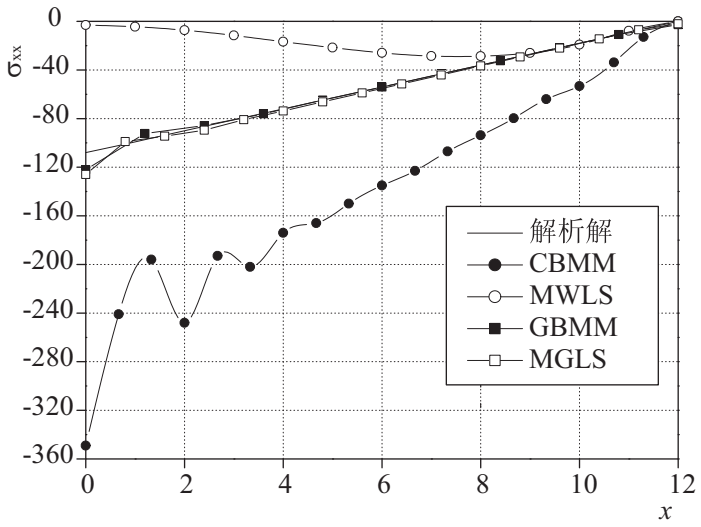


图 2.24　左端固定时梁上表面的应力σ_{xx}

表2.12比较了参数*scale*对不同的无网格方法精度的影响，悬臂梁左端按精确解指定位移。从表中可以看出，参数*scale*对计算结果有很大的影响，CBMM很不稳定，MGLS稳定性很好而且精度和GBMM很接近。

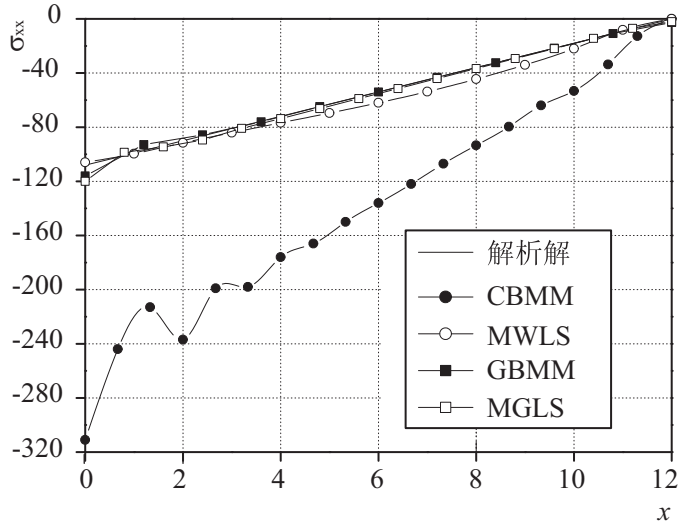
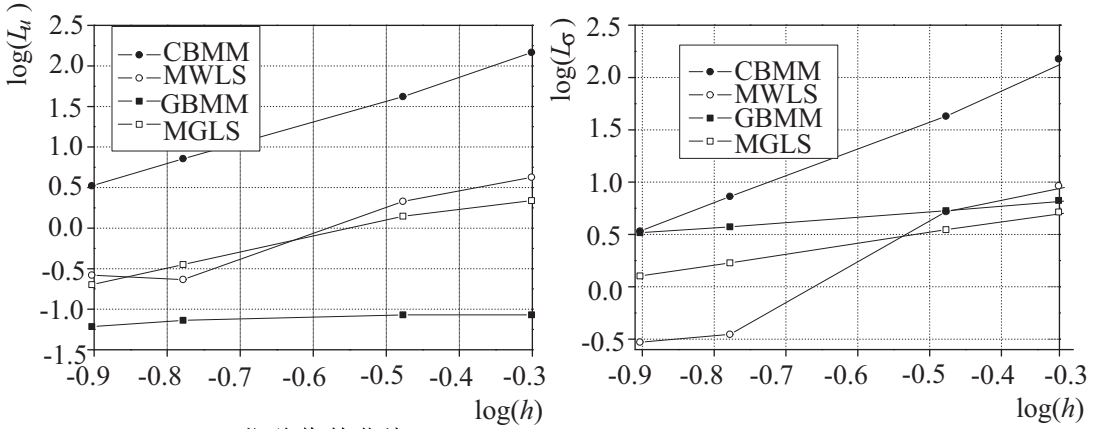


图 2.25　左端给定精确位移时梁上表面的应力σ_{xx}

表 2.12　用不同的方法得到的悬臂梁计算结果

	MWLS			CBMM		
scale	1.2	1.5	2.0	1.2	1.5	2.0
$L_u(\%)$	4.221	18.16	10.19	146.1	287.6	8.187
$L_\sigma(\%)$	9.201	38.85	14.52	150.2	468.8	20.16
	GBMM			MGLS		
scale	1.2	1.5	2.0	1.2	1.5	2.0
$L_u(\%)$	0.085	0.582	1.035	2.186	1.048	4.858
$L_\sigma(\%)$	6.669	8.652	10.53	5.170	4.223	10.061

图2.26中比较了MWLS、CBMM、MGLS以及GBMM的位移和应力收敛率，图中的*h*表示y方向两层节点的间距。从图中可以看出，CBMM的收敛率最高，但它精度很低，在本算例中MGLS的收敛率要比GBMM稍高。



(a)　位移收敛曲线　　(b)　应力收敛曲线

图 2.26　不同的方法计算的位移和应力收敛曲线

2.4.2　具有中心圆孔的无限大平板

考虑2.3.2.2节中在*x*方向上受均匀拉应力作用的具有中心圆孔的无限大平板，采用81节点离散，如图2.27所示。为了考察边界条件的影响，分析了两种边界条件。图2.28 给出了采用对称边界条件（即在左边界上各点处*x*方向固定，*y*方向自由，而在下边界各点处*x*方向自由，*y*方向固定）时的计算结果，图2.29给出了在左边界和下边界处给定精确位移时的计算结果。与悬臂梁算例相同，只有采用精确位移边界条件的时候，加权最小二乘无网格法才能得到正确的结果，而当采用对称边界条件时，它给出了虚假的解答。而无论给出哪种边界条件，伽辽金-最小二乘法都给出了正确的结果。

图2.30比较了CBMM、GBMM、MGLS采用对称边界计算出来的位移和应力收敛率，图2.29比较了CBMM、GBMM、MGLS、MWLS采用精确边界条件计算出来的位移和收敛率。两种不同的边界条件下GBMM和MGLS的收敛率大致相同。

表2.13和表2.14分别比较了在对称边界条件和精确位移边界条件下*scale*对不同的方法的精度的影响，和悬臂梁的结果一样，*scale*对计算结果有比较大的影

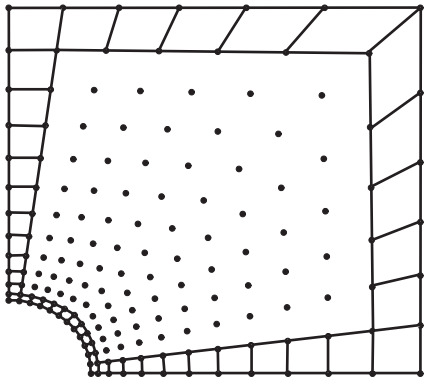


图 2.27　具有中心圆孔的无限大平板节点布置及区域划分

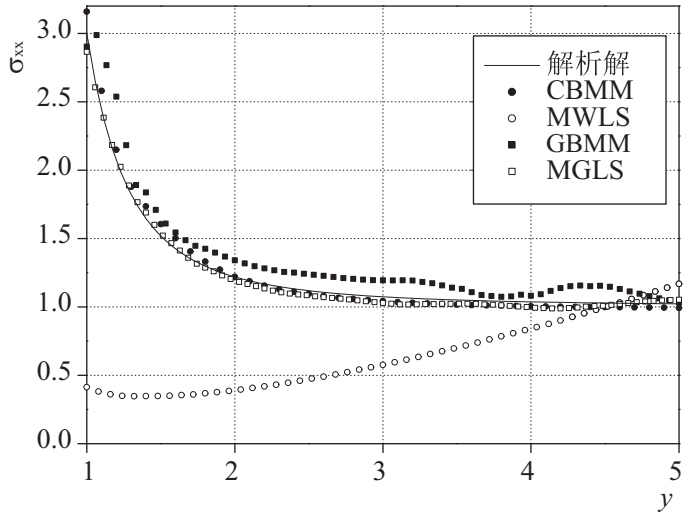


图 2.28　采用对称边界条件时板左边界应力σ_{xx}

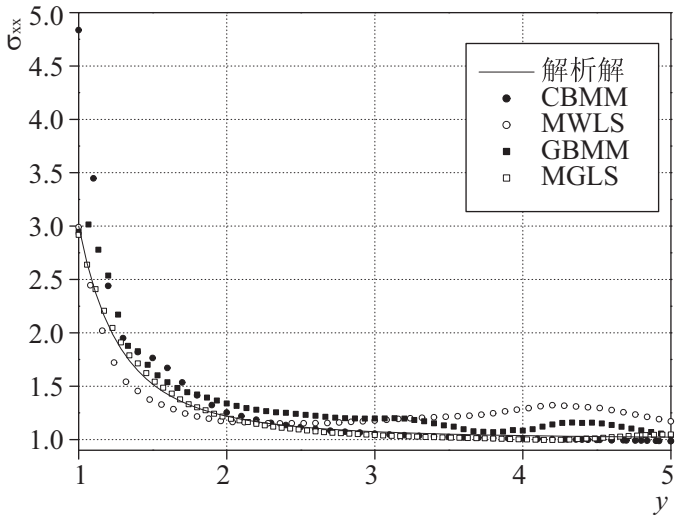


图 2.29　采用精确边界条件时板左边界应力σ_{xx}

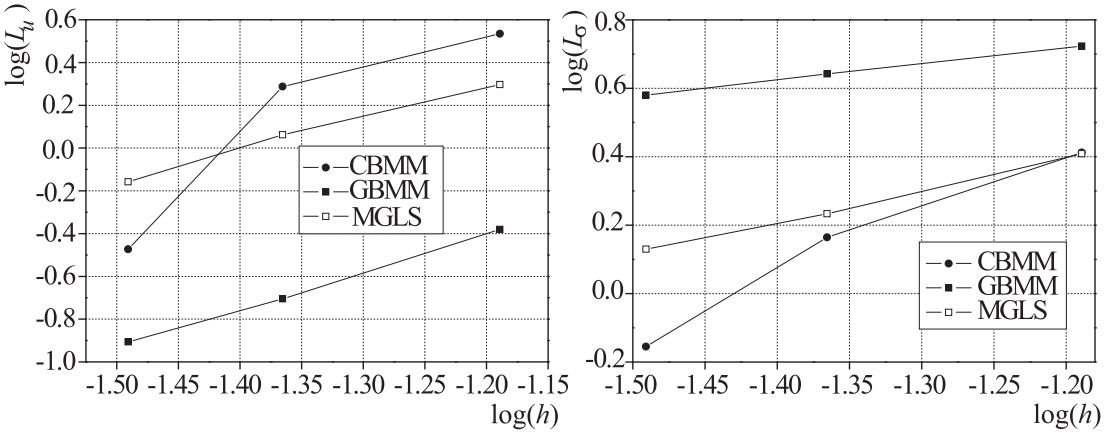


图 2.30　采用对称边界条件时各种方法得到的收敛率

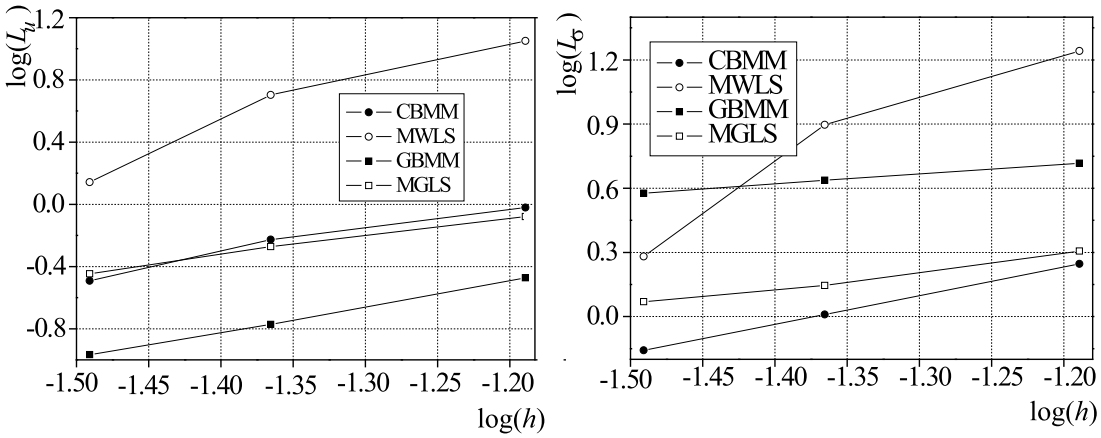


图 2.31　采用精确边界条件时各种方法得到的收敛率

响。从这个算例可以看出，MGLS是稳定的，在有些情况下精度甚至比GBMM要好。

表 2.13　对称边界条件下不同的方法计算的结果

	MWLS			CBMM		
scale	1.2	1.5	2.0	1.2	1.5	2.0
$Lu(\%)$	12.24	7.658	2.934	3.753	3.688	2.724
$L\sigma(\%)$	18.46	11.41	6.326	34.68	11.66	11.43
	GBMM			MGLS		
scale	1.2	1.5	2.0	1.2	1.5	2.0
$Lu(\%)$	0.5746	0.9177	2.059	1.284	1.461	1.996
$L\sigma(\%)$	6.163	8.757	11.06	2.702	4.685	6.670

2.5　小结

本章讨论了加权最小二乘无网格法（MWLS）、伽辽金无网格法（GBMM）、直接配点无网格法（CBMM）的精度以及计算效率，CBMM的计算效率最高，但

表 2.14　精确边界条件下不同的方法计算的结果

	MWLS			CBMM		
scale	1.2	1.5	2.0	1.2	1.5	2.0
$Lu(\%)$	72.75	70.56	65.36	2.035	4.333	14.70
$L\sigma(\%)$	48.16	43.67	37.65	2.941	4.834	21.86
	GBMM			MGLS		
scale	1.2	1.5	2.0	1.2	1.5	2.0
$Lu(\%)$	0.7161	1.303	3.058	2.233	2.883	2.544
$L\sigma(\%)$	6.248	8.834	11.28	3.167	5.204	8.041

是它的精度和稳定性很差，MWLS在很大程度上提高了CBMM的精度和稳定性，而求解效率并未降低太多。GBMM的稳定性最好，但是它相对于MWLS计算效率很低。

本章讨论了各种参数对MWLS、GBMM、CBMM的精度和稳定性的影响，这些参数包括：无网格近似函数的类型（MLS近似和LSQ近似）、用于构造无网格近似函数的影响点数、MLS近似中权函数的类型、权函数式中的参数以及节点影响半径的放大系数等。算例表明，CBMM是不稳定的，有的参数可能导致完全错误的结果；MWLS的精度和稳定性相对CBMM有很大的改善，当只取影响域中离计算点最近的k（$k=9$或12）个节点时，MWLS的精度和GBMM差不多，在有些情况下甚至要好，影响域中的所有节点都选取时可以大幅度的提高GBMM的精度，但同时却显著的增加了GBMM的计算量。算例表明权函数WF3和WF5的结果较好，建议选取这两个权函数。

本章针对MWLS对边界条件敏感的缺点提出了伽辽金最小二乘无网格法（MGLS）。MGLS只需要在边界区域（很薄，只相当于两层节点距离的厚度）积分，而在内部区域采用最小二乘配点法，因此求解效率相对于GBMM来说仍然很高。算例表明，MGLS是稳定的，而且精度很高。

第 3 章　伽辽金配点无网格法

3.1　引言

配点型无网格方法是纯无网格方法，它不需要任何背景网格，效率高。然而在配点型无网格法中，平衡方程只在域Ω内的各节点处严格满足，而在其余部分（包括边界节点）处均不满足。因此可能会产生较大误差，且不稳定。目前的大多数稳定方案都是在原配点法方程中增加控制方程的残差。Oñate等人的研究工作表明，给定面力边界Γ_t 上的平衡方程残差项对配点法的稳定性起决定性作用。加权最小二乘无网格法以及伽辽金最小二乘无网格法实际上也是对边界条件进行改善而大大提高了配点法的稳定性。但伽辽金最小二乘法在分析动力学问题的时候，无法采用显式时间积分格式，而在高速碰撞、金属成型等涉及大超大变形的问题中，显式时间积分是一种很重要的分析方法。

本章将伽辽金法和配点法相结合，建立了伽辽金配点无网格法（MGCM）。这种方法和伽辽金最小二乘无网格方法一样，将求解区域划分为两部分，内部区域（配点区域）Ω_1和边界区域（伽辽金区域）Ω_2，如图2.22所示。伽辽金配点无网格法可以采用显式时间积分格式。

3.2　MGCM求解弹性小变形静力问题

3.2.1　一般格式

对于内部节点我们通过直接配点法得到各个节点的平衡方程（对于二维情况）：

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}_k)+\bar{f}_i(\mathbf{x}_k)=0 \quad \mathbf{x}_k\in\Omega, i,j=1,2; k=1,2,\cdots,N-N_u-N_t \tag{3-1}$$

将移动最小二乘近似函数（2-11）代入到（3-1）中，得到

$$\mathbf{H}_I(\mathbf{x}_k)\mathbf{u}_I=-\bar{\mathbf{f}}_k \quad \mathbf{x}_I\in\Omega, k=1,2,\cdots,N-N_u-N_t \tag{3-2}$$

其中$\mathbf{H}_I(\mathbf{x}_k)$，$\mathbf{u}_I$，$\bar{\mathbf{f}}_k$的分别由式（2-33），（2-36）给出。

边界节点的方程我们通过在Ω_2中伽辽金积分得到，变分方程为：

$$\delta\Pi = \int_{\Omega_2} \delta u_i(\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i)d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u_i(\sigma_{ij}n_j - \bar{t}_i)d\Gamma \tag{3-3}$$

其中Γ_t为区域边界Ω_2给定的面力部分，δu_i为节点的虚位移。对式（3-3）进行分部积分得：

$$\delta\Pi = -\int_{\Omega_2} \delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}d\Omega + \int_{\Omega_2} \delta u_i\bar{f}_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta u_i\bar{t}_i d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \delta u_i\sigma_{ij}n_j d\Gamma \tag{3-4}$$

将无网格近似函数（2-11）代入到（3-4）中得到

$$\mathbf{K}_2\mathbf{U} = \mathbf{P}_2 \tag{3-5}$$

式（3-5）中

$$\mathbf{K}_2 = \int_{\Omega_1} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}d\Omega - \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x})d\Gamma \tag{3-6}$$

$$\mathbf{P}_2 = \int_{\Omega_1} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{f}}d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{t}}d\Gamma \tag{3-7}$$

其中$\mathbf{U}$在式（2-44）给出，$\mathbf{B}$和$\mathbf{D}$ 由（2-66）和（2-67）给出，$\mathbf{N}(\mathbf{x})$，$\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ 由式（2-43）和式（2-41）给出。

注意在集成矩阵$\mathbf{K}_2$和$\mathbf{P}_2$的时候只需要集成边界节点所在的行。这样我们就得到了边界节点的方程，联合内部节点的方程（3-2）就得到了MGCM静力小变形问题的求解格式

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P} \tag{3-8}$$

其中

$$(\mathbf{K})_I = \begin{cases} (\mathbf{K}_2)_I & \mathbf{x}_I \in \Gamma_2 \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}_I) & \mathbf{x}_I \notin \Gamma_2 \end{cases}; \quad I = 1,2,\cdots,N \tag{3-9}$$

$$(\mathbf{P})_I = \begin{cases} (\mathbf{P}_2)_I & \mathbf{x}_I \in \Gamma_2 \\ \bar{\mathbf{f}}_I & \mathbf{x}_I \notin \Gamma_2 \end{cases}; \quad I = 1,2,\cdots,N \tag{3-10}$$

3.2.2　算例分析

本节仍然通过受集中载荷作用的悬臂梁和具有中心圆孔的无限大方板来分

析MGCM的稳定性和精度。在这两个算例中都采用变支撑域选点法（VSR），初始影响点数$k=12$；权函数为立方样条权函数（2-19）。在求解域的边界布置了一层伽辽金域，在每个网格中采用3×3高斯积分。

3.2.2.1　受集中载荷作用的悬臂梁

考虑2.3.2.1节中受集中载荷作用的悬臂梁，采用均匀分布的85节点（如图2.23所示）对求解域进行离散。

为了研究边界对方法的影响，左边的位移边界条件采取两种方案：第一种方案，左边的位移边界条件按理论值给出x方向和y方向的位移；第二种方案，给出对称的边界条件，中间的一个节点两个方向都固定，别的节点只在x方向固定，而在y方向放松。

对于上述两种施加边界位移的方案，我们比较了梁下表面的应力变化，图3.1a 和图（3.1b）是分别采用第一种方案和第二种方案的计算结果，从图中我们可以看出，在这两种情况下CBMM给出了完全错误的解答，而MGCM和GBMM的计算结果精度都很高。和GMLS一样，GCMM对边界也不敏感。

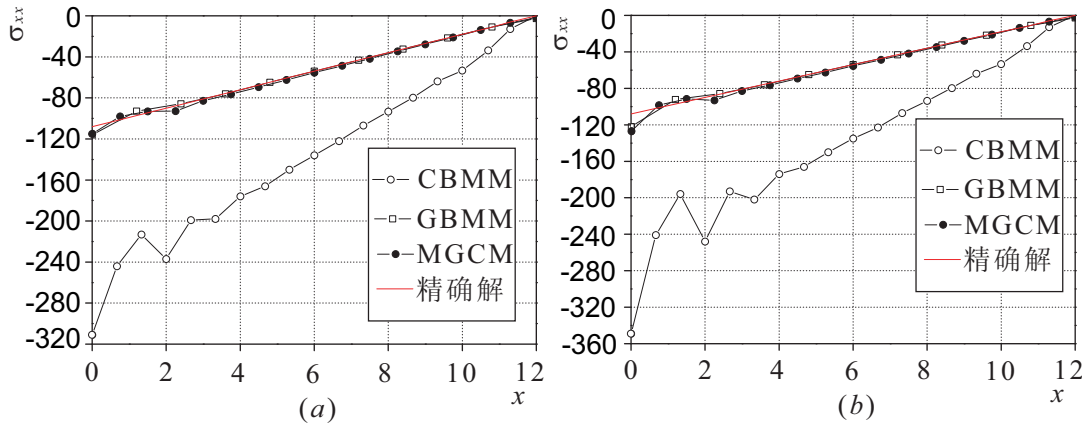


图 3.1　梁下表面σ_{xx}变化图

对于第一种方案，我们比较了影响域的放大倍数*scale*对几种无网格方法精度的影响，结果如图3.2所示，CBMM对*scale*非常敏感。MGCM和GBMM 受到*scale*的影响很小。

图3.3a和图3.3b比较了CBMM、MGCM、GBMM的位移以及应力收敛率，图

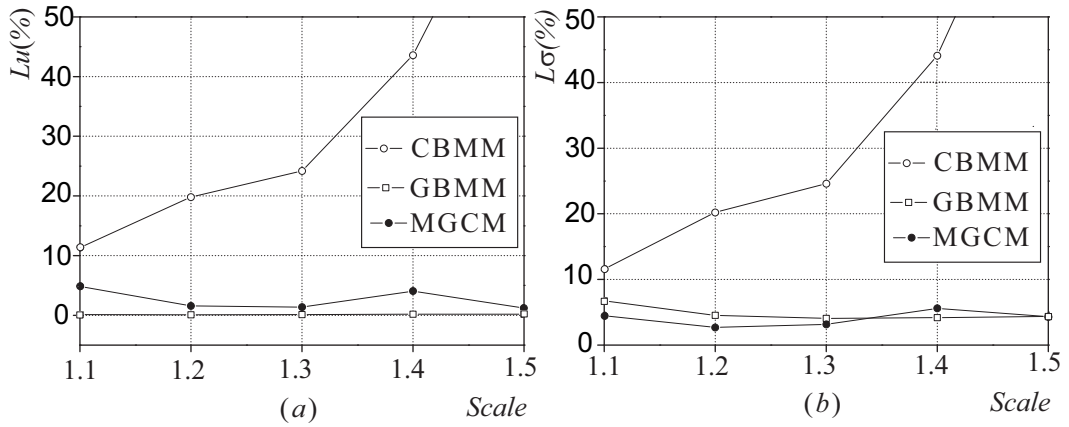


图 3.2　几种无网格方法的误差随*Scale*的变化

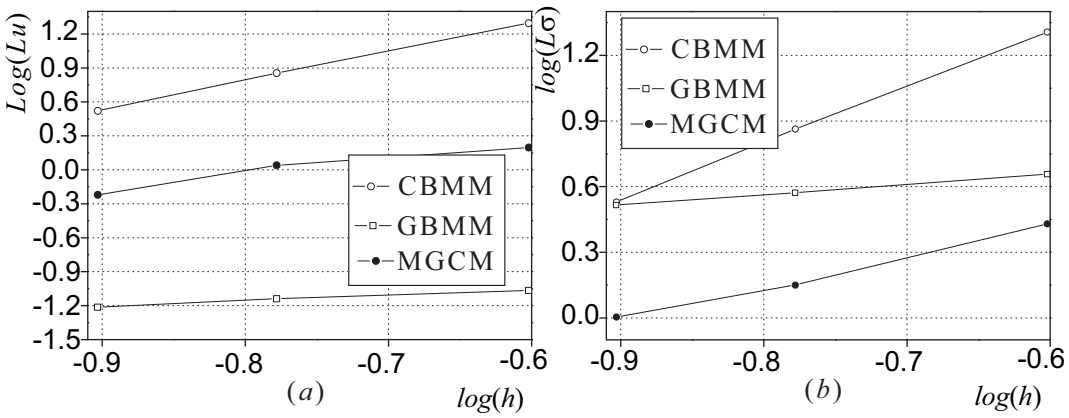


图 3.3　位移收敛率和应力收敛率

中的*h*是上下两层节点在*y*方向上的距离。从图中可以看出，MGCM的收敛率要高于GBMM。CBMM也具有很好的收敛率，但是CBMM的精度和稳定性都很差。

3.2.2.2　具有中心圆孔的无限大方板

考虑2.4.2节中在*x*方向上受均匀拉应力作用的具有中心圆孔的无限大平板，采用81节点（如图2.27所示）离散。

图3.4比较了板下表面的σ_{xx}采用不同方法的计算结果，施加对称边界条件（即在左边界各点处*x*方向固定，*y*方向自由，而在下边界各点处*x*方

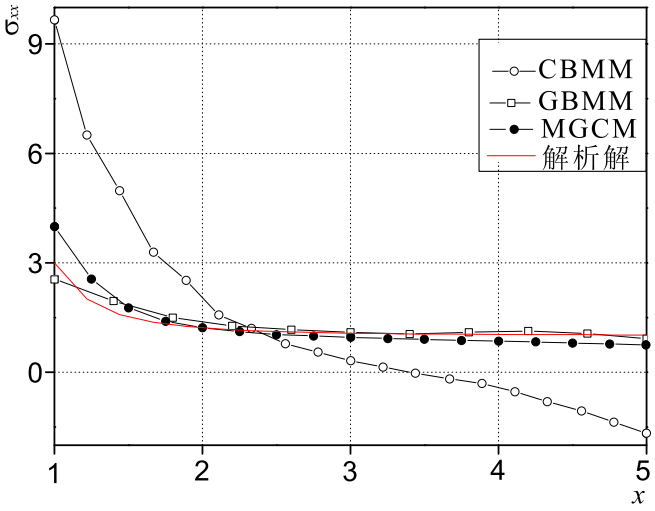


图 3.4　开孔方板最下端的σ_{xx}曲线

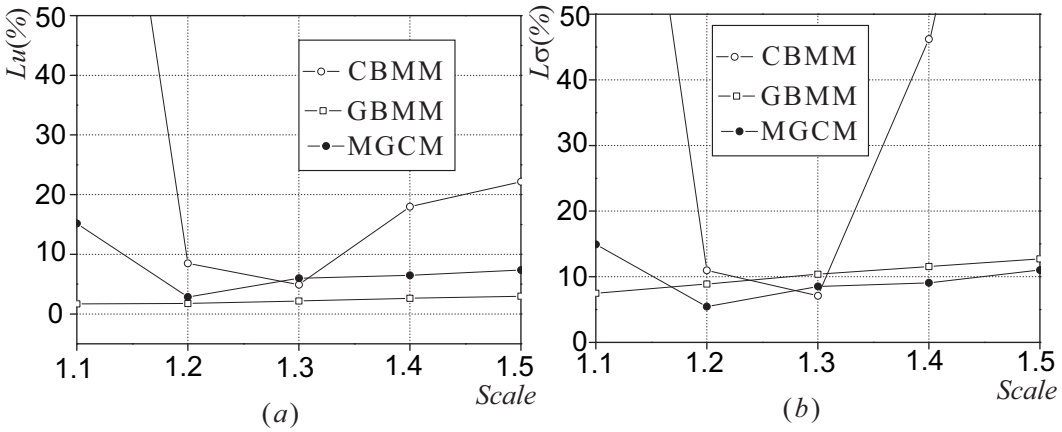


图 3.5　*scale*对位移和应力误差的影响

向自由，*y*方向固定)。从图中可以看出，CBMM给出了错误的计算结果，而MGCM和GBMM与解析解很接近，他们的精度相当。

图3.5比较了CBMM、GBMM、MGCM的位移和应力精度随*scale*变化曲线，从图中可以看出，GBMM和MGCM都要比CBMM要稳定得多。

图3.6比较了CBMM、GBMM、MGCM的位移和应力收敛率，从图中可以看出，对于本算例来说，GBMM和MGCM的收敛率大致相同。

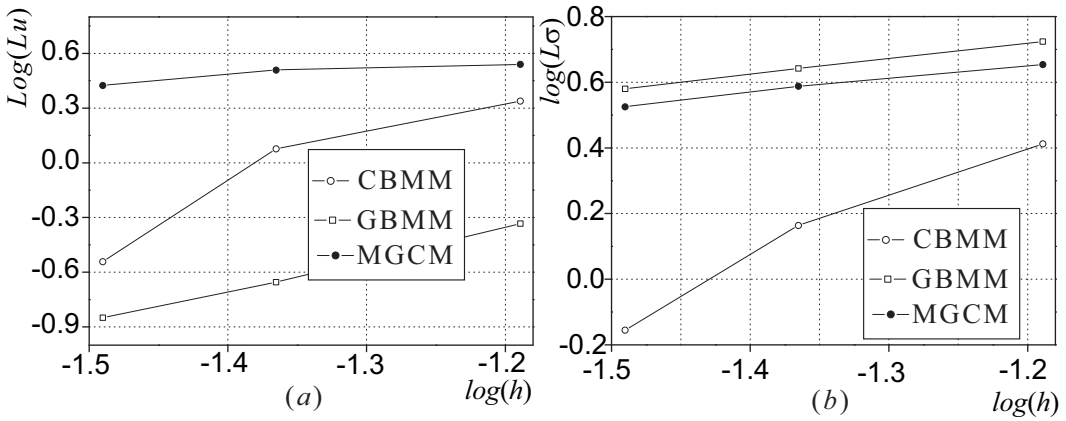


图 3.6　位移和应力收敛曲线

3.3　MGCM求解弹性波传播问题

3.3.1　显式时间积分格式

对于内部节点我们通过直接配点法得到各个节点的平衡方程（对于二维情况）：

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j}(\mathbf{x}_k) + \rho \bar{f}_i(\mathbf{x}_k) \quad \mathbf{x}_k \in \Omega, i, j = 1,2; k = 1,2,\cdots,N - N_u - N_t \tag{3-11}$$

将无网格近似函数（2-11）带入到（3-11）中得到：

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{f}_1^{\text{int}} = \mathbf{f}_1^{\text{ext}} \tag{3-12}$$

其中

$$(\mathbf{M}_1)_I = \rho \mathbf{N}(\mathbf{x}_I) \tag{3-13}$$

$$(\mathbf{f}_1^{\text{int}})_I = \mathbf{G}_J(\mathbf{x}_I)\sigma(\mathbf{x}_J) \tag{3-14}$$

$$(\mathbf{f}_1^{\text{ext}})_I = \bar{f}(\mathbf{x}_I) \quad (I = 1,2,\cdots,N - N_u - N_t) \tag{3-15}$$

其中$\mathbf{N}_k(\mathbf{x})$由式（2-35）给出，$\mathbf{G}$ 定义如下

$$\mathbf{G}_J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_J(\mathbf{x})}{\partial x} & \frac{\partial N_J(\mathbf{x})}{\partial y} \\ \frac{\partial N_J(\mathbf{x})}{\partial y} & \frac{\partial N_J(\mathbf{x})}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{3-16}$$

边界节点的方程我们通过在Ω_2中伽辽金积分得到，变分方程为

$$\delta\Pi = \int_{\Omega_2} \delta u_i(\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i - \rho\ddot{u}_i)d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u_i(\sigma_{ij}n_j - \bar{t}_i)d\Gamma \tag{3-17}$$

对式（3-17）进行分部积分得

$$\begin{aligned}\delta\Pi \;&=\; -\int_{\Omega_2} \delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}d\Omega + \int_{\Omega_2} \delta u_i\bar{f}_i d\Omega - \int_{\Omega_2} \delta u_i\rho\ddot{u}_i d\Omega \\ &+\; \int_{\Gamma_t} \delta u_i\bar{t}_i d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \delta u_i\sigma_{ij}n_j d\Gamma\end{aligned} \tag{3-18}$$

将无网格近似函数（2-11）带入到（3-18）中得到

$$\mathbf{M}_2\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{f}_2^{\text{int}} = \mathbf{f}_2^{\text{ext}} \tag{3-19}$$

其中

$$\mathbf{M}_2 = \int_{\Omega_2} \rho\mathbf{N}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{N}(\mathbf{x})d\Omega \tag{3-20}$$

$$\mathbf{f}_2^{\text{int}} = \int_{\Omega_2} \mathbf{G}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\cdot\sigma(\mathbf{x})d\Omega - \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\cdot\sigma\cdot\mathbf{n}d\Gamma \tag{3-21}$$

$$\mathbf{f}_2^{\text{ext}} = \int_{\Omega_2} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\cdot\bar{\mathbf{f}}d\Omega + \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\cdot\bar{\mathbf{t}}d\Gamma \tag{3-22}$$

其中

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\ \mathbf{G}_1(\mathbf{x}) \quad \mathbf{G}_2(\mathbf{x}) \quad \cdots\mathbf{G}_N(\mathbf{x})\ ] \tag{3-23}$$

注意在式（3-19）中，集成矩阵的时候只集成边界节点号所在的行，这样就得到了边界节点的动力学方程，联合内部节点的方程（3-12）就得到了MGCM求解弹性动力问题的格式：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{f}^{\text{int}} = \mathbf{f}^{\text{ext}} \tag{3-24}$$

其中$\mathbf{K}$，$\mathbf{P}$由式（3-9）和（3-10）给出，$\mathbf{M}$的表达式如下

$$(\mathbf{M})_I = \begin{cases} (\mathbf{M}_2)_I & \mathbf{x}_I \in \Gamma_2 \\ (\mathbf{M}_1)_I & \mathbf{x}_I \notin \Gamma_2 \end{cases} ;I = 1,2,\cdots,N \tag{3-25}$$

$$(\mathbf{f}^{\text{int}})_I = \begin{cases} (\mathbf{f}_2^{\text{int}})_I & \mathbf{x}_I \in \Gamma_2 \\ (\mathbf{f}_1^{\text{int}})_I & \mathbf{x}_I \notin \Gamma_2 \end{cases} ;I = 1,2,\cdots,N \tag{3-26}$$

$$(\mathbf{f}^{\text{ext}})_I = \begin{cases} (\mathbf{f}_2^{\text{ext}})_I & \mathbf{x}_I \in \Gamma_2 \\ (\mathbf{f}_1^{\text{ext}})_I & \mathbf{x}_I \notin \Gamma_2 \end{cases} ; I = 1,2,\cdots,N \tag{3-27}$$

显式时间积分方法不需要组装系统的总刚度矩阵，由于式（3-24）中的质量阵$\mathbf{M}$ 可以写成对角矩阵的形式,所以也不需要对矩阵求逆，在分析高速碰撞等大规模强非线性问题时具有很大的优势。显示积分的流程图如下

1. 初始化

   (a) 搜索各节点以及域Ω_2和Γ_1上的高斯积分点的影响节点，计算出各点的形函数$N(\mathbf{x})$及其一阶导数；

   (b) 生成质量矩阵M，计算0时刻的外力f^{int}和内力f^{ext}，得到0时刻的加速度a_0；

2. 对时间步循环

   (a) 计算当前时刻的外力；

   (b) 对所有计算点(包括节点和高斯积分点)循环

      i. 更新计算点的应力σ

      ii. 计算内部节点力；

   (c) 结束对所有计算点的循环

   (d) 更新节点加速度$\mathbf{a}_n = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_n^{\text{ext}} - \mathbf{f}_n^{\text{int}})$；

   (e) 更新节点的位移和速度

$$\mathbf{v}_{n+1/2} = \mathbf{v}_{n-1/2} + \mathbf{a}_n \Delta t_n \tag{3-28}$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{v}_{n+1/2} \Delta t_{n+1/2} \tag{3-29}$$

   其中$\Delta t_{n+1/2} = (\Delta t_n + \Delta t_{n+1})/2$。

   (f) 根据位移边界条件修正边界节点的位移以及速度；

3. 结束时间循环

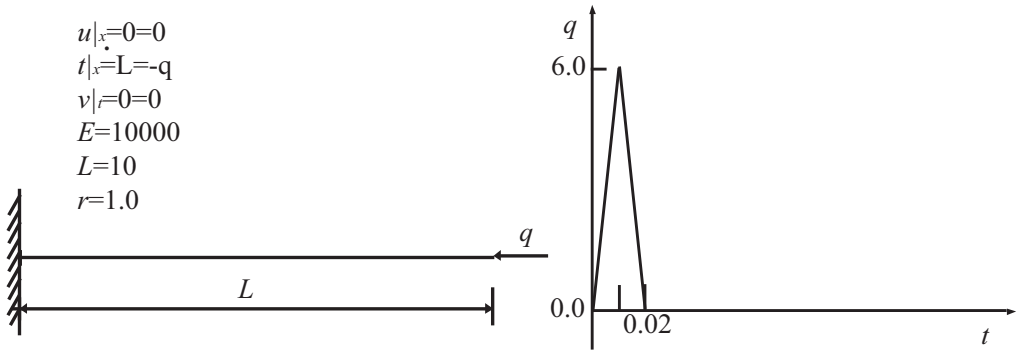


图 3.7　一维杆以及冲击载荷示意图

3.3.2　弹性波动问题算例

3.3.2.1　一维波传播问题

首先我们来通过一个一维波传播问题来考察一下MGCM在波传播问题中的应用。算例中单位无量纲化。如图3.7所示，杆长10，最左端固定，右端施加一个波峰为6的三角波，作用时间是0.02，计算中杨氏模量取$E=1.0\times10^4$，材料密度$\rho=1.0$。弹性波波速理论值是$c=100$，波从最右端传播到最左端需要0.1的时间。采用100个匀布点，影响域大小为节点间距的2.5倍。

图3.8表示MGCM得到的全场应力σ_x在五个不同时刻（$t=0.02$，$t=0.05$，$t=0.08$，$t=0.11$，$t=0.12$）的情况，可以看到应力波传播稳定，波速与理论值$100/s$符合得很好。应力波在最左端发生了反射，应力波反射前的理论值为6，反射后理论值为12，计算结果很接近理论值。

图3.9显示了杆的最左端的应力随时间变化情况，图3.9*a*和图3.9*b* 分别是采取GCMM和GBMM的计算结果，从图中可以看出，采用MGCM和GBMM的计算出来的应力-时间曲线基本一致，其中GBMM在0.1115，GCMM在0.1120的时候达到波峰位置，这时候刚好三角波传播到杆的最左端，经过一次反射，GBMM的波峰10.97，GCMM的波峰值11.18，理论分析杆最左端应力出现波峰应该是0.11，峰值是12.0，两种方法的计算结果和理论值很接近，其中MGCM的计算结果要稍好。由该算例可以看出，MGCM能够很好的模拟应力波在一维杆中的传播。

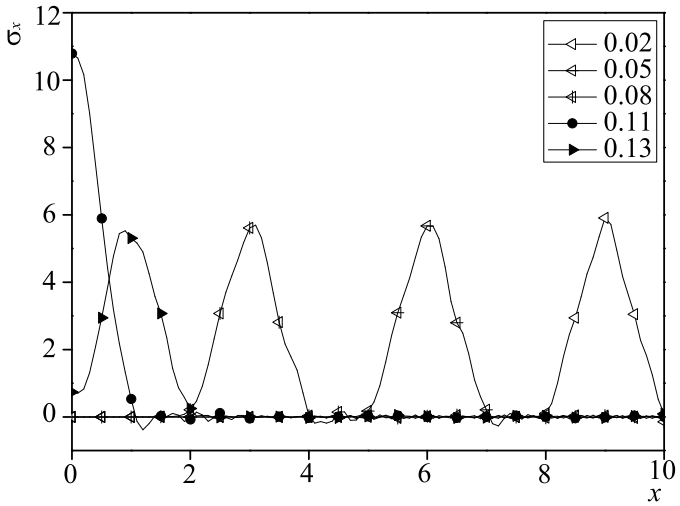


图 3.8　杆全场应力变化图

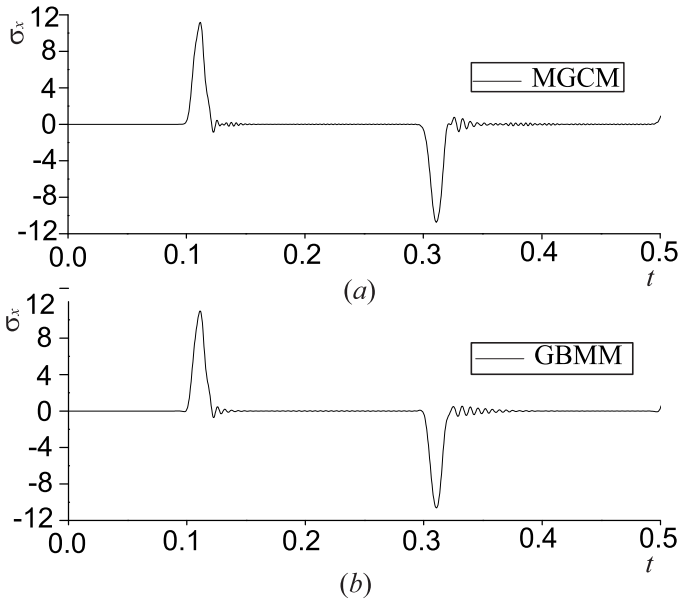


图 3.9　杆最左端的应力变化图

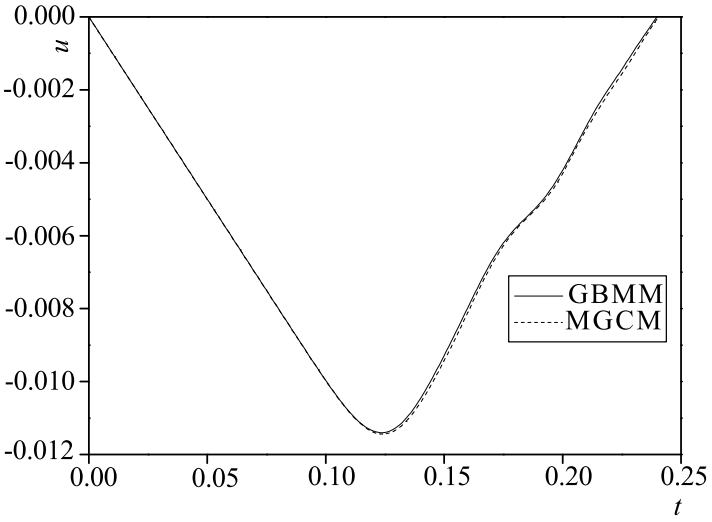


图 3.10　梁最右端中点位移-时间变化图

3.3.2.2　二维杆弹性碰撞问题

冲击碰撞问题是工程实际中非常重要的一类问题，其研究在航空，航天、汽车、机械、电子等工业中都有着重要的意义。无网格方法作为新兴的数值方法，业已在冲击碰撞现象的模拟方面作了一些有益的尝试。考虑一个二维梁碰撞刚性墙的简单情况，形状尺寸仍然和图2.3a一样，单位无量纲化，布点方案为x方向上均匀布33个节点，y方向上均布9个节点。计算中用线形基函数，矩形影响域，x方向上的影响半径为为0.8，y方向上的影响半径为0.6。材料质量为$\rho = 1$。

图3.10显示了梁的最右端边界中点$\mathbf{x}_{rc}$的x位移-时间变化曲线，从图中可以看出，MGCM和GBMM的计算结果基本一致，从开始碰撞时刻到0.125s的时刻，点$\mathbf{x}_{rc}$的x方向位移基本上呈线性变化的趋势，这时候梁往刚性墙方向压缩，当$t = 0.123s$以后，点$\mathbf{x}_{rc}$开始向相反方向运动，这时候应该是应力波传播到最右端，到0.246s时候，点$\mathbf{x}_{rc}$又回到了本来的位置。从图中可以发现，点$\mathbf{x}_{rc}$往回运动的过程采用MGCM和GBMM计算出来的位移有些波动，并不是严格的直线，这是因为计算过程中我们采取的是如下的接触算法：当梁的最左端边界接触到刚性墙的时候，把接触点的位移和速度都约束为0，当该点的应力为正的时候，放松该点的约束。由于最小二乘近似的形函数不像有限元的形函数那样具有δ函数的性质，所以当波传播到最左端的以后位移会有一些轻微的波动。

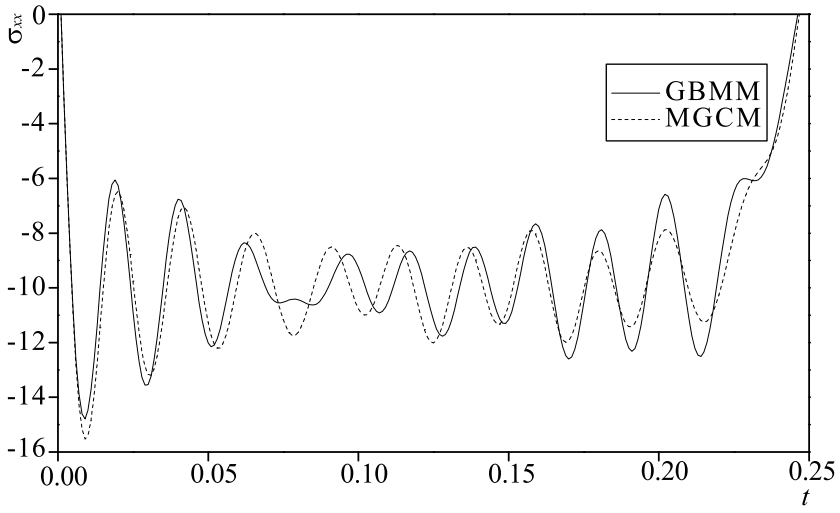


图 3.11　梁最左端中点σ_{xx}–时间变化图

图3.11显示了梁最左端边界中点$\mathbf{x}_{lc}$的σ_{xx}-时间变化曲线，从图中可以看出，MGCM和GBMM计算的应力结果基本一致，当$t = 0.246s$的时刻点$\mathbf{x}_{rc}$的$\sigma_{xx} = 0.0$,这时候梁与刚性墙发生分离。

图3.12标明了碰撞过程中梁的动能和内能的变化曲线，刚开始的时候梁的动能最大，内能为0，碰撞发生后，梁处于压缩状态，动能逐渐向内能转化，结合图3.10，当$t = 0.123$时，梁压缩量达到最大，这时候梁的应变势能达到最大，动能达到最小，再往后梁的内能向动能转化，当$t = 0.246$的时候，内能差不多完全转化为动能，这时候梁的最右端恢复到初始位置，而梁左端也开始和刚性墙分离。从图中我们可以看出，整个过程梁的总能量基本保持不变。

3.4　小结

本章提出了伽辽金配点无网格法（MGDC），算例表明该方法是稳定的，精度很高。MGDC和伽辽金最小二乘无网格法（MGLS）一样只在边界区域（很薄，只相当于两层节点距离的厚度）积分，而在内部区域采用配点法，因此求解效率相对于伽辽金无网格法（GBMM）有大幅度的提高。

MGLS在分析动力学问题时无法采用显式时间积分格式，MGDC很好的解决了这一问题。本章采用MGDC的显示积分格式分析了一维杆的应力波传播问

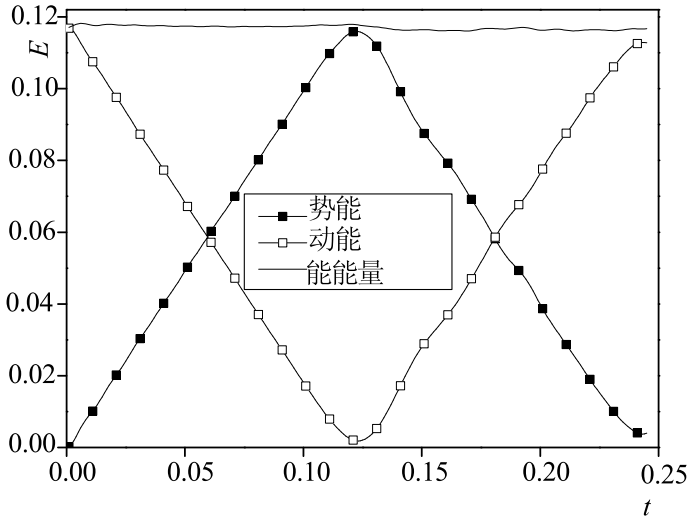


图 3.12　梁的能量–时间变化图

题以及二维杆的弹性碰撞问题，计算结果和理论分析吻合的很好。

第 4 章　质点积分无网格伽辽金法

4.1　引言

无单元伽辽金法（EFG）需要在背景网格上积分，计算量大。节点积分无单元伽辽金法（NIEFG）把对求解域的积分转化为在节点上的积分，效率很高，但它会出现因零能模态不受控制而产生的不稳定现象，需要采取一定的稳定化方案。本章建立了质点积分无网格伽辽金（PIEFG）法，在计算积分时，除节点外，该方法按一定规则引入一组辅助点。类似于物质点法（MPM）中的物质点，所有的节点和辅助点均携带了质量和应力等物质信息，因此统称为质点。利用质点积分无网格伽辽金法分析了小变形弹性静力学问题和超弹性非线性动力学问题，结果表明该方法具有很好的稳定性，且计算效率远高于无单元伽辽金法，在大变形强非线性问题中具有良好的应用前景。

4.2　质点积分无网格伽辽金法的积分方案

考虑小变形弹性静力学问题，伽辽金变分方程为

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \left(\delta\varepsilon : \sigma - \delta\mathbf{u}\cdot\bar{\mathbf{f}}\right) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}\cdot\bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \tag{4-1}$$

其中$\bar{\mathbf{f}}$为域Ω中给定的体力，Γ_t为给定面力的边界，$\bar{\mathbf{t}}$为Γ_t上给定的的面力。将无网格近似函数（2-11）代入式(4-1)得到求解方程

$$\mathbf{KU} = \mathbf{P} \tag{4-2}$$

式（4-2）中$\mathbf{U}$在（2-44）中给出，$\mathbf{K}$和$\mathbf{P}$ 的定义如下

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{D}\mathbf{B}(\mathbf{x}) d\Omega \tag{4-3}$$

$$\mathbf{P} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{f}} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\bar{\mathbf{t}} d\Gamma \tag{4-4}$$

其中$\mathbf{B}$和$\mathbf{D}$分别由式（2-66）和式（2-66）给出，$\mathbf{N}(\mathbf{x})$由式（2-35）给出。

EFG法对式（4-3）和式（4-4）的积分是在背景网格上进行的。无网格的近似函数一般不再是多项式，很难用高斯积分精确计算出矩阵$\mathbf{K}$和$\mathbf{P}$，因此EFG不得

不使用较高阶的高斯积分和较细的背景网格，计算量很大。Beissel等人提出的节点积分方案效率很高，但与有限元单点高斯积分类似，节点积分也会出现因零能模态不受控制而产生的不稳定现象。

质点积分采用一系列的质点来离散求解域，质点由节点和辅助点构成，如图4.1所示。每个质点携带质量，密度，应力等信息，与物质点法（PMP）不同的是，质点积分无网格伽辽金法的形函数构造采用移动最小二乘构造，不需要任何背景网格。

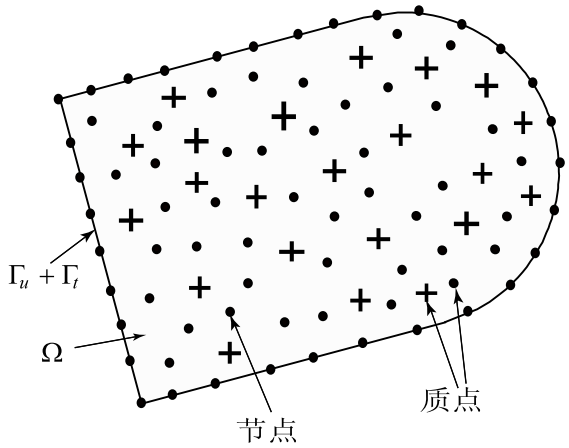


图 4.1　质点积分无网格法离散方案

引入辅助点的方法有多种。例如，可以采用计算几何中的Voronoi图技术，以节点为生成点建立Voronoi图，把Voronoi多边形的顶点取为辅助点，如图4.2(a)所示。本文采用有限元网格来生成节点和辅助点。对于平面问题，将求解域离散为四边形网格；对于三维问题，将求解域离散为六面体网格。将有限元网格的节点取为无网格法的节点，将有限元网格的形心取为辅助点，如图4.2(b)所示。各质点所代表的面积q_I^{Ω}可以通过2阶Newton-Cotes积分来得到，即将各单元面积A_J（体积V_J）的2/3赋给位于该单元形心的辅助点，而将单元面积A_J（体积V_J）的1/3均分给该单元的节点，对于二维问题有：

$$q_I^{\Omega} = \begin{cases} \sum\limits_{J=1}^{N_E} A_J/12 & \mathbf{x}_I\text{为节点} \\ 2A_J/3 & \mathbf{x}_I\text{为辅助点} \end{cases} \tag{4-5}$$

对于三维问题有：

$$q_I^{\Omega}=\begin{cases}\sum\limits_{J=1}^{N_E}V_J/24 & \mathbf{x}_I\text{为节点}\\ 2V_J/3 & \mathbf{x}_I\text{为辅助点}\end{cases}\tag{4-6}$$

式中N_E为有限单元的总数。

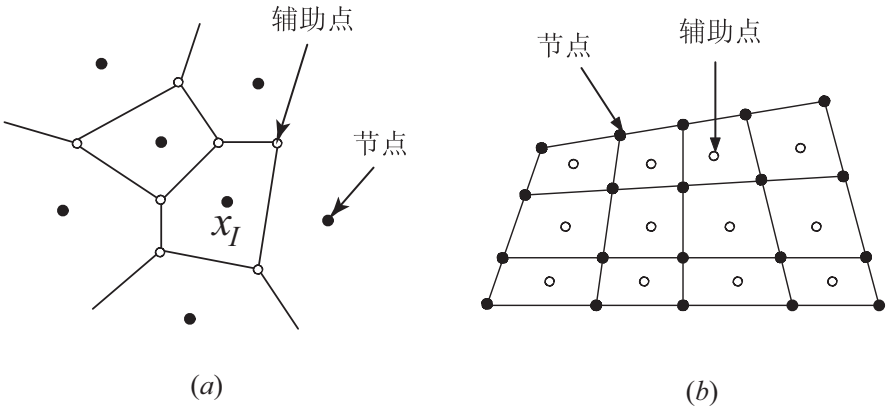


图 4.2　质点布置示意图

式(4-5)和(4-6)的第2项是将边界上的给定面力转化为节点力。有限元法中式(4-5)和(4-6)的边界力只会转换到边界节点上，而在EFG中，由于MLS形函数$N(\mathbf{x})$不象有限元那样具有δ函数的性质，边界力一般也会转换到内部节点上。在进行边界积分时，可以将边界单元的长度L_J均分给该单元的两个节点上，即边界节点所代表的长度q_I^{Γ}为：

$$q_I^{\Gamma}=\sum_{J=1}^{N_B}L_J/2\tag{4-7}$$

其中N_B为边界单元的总数。

采用质点积分方案后，任意函数$f(\mathbf{x})$在域Ω中的积分可以近似地表示为该函数在各质点$\mathbf{x}_I$处的值$f(\mathbf{x}_I)$乘以该质点所代表的面积q_I^{Ω}的和。利用质点积分方案可将式(4-3)和(4-4)改写为：

$$\mathbf{K}=\sum_{I=1}^{N_p}q_I^{\Omega}\mathbf{B}(\mathbf{x}_I)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}(\mathbf{x}_I)\tag{4-8}$$

$$\mathbf{P}=\sum_{I=1}^{N_p}q_I^{\Omega}\mathbf{N}(\mathbf{x}_I)^{\mathrm{T}}\mathbf{b}(\mathbf{x}_I)+\sum_{I=1}^{N_t}q_I^{\Gamma}\mathbf{N}(\mathbf{x}_I)^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{t}}\tag{4-9}$$

式中N_P为域Ω内的质点（包括节点和辅助点）的总数，N_t为边界上的节点总数。

4.3　弹性小变形静力问题算例

使用本章所构造的质点积分无网格伽辽金法分析弹性小变形静力问题，进行了一维杆和二维梁的算例分析，并与节点积分无单元法进行了比较，说明了本方法的有效性。

4.3.1　一维杆

杆长$L=10.0\text{m}$，弹性模量$E=1000.0\text{Pa}$，杆两端固定，$\bar{u}(0)=0.0$，$\bar{u}(10)=0.0$，承受线性体力$b=x$。在杆中匀布置11个节点，辅助点10个，采用二次基函数，节点的影响域为节点间距的2.1倍。

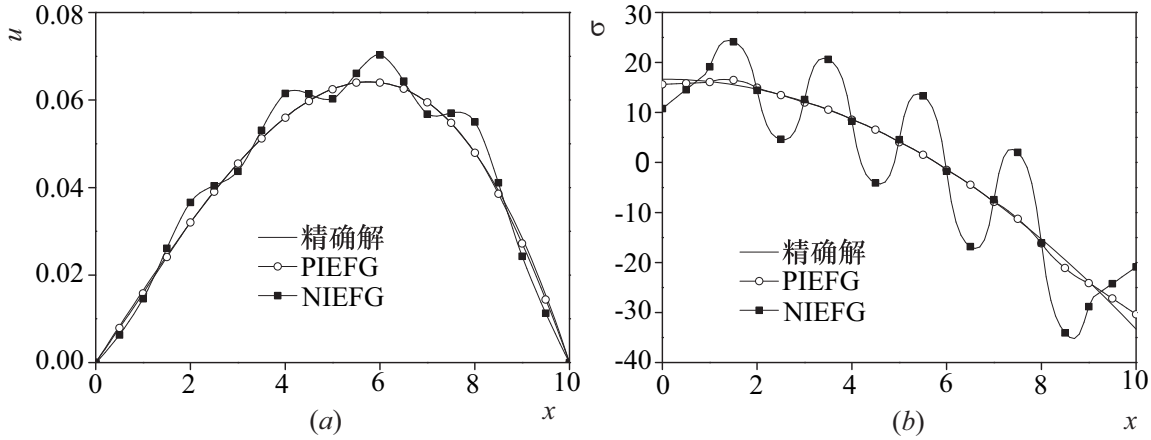


图 4.3　一维杆的位移和应力

图4.3比较了节点积分无单元伽辽金法、质点积分无网格伽辽金法，可以看出，采用节点积分时位移和应力都出现了明显的震荡，而采用质点积分时结果与精确解吻合得很好。

4.3.2　受集中载荷作用的悬臂梁

考虑2.3.2.1节中受集中载荷作用的悬臂梁，梁左边按理论解给出位移边界条件，最右端按理论解给定力边界条件，形函数采取二次基函数，在x方向上均布17 个节点，y方向均匀布置5个节点，节点在x和y方向的影响半径分别为节点

在x和y方向上间距的2.1倍。图4.4比较了不同方法给出的梁的下表面的σ_{xx}变化曲线，其中EFG法采用3×3高斯积分。NIEFG的应力出现了很大的震荡，而EFG法和PIEFG的结果与精确解吻合的很好。

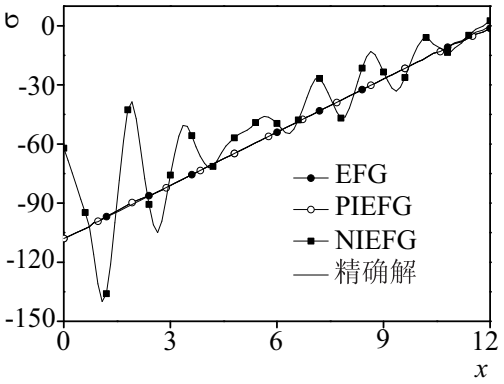


图 4.4　梁的下表面σ_{xx}变化图

为了进一步分析质点积分无网格法的稳定性，定义节点影响域半径和节点间距的比值为scale，改变scale的值，考察scale的变化对EFG、PIEFG和NIEFG的计算结果的影响，结果列于表4.1中

表 4.1　scale对结算结果的影响

	EFG			PIEFG			NIEFG		
scale	2.1	2.4	2.6	2.1	2.4	2.6	2.1	2.4	2.6
$L_u(\%)$	0.010	0.015	0.033	0.200	0.029	0.157	8.38	10.9	10.9
$L_\sigma(\%)$	0.949	0.610	0.795	1.751	0.961	1.995	45.7	11.8	11.8

由表1可以看出，scale对NIEFG的影响最大，PIEFG次之，对EFG的影响最小。PIEFG的应力精度很接近EFG，但是PIEFG的求解效率远高于3×3高斯积分的EFG方法。

图4.5比较了EFG、PIEFG和NIEFG的位移和应力收敛曲线。x和y方向上均匀布点，分别为17×5，33×9，49×13。scale取2.4，从图中可以看出可以看出三种方法的收敛率大致相当。

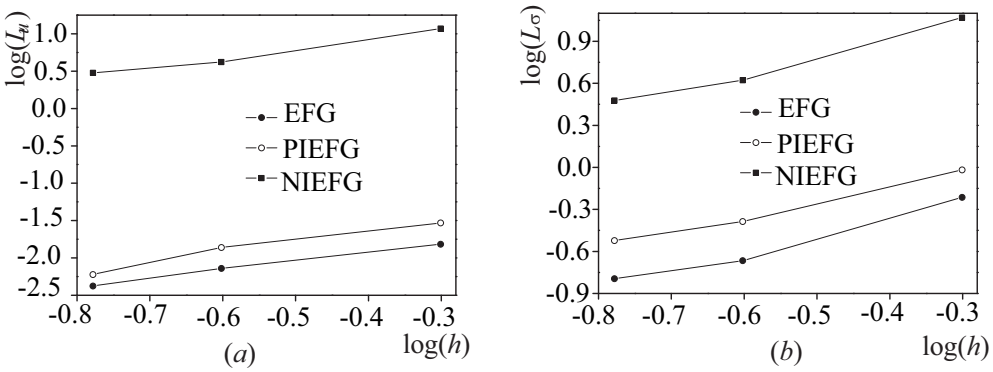


图 4.5　位移和应力收敛曲线

表4.2比较EFG、NIEFG、PIEFG集成刚度矩阵花费的时间以及它们的精度，布点方案采用81×21均匀布点。scale取2.4，采用二次基函数。EFG的高斯积分方案分别采取2×2以及3×3。从表中可以看出，集成刚度矩阵花费的时间EFG（3×3）、EFG（2×2）、NIEFG、PIEFG比例基本为为$9:4:1:2$，这是与他们的积分点数相关联的。NIEFG只须在节点上积分，效率最高，但精度却大幅度地下降。二维情况下PIEFG积分点大概为NIEFG的2倍，但是精度有了很大的提高，和2×2的EFG精度相当，而时间却只需要它的1/2，扩展到三维情况，时间只需要它的1/4；PIEFG的精度相对3×3的EFG法精度并没有减弱太多，所需时间为后者的2/9，扩展到三维情况，时间只需要后者的2/27。

表 4.2　EFG，NIEFG，PIEFG的精度以及求解效率比较

	EFG(2×2)	EFG(3×3)	NIEFG	PIEFG
time(s)	4.0	9.0	1.1	1.7
L_u(%)	0.003	0.002	0.489	0.003
L_σ(%)	0.232	0.118	2.549	0.220

4.4　非线性动力学问题

取初始构形为参考构形，非线性动力学问题的伽辽金弱形式为：

$$\int_{\Omega_0}(\delta\mathbf{F}^T:\mathbf{P}-\delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{b}_0+\rho_0\delta\mathbf{u}\cdot\ddot{\mathbf{u}})d\Omega-\int_{\Gamma_0^t}\delta\mathbf{u}\cdot\bar{\mathbf{t}}_0 d\Gamma=0 \tag{4-10}$$

其中$\mathbf{P}$为名义应力张量，$\mathbf{b}_0$为域Ω_0内每单位体积上的体力，Γ_0^t为初始构形中给定的面力边界，$\bar{\mathbf{t}}_0$为Γ_0^t上给定的面力载荷，$\mathbf{F}$为变形梯度张量，

$$\mathbf{F}=\mathbf{x}\nabla_0 \tag{4-11}$$

式中∇_0为初始构形下的梯度算子，$\mathbf{x}$ 为空间坐标。将无网格近似函数(2-11)代入到式(4-11)，得到系统的运动方程:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{f}^{\text{int}}=\mathbf{f}^{\text{ext}} \tag{4-12}$$

其中

$$\mathbf{M}_{IJ}=\int_{\Omega_0}\rho_0 N_I(\mathbf{X})N_J(\mathbf{X})\mathbf{I}d\Omega \tag{4-13}$$

$$\mathbf{f}_J^{\text{int}}=\int_{\Omega_0}(\nabla_0 N_J(\mathbf{X}))\cdot\mathbf{P}d\Omega \tag{4-14}$$

$$\mathbf{f}_J^{\text{ext}}=\int_{\Omega_0}\mathbf{b}_0 N_J(\mathbf{X})d\Omega+\int_{\Gamma_0^t}\bar{\mathbf{t}}_0 N_J(\mathbf{X})d\Gamma \tag{4-15}$$

分别为各节点的质量矩阵、内力向量和外力向量，$\mathbf{I}$为单位矩阵，$\mathbf{X}$为物质坐标。

利用质点积分可以将节点质量矩阵、内力向量和外力向量计算格式改写为：

$$\mathbf{M}_{IJ}=\sum_{k=1}^{N_p}q_I^{\Omega}\rho_0 N_I(\mathbf{X}_k)N_J(\mathbf{X}_k) \tag{4-16}$$

$$\mathbf{f}_J^{\text{int}}=\sum_{k=1}^{N_p}q_I^{\Omega}(\nabla_0 N_J(\mathbf{X}_k))\cdot\mathbf{P}(\mathbf{X}_k) \tag{4-17}$$

$$\mathbf{f}_J^{\text{ext}}=\sum_{k=1}^{N_p}q_I^{\Omega}\mathbf{b}_0(\mathbf{X}_k)N_J(\mathbf{X}_k)+\sum_{k=1}^{N_t}q_I^{\Gamma_t}\bar{\mathbf{t}}_0(\mathbf{X}_k)N_J(\mathbf{X}_k) \tag{4-18}$$

显式时间积分方法不需要组装系统的总刚度矩阵，也不需要对刚度矩阵求逆，在分析高速碰撞等大规模强非线性问题时具有很大的优势。显式积分计算的流程图如下:

1. 初始化

(a) 生成各质点占有的面积q_I^{Ω}，边界节点占有的长度q_I^{Γ}；

(b) 搜索各质点的影响节点，计算出各质点的形函数$N(\mathbf{X}_I)$及其一阶导数$N_{,J}(\mathbf{X}_I)$；

(c) 生成质量矩阵$\mathbf{M}$，计算0时刻的外力$\mathbf{f}^{\text{int}}$和内力$\mathbf{f}^{\text{ext}}$，得到0时刻的加速度$\mathbf{a}_0$；

2. 对时间步循环

(a) 计算当前时刻的外力；

(b) 对所有质点循环

i. 计算质点的变形梯度

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}_n + \mathbf{u}_{n+1}\nabla_0 \tag{4-19}$$

ii. 计算质点的名义应力$\mathbf{P}$

- 对于次弹性材料，计算出速度梯度$\mathbf{v}\nabla = \mathbf{v}\nabla_0 \cdot \mathbf{F}^{-1}$，根据本构关系得到柯西应力$\sigma(\mathbf{X}_I)$，然后计算名义$\mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \sigma$；
- 对于超弹性材料，根据本构关系得到第二类Piola-Kirchhoff应力$\mathbf{S}$，然后计算名义应力$\mathbf{P} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$；

iii. 计算内部节点力；

(c) 结束对所有质点的循环

(d) 更新节点加速度$\mathbf{a}_n = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_n^{\text{ext}} - \mathbf{f}_n^{\text{int}})$；

(e) 更新节点的位移和速度

$$\mathbf{v}_{n+1/2} = \mathbf{v}_{n-1/2} + \mathbf{a}_n \Delta t_n \tag{4-20}$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{v}_{n+1/2}\Delta t_{n+1/2} \tag{4-21}$$

其中$\Delta t_{n+1/2} = (\Delta t_n + \Delta t_{n+1})/2$。

(f) 根据位移边界条件修正边界节点的位移以及速度；

3. 结束时间循环

计算过程中，采用的是全拉格朗日增量法，只是在初始化这一步搜索影响点以及计算形函数，避免了象SPH方法那样每一步都需要搜索影响点计算形函数而花费过多的时间。

4.4.1　超弹性材料大变形分析

本节利用PIEFG分析超弹性大变形问题，其中时间积分方法采用中心差分法，材料模型为Fried和Johnson提出的改进的Mooney-Rilin超弹性模型[53]，这种模型应变能密度公式W为

$$W = C_1(I_1 - 3I_3^{1/3}) + C_2(I_2 - 3I_3^{2/3}) + \frac{1}{2}\lambda(\ln I_3)^2 \tag{4-22}$$

材料常数取$C_1 = 125.0\text{Pa}$，$C_2 = 10.0\text{Pa}$，$\lambda = 10000.0\text{Pa}$，材料初始密度取为$\rho = 1.0\text{kg/m}^3$。左Cauchy-Green变形张量$\mathbf{G}$定义为

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \tag{4-23}$$

右Cauchy-Green变形张量$\mathbf{C}$定义为

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F} \tag{4-24}$$

式(4-23)，(4-24) 中$\mathbf{F}$表示变形梯度张量，式(4-22)中的不变量I_1，I_2，I_3 可以表示为

$$I_1 = \mathrm{tr}(\mathbf{C}) = \mathrm{tr}(\mathbf{G}) \tag{4-25}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}(C)^2 - \mathrm{tr}(C^2)\right] = \frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}(G)^2 - \mathrm{tr}(G^2)\right] \tag{4-26}$$

$$I_3 = \det(C) = \det(G) \tag{4-27}$$

从应变能密度公式(4-22)可以得到第二类Piola-Kirchhoff应力张量$\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = 2\left[(C_1 + I_1C_2)\mathbf{I} - C_2\mathbf{C} - (C_1\mathbf{I}_3^{1/3} + 2C_2I_3^{2/3} - \lambda\ln I_3)\mathbf{C}^{-1}\right] \tag{4-28}$$

Cauchy应力张量σ可以表示为

$$\sigma = \frac{2}{\sqrt{I_3}}\left[(C_1 + I_1C_2)\mathbf{G} - C_2\mathbf{G}^2 - (C_1\mathbf{I}_3^{1/3} + 2C_2I_3^{2/3} - \lambda\ln I_3)\mathbf{I}\right] \tag{4-29}$$

4.4.1.1　平面应变压缩

第一个算例是平面应变压缩的问题，图4.6所示的橡胶上下表面完全固定，上表面以$v = 1.0$m/s的速度匀速向下压缩。在水平方向和竖直方向上都均匀布置51个节点，总节点数目为2601个，辅助点数为2500个，时间步长取为$\Delta t = 2.0 \times 10^{-4} s$。有限元计算中采用$50 \times 50$个8节点矩形单元。

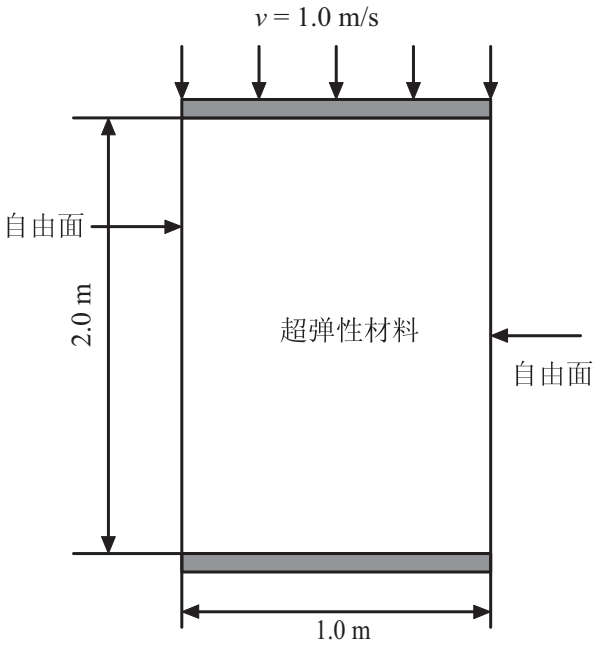


图 4.6　橡胶的平面应变大变形压缩

图4.7显示了压缩情况下不同时刻橡胶的变形图。采用PIEFG可以毫无困难地计算到将橡胶压缩到原高度的20%，而采用MSC.MARC 分析时，当压缩到原高度的67%时由于网格畸变而导致计算失败。

图4.8和4.11分别比较了压缩情况和拉伸情况下PIEFG和MSC.MARC的计算结果，其中dH为压缩的高度。从图中可以看出在Marc计算终止前，PIEFG和MARC的计算结果吻合的很好。

4.4.1.2　平面应变拉伸

第二个算例是平面应变拉伸的问题，图4.9所示的橡胶左右表面完全固定，上下表面自由，最右端以$v = 10.0$m/s的匀速向右拉伸。布点方式和平面应变压缩

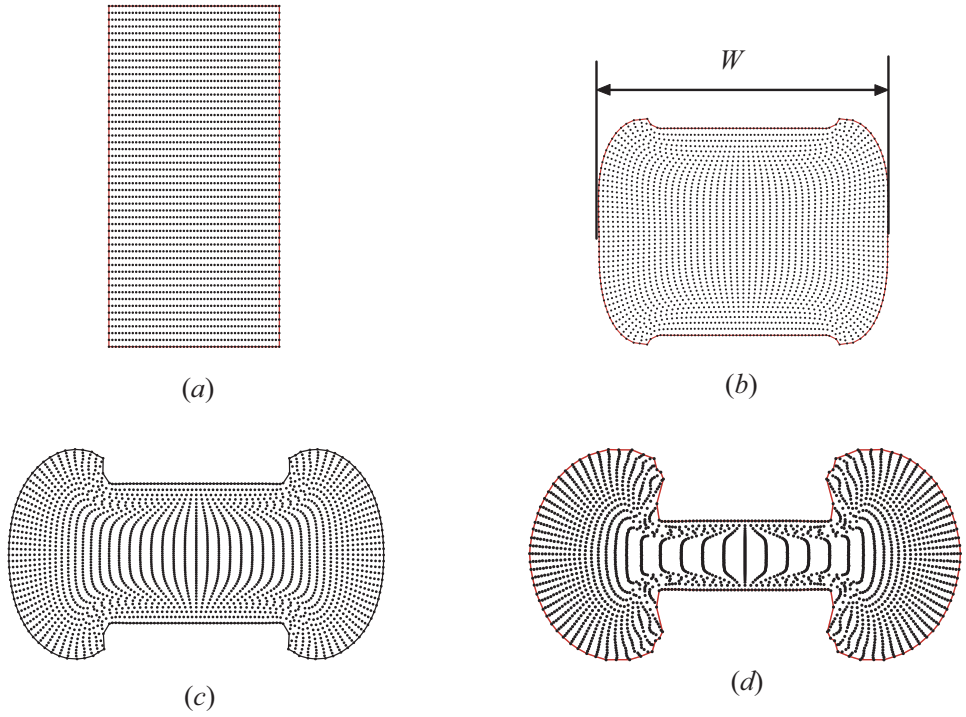


图 4.7　不同时间阶段橡胶的变形图，$(a)=0.0$s，$(b)=0.8$s，$(c)=1.2$s，$(d)=1.6$s

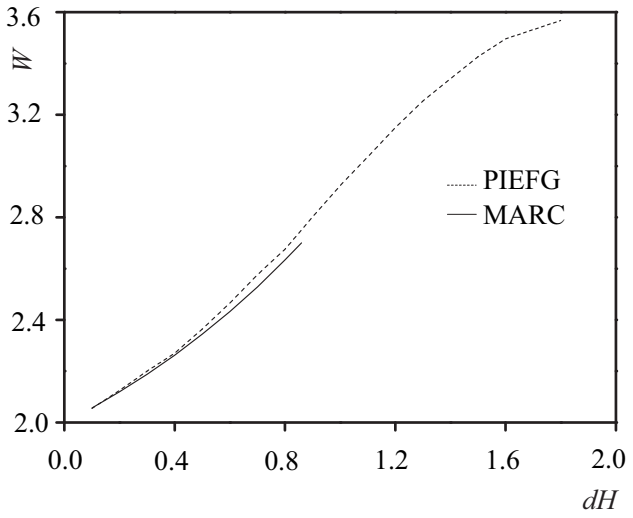


图 4.8　宽度W变化曲线

算例一样。

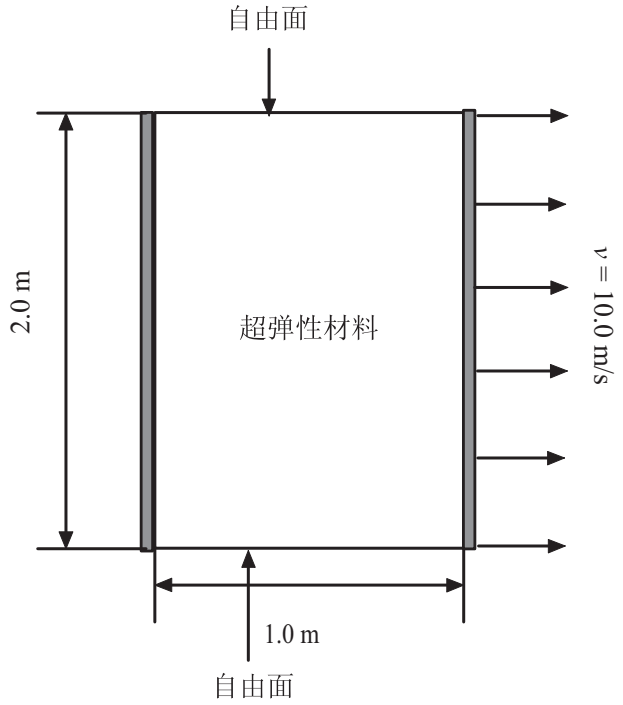


图 4.9　橡胶的平面应变大变形拉伸

图4.10显示了拉伸情况下不同时刻橡胶的变形图，采用PIEFG计算，橡胶拉伸到原长的1700%仍然没有造成计算的终止，而采用MSC.MARC分析时，当拉伸到原长的370%时由于网格畸变而导致计算终止。为了方便显示，水平方向图像压缩至本来长度的30%。

图4.11分别比较了拉伸情况下PIEFG和MSC.MARC的计算结果，dL为拉伸的长度，W为橡胶中间位置的宽度。可以看出在MSC.MARC计算失败前二者结果很接近。

4.5　小结

本章提出了质点积分无网格伽辽金法（PIEFG）。PIEFG把在求解区域上的积分转化为在一系列质点上的积分，算例表明该方法克服了节点积分伽辽金无单元法的不稳定性问题，并且精度有了很大的提高。PIEFG的计算效率远高于3×3高斯积分的EFG法，二维问题前者效率大概是后者的4倍，三维问题前者

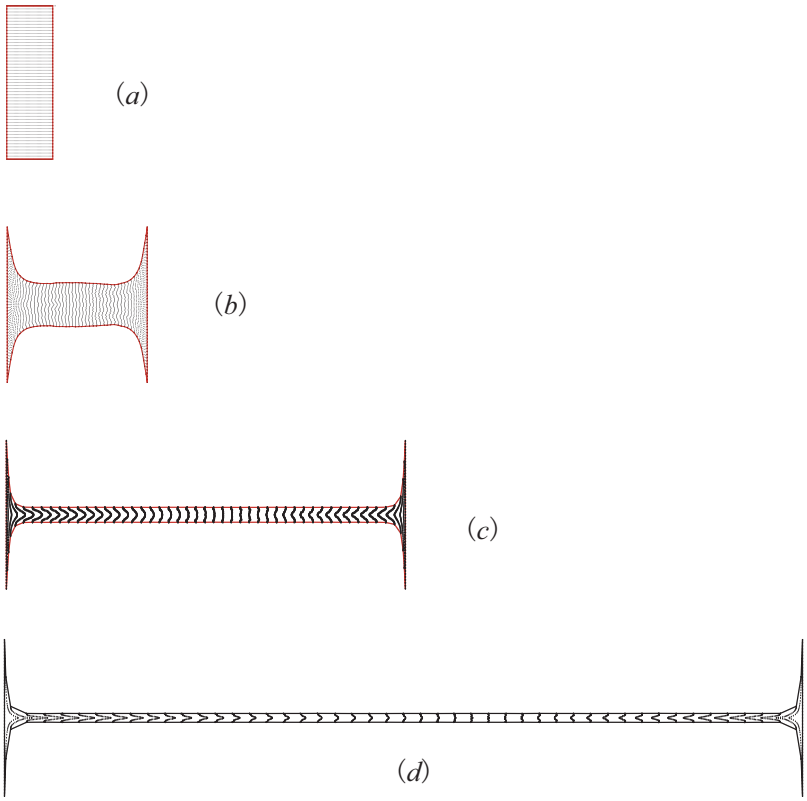


图 4.10　不同时刻橡胶的变形图，$(a)=0.0$ s，$(b)=0.2$ s，$(c)=0.8$ s，$(d)=1.6$ s

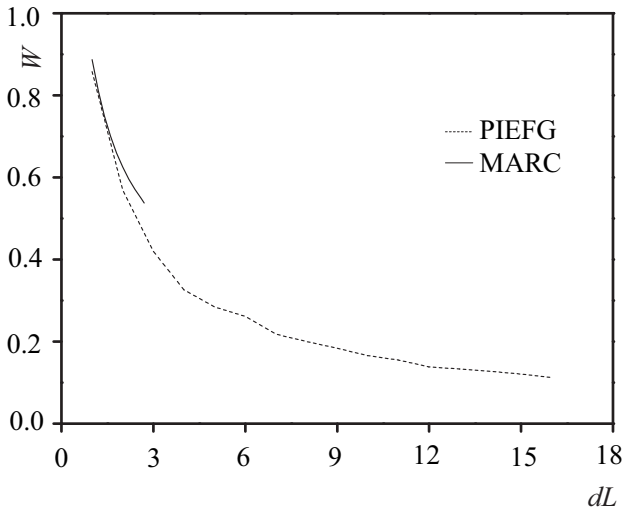


图 4.11　厚度W变化曲线

效率是后者的13～14倍。

本章分析了橡胶材料的超大变形平面应变压缩和拉伸，算例表明，PIEFG具有良好的计算超大变形问题的能力，在超大变形问题中具有很好的应用前景。

第 5 章　质点积分无网格伽辽金法在金属成型中的应用

5.1　引言

金属加工成型过程中涉及到材料，几何，边界条件的高度非线性。采用有限元模拟这金属成型过程时会因为金属材料的超大变形引起网格畸变而导致计算精度的下降或者计算终止，无网格法的近似函数不依赖于网格，在模拟金属加工成型过程方面有很大的优势。目前采用无网格方法研究金属加工成型过程还处于起步阶段，其中RKPM是最主要的一种方法，但是这种方法需要在背景网格上积分，由于核函数近似不再是多项式函数，而是非常复杂的无理式，必须选择足够多的高斯积分点才能保证解的精度，所以这种方法的求解效率很低，目前RPKPM一般采用轴对称二维单元来模拟金属加工的过程。

质点积分无网格法（PIEFG）把域积分转化为在质点上的积分，质点数最多为节点的一倍，计算点数近似为节点数的2倍；RKPM和EFG 在每个背景网格上需要高阶高斯积分，对于2阶高斯积分，大概有8倍节点（采用六面体背景网格时，节点数和网格数之比近似为1：1）数的计算点，此时PIEFG的计算效率为RKPM或者EFG的4倍左右。对于3阶高斯积分，大概有27倍节点数的计算点，此时PIEFG的计算效率为RKPM或者EFG的13.5倍左右。本章通过几个三维的金属成型加工算例表明了质点积分无网格伽辽金法的优势。

5.2　本构关系和应力更新算法

金属加工成型过程中涉及到材料的大变形，质点积分无网格伽辽金法采使用率形式的本构关系，分别采用Cauchy应力和应变率来描述应力和变形。

应变率定义为速度梯度的对称部分

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{5-1}$$

对于存在预应力的物体，Cauchy应力的分量在转动过程中会发生变化，即在刚体运动过程中Cauchy应力率不为零，它不是客观张量，不能在本构关系中直接使用。可以证明，在刚体运动中应变率张量为零，即它是客观张量。所以在大变形转动的情况下，为了考虑转动效应，在本构关系中应使用考虑转动效应的

客观率，在本章使用Jaumann应力率，为了得到应力更新的关系式，我们首先定义如下一些变量

$$\text{静水压}p \qquad p=-\frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij} \tag{5-2}$$

$$\text{偏斜应变率}\dot{\varepsilon}_{ij}^{'} \qquad \dot{\varepsilon}_{ij}^{'}=\dot{\varepsilon}-\frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{v} \tag{5-3}$$

$$\text{偏斜应力}s_{ij} \qquad s_{ij}=\sigma_{ij}+p\delta_{ij} \tag{5-4}$$

$$\text{体积应变率}\dot{\varepsilon}_{v} \qquad \dot{\varepsilon}_{v}=\dot{\varepsilon}_{ij}\delta_{ij} \tag{5-5}$$

偏斜Jaumann应力率s_{ij}^{∇}定义如下

$$s_{ij}^{\nabla}=\dot{s}_{ij}-s_{ip}\Omega_{pj}-s_{jp}\Omega_{pi}=2G\dot{\varepsilon}_{ij}^{'} \tag{5-6}$$

式(5-6)中G为剪切模量，Ω_{ij}为旋转张量分量

$$\Omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \tag{5-7}$$

在更新应力的时候我们首先假设应力状态在弹性范围

$${}^{*}s_{ij}^{n+1}=s_{ij}^{n}+s_{ip}\Omega_{pj}+s_{jp}\Omega_{pi}+2G\dot{\varepsilon}_{ij}^{'}dt \tag{5-8}$$

式(5-8)中，${}^{*}s_{ij}^{n+1}$代表试验应力，通过下式定义有效试验应力

$$s^{*}=\left(\frac{3}{2}\,{}^{*}s_{ij}{}^{n+1}\,{}^{*}s_{ij}{}^{n+1}\right)^{1/2} \tag{5-9}$$

如果s^{*}超过了屈服应力σ_y，采用Von Mises屈服准则

$$\Phi=\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}-\frac{\sigma_y^2}{3}\leq 0 \tag{5-10}$$

把试验应力乘以一个系数拉回到屈服表面上

$$s_{ij}^{n+1}=\frac{\sigma_y}{s^{*}}\,{}^{*}s_{ij}^{n+1} \tag{5-11}$$

具体的应力偏量的更新流程图如下

1. 假设应力状态在弹性范围，根据(5-8)计算出试验应力${}^{*}s_{ij}^{n+1}$
2. 判断有效试验应力s^{*}是否超过了屈服应力σ_y，如果没有则进行下一时间步迭代，否则继续如下步骤

3. 计算塑性应变增量

$$\Delta\varepsilon^{p}=\frac{(s^{*}-\sigma_{y}^{n})}{(3G+E_{p})} \tag{5-12}$$

其中E_p是硬化模量，塑性应变增量的推导过程见DYNA用户手册[129]。

4. 更新塑性应变

$$\varepsilon^{p^{n+1}}=\varepsilon^{p^{n}}+\Delta\varepsilon^{p} \tag{5-13}$$

5. 更新屈服应力

$$\sigma_{y}^{n+1}=\sigma_{y}^{n}+E_{p}\Delta\varepsilon^{p} \tag{5-14}$$

6. 计算第$n+1$时间步的屈服应力计算试验应力的缩放系数

$$m=\frac{\sigma_{y}^{n+1}}{s^{*}} \tag{5-15}$$

7. 将试验应力拉回到屈服面上

$$s_{ij}^{n+1}=m\,{}^{*}s_{ij}^{n+1} \tag{5-16}$$

静水压力的确定有多种方法，比如Mie-Grüneisen状态方程，该状态方程用来描述压强，密度和内能之间的关系，它可以描述多种金属固体的热力学行为，在本章采用硬化弹塑性本构关系，静水压力采用下式计算

$$p=-K(\rho/\rho_{0}-1) \tag{5-17}$$

其中$K=E/(3(1-2\nu))$，是体积模量，密度ρ通过下式得到

$$\rho_{n+1}=\rho_{n}-\rho_{n}\nabla\cdot\mathbf{v}\Delta t \tag{5-18}$$

5.3　接触条件

在金属加工成型过程中，除了物体产生大变形，材料出现非线性响应外，金属和模具之间会发生接触，因此接触边界条件的处理在冲击碰撞问题中占有重要的地位。

考虑金属和模具，设金属为从体（Slave body），所占空间区域计为Ω_S，其边界为从表面，记为Γ_x^S；模具为主体（Master body），所占空间区域为Ω_M，其边界为主表面，记为Γ_x^M。两个物体的接触表面计为Γ_x^C。设$\mathbf{x}$为从表面上一点，如果金属和模具发生了相互嵌入，可定义嵌入距离为

$$g_n = ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_C|| = \min_{\mathbf{x}^* \in \Gamma_x^M} ||\mathbf{x}^* - \mathbf{x}|| \tag{5-19}$$

其中$\mathbf{x}_C$表示$\mathbf{x}$点在主表面Γ_x^M上的投影，$\mathbf{n}$为Γ_x^M在点$\mathbf{x}_C$ 的单位外法线矢量，如图5.1所示。

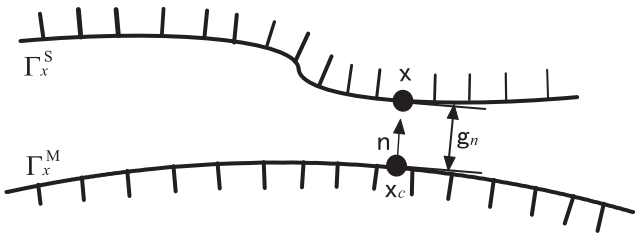


图 5.1　接触边界

在真实变形过程中，两接触物体应该没有任何相互嵌透，接触表面应满足下列非嵌入条件：

$$g_n = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_C) = 0 \tag{5-20}$$

非嵌入条件在带有接触过程问题的模拟中是非常重要的，除此之外还经常需要在接触面上考虑摩擦条件，摩擦类型有很多种，其中较为常用的是Coulomb摩擦定律

$$\begin{cases} \text{如果} |h_t| < \mu |h_n| \quad g_t = 0 & \text{粘附} \\ \text{否则} \qquad\qquad\quad |h_t| = \mu |h_n| & \text{滑动} \end{cases} \tag{5-21}$$

其中h_t和h_n分别表示接触表面上受到的切向力和法向力，g_t表示两物体的切向相对位移，μ为摩擦系数。将接触条件引入到无网格方法离散方程的基本方法有Lagrange乘子法和罚函数法，Lagrange乘子法用一组不等式方程施加接触边界条件，它是市价接触条件的精确方法，但增加了系统方程的未知变量；罚函数法是将接触边界条件乘以很大的罚数，然后累加到离散方程中，罚函数不会改变系

数矩阵的正定性，也不增加未知变量的个数。下面采用罚函数引入接触条件

$$\delta\Pi(\mathbf{u})+\int_{\Gamma_x^C}(\lambda_n+\lambda_t)\cdot\delta\mathbf{u}d\Gamma=0,\quad \Gamma_x^C=\Gamma_x^S\cap\Gamma_x^M \tag{5-22}$$

$\delta\Pi(\mathbf{u})$是不施加接触条件时系统的虚功，其中

$$\lambda_n=-\omega_n g_n\mathbf{n} \tag{5-23}$$

$$\lambda_t=\begin{cases}-\omega_t g_t\mathbf{t} & \text{如果}\omega_t g_t<|\mu\lambda_n|\text{（粘附）}\\ -\mu\omega_n g_n\text{sign}(g_t)\mathbf{t} & \text{否则（滑动）}\end{cases} \tag{5-24}$$

其中ω_n和ω_t为罚系数。

在具体施加接触边界条件时，可以将主表面用一组线段（对于三维情况用一组平面网格）来离散，而从表面用一组节点来离散，如图5.2所示，分别用$\mathbf{x}_S$，$\mathbf{x}_{M1}\sim\mathbf{x}_{M4}$表示从节点到现时位置和主线段各个端点的现时位置。

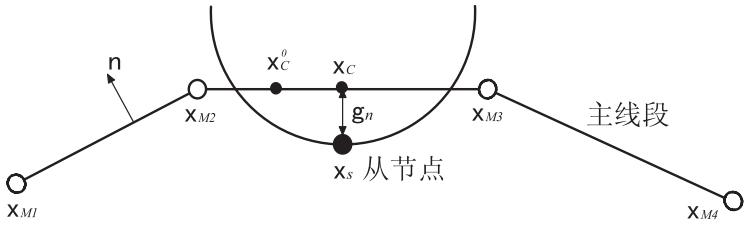


图 5.2　接触边界的离散描述

主线段的法向单位矢量$\mathbf{n}$和切向矢量$\mathbf{t}$可由下式计算

$$\mathbf{t}=\frac{\mathbf{x}_{M3}-\mathbf{x}_{M2}}{l}$$
$$\mathbf{n}=\mathbf{e}_3\times\mathbf{t} \tag{5-25}$$

式中的主线段长度l定义为$l=||\mathbf{x}_{M3}-\mathbf{x}_{M2}||$，$\mathbf{e}_3$是指向面外的法向单位矢量，由此可得从节点$\mathbf{x}_S$在主线段M2-M3上的投影点$\mathbf{x}_C$的坐标

$$\mathbf{x}_C=(1-\alpha_C)\mathbf{x}_{M2}+\alpha_C\mathbf{x}_{M3} \tag{5-26}$$

其中$\mathbf{x}_C$在主线段M2-M3上的自然坐标α_C表示为

$$\alpha_C=(\mathbf{x}_S-\mathbf{x}_{M2})\cdot\mathbf{t}/l \tag{5-27}$$

于是从节点$\mathbf{x}_S$和主线段M2-M3之间的嵌入距离和切向滑动距离可用下式表示

$$g_n = (\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_{M2}) \cdot \mathbf{n} \tag{5-28}$$

$$g_t = (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_C^0) \cdot \mathbf{t} \tag{5-29}$$

其中$\mathbf{x}_C^0 = (1-\alpha_C^0)\mathbf{x}_{M2} + \alpha_C^0 \mathbf{x}_{M3}$为上一离散时间步$\mathbf{x}_S$在主线段上的投影点，相应的$\alpha_C^0$ 为其自然坐标。

5.4　离散方案

5.4.1　完全的拉格朗日描述

取初始构形为参考构形，非线性动力学问题的伽辽金弱形式为：

$$\int_{\Omega_0} (\delta \mathbf{F}^T : \mathbf{P} - \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}_0 + \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \ddot{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\Gamma_0^t} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 d\Gamma = 0 \tag{5-30}$$

其中$\mathbf{P}$为名义应力张量，$\mathbf{b}_0$为域Ω_0内每单位体积上的体力，Γ_0^t为初始构形中给定的面力边界，$\bar{\mathbf{t}}_0$为Γ_0^t上给定的面力载荷，$\mathbf{F}$为变形梯度张量，式中$\nabla_{\mathbf{0}}$为初始构形下的梯度算子，$\mathbf{x}$ 为空间坐标。系统的运动方程为:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}^{\text{int}} = \mathbf{f}^{\text{ext}} \tag{5-31}$$

质量矩阵、内力向量和外力向量的定义见式(5-41)∼(5-43)。

金属加工成型过程中应力增量的描述是基于欧拉坐标的，应力对时间的导数和现时构形下的速度梯度相关，可以采用链式求导法则把它转化到初始构形下

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial X_m}\frac{\partial X_m}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial X_m} F_{mj}^{-1} \tag{5-32}$$

金属加工成型过程中涉及到材料，物理，边界条件的高度非线性，显示时间积分不需要组成切线刚度阵，也不需要对切线刚度阵求逆，在分析金属加工成型中有很大的优势，在拉格朗日描述下采用显示时间积分的流程图如下

1. 初始化

(a) 生成各质点占有的体积q_I^{Ω}，金属加工成型过程中，接触条件采用罚函数施加，一般采用节点力的形式而非压强的形式，所以不需要生成边界节点的面积。

(b) 搜索各质点的影响节点，计算出各质点的形函数$\mathbf{N}(\mathbf{X}_I)$及其一阶导数$\mathbf{N}_{,J}(\mathbf{X}_I)$；

(c) 分别按照(5-42)∼(5-43)生成质量矩阵$\mathbf{M}$，计算0时刻的内力$\mathbf{f}^{\text{int}}$和外力$\mathbf{f}^{\text{ext}}$，得到0时刻的加速度$\mathbf{a}_0$；

2. 对时间步循环

(a) 判断金属和模具之间有无发生接触，若发生接触，采用罚函数施加接触条件，把接触力当作外力施加到金属表面

(b) 对所有质点循环

i. 计算质点的变形梯度

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}_n + \mathbf{u}_{n+1}\nabla_0 \tag{5-33}$$

ii. 计算质点的名义应力$\mathbf{P}$

计算出速度梯度$\mathbf{v}\nabla = \mathbf{v}\nabla_0 \cdot \mathbf{F}^{-1}$，更新质点的cauchy应力$\sigma$，然后计算名义$\mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \sigma$；

iii. 计算内部节点力；

(c) 结束对所有质点的循环

(d) 更新节点加速度$\mathbf{a}_n = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_n^{\text{ext}} - \mathbf{f}_n^{\text{int}})$；

(e) 更新节点的位移和速度

$$\mathbf{v}_{n+1/2} = \mathbf{v}_{n-1/2} + \mathbf{a}_n \Delta t_n \tag{5-34}$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{v}_{n+1/2}\Delta t_{n+1/2} \tag{5-35}$$

其中$\Delta t_{n+1/2} = (\Delta t_n + \Delta t_{n+1})/2$。

(f) 更新节点位置$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_I N(\mathbf{x})_I$

3. 结束时间循环

采用拉格朗日描述所有质点的形函数及其导数只用计算一次，避免了象SPH方法那样每一步都需要搜索影响点计算形函数而花费过多的时间。

5.4.2　更新的拉格朗日描述

取现时构形为参考构形，非线性动力学问题的伽辽金弱形式为：

$$\int_{\Omega} \delta v_i \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i - \rho \dot{v}_i \right) d\Omega = 0 \tag{5-36}$$

$\mathbf{b}$为域Ω内每单位体积上的体力，Γ^t为现时构形中给定的面力边界，$\bar{\mathbf{t}}$为Γ^t上给定的面力载荷将无网格近似函数(2-11)代入到式(5-36)，得到系统的运动方程:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}^{\text{int}} = \mathbf{f}^{\text{ext}} \tag{5-37}$$

其中

$$\mathbf{M}_{IJ} = \int_{\Omega} \rho N_I(\mathbf{x}) N_J(\mathbf{x}) \mathbf{I} d\Omega \tag{5-38}$$

$$\mathbf{f}_J^{\text{int}} = \int_{\Omega} (\nabla N_J(\mathbf{x})) \cdot \sigma d\Omega \tag{5-39}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_J^{\text{ext}} = & \int_{\Omega} \mathbf{b} N_J(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma^t} \bar{\mathbf{t}} N_J(\mathbf{x}) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_x^C} (\lambda_n(\mathbf{x}) + \lambda_t(\mathbf{x})) N_J(\mathbf{x}) d\Gamma \end{aligned} \tag{5-40}$$

分别为各节点的质量矩阵、内力向量和外力向量，$\mathbf{I}$为单位矩阵，$\mathbf{x}$为现时构形下的坐标。

利用质点积分可以将节点质量矩阵、内力向量和外力向量计算格式改写为：

$$\mathbf{M}_{IJ} = \sum_{k=1}^{N_p} q_I^{\Omega} \rho N_I(\mathbf{x}_k) N_J(\mathbf{x}_k) \tag{5-41}$$

$$\mathbf{f}_J^{\text{int}} = \sum_{k=1}^{N_p} q_I^{\Omega} (\nabla N_J(\mathbf{x}_k)) \cdot \sigma(\mathbf{x}_k) \tag{5-42}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_J^{\text{ext}} = & \sum_{k=1}^{N_p} q_I^{\Omega} \mathbf{b}(\mathbf{x}_k) N_J(\mathbf{x}_k) + \sum_{k=1}^{N_t} q_I^{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}_0(\mathbf{x}_k) N_J(\mathbf{x}_k) \\ & + \sum_{k=1}^{N_C} q_I^{\Gamma_c} (\lambda_n(\mathbf{x}_k) + \lambda_t(\mathbf{x}_k)) N_J(\mathbf{x}_k) \end{aligned} \tag{5-43}$$

显式时间积分方法不需要组装系统的总刚度矩阵，也不需要对刚度矩阵求逆，在分析高速碰撞等大规模强非线性问题时具有很大的优势。显式积分计算的流程图如下:

1. 初始化

(a) 生成各质点占有的体积q_{I0}^{Ω}

(b) 搜索各质点的影响节点，计算出各质点的形函数$\mathbf{N}(\mathbf{X}_I)$及其一阶导数$\mathbf{N}_{,J}(\mathbf{X}_I)$；

(c) 生成质量矩阵$\mathbf{M}$，计算0时刻的外力$\mathbf{f}^{\text{int}}$和内力$\mathbf{f}^{\text{ext}}$，得到0时刻的加速度$\mathbf{a}_0$；

2. 对时间步循环

(a) 计算当前时刻的外力；判断当前金属和模具的接触，采用罚函数时间接触条件

(b) 对所有质点循环

i. 计算质点形函数及其一阶导数

ii. 更新质点的Cauchy应力σ

iii. 更新质点所占的体积$q_I^{\Omega} = q_{I0}^{\Omega}\rho_{I0}/\rho_I$

iv. 计算内部节点力；

(c) 结束对所有质点的循环

(d) 更新节点加速度$\mathbf{a}_n = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_n^{\text{ext}} - \mathbf{f}_n^{\text{int}})$；

(e) 更新节点的位移和速度

$$\mathbf{v}_{n+1/2} = \mathbf{v}_{n-1/2} + \mathbf{a}_n \Delta t_n$$
$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{v}_{n+1/2}\Delta t_{n+1/2}$$

其中$\Delta t_{n+1/2} = (\Delta t_n + \Delta t_{n+1})/2$。

(f) 更新节点位置$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_I N(\mathbf{x})_I$

3. 结束时间循环

直接采用更新的拉格朗日方法在每个时间步都需要搜索计算点的影响点，质点的形函数及其一阶导数，求解的效率很低。在本章对更新的拉格朗日法进行如下优化

1. 计算过程中节点间距变小会导致计算时间步长的减少，在PIEFG中可以把变形太大的区域的节点转化为附加质点，有限元法的节点依赖于网格，重

新划分网格是一件十分困难的事情，而在PIEFG中，不涉及到背景网格，节点转化为辅助点是一件很容易的事情。

2. 计算过程中速度梯度变化不大（变形和转动都比较小）的质点不需要在每个时间步都搜索该质点处的影响点以及计算该质点的形函数和它的导数，可以每n（一般n取10）个时间步进行一次上述操作。速度梯度大小的判断标准定义如下：

$$\triangle = \left|\frac{\partial v_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial v_2}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial v_3}{\partial z}\right| < \varepsilon \tag{5-44}$$

5.5　算例分析

5.5.1　Taylor杆碰撞

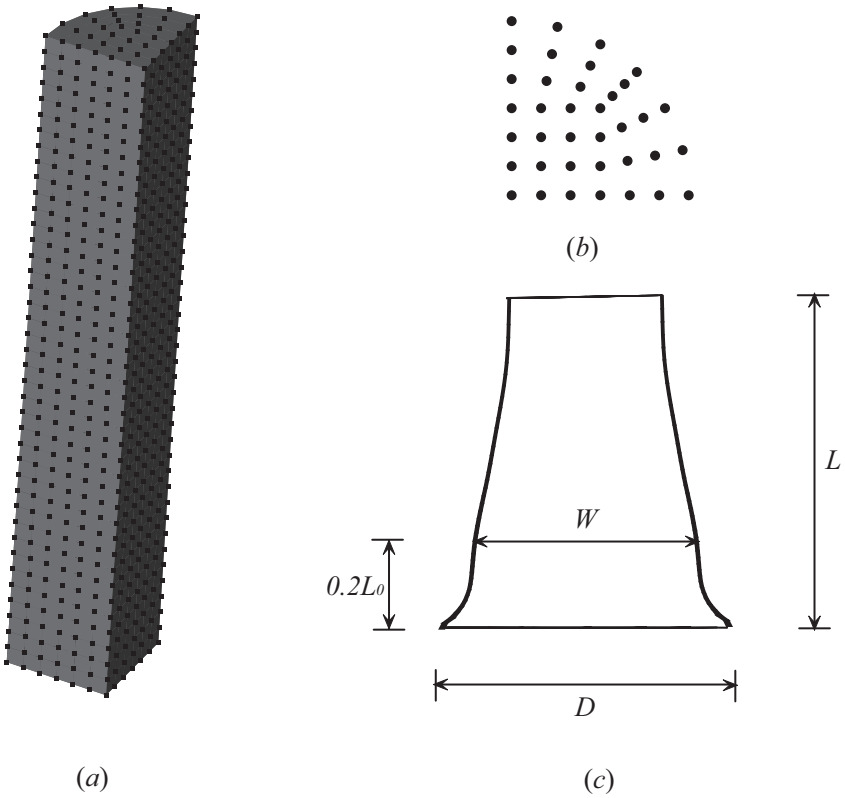


图 5.3　Taylor杆碰撞示意图

Taylor杆碰撞实验是一个柱状金属杆正面高速碰撞刚性墙的一个实验，

于1949年由Taylor提出，故而得名。Taylor 杆碰撞实验较易实现，能够反映材料在不同应变和应变率下的行为，常用来检验动力学代码。

本例中，柱形杆的材料是铜，采用带硬化的弹塑性材料模型，具体参数为弹性模量$E = 1.17 \times 10^{11}$Pa，泊松比$\nu = 0.35$，密度$\rho = 8930\text{kg/m}^3$，屈服模量$\sigma_0 = 0.157 \times 10^9$Pa，硬化模量$E_p = 0.425 \times 10^9$Pa。杆的长和直径分别为$L_0 = 25.4$mm，$D_0 = 7.6$mm，初始速度190m/s。根据对称性取1/4模型进行计算，半径方向取7个节点，长度方向取41个节点，一共使用1517个节点进行离散，附加质点数为1080个。模拟直到杆的动能接近为零，基本不再变化为止，时间为72μs。图5.3(a)显示了初始节点布置图，图5.3(b) 是杆端的节点布置图。

图5.4显示了采用PIEFG计算的最终节点分布以及等效塑性应变云图，其中图5.4 (a)和图5.4(b)是采用完全的拉格朗日法计算的结果，而图5.4 (c)和图5.4(d)是采用更新的拉格朗日法计算的结果。采用完全的和更新的拉格朗日法计算结果基本一致。采用更新的拉格朗日法计算时，当节点距离刚性墙小于0.35mm时（近似等于z方向节点初始间距的一半），节点自动转化为附加质点，式(5-44)中的$\varepsilon = 0.01/dt$，dt为积分时间步长。

为了考察数值模拟结果和实验结果的一致程度，G. R. Johnson给出了平均误差定义[130]：

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{3}\left(\frac{|\Delta L|}{L} + \frac{|\Delta D|}{D} + \frac{|\Delta W|}{W}\right) \tag{5-45}$$

其中L和D分别是碰撞结束后的长度和撞击端直径，W是距离刚性墙$0.2L_0$ 处的直径，如图5.3(c)所示。表5.1给出了分别用完全的拉格朗日（T. L）PIEFG，更新的拉格朗日（U. L）PIEFG、LS-DYNA、完全的拉格朗日（T. L）GBMM 计算结果和实验结果的比较，可看出计算结果和实验结果都很接近。

表5.2给出了分别用完全的拉格朗日（T. L）PIEFG、更新的拉格朗日（U. L）PIEFG、LS-DYNA（两点高斯积分）、完全的拉格朗日（T. L）GBMM 模拟Taylor杆碰撞过程花费的时间。机器配置：CPU奔III 2.0G，内存2.0G，本章所有算例采用的机器都是这个配置。GBMM中，每个背景网格采用2点高斯积分。从表中可以看出：LS-DYNA的效率最高，但LS-DYNA是商业软件，代码经过了很多优化，而PIEFG，GBMM都是本人用C++语言编写的，没有经过优化处理；PIEFG的效率大概是GBMM的3.58倍，实际上PIEFG的计算点（质点）数为2598个，GBMM的计算点数为8640个，后者是前者的3.33倍，理论分析和实际

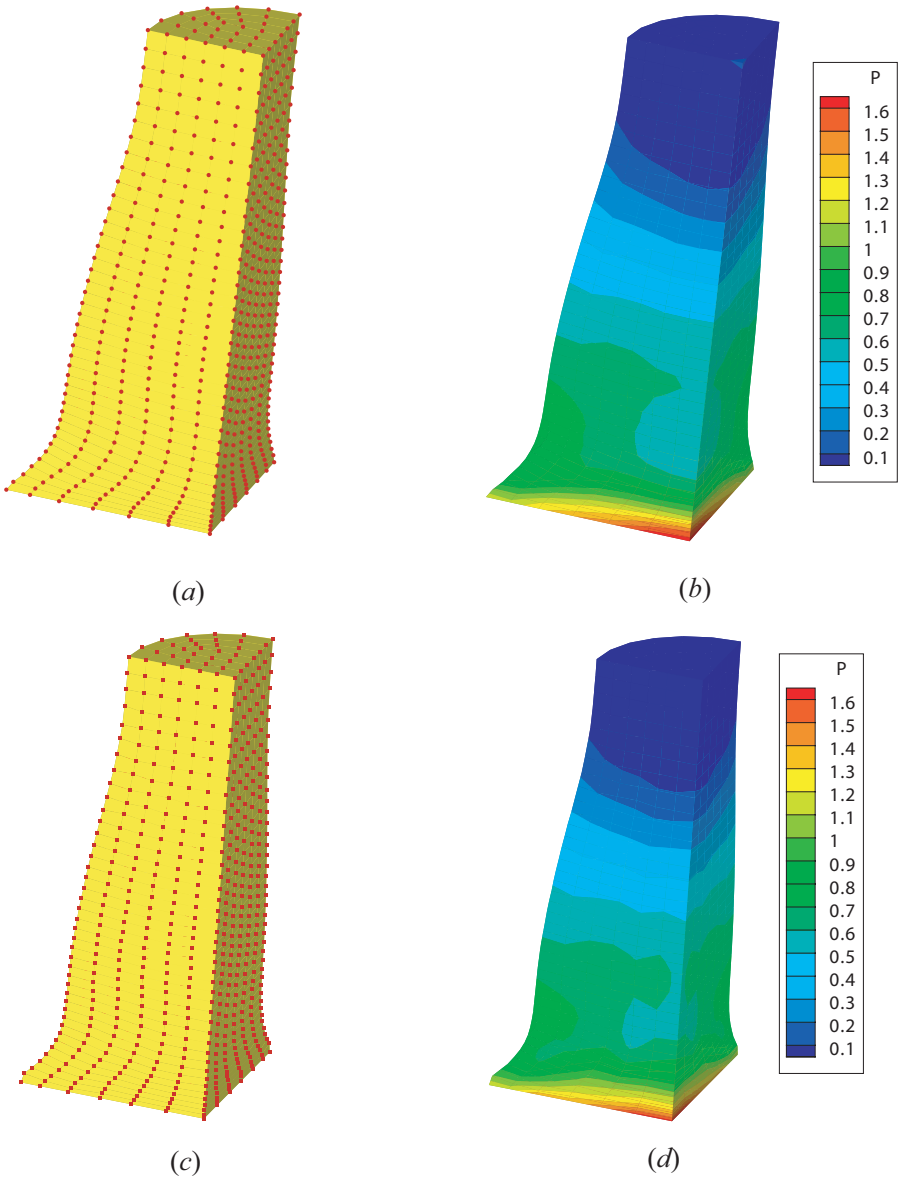


图 5.4　最终的节点分布和等效塑性应变云图。(*a*)、(*b*)完全的拉格朗日PIEFG计算结果。(*c*)、(*d*)更新的拉格朗日PIEFG计算结果。

表 5.1　计算结果和实验结果比较

	高度L(mm)	底部直径D(mm)	W(mm)	$\bar{\Delta}$
实验	16.2	13.5	10.1	-
LS-DYNA	16.2	13.07	10.01	0.0517
GBMM（T. L）	16.24	13.4	10.01	0.0189
PIEFG（T. L）	16.24	13.36	10.05	0.0179
PIEFG（U. L）	16.15	13.08	10.10	0.0352

结果差不多。如果采用3 点高斯积分，GBMM花费时间为2325秒，这时PIEFG的效率是GBMM的11.4倍；从表中还可以看出，完全的拉格朗日PIEFG法和更新的拉格朗日PIEFG法计算效率差不多。更新的拉格朗日PIEFG法采取了5.4.2节中的加速算法，如果在每个时间步所有的节点都重新计算形函数，该算法花费的时间是728秒，计算效率下降了很多。PIEFG和GBMM的时间步长要比LS-DYNA的大，这是因为无网格法的稳定时间步长和计算点的定义域相关，而有限元法中，稳定时间步长是和网格相关的，在相同的离散方案下，计算点的定义域一般要比有限元法的网格尺寸要大，因此前者的稳定时间步长要比后者大。

表 5.2　计算效率比较

	最大时间步长（ms）	最小时间步长（ms）	时间步	耗时（s）
LS-DYNA	6.38E-2	3.99E-2	1619	54
GBMM（T. L）	0.276	6.59E-2	978	731
PIEFG（T. L）	0.276	6.66E-2	983	204
PIEFG（U. L）	0.276	9.67E-2	695	228

5.5.2　金属材料的正向挤压

金属材料的挤压成型是金属加工成型中常用的一种工艺，我们先考虑一个正向挤压的算例，边长$L=3$m的立方体金属以$v=20$m/s的速度挤压到一个直径$D=1.0$m的圆形筒中，金属立方体和周围的壳体以及圆柱壳体之间摩擦系数为$\mu=0$。如图5.5所示，图5.5(a)是模具的外观图，图5.5(b)是模具以及金属材料的剖面图。采用的金属材料为铜，参数在5.5.1节中定义。

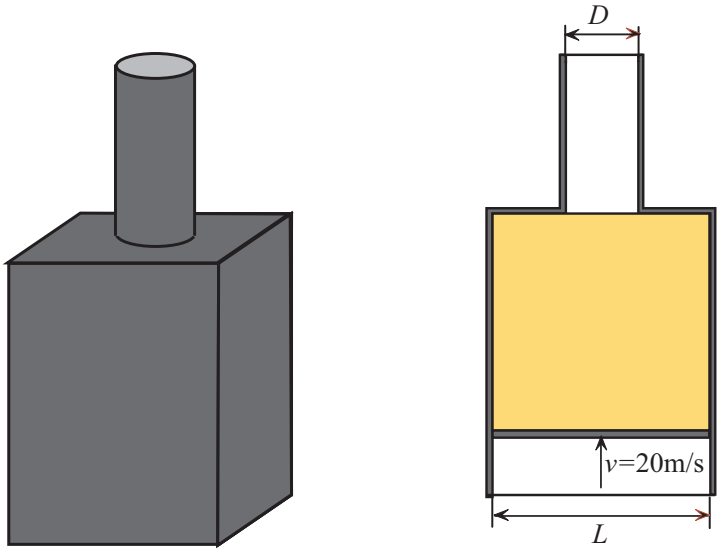
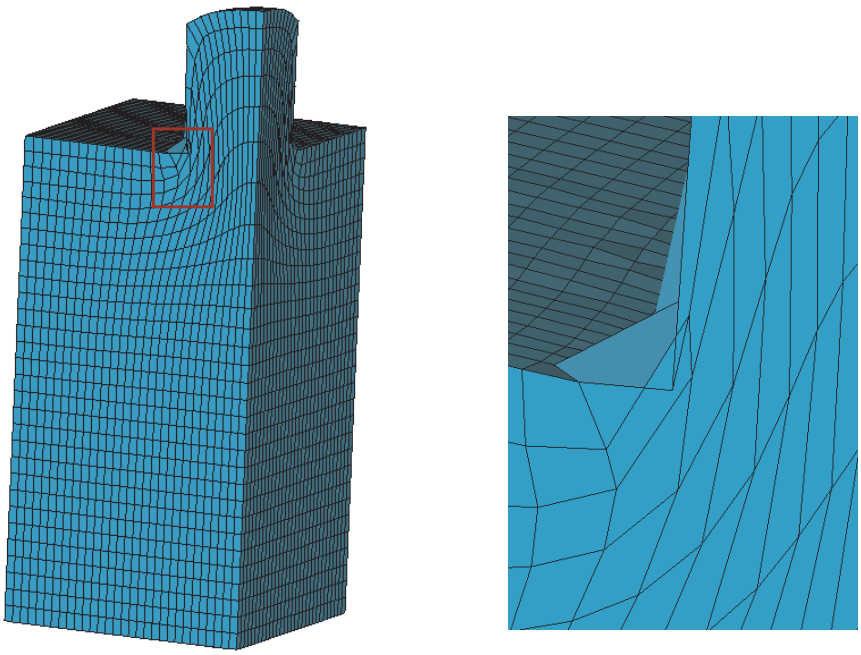


图 5.5　金属材料挤压成型示意图

我们首先采用有限元软件LS-DYNA来计算这个问题，由于对称性，取材料的1/4来分析，三个方向都均布30 个网格。采用全积分计算，当$t=0.012$s时由于网格畸变太严重单元体积出现了负值而导致计算终止，图5.6是最后的变形图。其中图5.6(b)是5.6(a)中红框部分的放大，从图中可以看出，有限元网格出现了明显的畸变甚至穿透，整个过程花费机时16分钟。

当采用单点高斯积分计算时，程序不会因为网格畸变穿透而导致计算终止，但是这时候可能会导致计算的错误，再往后计算结果不一定可靠，图5.7显示了LS-DYNA单点高斯积分计算到$t=0.020$s的结果，这时候可以明显看到网格已经出现了严重的畸变穿透。

无网格法的形函数不依赖于网格，计算过程中不会出现网格畸变的情况，



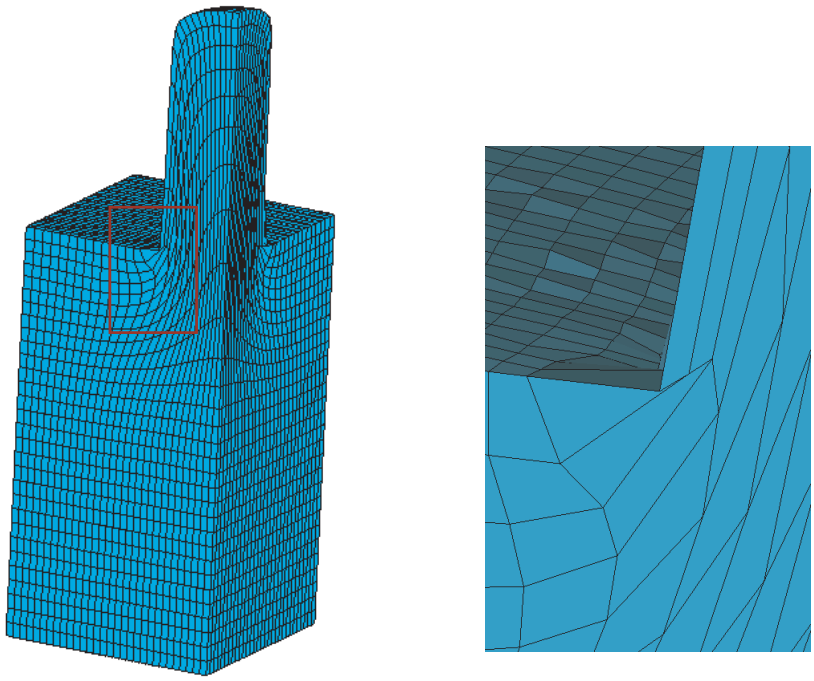
(*a*)　　(*b*)

图 5.6　LS-DYNA采用全积分计算结果

因此无网格法相对于有限元在计算大变形问题上有很大的优势，图5.8比较了完全的拉格朗日PIEFG和单点高斯积分LS-DYNA的计算结果。PIEFG中，金属材料在x、y、z的三个方向都用31个节点均匀离散，一共29791个节点，附加质点为27000个。图5.8(a)是点$\mathbf{x}_1$（0.0，0.0，6.0）变形过程中的z方向坐标，图5.8(b)是点$\mathbf{x}_2$（1.5，1.5，6.0）变形过程中的z方向坐标，采用PIEFG可以毫无困难的计算到$t=0.034$s，整个过程花费机时7小时。单点高斯积分LS-DYNA计算到$t=0.02$s，花费时间4分钟，效率很高，此时网格已经出现了畸变穿透，再往后计算结果可能出现错误。

图5.9比较了当$t=0.020$s时采用PIEFG和LS-DYNA单点高斯积分计算的等效塑性应变云图。两种方法计算的云图趋势大致相同，等效塑性应变都是在模具的孔口最大。但PIEFG计算的结果要稍微光滑一些。

图5.10显示了采用PIEFG计算到$t=0.034$s时的结果，图5.10(a)和图5.10(b) 分别是等效塑性应变图和节点分布图。从图中可以看出，此时金属材料变形已经很大，但是由于PIEFG的形函数不依赖于网格，所以不会因为材料变形太大而导



(*a*)　　(*b*)

图 5.7　LS-DYNA采用单点高斯积分计算结果

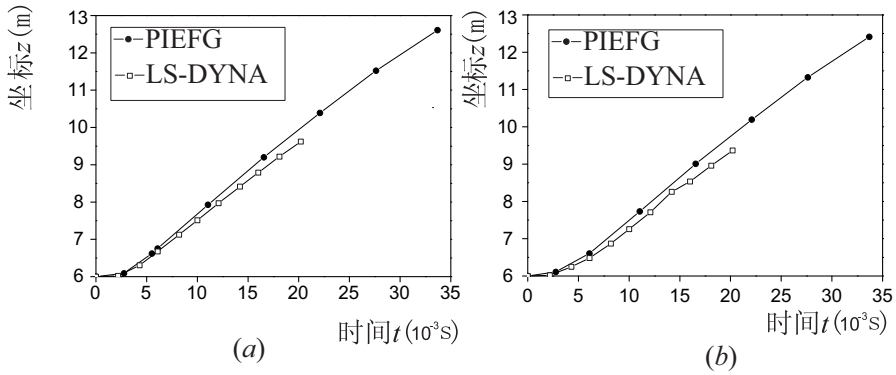
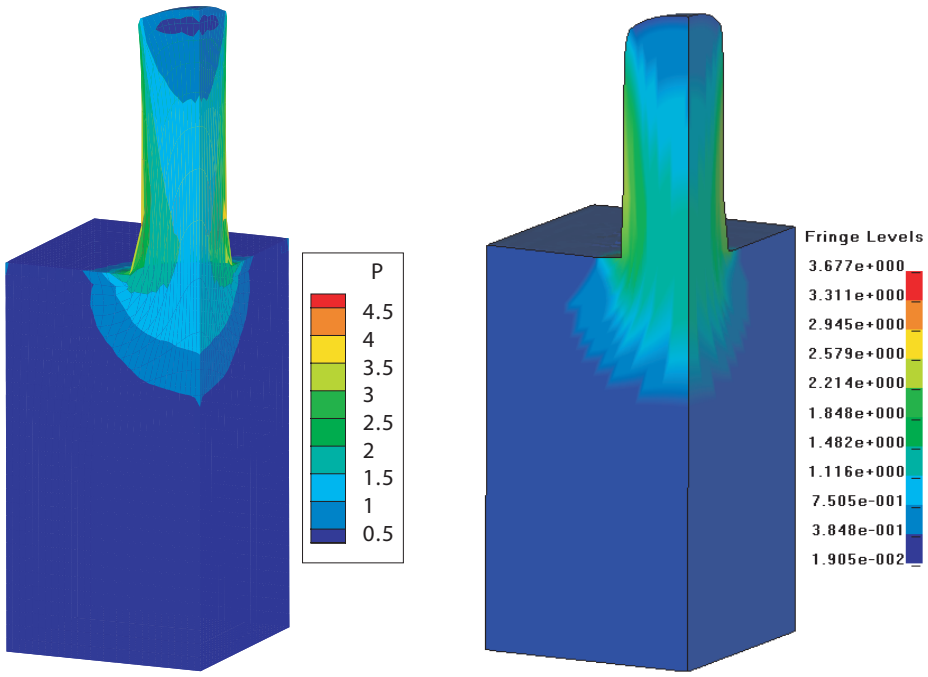


图 5.8　采用不同的方法得到的z方向坐标变化图。(*a*)点$\mathbf{x}_1$的z变化。(*b*)点$\mathbf{x}_2$的z变化



(*a*)　　(*b*)

图 5.9　等效塑性应变云图。(*a*)PIEFG计算结果。(*b*)LS-DYNA计算结果

致计算的终止。计算过程中，随着节点距离越来越小，时间步长也越来越小，降低了求解的效率。在后续的工作中可以采用5.4.2节中的算法来解决这个问题。

5.5.3　金属材料的反向挤压

金属加工成型中另一种常用的工艺是反向挤压，如图5.11所示，外径$D=2$m的圆柱壳刚体已$v=50$m/s的速度向下挤压一个边长$L=3.0$m的金属立方体，金属立方体和周围的壳体以及圆柱壳体之间摩擦系数为$\mu=0$。图5.11(*a*)是模具的外观图，图5.11(*b*)是模具以及金属材料的剖面图。采用的金属材料为铜，参数在5.5.1中定义。

首先采用有限元软件LS-DYNA来计算这个问题，由于对称性，我们取材料的1/4来分析，三个方向都均布30 个网格。LS-DYNA采用两点高斯积分计算到$t=0.001$s时由于网格严重单元体积出现了负值而导致计算终止，图5.12是最后的变形图。其中图5.12(*b*)是5.12(*a*)中红框部分的放大，从图中可以看出，有限

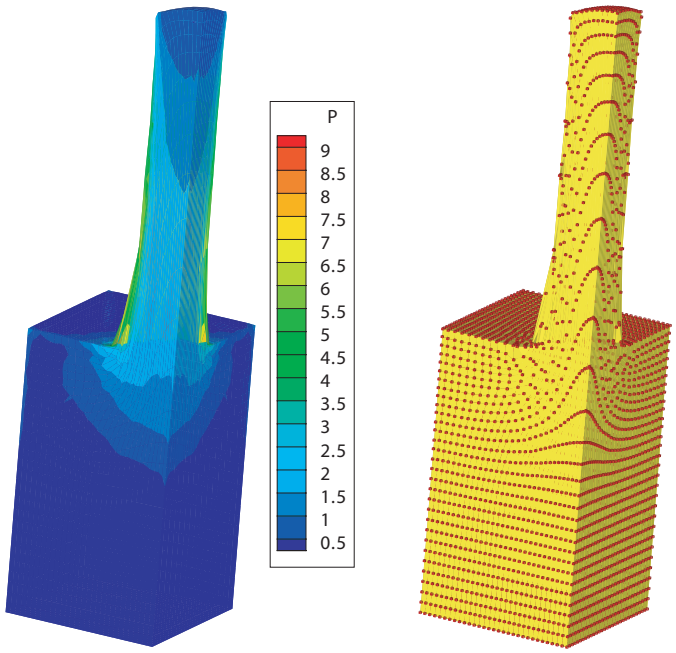


图 5.10　等效塑性应变和节点分布图

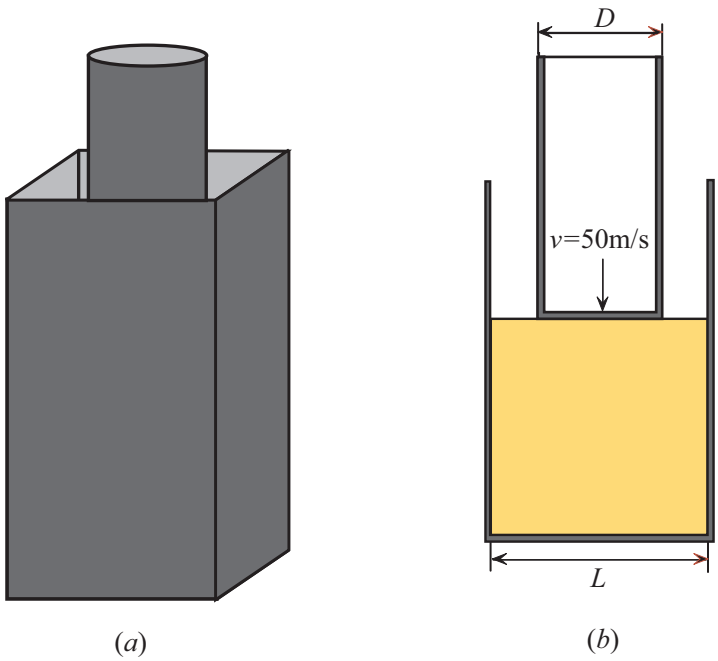
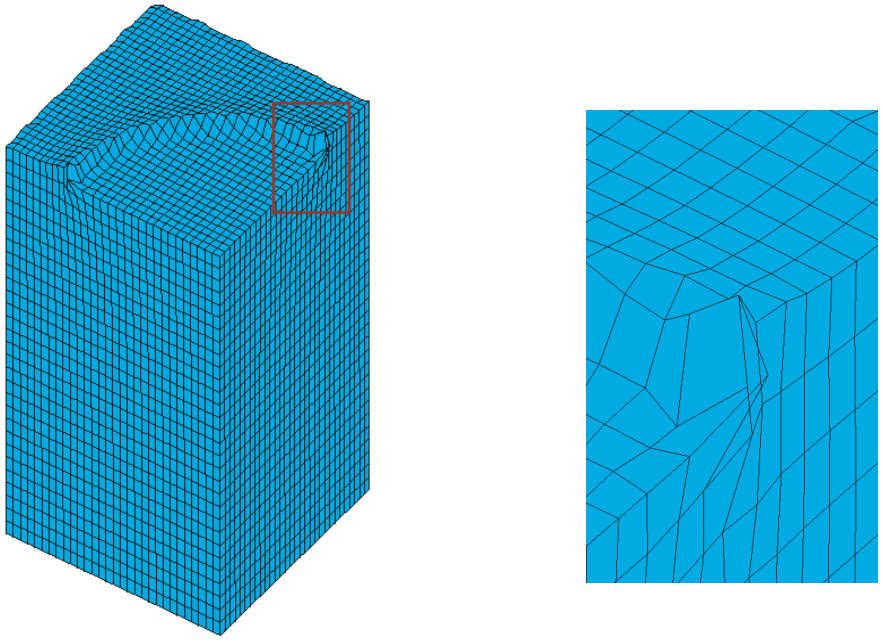


图 5.11　金属材料挤压成型示意图

元网格出现了明显的畸变甚至穿透。



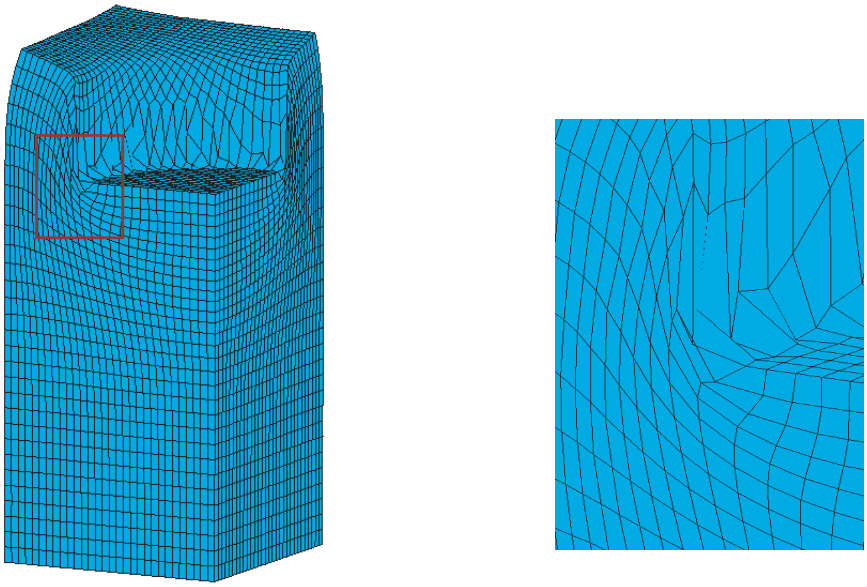
(*a*)　　(*b*)

图 5.12　LS-DYNA采用全积分计算结果

当采用单点高斯积分计算时，程序不会因为网格畸变穿透而导致计算终止，但是这时可能会导致计算的错误，结果不一定可靠，图5.13显示了LS-DYNA单点高斯积分计算到$t=0.021$s的结果，这时可以明显看到网格已经出现了严重的畸变穿透，图5.13(*b*)畸变网格的放大图。

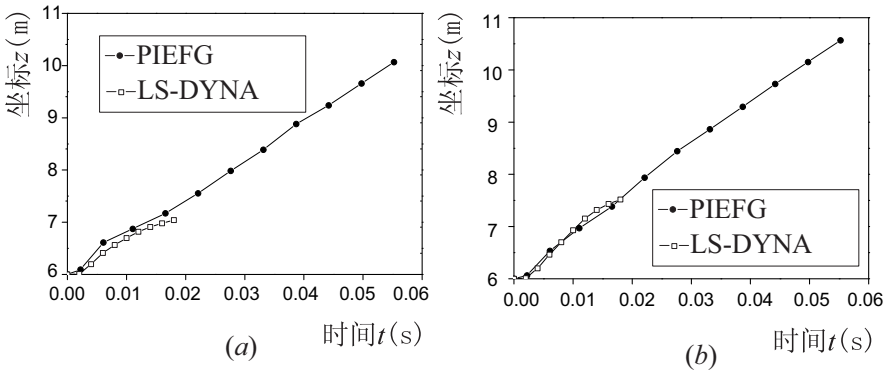
图5.14比较了采用单点高斯积分LS-DYNA和完全的拉格朗日PIEFG计算的结果。PIEFG中，金属材料在x、y、z的三个方向都用31个节点均匀离散，一共29791个节点，附加质点为27000个。图5.14(*a*)是点$\mathbf{x}_1$（1.5，1.5，6.0）变形过程中的z方向坐标，图5.14(*b*)是点$\mathbf{x}_2$（3.0，3.0，6.0）变形过程中的z方向坐标，采用PIEFG可以毫无困难的计算到$t=0.053$s，整个过程花费机时14小时。单点高斯积分LS-DYNA计算到$t=0.018$s，花费时间4分钟，计算效率很高，但此时网格已经出现了畸变穿透，再往后计算结果可能出现错误。

图5.15比较了当$t=0.021$s时采用PIEFG和LS-DYNA单点高斯积分计算的等效塑性应变云图。两种方法计算的云图趋势大致相同。



(*a*)　　(*b*)

图 5.13　LS-DYNA采用单点高斯积分计算结果



(*a*)　　(*b*)

图 5.14　采用不同的方法得到的点z方向坐标变化图。(*a*)点$\mathbf{x}_1$的z变化。(*b*)点$\mathbf{x}_2$的z变化

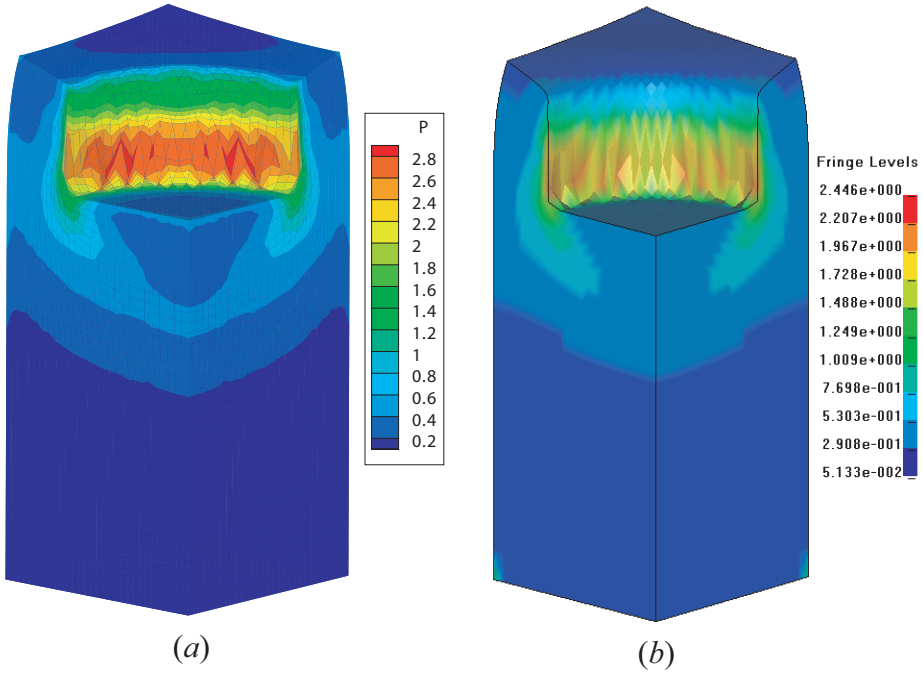


图 5.15　等效塑性应变云图。(*a*)PIEFG计算结果。(*b*)LS-DYNA计算结果

图5.16显示了$t = 0.053$s时采用PIEFG计算的结果，图5.16(*a*)和图5.16(*b*) 分别是等效塑性应变图和节点分布图。此时金属材料变形已经很大，但是由于PIEFG的形函数不依赖于网格，所以不会因为材料变形太大而导致计算的终止。同正向挤压的计算过程类似，时间步长会随着节点距离变小而减少。在后续的工作中可以采用5.4.2节中的算法来解决这个问题。

5.6　本章小结

本章给出了质点积分无网格伽辽金法在求解大变形塑性问题的完全的拉格朗日格式和更新的拉格朗日格式。采用更新的拉格朗日算法时，可以把变形比较大的区域内的节点转化为附加质点，大幅度地提高了计算效率。

通过Talor杆碰撞算例检验了质点积分无网格伽辽金法（PIEFG）了在求解大变形弹塑性问题上的正确性，计算结果和理论分析都表明：PIEFG的计算效率比采用$2\times2\times2$高斯积分点的GBMM高4倍左右，比采用$3\times3\times3$高斯积分点的GBMM高10倍以上。

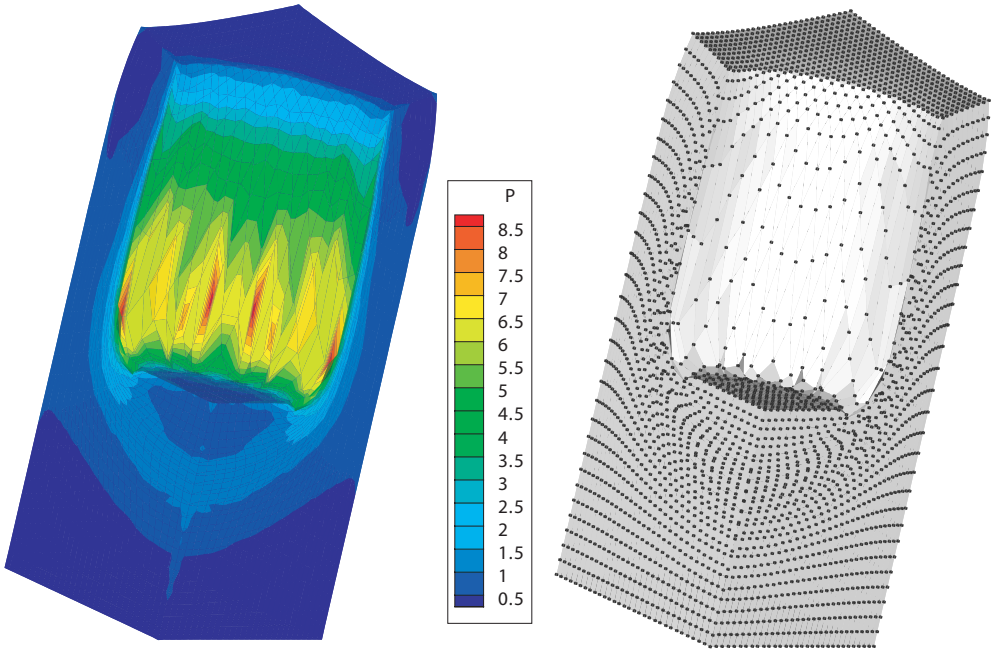


图 5.16　等效塑性应变和节点分布图

通过金属挤压成型以及反向挤压成型的算例分析表明了质点积分无网格伽辽金法在处理这类大变形问题上相对于有限元有很大的优势，但计算效率不及有限元。质点积分无网格伽辽金法在金属成型领域中具有良好的应用前景。

第 6 章 结 论

6.1 本文主要工作和结论

基于伽辽金法的无网格法需要在背景网格或子域内积分，这类无网格法计算效率很低；基于配点法的无网格方法稳定性低精度差。本文主要的研究工作是提出能兼顾效率、精度和稳定性的无网格法并将它们应用到固体力学中。

本文的研究主要包括以下几个方面：

1. 参数对无网格法的精度和稳定性有很大的影响，本文系统地比较了各种参数对加权最小二乘无网格法（MWLS）、伽辽金无网格法（GBMM）、直接配点无网格法（CBMM）精度和稳定性的影响，得到了一套经验参数，对无网格法中参数的选择具有指导意义。

2. 加权最小二乘无网格对边界条件敏感，不恰当的边界条件可能导致错误的解答。为了克服这个问题，本文将伽辽金法和最小二乘法结合起来，建立了伽辽金最小二乘无网格法（MGLS）。MGLS只需要在边界区域（很薄，只相当于两层节点距离的厚度）积分，而在内部区域采用最小二乘配点法，因此求解效率相对于GBMM来说仍然很高。算例表明，MGLS是稳定的，而且精度很高。

3. 当采用显式时间积分来计算动力学问题时，伽辽金最小二乘无网格法（MGLS）不能像有限元那样形成对角质量矩阵的形式，严重影响了求解的效率，因此本文提出了伽辽金配点无网格法（MGDC）。通过弹性静力小变形算例表明，MGDC 是稳定的，精度和MGLS相差不多。本文将MGDC成功应用到波动问题中。

4. 提出了质点积分无网格伽辽金法。PIEFG把在求解区域上的积分转化为在一系列质点上的积分，算例表明该方法克服了节点积分无单元伽辽金法的不稳定性问题，并且精度有了很大的提高。PIEFG的计算效率远高于EFG法，对于3点高斯积分EFG来说，二维问题PIEFG效率大概是EFG的4倍，三维问题前者效率是后者的13～14倍。

5. 将质点积分无网格伽辽金法应用到超弹性材料大变形问题中。分析了橡胶材料的超大变形平面应变压缩和拉伸，算例表明，PIEFG具有良好的计算超大变形问题的能力，在超大变形问题中具有很好的应用前景。

6. 将质点积分无网格伽辽金法应用到三维金属成型当中。给出了质点积分无网格法在求解大变形塑性问题的完全的拉格朗日格式和更新的拉格朗日格式，并将质点积分无网格法成功应用到金属加工成型数值模拟中。通过Talor杆碰撞算例检验了质点积分无网格法在求解大变形弹塑性问题上的正确性和有效性，通过金属挤压成型以及反向挤压成型的算例分析表明了质点积分无网格法在处理这类大变形问题上相对于有限元有很大的优势。

6.2 本文主要创新点

1. 提出了伽辽金最小二乘无网格法（MGLS），克服了加权最小二乘无网格法对边界条件敏感的问题，同时保留了加权最小二乘法稳定性好，效率高的特点。

2. 提出了伽辽金配点无网格法，并采用显式时间积分格式将它成功应用到弹性动力学问题当中，解决了伽辽金最小二乘法在求解动力学问题时无法使用集中质量阵的问题。

3. 提出了质点积分无网格伽辽金法，将它应用到超弹性大变形问题以及三维金属成型问题当中。算例表明：质点积分无网格伽辽金法求解特大变形问题上相对于有限元法有很大的优势；质点积分无网格伽辽金法的计算效率要远高于EFG法。

6.3 展望

无网格法是一种新型的数值计算方法，它的形函数不依赖于网格，可以显著减少网格畸变的影响，这种独特优点使它在高速碰撞，金属成型，动态裂纹扩展等领域中有着广阔的应用前景。无网格的形函数一般比较复杂，形函数计算效率远低于有限元法，如何提高形函数的计算效率也是今后无网格法的一个研究重点。

本文中，已经把质点积分无网格伽辽金法成功应用到超弹性材料的大变形分析以及金属挤压成型分析中，质点积分无网格伽辽金无网格的计算效率相对于有限元来说还有一定的差距，质点积分无网格伽辽金法和有限元的结合是下一步工作的方向。

当采用质点积分无网格伽辽金法计算塑性大变形问题的时候，在变形太大的区域把节点转化为附加质点可以尽量减少节点间距变小对时间步长的影响，这种转化不需要象有限元法那样重新划分网格，易于实现，提出合理的转化准则也是下一步工作的方向。

参考文献

[1] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless methods: An overview and recent developments. Comput. Mech. Engrg, 1996, 139:3–47

[2] Li S and Liu W K. Meshfree and particle methods and their applications. Appl. Mech. Rev., 2002, 55(1):1–34

[3] 张雄，宋康祖，陆明万. 无网格法的研究进展及其应用. 计算力学学报, 2003, 6:730–742

[4] 张雄，刘岩. 无网格法. 北京：清华大学出版社/Springer，2004

[5] Lucy L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. The Astron. J., 1977, 8(12):1013–1024

[6] Gingold R A and Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and applications to non-spherical stars. Mon Not. Roy. Astrou. Soc., 1977, 18:375–389

[7] Benz W. Smoothed particle hydrodynamics: a review. In: Buchler J R ed. The Numerical Modelling of Stellar Pulsation, 1990, Dordrecht: Kluwer:269

[8] Monaghan J J. An introduction to SPH. Comput. Phys. Comn., 1988, 48:89–96

[9] Monaghan J J. smoothed particle hydrocynamics. Annyal Review Astronomics and Astrophysics, 1992, 20:534–574

[10] Monaghan J J. Why particle methods work. SIAM J. SCI. Stat. Comput., 1982, 3(4):422

[11] Swegle J W, L H D, and Attaway W, S. Smoothed particled hydrodynamics stability analisys. J, Comput. Phys., 1995, 116:123–134

[12] Dyka C T. Addressing tension instability in SPH methods. Technical Report NRL/MR/6384, 1994, NRL

[13] Chen K, J, Beraun J E, and Jih C J. An impprovement for tensile instability in smoothed particle hydrodynamics. Comput. Mech, 1999, 23:279–287

[14] Johson G R and Beissel S R. Normalized smoothing functions for SPH impact computations. Int. J. Num. Meth. Engng., 1996, 39:2725–2741

[15] Vignjevic R, Canpbell J, and Libersky L. A treatment of zero-energy modes in the smoothed particle hydrodynamics method. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2000, 184:67–85

[16] Monaghan J J and Gingold G A. Shock simulation by the Particle Method SPH. J. Comput. Phys., 1983, 52:374–389

[17] Monaghan J J. Particle method for hydrodynamics. Comput. Phys. Rep., 1985, 3:71–124

[18] Gingold R A and Monaghan J J. Kernel estimates as a basis for general particle methods in hydrodynamics. J. Comput. Phys., 1982, 46:429–453

[19] Swegle J W and Attaway S W. On the feasibility of using smoothed particle hydrodynamics for underwater explosion calculations. Comput. Mech., 1995, 17:151–168

[20] Johson G R, Stryk R A, and Beissel S R. SPH for high velocity impact computations. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 1996, 139:347–373

[21] Johson G R, Beissel S R, and Stryk R A. A generalized particle algorithm for high velocity impact computations. Comput. Mech., 2000, 25:245–256

[22] Johson G R, Stryk R A, and Beissel S R. An algorithm to automatically convert distorted finite elements into meshless particles during dynamics deformation. Int. J. Num. Meth. Engrg, 2002, 27:997–1013

[23] Johson G R and Stryk. Conversion of 3D distorted elements into meshless particles during dynamics deformation. Int. J. Num. Meth. Engrg, 2003, 28:947–966

[24] Libersky L D and Petschek A G. High strain lagrangian hydrodynamics: A three-dimensional SPH code for dynamics material response. J. Comput. Phys, 1993, 109:67–75

[25] Randles P W and Libersky L D. Smoothed particle hydrodynamicsl some recent improvements and applications. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 1996, 139:375–408

[26] 张锁春. 光滑质点流体动力学（SPH）法（综述）. 计算物理, 1996, 13(4):385–397

[27] 贝新源，岳宗五. 三维SPH程序及其在斜高速碰撞问题的应用. 计算物理, 1997, 14(2):155–166

[28] Nayroles P, Touzot G, and Villon P. Generalizing the finite element methods: diffuse approximation and diffuse elements. Comput. Mech, 1992, 10:307–138

[29] Lancaster P and Salkauskas K. Surfaces generated by moving least squares methods. Math. Comput, 1981, 379(155):141–158

[30] Belyschko T, Touzot G, and Gu L. Element free galerkin methods. Int. J. Num. Meth. Engrg, 1994, 37:229–256

[31] Yu Y Y, Belyschko T, and M T. Element-free galerkin methods for wave propagation and dynamics fracture. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 1995, 126:131–153

[32] Belyschko T and Tabbara M. Dynamics fracture using element-free galerkin methods. Int. J. Num. Meth. Engrg, 1996, 39:923–938

[33] Belyschko T, Organ D, and Gerlach C. Element-free galerkin methods for dynamics fracture in concrete. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 2000, 187:385–399

[34] Belyschko T, Gu L, and Lu Y Y. Fracture and crack growth by element free galerkin methods. Model. Simul. Mater. Sci. Engrg, 1994, 115:277–286

[35] Belyschko T, Lu Y Y, and Gu L. Crack propagation by element-free galerkin methods. Engrg. Frac. Mech., 1995, 51:295–315

[36] Belyschko T and Fleming M. Smoothing enrichment and contact in the element-free galerkin method. Comput. Struct, 1999, 71:173–195

[37] Fleming M and Belyschko T. Enricked element-free gelerkin methods for crack tip fields. Int. J. Num. Meth. Engrg, 1997, 40:1483–1504

[38] Krysl P and Belyschko T. Analysis of thin shells by element-free galerkin methods. Comput. Mech, 1995, 17:26–35

[39] Beissel S and Belyschko T. Nodal integration of the element-free galerkin method. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 1996, 139:49–74

[40] Chen J S and Pan C e a. A lagrangian reproducing kernel particle method for metal forming analysis. Comput. Mech., 1998, 22:289–307

[41] Liu W K, Jun S, and Zhang Y F. Reproducing kernel particle methods. Int. J. Numer. Meth. Fluids., 1995, 20:1081–1106

[42] Liu W K, Chen Y, and Zhang Y F. Overview and applications of the reproducing kernel particle methods. Archives of Computational Methods in Engineering, state of the art review, 1996, 3(1):3–80

[43] Liu W K, Chen Y, and Aziz U. Generalized multiple scale reproducing kernel particle methods. Comput. Methods Appl. Engrg, 1996, 139:91–157

[44] Liu W K, Chen Y, and Chang C T. Advances in multiple scale kernel particle methods. Comput. Mech, 1996, 18:73–111

[45] Uras R A, Chang C T, and Chen Y. Multresolution reproducing kenel particle methods in acoustics. J. Comput. Acoust, 1997, 5:71–94

[46] Liu W K, Jun S, and Li S F. Reproducing kernel particle methods for structural dynamics. Int. J. Num. Meth. Engrg, 1995, 38:1655–1679

[47] Liu W K and Jun S. multiresolution reproducing kernel particle method for computational fluid dynamics. Int. J. Num. Meth. Engrg, 1997, 24:1391–1415

[48] Liu W K, Hao S, and Belyschko T. Multiple scale meshfree methods for damage fracture and localization. Comput. Mater. Sci., 1999, 16:197–205

[49] Jun S and Im S. Multiple-scale meshfree adaptivity for the simulation of adiabatic shear band formation. Comput. Mech., 2000, 25:257–266

[50] Lee S H, Kim H J, and Jun S. Two scale meshfree method for the adaptivity of 3-D stress concentration problems. Comput. Mech., 2000, 26:376–387

[51] Liu W K and Jun S. Multiple-scale reproducing kernel particle method for large deformation problems. Int. J. Num. Meth. Engrg, 1998, 41:1339–1362

[52] Chen J S, Pan C, and Wu C T. Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 1996, 139:195–227

[53] Jun S, Liu W K, and Belyschko T. Explicit reproducing kernel particle methods for large deformation problems. Int. J. Num. Meth. Engrg, 1998, 41:137–166

[54] Chen J S, Pan C, and Wu C T. Large deformation analysis of rubber based on a reproducing kernel particle method. Comput. Mech, 1997, 19:211–227

[55] Chen J S, Yoon S, and Wang H P. An improved reproducing particle method for nearly incompressible finite elasticity. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2000, 181:117–145

[56] Li S, Hao W, and Liu W K. Numerical simulations of large deformation of thin shell structures using meshfree methods. Comput. Mech, 2000, 25:102–116

[57] Chen J S, Wang H P, and Yoon S. Some recent improvements in meshfree methods in incompressible finite elasticity boudary value problems with contact. Comput. Mech, 2000, 25:137–156

[58] Chen J S, Pan C, and Roqne C M O L. A lagrangian reprocducing kernel particle method for metal forming analysis. Comput. Mech, 1998, 22:289–307

[59] Chen J S, Roqne C M O L, and Pan C. Analysis of metal forming process based on meshless method. Journal of Materials Processing Technology, 1998, 80-81:642–646

[60] Donning B M and Liu W K. Meshless methods for shear-deformable beams and plates. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 1998, 152:47–71

[61] Aluru N R. A reproducing kernel particle method for meshless analysis of microelectromechanical systems. Comput. Mech., 1999, 23:324–338

[62] Duarte C A and Oden J T. Hp clouds: a meshless method to solve boundary-value problems technical report 95-05. texas institute for computational and applied mathematics. university of texas at anstin. 1995

[63] Duarte C A and Oden J T. Hp clouds: A h-p meshless method. Numerical Methods for Partical Differential Equations, 1996, 12:673–705

[64] Duarte C A and Oden J T. Hp clouds: A h-p adaptive method using clouds. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 1996, 139:237–262

[65] Oden J T, Duarte C A, and Zienkiewicz O C. A new cloud-based hp finite element method. Int. J. Numer. Methods Engrg., 1998, 50:160–170

[66] Liszka T J, Duarte C A, and Tworzydlo W W. Hp-meshless cloud method. Comput. Method Appl. Mech. Engrg., 1996, 139:263–288

[67] Onate E, Idelsohn S, and Zienkiewicz O C. A finite point method in computational mechanics: Applications to convective transport and fluid flow. Int. J. Numer. Methods Engrg., 1996, 39:3839–3866

[68] Onate E, Idelsohn S, and Zienkiewicz O C. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. Comput. Method Appl. Mech. Engrg., 1996, 139:315–346

[69] Zhu T, Zhang J, and Atluri S N. A local boudary integral equation (lble) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach. Comput. Mech., 1998, 21:223–235

[70] Zhu T, Zhang J, and Atluri S N. A meshless local boundary integral equation (LBLE) method for solving nonlinear problems. Comput. Mech., 1998, 22:174–186

[71] Atluri S N and Sladek J. The local boundary iintegral equation (LBLE) and it's meshless implementation for linear elasticity. Comput. Mech., 2000, 25:174–186

[72] Atluri T, Zhu. A new meshless local Petrv-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. Comput. Mech., 1998, 22:117–127

[73] Atluri T, Zhu. The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics. Comput. Mech., 2000, 25:169–179

[74] Atluri, Cho J K, and Kim J G. Analysis of thin beams, using the meshless local petrov-galerkin method, with generalized moving least squares interpolations. Comput. Mech., 1999, 24:334–247

[75] Frank R. Scattered data interpolation: tests of some methods. Math. Comput., 1972, 38:181–199

[76] Hardy R L. Multiquadric equation of topography and other irregular surfaces. Comp. Math. Applic., 1990, 19(8/9):163–208

[77] Kansa E J. Multiquadrics–a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics∼i. Comp. Math. Applic., 1990, 19(8/9):127–145

[78] Kansa E J. Multiquadrics–a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics∼ii. Comp. Math. Applic., 1990, 19(8/9):147–261

[79] Sharan M, Kansa E J, and Gupta S. Applications of the multiquadric method for the solution of elliptic partial differntial equations. Appl. Nath. Comput., 1997, 84:275–302

[80] Fasshauser G E. Solving partial differential equations by collocation with radial basis fuctions. in: A. leméhauté, c. rabut, l. l. schumaker(eds.). chamonix proceedomgs. nashville, tn.: Vanderbilt university press. 1996, pages 1–8

[81] Wendland H. Meshless galerkin method using radial basis functions. Math. Comput., 1999, 68(228):1521–1531

[82] Coleman C T. On the use of radial basis fucnctions in the solution of elliptic boundary value problems. Comput. Mech., 1996, 17:418–422

[83] Wu Z M and Schaback R. Local error estimates for radial basis function interpolation of scattered data. IMA Journal of Numerical Analysis, 1993, 13:13–27

[84] Franke C and Schaback R. Solving partial differential equations by collocation suing radial basis functions. Appl. Math. Comput., 1998, 93:73–82

[85] Hon Y C, Lu M W, and Xue W M. Multiquadric method for the nunmerical solution of a biphasic model. Appl. Math. Comput, 1997, 88:153–175

[86] Kansa E J and Calson R E. Improved accuracy of multiquadric interpolation using variabile shape parameters. Comp. Math. Applic., 1992, 24(12):99–120

[87] Calson R E. The parameter r^2 in multiquadric interpolation. Comp. Math. Applic., 1991, 21(9):29–42

[88] Wu Z M. Compactly supported positieve difinite radial functioins. Adv. Comput. Math., 1995, 4:283–292

[89] Buhmann M D. Radial functions on compact support. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1998, 41:3–46

[90] Wendland H. Piecewise polynomal, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degrees. Adv. Comput. Math., 1995, 4:389–396

[91] 张雄，宋康祖，陆明万. Meshless methods based on collocation with radial basis function. Comput. Mech., 2000, 26(4):333–343

[92] 张雄，宋康祖，陆明万. Hermite type collocation with radial basis function. In: Proceedings of Internal Conference on Computational Engineering & Science, August 20∼25. Los Angeles, USA, 2000

[93] 宋康祖，张雄，陆明万. Collocation with modified compactly supported radial basis functions. Proceedings of Internal Conference on Computational Engineering & Science, August 19∼25. Puerto Vallarta, 2001

[94] 张雄，刘小虎，宋康祖等. Least-square collocation meshless method. Int. Num. Meth. Engng, 2001, 51(9):1089–1100

[95] 张雄，胡炜，潘小飞等. 加权最小二乘法. 力学学报, 2003, 35(4):425–431

[96] Lu Y Y, Belyschko T, and Gu L. A new implementation of the element free galerkin method. Comput. Method Appl. Mech. Engng., 1994, 113:397–414

[97] Mukherjee Y X and Mukherjee S. On boundary conditoins in the element free galerkin method. Comput. Mech., 1997, 19:267–290

[98] Ventura G. An augmented lagrangian approach to essential boundary conditions in meshless methods. Int. J. Num. Meth. Engrg, 2002, 53:825–842

[99] Mukherjee Y X and Belyschko T. Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 1997, 131:133–145

[100] 杨海天，刘岩. 一种FEM-EFGM耦合技术及其应用. 计算力学学报, 2003, 5:2–8

[101] Gosz J and Liu W K. Admissble approxaimations for essential boundary conditons in the reproducing kernel particle method. Comput. Mech., 1996, 19:120–135

[102] Frank C, Günther F C, and Liu W K. Implementation of boundary conditions for meshless methods. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 1998, 163:205–230

[103] Zhu T and Atluri S N. A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditons in the element free galerkin method. Comput. Mech., 1998, 21:211–222

[104] 张雄，刘欣，陆明万等. Impostion of essential boundary conditions by displacement constraint equations in meshless method. Commn. Numer. Methods Engrg., 2001, 17(3):165–178

[105] Chen J S and Wang H P. New boundary condition treatments in meshfree computation of contact problems. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 2000, 187:441–468

[106] Liu G R and T G Y. A point interpolation method for two-dimensional solids. Int. J. Num. Meth. Engng, 2001, 50:937–951

[107] Wang J G and Liu G R. A point interpolation meshless method based on radial basis functions. Int. J. Num. Meth. Engng, 2002, 54:1623–1648

[108] Brackbill J U and Ruppel H M. Flip: a method for adaptively zoned, particle-in-cell calculations in two dimensions. Journal of Computational Physics, 1986, 65:314–343

[109] Brackbill J U, Kothe D B, and Ruppel H M. Flip: a low-dissipation, particle-in-cell for fluid flow. Computer Physics Communications, 1988, 48:25–38

[110] Sulsky D, Chen Z, and Schreyer H L. A particle method fir history-dependent materials. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, 118:179–196

[111] Sulsky D and Schreyer H L. Axissymmetric form of the material-point mehtod with application to upsetting and taylor impact problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139(1-4):409–429

[112] York A R, Sulsky D, and Schreyer H L. The material point method for simulation of thin membranes. Int. J. Num. Meth. Engng., 1999, 44(10):1429–1456

[113] York A R, Sulsky D, and Schreyer H L. Fluid-membrane interaction based on the material point method. Int. J. Num. Meth. Engng., 2000, 48(6):901–924

[114] Bardenhagen S G, Brackbill J J, and Sulsky D. The material point method for granular materials. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 2000, 187(3-4):529–541

[115] Bardenhagen S G and et al. An improved contact algorithm for the material point method and application to stress propagation in granular material. Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2001, 2(4):509–522

[116] Tan H L and Nairn J A. Hierarchical, adaptive, material point method for dynamics energy release rate calulations. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 2002, 191(19-20):2095–2109

[117] Nairn J A. Material point method calculations with expicit cracks. Cmes-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2003, 4(6):649–663

[118] 马上，张雄，邱信明. 超高速碰撞问题的三维物质点法. 爆炸与冲击, 已录用

[119] 张雄，佘锦炎，马上. An explicit material point finite element method for hyper velocity impact. Int. J. Num. Meth. Engng., 2006, 66:689 - 706

[120] 胡平，卫教善. 冲压成形模具分析软件—kmas. 模具制造, 2004, 6:9–11

[121] Yoon S and Chen J S. Accelerated meshfree method for metal forming simulation. Finalist of 13th ROBERT. MELOSH MEDAL COMPETITION FOR THE BEST STUDENT PAPER ON FINITE ELEMENT ANALYSIS, 2001

[122] Lu H S, Cheng H S, and et al. Adaptive enrichment meshfree simulation and experiment on bucking and post-bucking analysis in sheet metal forming. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 2005, 194:2569–2590

[123] Kwon K C, Park S H, and et al. The least-squares meshfree method for elasto-plasticity and its application to metal forming analysis. Int. J. Num. Meth. Engrg, 2005, 64:751–788

[124] Xiong S W, Liu W K, and et al. Simulatoin of bulk metal forming processes using the reproducing kernel particle method. Computers and structures, 2005, 50:574–587

[125] 娄路亮，曾攀，方刚. 无网格方法及其在体积成形中的应用. 塑性工程学报, 2001, 8(3):3–7

[126] 崔青玲，李长生等. 模拟平板轧制的新方法—无网格伽辽金法. 东北大学学报（自然科学版）, 2005, 5:56–59

[127] 崔青玲，刘相华等. 无网格rkpm法及其在体积成型中的应用. 东北大学学报（自然科学版）, 2004, 9:41–44

[128] Allen. M. P and Tildesley. D. J. Computer Simulation of Liquids. 1987

[129] Livemore Software Technology Corporation. Ls-DYNA Theoretical Manual. 1987

[130] R J G and J H T. Evaluation of cylinder-impact test data for constitutive model constants. Jounal of Applied Physics, 1988, 64:3901–3910

致　　谢

本论文是在陆明万教授和张雄教授的精心指导下完成的。指导老师严谨求实的治学态度、开阔的视野、渊博的知识给我留下了深刻的印象，他们的言传身教使我终身受益。我诚挚感谢两位导师多年来不倦的教诲。

衷心感谢本研究室的刘岩、马上、邓宇、汪敏、王汉奎、张志烨、钱岳强以及曾杜鹃等同学，他们和我有过很多有益的讨论并给与了我很多帮助。

感谢我的家人及女友莫大的支持和鼓励!

本课题承蒙国家自然科学基金（No.10172052）的资助，特此致谢。

声　　明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签　名：_____日　期：_____

个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果

个人简历

1979 年 7 月 12 日出生于湖北省襄樊市，

1997 年 9 月考入清华大学工程力学系，2001年7月本科毕业获得工学学士学位。

2001 年 9 月免试进入清华大学航天航空学院硕博连读。

目前已正式发表的论文

[1] 潘小飞，张雄，陆明万. Meshless Galerkin least-square method. Computational Mechanics, 35(3): 182-189, 2005 [SCI收录]

[2] 潘小飞，KY Sze，张雄. An assessment of the meshless weighted least-squares method, Acta Mechanica Solida Sinica，17(3), 270-282, 2004 [SCI收录]

[3] 潘小飞，张雄，陆明万. Galerkin Collocation Meshless Method. Sixth World Congress on Computational Mechanics in conjunction with the Second Asain-Pacific Congress on Computational Mechanics, Sept. 5 - 10, 2004, Beijing, China.

[4] 潘小飞，张雄，陆明万. Meshless Galerkin Least Squares Method. 中国计算力学大会’2003论文集，2003

[5] 潘小飞，张雄，陆明万. 质点积分无单元伽辽金法及其在金属成型中的应用. 已录用

[6] 张雄，潘小飞，胡炜，陆明万. Meshless weighted least-square method. Proceedings of Fifth World Congress on Computational Mechanics, Vienna, Austria, July 7-12, 2002

[7] 张雄，胡炜，潘小飞，陆明万. 加权最小二乘无网格法. 力学学报，35(4):425-431,2003

[8] 张雄，潘小飞，刘岩，陆明万. 紧支试函数加权残值法及其应用（大会报告）. 南昌大学学报理科版，27（专辑）: 27-23，2003

[9] 张雄，胡炜，潘小飞，陆明万，加权最小二乘无网格法，中国计算力学大

会’2001论文集，333-338，广州，2001.