第 35 卷 第 1 期 力 学 进 展 Vol. 35 No. 1
2005 年 2 月 25 日 ADVANCES IN MECHANICS Feb. 25, 2005

扩展有限元法 (XFEM) 及其应用*

李录贤† 王铁军

西安交通大学工程力学系机械结构强度与振动国家重点实验室, 西安 710049

摘 要 扩展有限元法 (extended finite element method, XFEM) 是 1999 年提出的一种求解不连续力学问题的数值方法, 它继承了常规有限元法 (CFEM) 的所有优点, 在模拟界面、裂纹生长、复杂流体等不连续问题时特别有效, 短短几年间得到了快速发展与应用. XFEM 与 CFEM 的最根本区别在于, 它所使用的网格与结构内部的几何或物理界面无关, 从而克服了在诸如裂纹尖端等高应力和变形集中区进行高密度网格剖分所带来的困难, 模拟裂纹生长时也无需对网格进行重新剖分. 重点介绍 XFEM 的基本原理、实施步骤及应用实例等, 并进行必要的评述. 单位分解概念保证了 XFEM 的收敛, 基于此, XFEM 通过改进单元的形状函数使之包含问题不连续性的基本成分, 从而放松对网格密度的过分要求. 水平集法是 XFEM 中常用的确定内部界面位置和跟踪其生长的数值技术, 任何内部界面可用它的零水平集函数表示. 第 2 和第 3 节分别简要介绍单位分解法和水平集法; 第 4 节和第 5 节介绍 XFEM 的基本思想、详细实施步骤和若干应用实例, 同时修正了以往文献中的一些不妥之处; 最后, 初步展望了该领域尚需进一步研究的课题.

关键词 有限元法, 扩展有限元法, 单位分解法, 水平集法, 不连续问题, 裂纹 / 夹杂 / 孔洞

1 前 言

固体力学中存在两类典型的不连续问题, 一类是因材料特性突变引起的弱不连续问题, 这类问题以双材料问题和夹杂问题为代表, 其复杂性由物理界面处的应变不连续性引起; 另一类是因物体内部几何突变引起的强不连续问题, 这类问题以裂纹问题为代表, 其复杂性由几何界面处的位移不连续性和端部的奇异性引起. 物体内部物理界面的脱粘或起裂, 是上述两类问题的混合, 也属于这里所讨论的范围. 另外, 在复杂流体、复杂传热、物质微结构演化等复杂问题中, 也存在许多不连续力学问题.

数值方法, 如有限元、边界元、无单元法等, 一直是处理不连续问题的主要途径. 有限元法具有其它数值方法无可比拟的优点, 即适用于任意几何形状和边界条件、材料和几何非线性问题、各向异性问题、容易编程等, 因而成为数值分析裂纹等不连续问题的主要手段. 这方面的工作很多, 无法一一列举, 这里仅举例说明这方面的工作. Ortiz 等 [1] 及 Belytschko 等 [2] 通过使用多场变分原理, 用可以横贯有限单元的 "弱"(应变) 间断模拟剪切带. Dvorkin 等 [3] 通过修改虚功原理表达式考虑了 "强"(位移) 间断问题; Lotfi 和 Sheng[4] 将 Hu-Washizu 变分原理推广至具有内部间断的物体中; 通过考虑软化本构律和界面上的面力 - 位移关系, Simo 及其同事 [5,6] 提出了分析强间断问题的统一框架, 许多研究者 [7~12] 将该法应用到变形局部化分析中. Borja[13] 提出了分析强间断问题的标准 Galerkin 公式, 并证明它与假定改进应变逼近等价.

在强间断分析中, 位移包括常规部分及改进部分, 其中改进部分在横贯不连续界面时出现跳跃. 使用假定改进应变变分公式, 可以在单元层次上对改进自由度进行静力凝聚, 以获得单元切向刚度矩阵. Jirasek[14] 给出了这方面工作的全面评述并与其它嵌入式不连续方法进行了比较. 模拟断裂现象的另一个途径是 Xu 和 Needleman[15] 提出的内聚力模

收稿日期: 2004-04-26, 修回日期: 2004-11-01
* 国家自然科学基金 (10125212 和 10472090)、教育部跨世纪人才基金和重点科技项目的资助项目
† E-mail: luxianli@mail.xjtu.edu.cn

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

型，这已被用于模拟脆性材料的损伤问题[16]. 内聚力公式是一种唯象框架，材料的断裂特征体现在粘结表面的面力－位移关系中. 此方法在建模时使用了本征长度，并且不需要 K 主导型断裂准则，可以得到裂纹的生长路径.

常规有限元法 (CFEM) 采用连续函数作为形状(插值) 函数，要求在单元内部形状函数连续且材料性能不能跳跃，在处理像裂纹这样的强不连续 (位移不连续) 问题时，必须将裂纹面设置为单元的边、裂尖设置为单元的结点、在裂尖附近的高应力区需要令人难以接受的网格密度，同时在模拟裂纹生长时还需要对网格进行重新剖分，效率极低甚至无能为力. 在处理多裂纹问题时，其求解规模之大、网格剖分之难是不可想象的，使问题变得更加复杂. 处理夹杂问题时，要求单元的边必须位于夹杂与基体的界面处，即使对于网格自动化程度很高的二维问题这也不容易，更何况拓扑结构更复杂的三维问题. 为了克服细观力学分析中对复杂几何体网格的剖分问题，Hollister 和 Kikuchi[17] 提出了基于数字成像的有限元技术，使用与数字成像相同分辨率的均匀网格按像素一个一个识别单元，可以看出，这样得到的模型代价极高. Zohdi 等[18] 使用规则网格，认为组分间界面与单元边界无关，材料的不同在积分点层次上进行处理，Moes 等[19] 的数值实验表明，该技术在胞元上得到的等效参数具有合理的收敛性，但胞元上整体应力的收敛性很差. 另一种技术是使用 Voronoi 胞元模型[20]，单元中考虑了夹杂的作用，该技术中应力场和位移场都需要被离散. 1999 年以来，在有限元框架内发展起来的扩展有限元法[21,22]，以解决不连续问题为着眼点，对常规有限元法在求解裂纹问题时所遇到的困难提出了近乎完美的解决方案.

1999 年，以美国西北大学 Belytschko 教授为代表的研究组首先提出扩展有限元思想[21]，2000 年，他们正式使用扩展有限元法 (XFEM) 这一术语[22]. XFEM 是迄今为止求解不连续力学问题最有效的数值方法，它在标准有限元框架内研究问题，保留了 CFEM 的所有优点，但并不需要对结构内存在的几何或物理界面进行网格剖分. XFEM 与 CFEM 的最根本区别在于所使用的网格与结构内部的几何或物理界面无关，从而克服了在诸如裂纹尖端等高应力和变形集中区进行高密度网格剖分所带来的困难，当模拟裂纹扩展时也无需对网格进行重新剖分. 例如在处理裂纹问题时，XFEM 包括以下三方面内容[23]：第 1，不考虑结构的任何内部细节 (例如材料特性的变化和 / 或内部几何的跳跃)，按照结构的几何外形尺寸生成有限元网格；第 2，采用其它方法 (如水平集法) 确定裂纹的实际位置，跟踪裂纹的生长；第 3，借助于对所研究问题解的已有知识 (不必知道封闭形式解)，改进影响区内单元的形状函数，以反映裂纹的存在和生长. 由于改进的形状函数在单元内部具有“单位分解”特性，扩展有限单元的刚度矩阵具有与常规有限单元一样的优点，即对称、稀疏且带状.

可见，单位分解概念保证了 XFEM 的收敛，基于此，XFEM 的逼近空间中增加了与问题相关的特定函数；水平集法是 XFEM 中确定内部界面位置和跟踪其生长的常用数值技术，任何内部界面可用它的零水平集函数表示. 本文拟在第 2 和第 3 节对单位分解法和水平集法分别进行简要介绍；在第 4 和第 5 节重点介绍 XFEM 的基本思想、实施步骤和若干应用实例，并对文献中的不妥之处进行了修正；最后，初步展望该领域尚需进一步研究的课题.

2 单位分解法 (PUM)[24~26]

2.1 单位分解法的基本概念

1996 年 Melenk 和 Babuska[24] 及 Duarte 和 Oden[25] 先后提出了单位分解法 (PUM)，其基本思想是任意函数 $\psi(x)$ 都可以用域内一组局部函数 $N_I(x)\psi(x)$ 表示，即

$$\psi(x)=\sum_I[N_I(x)\psi(x)] \tag{1}$$

其中，$N_I(x)$ 为有限单元形状函数，它形成一个单位分解

$$\sum_I N_I(x)=1 \tag{2}$$

基于此，可以对有限元形状函数根据需要进行改进.

1997 年，Babuska 和 Melenk[26] 证明了 PUM 的收敛性并将之应用于求解高波数 Helmholtz 方程. PUM 容许在相容的试探空间中增加用户定义的局部特性，因而对 CFEM 无法求得或求解代价太大的问题，可体现出 PUM 的独特优势，比如对不确定系数方程 (如在模拟复合材料、细观结构材料及刚化等问题时) 和高波数 Helmholtz 方程等的求解. PUM 从变分方程出发，改进问题所涉及的试探 (形状函数) 空间，其特征为：(1) PUM 容许在试探空间中包含对微分方程的先验知识；(2) 利用 PUM 能很容易地构造出任何期望的试探空间，因而可以获得适用于高

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

阶微分方程变分形式的试探空间, 如不同的板壳模型等.

对于试探空间, 判断其性能的标准是能否很好地局部逼近精确解. 在 CFEM 中, 局部逼近是通过 (映射) 多项式实现的, 其精度依赖于多项式的局部逼近特性, 对于不确定系数方程或高度振荡解问题, 多项式的逼近特性很差. Babuska 等 [27] 研究表明, 恰当的非多项式试探函数能够获得更佳的收敛性, 而依赖于多项式逼近的 CFEM 性能较差. 对像 Helmholtz 方程这类高度振荡函数的逼近也有类似结论, Melenk[28] 研究表明, 用平面波逼近具有相同振荡行为的解更有效. 另一个使用非多项式逼近空间的重要例子是无界域问题, 如 Laplace 方程和 Helmholtz 方程, 在无限远处对已知解进行展开, 有望建立基于这些展开的试探空间, PUM 正提供了这种理论框架. 当然, 还可以利用无限元方法 [29~32], 求解无界域上 Helmholtz 方程.

下面简要介绍 PUM 的基本原理, 详细可参见文献 [26] 中的第 3 节. 给定重叠分片 $\{\Omega_i\}$, 它构成区域 D 的覆盖. 令 $\{\varphi_i\}$ 为定义在覆盖上的单位分解. 在每一片上, 用函数空间 V_i 反映局部逼近, 那么, 总体试探空间 V 由 $V = \Sigma_i \varphi_i V_i$ 给出. 空间 V_i 上的局部逼近既可通过分片变小 (h 型) 实现, 也可通过 V_i 的良好特性 (p 型) 实现. 文献 [26] 中的定理 1 指出, 总体空间 V 既继承了局部空间 V_i 的逼近特性, 也继承了单位分解 (以及空间 V_i) 的光滑性, 总体空间 V 可通过恰当选取单位分解使之协调, 并通过使用足够光滑的单位分解很容易地构造出更光滑的试探空间, 对板壳模型这一点是必须的.

在 PUM 实施过程中需要注意三方面问题:

(1) PUM 中形状函数的积分.

(2) 寻求 PUM 空间的基, 控制 PUM 所产生的刚度矩阵的条件数.

(3) 强制边界条件的实现.

以上三点在无网格法 (参看 2.2.3 节) 中也必须注意.

2.2 PUM 与其他方法的关系

2.2.1 经典 h, p 和 h-p 方法

有限元方法的性能与试探空间对解局部描述的优劣息息相关, 这就是 2.1 节中 PUM 第 1 个特征的内涵. 经典 h, p 和 h-p 方法中的试探空间是分片多项式空间, 在横穿单元间边界时是连续的, 这些经典试探空间逼近特性的重要特点是在每个单元上局部逼近通过多项式实现, 而且这些局部逼近满足协调性条件. 在 h 型中, 多项式次数 p 是固定的 (一般 $p \leqq 2$), 逼近通过减小网格尺寸予以实现, 恰当插值能产生一个满足连续性条件的良好逼近; 在 p 型中, 局部逼近通过增加多项式次数实现.

如果 PUM 中局部逼近空间 V_i 选作多项式空间, PUM 就可看作是经典 h 型和 p 型的推广, 以这种方式构造的 PUM 空间在逼近特性上与 CFEM 空间非常相似. 网格设计和每个单元上多项式的次数对 h-p 有限元方法性能影响很大, 但它们取决于对解的局部行为的掌握. 例如, 对于分片椭圆问题, 解局部行为的良好描述可根据所谓的 "可数范数空间" 获得, 借助于对解局部行为的准确了解, 控制针对奇异性多项式次数分布的网格重构, 可以得到指数型收敛率. 关于 h-p 技术最新发展可参考文献 [33].

2.2.2 数据拟合

数据拟合涉及到逼近问题, 所以, 其思路常常被用来设计试探空间 [34,35]. 一般来说, 数据拟合算法将产生一个形如 $F(x) = \Sigma_i f_i \Phi_i(x)$ 的函数, 其中 f_i 为数据值 (即函数值、导数值等), Φ_i 为形状函数.

先介绍所谓 "反比距离加权算法", 它由 Shephard 法 [36] 发展而来. 在经典 Shephard 法中, 离散数据 (x_i, f_i) 由下列函数插值得到, 即

$$F(x) = \frac{\sum_i f_i W_i(x)}{\sum_i W_i(x)} \tag{3}$$

其中, 权函数 W_i 值取作 x 与 x_i 之间距离的衰减函数. 形状函数为

$$\Phi_i(x) = \frac{W_i(x)}{\sum_j W_j} \tag{4}$$

应该注意的是, 这些函数形成了一个单位分解, 而且插值函数 F 可理解为 $\int f(y)\Phi_x(y)\mathrm{d}y$ 积分的恰当逼近, 其中 $\Phi_x(y)$ 为点 x 处 Delta 函数的逼近. 经典 Shephard 法的一种推广 [37] 是在每一个固定点 x 寻求插值函数 F, 即

$$F(x) = \widetilde{F}(x, a_0, \ldots, a_p) \tag{5}$$

其中参数 $a_0, \ldots, a_p$ 通过下列函数在每一个固定点 x 处取极值求得 (因此, 严格地讲, 系数 $a_0, \ldots, a_p$ 依赖于 x)

$$\sum_i [f_i - \widetilde{F}(x_i, a_0, \ldots, a_p)]^2 W_i(x) \tag{6}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

如果函数 $\tilde{F}$ 是 x 的多项式，且以多项式的系数为参数，那么，该法就称为“移动二乘法”[38]. 如果实现了极小化，整体逼近 F 就取下列形式

$$F(x)=\sum_i \tilde{\Phi}_i(x)f_i \tag{7}$$

且函数 $\tilde{\Phi}_i$ 就是所期望的形状函数.

注意到在计算每一点形状函数 $\tilde{\Phi}_i$ 时，都涉及 $p+1$ 个未知量的极小值问题，因而结点 x_i 的相对位置必须满足一定条件以保证极小值的唯一性. 该法实际上是 Shephard 法的推广，如果特殊选取 $\tilde{F}(x,a_0)=a_0$，它将退化成经典 Shephard 法.

借助于函数 Φ_i 的单位分解可得到经典 Shephard 法的另一种推广. 如果函数值及其导数在结点 x_i 处给定，那么，可以选取函数

$$F(x)=\sum_i \Phi_i(x)L_i(x) \tag{8}$$

其中，L_i 为结点 x_i 处的 Taylor 展开. 事实上，任何局部逼近都可以利用这一思想，这也是 PUM 的基本出发点.

除上述“反比距离加权法”外，还有很多用于数据拟合的方法. 例如，经典有限元形状函数，即分片多项式插值；所谓的径向基函数法（详见文献 [35]），也被称作多重二次曲面技术，这些径向基函数方法由于原有形式是非局部的，一般不能获得稀疏刚度矩阵，但最近的研究构造出了具有紧支集的径向基函数[35]，因而可以得到稀疏刚度矩阵.

数据拟合中的形状函数在求解微分方程时适用于不同的变分公式，但是，这些形状函数所要求的某些特征，在 Galerkin 法中并不重要. 例如，为了在可视化应用中产生良好效果，许多数据拟合的形状函数被设计成光滑的（C^1 或 C^2 的）. 然而，Galerkin 法中试探函数的光滑性由所选取的变分形式决定，限制条件少于数据拟合.

数据拟合的目的是插值一个给定数据组，但在 Galerkin 法中，形状函数具有良好逼近特性就足够了，它关心的是逼近而不是插值，因此，在设计数据拟合形状函数时很重要的稳定性问题，在 Galerkin 法形状函数的设计中就不那么突出.

2.2.3 无网格法

无网格法的基本思想是使用数据拟合中的形状函数作为变分公式中的试探函数，更准确地说，给定结点 x_i 的分布，调用拟合算法产生形状函数 Φ_i，它们将依次用做 Galerkin 法或配点法中的试探函数，这是扩散单元法 (DEM)[39]、无网格 Galerkin 法 (EFGM)[40~42]、hp 云团法 (hp clouds)[43]、多重二次曲面法 (Multiquadrics)[44,45]、光滑粒子法 (SPH)[46]、再生核粒子法 (RKPM)[47~49] 和广义有限差分法 (GFDM)[50] 等无网格法的主要思想. 文献 [51] 对这些无网格方法做了详细比较.

在 SPH 或 RKPM 中，试探函数通过一个“插值算法”得到. 借助于集中在点 x 处的 Delta 函数 w_x，积分 $f(x)\approx\int f(y)w_x(y)\mathrm{d}y$ 产生形如 $\sum_i f(y_i)\tilde{w}_i(x)$ 的逼近，则函数 $\tilde{w}_i$ 可做为配点法或 Galerkin 法的形状函数. 当然，函数 w_x 的选取有很大的自由性，RKPM 正是利用这种自由性，通过添加额外条件得到次数固定的多项式.

使用式 (6)，取 $\tilde{F}$ 为 x 的多项式，将导致所谓移动最小二乘算法，DEM 和 EFGM 采用的就是该拟合算法产生的形状函数. PUM 可以看作是式 (8) 思想的推广，但容许用任何更好的局部逼近 L_i 替代 Taylor 多项式. 如果局部逼近采用多项式，hp 云团法就可看作是 EFGM 和 PUM 的混合，实际上，hp 云团法的最简单形式就是这样一种 Galerkin 法：形状函数为式 (8)、L_i 取 p 次多项式.

总的来说，上述无网格法的形状函数来自不同的局部多项式拟合，因而，这些方法中试探空间的逼近特性实质上由多项式的逼近特性决定. 如果在 PUM 中选取多项式作为局部逼近空间，这些无网格法与 PUM 就非常相似，Oden 和 Duarte[43] 的计算表明，在这种情形下，PUM 实际上比 EFGM 更有效. 从逼近观点看，这些无网格法的性能依赖于多项式的局部逼近特性，可以预料，如果多项式不能很好逼近拟求的解，这些方法的性能就很差，这也正是 CFEM 性能低劣的原因. 对照此，PUM 在局部逼近的选取上具有更大的灵活性，并容许根据所考虑的问题使用特定的局部逼近函数，因而，利用 PUM 有望成功解决 CFEM 与无网格方法不能很好处理的问题.

3 水平集法 (LSM)[52~55]

水平集法 (LSM) 是一种跟踪界面移动的数值技术，它将界面的变化表示成比界面高一维的水平集曲线. 例如，R^2 中移动界面 $\Gamma(t)\subset R^2$ 可表示成

$$\Gamma(t)=\{\boldsymbol{x}\in R^2:\phi(\boldsymbol{x},t)=0\} \tag{9}$$

其中函数 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ 称为水平集函数.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

3.1 LSM 对裂纹的描述

水平集函数常取下列符号距离函数，即

$$\varphi(\boldsymbol{x},t)=\pm\min_{\boldsymbol{x}_\Gamma\in\Gamma(t)}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_\Gamma\| \tag{10}$$

如果 $\boldsymbol{x}$ 位于 $\Gamma(t)$ 所定义的裂纹上方 (参见图 1)，那么式 (10) 前面的符号就取正，否则取负.

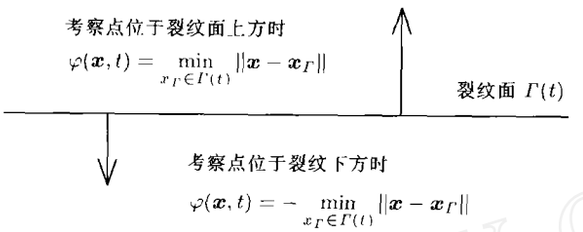


图 1 裂纹面及考察点处的水平集函数

裂纹生长可由 φ 的演化方程得到 [52]

$$\varphi_t+F\|\nabla\varphi\|=0 \tag{11a}$$

$$\varphi(\boldsymbol{x},0)\text{ 给定} \tag{11b}$$

其中 $F(\boldsymbol{x},t)$ 是界面上点 $\boldsymbol{x}\in\Gamma(t)$ 在界面外法线方向的速度. 该法的优点是可以在固定的 Euler 网格上进行计算，能很自然地处理界面拓扑变化，易用于求解高维问题.

3.2 LSM 对孔洞和夹杂的描述 [56]

当界面静止时，仅利用水平集理论就可表示界面. 对于圆形孔洞 (参见图 2)

$$\varphi(\boldsymbol{x},0)=\min_{i=1,2,\cdots,n_c}\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_c^i\|-r_c^i\} \tag{12}$$

其中，n_c 为圆形孔洞数目，$\boldsymbol{x}_c^i$ 和 r_c^i 分别为第 i 个孔洞的中心和半径，Ω_c^i 为第 i 个孔洞所占区域.

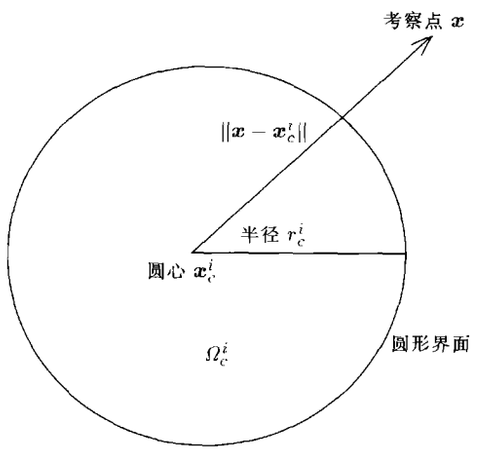


图 2 第 i 个圆形界面与考察点处的水平集函数

对于椭圆形孔洞 (参见图 3)，若半长轴和半短轴分别为 a 和 b，两个焦点坐标分别为 $\boldsymbol{e}_1=(e_{1x},e_{1y})$ 和 $\boldsymbol{e}_2=(e_{2x},e_{2y})$，则椭圆孔洞的水平集函数由笔者给出为

$$\varphi(\boldsymbol{x},0)=\min_{i=1,2,\cdots,n_e}\{(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_1^i\|+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_2^i\|)/2-a^i\} \tag{13}$$

其中，n_e 为椭圆形孔洞数目，$\boldsymbol{e}_1^i$，$\boldsymbol{e}_2^i$ 和 a^i 分别为第 i 个椭圆的两个焦点坐标和半长轴，Ω_e^i 为第 i 个椭圆所占区域.

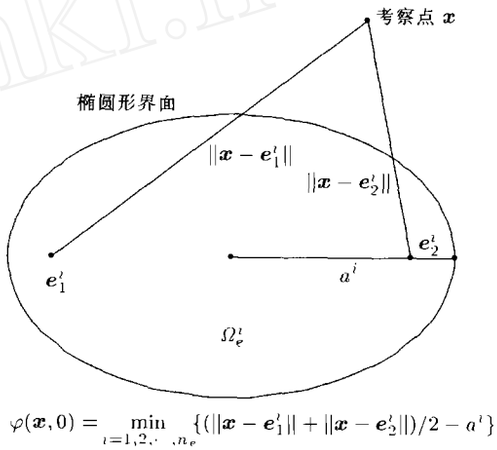


图 3 第 i 个椭圆形界面与考察点处的水平集函数

对于一般多边形孔洞 (参见图 4)，它的界面 Γ_p ($\Gamma_p=\bigcup_{i=1}^p I_i$) 不能用一个方程来描述，而由 p 段 $I_1=[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2]$，$I_2=[\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3]$，…，$I_p=[\boldsymbol{x}_p,\boldsymbol{x}_1]$ 组成. 多边形界面的水平集函数由下式给出

$$\varphi(\boldsymbol{x},0)=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\min}\|\operatorname{sgn}((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\min})\cdot\boldsymbol{n}_{\min}) \tag{14a}$$

$$\operatorname{sgn}(\zeta)=\begin{cases}1 & \text{if } \zeta\geq 0\\ -1 & \text{if } \zeta<0\end{cases} \tag{14b}$$

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\min}\|=\min_{i=1,2,\cdots,p}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i\| \tag{14c}$$

其中，$\boldsymbol{x}_{\min}$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 在界面 Γ_p 上的正交投影，若 $\boldsymbol{x}$ 的投影不在 Γ_p 上，则 $\boldsymbol{x}_{\min}$ 取 Γ_p 上距 $\boldsymbol{x}$ 最近的顶点；$\boldsymbol{n}_{\min}$ 为 $\boldsymbol{x}_{\min}$ 处界面的外法向，如果 $\boldsymbol{x}_{\min}$ 处法向不能唯一定义，那么当 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\min})$ 落在法线锥内时符号函数为正，否则为负.

对于由参数曲线形式给出的更一般界面，符号距离函数可通过快速推进法 (FMM)[53] 计算得到，即求解下列方程

$$\|\nabla\varphi\|=\frac{1}{G(\boldsymbol{x})} \tag{15}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中 $G: R^2 \to R$ 给定. 如果在式 (15) 中取 $G(\boldsymbol{x}) = 1$, 就可以得到界面的符号距离函数. 该法可用于直线型网格 [54] 和一般的三角形网格 [55].

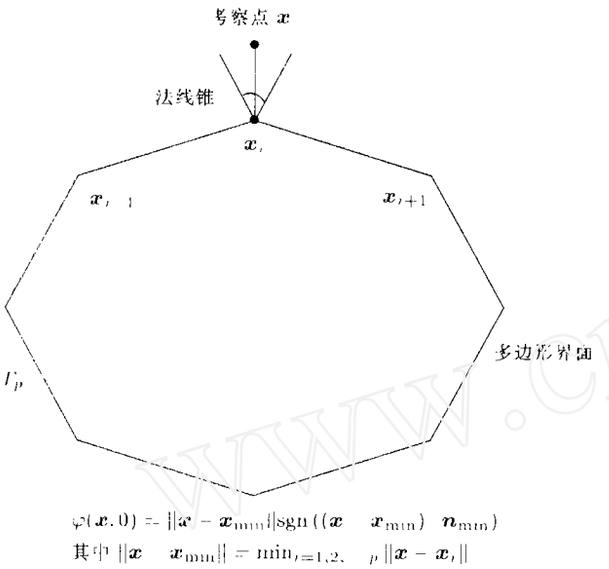


图 4 多边形界面与考察点处的水平集函数

以上两节简要介绍了与 XFEM 直接相关的单位分解法 (PUM) 和水平集法 (LSM), 下面重点介绍 XFEM 的基本思想及应用.

4 扩展有限元法 (XFEM) 的基本思想和实施步骤

在有限元法中, 诸如裂纹、孔洞及夹杂等缺陷和异性体的存在必须在网格生成过程中予以考虑, 即单元的边必须与这些几何体协调. 扩展有限元法 (XFEM) 就是针对这些不连续给网格剖分带来的麻烦, 它不需要有限元网格与内边界之间保持协调. XFEM 将建模分成两个部分: (1) 在忽略内边界情况下对区域进行网格剖分; (2) 在单元形状函数中增加与内边界有关的附加函数, 改进有限元逼近空间.

对于静态界面的几何描述可采用上节介绍的零水平集曲线 $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}, 0) = 0$ 表示. 借助于 $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$, 先将物理界面描述成一个离散的函数表达式, 再采用固定点集 $\boldsymbol{x}_I$ (结点) 上的几何自由度得到 φ, 从而确定界面位置. 每个有限元结点与一个水平集函数的几何自由度相关, 因而, 区域内任一点 $\boldsymbol{x}$ 处的 φ 可用有限元形状函数插值计算, 即

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_I N_I(\boldsymbol{x})\varphi_I \tag{16}$$

其中求和对考察点 $\boldsymbol{x}$ 所在单元的所有结点进行, $N_I(\boldsymbol{x})$ 是前述提及的标准有限元形状函数, φ_I 为水平集函数的结点值, 即结点几何自由度, 可由上节讲到的水平集函数计算得到. 根据 (16) 式, 对双线性四边形单元, 可用分段线性函数近似表示内边界; 在线性三角形单元内, 则用线性函数近似表示.

下面分别以孔洞、夹杂 (做为弱不连续问题的代表) 和裂纹 (做为强不连续问题的代表) 为例, 介绍 XFEM 的基本原理和实施步骤, 这两类问题在具体处理细节上会有所不同.

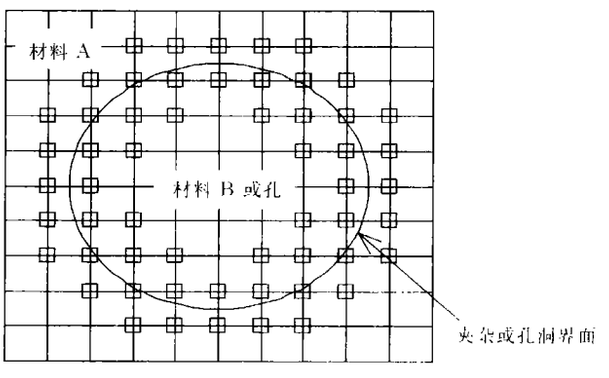
4.1 孔洞和夹杂问题 [56]

考察区域 $\Omega \subset R^2$, 它被分割成有限个单元, 共有 m 个结点, $K = (n_1, n_2, \cdots, n_m)$ 表示这些结点的集合, 并设 $\Omega g \subset \Omega$ 为孔洞或夹杂所占区域. 依照 PUM, XFEM 的位移逼近为下列形式

$$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I \atop n_I \in K} N_I(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_I + \sum_{J \atop n_J \in K^g} N_J(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}_J \qquad (\boldsymbol{u}_I, \boldsymbol{a}_J \in R^2) \tag{17}$$

结点集 K^g 定义为 (参见图 5)

$$K^g = \{n_J : n_J \in K, \omega_J \cap \partial\Omega \neq \emptyset\} \tag{18}$$



需要增加改进自由度的结点
$K^g = \{n_J : n_J \in K, \omega_J \cap \partial\Omega \neq \emptyset\}$

图 5 夹杂或孔洞存在时需增加改进自由度的结点集 K^g

其中, $\omega_J = \mathrm{supp}(n_J)$ 为结点形状函数 $\varphi_J(\boldsymbol{x})$ 的支集, 即以 n_J 为顶点的所有单元的并集. $\boldsymbol{a}_J$ 为结点附加自由度, $\psi(\boldsymbol{x})$ 是与界面水平集函数有关的改进函数, 对于孔洞或夹杂问题, 可以取

$$\psi(\varphi) = |\varphi| \tag{19}$$

$\boldsymbol{a}_J$ 目前尚无明确的物理含义, 乘积 $\psi(\varphi)\boldsymbol{a}_J$ 对 $\boldsymbol{u}_I$ 产生影响, 因而 $\psi(\varphi)$ 的选取有一定的自由. $\psi(\varphi)$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

在 $\varphi = 0$ (即界面) 处导数不连续，存在弱不连续性. 应该注意到, 式 (19) 表示的改进函数将导致改进单元与常规单元之间在公共边上位移不连续，Moes 等 [19] 最近提出的协调型改进函数克服了这一不足，关于这个问题尚有进一步研究和发展的余地.

4.2 裂纹问题 [23]

借助于单位分解概念，XFEM 通过改进经典有限元的位移逼近，考虑了裂纹的存在 [24], 裂纹面和裂尖所在单元的结点将增加附加自由度, 在这些单元上的积分则采用分解算法进行. 下面结合裂纹问题，分别介绍改进结点的选取准则、改进函数的确定、数值积分所需的单元分解.

4.2.1 改进结点的选取

符合单位分解概念的向量函数 $\boldsymbol{u}$ 的逼近具有下列形式 [24]

$$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{N} N_I(\boldsymbol{x}) \left(\sum_{\alpha=1}^{M} \psi_\alpha(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{a}_I^\alpha \right) \tag{20}$$

其中，N_I 为有限元形状函数，ψ_α 为改进函数. 根据 (20) 式，有限元空间 ($\psi_1 \equiv 1$; 其它 $\psi_\alpha \equiv 0$) 将是改进空间的子空间.

设二维 Cartesian 坐标用 $\boldsymbol{x} \equiv (x, y)$ 表示，考虑包含一面力为零的内部裂纹的物体 $\Omega \subset R^2$(对于面力不为零的粘着裂纹, 该文的推导需稍作修改). 对于单个裂纹，令 Γ_c 为裂纹表面，Λ_c 为裂尖，裂纹轮廓为 $\bar{\Gamma}_c = \Gamma_c \cup \Lambda_c$.

对于二维裂纹 (参见图 6), 改进的位移逼近 (试探函数和检验函数) 可写成 [21]

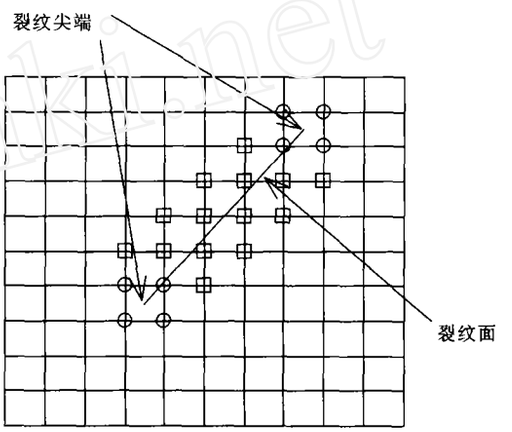
$$\boldsymbol{u}^h(x) = \sum_{I \in K} N_I(\boldsymbol{x}) \left[\boldsymbol{u}_I + \underbrace{H(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{a}_I}_{I \in K_\Gamma} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{4} \psi_\alpha(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{b}_I^\alpha}_{I \in K_\Lambda} \right] \tag{21}$$

其中 $\boldsymbol{u}_I$ 是结点位移向量的连续部分 (即与 CFEM 相同的部分), $\boldsymbol{a}_I$ 是与 Heaviside(强不连续) 函数相关的结点改进自由度，$\boldsymbol{b}_I^\alpha$ 是与弹性渐近裂尖函数有关的结点改进自由度. 在上述方程中，K 是网格中所有结点的集合，K_Γ 是被裂纹面 Γ_c 切割的单元内结点的集合，K_Λ 是裂尖 Λ_c 所在单元内结点的集合，其数学表达式为

$$K_\Lambda = \{ n_k : n_k \in K, \bar{\omega}_k \cap \Lambda_c \neq \emptyset \} \tag{22a}$$

$$K_\Gamma = \{ n_J : n_J \in K, \bar{\omega}_J \cap \Gamma_c \neq \emptyset, n_J \notin K_\Lambda \} \tag{22b}$$

且 $K_\Gamma \cap K_\Lambda = \emptyset$, 也就是说，一个结点不能同时属于这两个集合，否则优先属于 K_Λ. 对于 K_Γ 中的任意结点，形函数支集被裂纹完全分割成不相交的两块 (否则就存在裂尖，而不属于 K_Γ), 对于其中的某结点 n_I, 如果两块中其中之一比另一块小很多，那么，所采用的 Heaviside 函数在整个支集上几乎是一个常数，这将导致刚度矩阵的病态 [22], 对于这一情形，将从 K_Λ 中去掉结点 n_I [57].



○ 属于 K_Λ 的结点 (裂纹尖端所在单元)
□ 属于 K_Γ 的结点 (仅裂纹面所在单元)

$K_\Lambda = \{ n_k : n_k \in K, \bar{\omega}_k \cap \Lambda_c \neq \emptyset \}$
$K_\Gamma = \{ n_J : n_J \in K, \bar{\omega}_J \cap \Gamma_c \neq \emptyset,\ n_J \notin K_\Lambda \}$

图 6 裂纹存在时需增加改进自由度的结点集 K_Λ 和 K_Γ

4.2.2 改进函数

对裂纹问题所涉及的两个改进函数描述如下:

广义 Heaviside 函数 $H(\boldsymbol{x})$: 对于裂纹表面 (Γ_c 为改进域), 采用广义 Heaviside 函数 $H(\boldsymbol{x})$, 参考 (21) 式予以模拟. 在裂纹的上方 $H(\boldsymbol{x})$ 取 1, 在裂纹的下方 $H(\boldsymbol{x})$ 取 -1 [21], 即

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{如 } (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \cdot \boldsymbol{n} \geq 0 \\ -1, & \text{其他} \end{cases} \tag{23}$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 是所考察的点，$\boldsymbol{x}^*$ 为离 $\boldsymbol{x}$ 最近的裂纹面上的点，且 $\boldsymbol{n}$ 是 $\boldsymbol{x}^*$ 处裂纹的单位外法向矢量.

裂尖函数 $\psi_\alpha(\boldsymbol{x})$: 为了模拟裂纹尖端，改善断裂计算中裂尖场的精度, 裂尖函数应包含二维渐近裂尖位移场的径向和环向性态. 引入裂尖函数主要有两个目的:

(1) 如果裂纹在某个单元内部中止，那么，利用 Heaviside 函数改进裂尖单元将不准确，因为这样做，裂尖就被模拟成好像延伸到了单元的边上. 裂尖函数就是用来保证裂纹精确地中止在裂尖位置.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(2) 使用线弹性（或两种材料）渐近裂尖场作为改进函数是恰当的，一方面由于它具有正确的裂尖性态，另一方面它的使用可在相对粗糙的二维有限元网格[21,22,58~60]或三维网格上获得较好的精度.

对各向同性弹性体，裂尖函数为[61]

$$[\Phi_\alpha(\boldsymbol{x}),\alpha=1\sim 4]=\sqrt{r}\left[\sin\frac{\theta}{2},\cos\frac{\theta}{2},\sin\theta\sin\frac{\theta}{2},\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\right] \tag{24}$$

其中，r 和 θ 为局部裂尖场坐标系统中的极坐标. 式(24)的特点是右端第一个函数在横穿裂纹时不连续.

裂尖函数并不局限于各向同性介质中的裂纹. 考察双材料介质含有一个垂直于界面的裂纹，裂纹中止在界面上，许多研究者[62~65]已对该问题的近尖渐近场进行了研究，两种材料间的弹性不匹配可用 Dundurs 参数 α 和 β 来描述[66]

$$\alpha=\frac{\mu_1(k_2+1)-\mu_2(k_1+1)}{\mu_1(k_2+1)+\mu_2(k_1+1)},\qquad \beta=\frac{\mu_1(k_2-1)-\mu_2(k_1-1)}{\mu_1(k_2-1)+\mu_2(k_1-1)} \tag{25a}$$

$$k_i=\begin{cases}\dfrac{3-\nu_i}{1+\nu_i} & \text{平面应力}\\[2ex] 3-4\nu_i & \text{平面应变}\end{cases} \tag{25b}$$

其中，μ_i 和 ν_i 分别为材料 i ($i=1,2$) 的剪切模量和泊松比.

这种双材料平面应变裂纹尖端的渐近位移场为[65]

$$u_i(r,\theta)=r^{1-\lambda}\{a_i\sin\lambda\theta+b_i\cos\lambda\theta+c_i\sin(\lambda-2)\theta+d_i\cos(\lambda-2)\theta\} \tag{26}$$

其中，λ ($0<\lambda<1$) 是应力奇异性指数，它是 Dundurs 参数的函数，由下列超越方程的根给出[63]

$$\cos(\lambda\pi)-2\frac{\alpha-\beta}{1-\beta}(1-\lambda)^2+\frac{\alpha-\beta^2}{1-\beta^2}=0 \tag{27}$$

λ 随 α,β 的变化已在文[66]中列表给出. 对于匹配情形 ($\alpha=\beta=0$)，即均匀线性弹性材料，应力强度退化为经典 $1/\sqrt{r}$ 应力奇异性 ($\lambda=1/2$). 当材料 2 比材料 1 坚硬时 ($\alpha<0$)，奇异性较弱 ($\lambda<1/2$)；如果材料 2 比材料 1 柔软时 ($\alpha>0$)，奇异性较强 ($\lambda>1/2$).

对双材料裂纹问题，裂尖改进函数为[57,59]

$$[\psi_\alpha(x),\alpha=1\sim 4]=r^{1-\lambda}[\sin\lambda\theta,\cos\lambda\theta,\sin(\lambda-2)\theta,\cos(\lambda-2)\theta] \tag{28}$$

它可以展开成式(26)表示的渐近裂尖位移场，其中第 1 个和第 3 个函数在横穿裂纹 ($\theta=\pm\pi$) 时不连续.

笔者认为，式(28)表示的空间可以用下述基代替

$$[\psi_\alpha(x),\alpha=1\sim 4]=r^{1-\lambda}\{\sin\lambda\theta,\cos\lambda\theta,\sin\theta\sin[(1-\lambda)\theta],\sin\theta\cos[(1-\lambda)\theta]\} \tag{28'}$$

这样展开的空间，仅第 1 个函数在横穿裂纹 ($\theta=\pm\pi$) 时不连续，第 2、第 3、第 4 个函数在整个域内都是连续的，且当 $\lambda=1/2$ 时式(28′)即退化成式(24).

4.2.3 单元分解与网格重构

如果裂纹与单元相交，单元将被子划分成三角形（以二维为例），使子单元的边与裂纹几何重合，以提高单元的积分精度. 本节重点讨论这一点，因为具有的错误概念认为"这样的过程是不必要的；即使真正有必要，本质上也是进行了网格重构". 下面详细阐述单元分解和网格重构这两个议题.

对边值问题，微分形式的控制方程乘以检验函数 $\delta u\in H_0^1(\Omega)$ 积分后得到

$$\int_\Omega(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Omega+\int_\Omega\boldsymbol{b}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Omega=0 \tag{29}$$

其中 $\boldsymbol{b}$ 是单位体积力，$\boldsymbol{\sigma}$ 是 Cauchy 应力，δ 是一阶变分算子，Ω 为不包含裂纹的开集. 上述方程经分部积分后被改写成

$$\int_\Omega\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Omega-\int_\Omega\boldsymbol{\sigma}:(\nabla\delta\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Omega+\int_\Omega\boldsymbol{b}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Omega=0 \tag{30}$$

在 Ω 内使用散度定理并考虑 $\boldsymbol{\sigma}$ 的对称性，我们有

$$\int_{\Gamma_t\cup\Gamma_u}t\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma^+\cup\Gamma^-}\boldsymbol{t}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Gamma-\int_\Omega\boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}\Omega+\int_\Omega\boldsymbol{b}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Omega=0 \tag{31}$$

其中，$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{u}_{[i}$ 表示位移梯度（小应变张量）的对称部分. 由于在 Γ_t 上 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}=\bar{\boldsymbol{t}}$（给定面力），在 $\Gamma^\pm$ 上 $\boldsymbol{t}=0$（无面力裂纹面），在强制边界 Γ_u 上检验函数为零，进一步得到连续问题的弱形式（虚功原理）为

$$\int_\Omega\boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}\Omega=\int_{\Gamma_t}\boldsymbol{t}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Gamma+$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\int_\Omega \boldsymbol{b}\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Omega,\quad \forall\delta u\in H_0^1(\Omega) \tag{32}$$

$H_0^1(\Omega)$ 是具有导数平方可积并在强制边界上为零的 Sobolev 函数空间. 上述推导中, 使用了散度定理, 它不容许 $\boldsymbol{u}_i$ 在积分区域 (单元上) 出现不连续性和奇异性, 因而裂纹表面必须是积分域的边界. 换句话说, 在有限元 (离散) 问题弱表达式中, 区域 Ω 必须被分成不重叠的子域 (单元 Ω_e), 且这些子域必须满足与连续问题相同的协调条件, 才能保证边界问题的强形式 (微分形式) 与弱形式 (积分形式) 之间等价.

这样, 我们可以得到结论, 离散弱形式需要单元边与裂纹几何一致, 如果这一必要条件没有满足, 那么, 强形式与弱形式间的等价性就会丧失. 忽略这一事实, 而对被裂纹分割的单元不进行分解, 那么会带来数值上的误差、甚至错误. 对于裂纹的模拟, XFEM 用不连续 Heaviside 函数 $H(\boldsymbol{x})$ 和近尖渐近场 $\psi_\alpha(\boldsymbol{x})$ 对 CFEM 进行了改进, (21) 式提供了 XFEM 中位移逼近的一般形式, (23) 和 (24) 式给出了各向同性介质的改进函数. 从 (32) 式可知, 在离散逼近的双线性形式中, 被积函数中将包含基函数导数的乘积, 改进基函数的导数在横穿裂纹时不连续, 因此, 对这些单元若不进行子剖分, 就会涉及到不连续函数的积分. 众所周知, 单纯型上多维数值积分要求奇异性和不连续性位于积分域的边上、奇异性点位于单纯型的顶点, 如果单纯型内部出现不连续性, 使用 Gauss 求积法则得到的积分很不精确. 为了说明这一点, 考察定义在 $\Omega=(-1/2,1)$ 上的不连续 (阶跃) 函数

$$f_1(x)=\begin{cases}-0.5 & -0.5\le x\le 0\\ 1 & 0<x\le 1\end{cases} \tag{33a}$$

和分片连续函数

$$f_2(x)=\begin{cases}0 & -0.5\le x\le 0\\ x & 0<x\le 1\end{cases} \tag{33b}$$

定义积分 $I(f)$ 为

$$I(f)=\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x \tag{34}$$

并考虑 Gauss 求积公式 $Q[f]$ 为

$$I[f]\cong Q[f]=\wp\sum_{k=1}^{n_g}w_k f(\zeta_k) \tag{35}$$

其中 $x=x(\zeta)$ 是用 $\zeta\in(-1,1)$ 做参考坐标的线性映射, f 分别取 $f_1(x)$ 或 $f_2(x)$. 此外, Jacobian $\wp=\mathrm{d}x/\mathrm{d}\zeta=3/4$, w_k 和 ζ_k 分别为 n_g 阶 Gauss 积分法则的权值及 Gauss 点的坐标. 对于阶跃函数积分精确值为 $I[f]=3/4$, 对于分片的线性函数积分精确值为 $I[f]=1/2$. 表 1 中给出了不同 n_g 值时 Gauss 求积得到的结果, 很明显, 对这些函数的积分, 直接利用 Gauss 求积法则效率很低. 但是, 若将区域分成 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2=(-1/2,0)\cup(0,1)$, 然后分别使用 (35) 式, 就会获得精确解.

表 1 不连续 (阶跃) 函数和分片连续函数的数值积分 [23]

$f(x)$	Gauss 点数	$Q[f]$	$I[f]$
$f_1(x)$	1	1.5000	0.75
	2	0.3750	
	5	0.6950	
	7	0.6101	
	10	0.7075	
$f_2(x)$	1	0.3750	0.5
	2	0.5123	
	5	0.5066	
	7	0.4996	
	10	0.5015	

基于上述讨论, 裂纹几何必须与用于数值积分的单纯型的边重合. 对于简单多边形这容易实现, 但对任意多边形上的求积尚未发展成熟, 从文献 [68] 可获得这方面的最新进展. 凸形或非凸形子域的三角形分解是一件简单事情, 然后在三角形上使用熟知的求积法则, 实际上, 这确是一条好途径: 恰当选取积分点位置和权值, 实现任意多边形上的数值积分. 因此, 这纯粹是一个计算技巧问题, 并未涉及新的理论, 只分解那些被裂纹分割的单元, 从而获得足够精确的数值积分.

现在详细分析上述分解步骤与网格重构的区别. 网格重构的核心是增加逼近基函数数目、扩充离散空间, 通过对奇异性附近网格的加密 (因为在奇异性周围梯度很大), 改善逼近能力. 网格重构要求基函数的导数在任何单元上不能太大, 由于形状糟糕的单元 (例如夹角接近 π 的三角形单元) 对有限元方法的精度和收敛性会产生很大影响, 这一均匀性条件一般通过强制约束单元形状得以满足. XFEM 中使用的单元分解与网格重构的不同主要反映在以下几个方面:

(1) 在 XFEM 中, 单元分解的目的是进行数值积分, 在离散空间中并不引入额外自由度.

(2) 由于基函数 (经典有限元及改进基函数) 与结点相关联, 它们维系在母单元上而不是子三角形上, 因而 XFEM 对分解所得的单元形状没有限制.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(3) 将被裂纹切割的单元再分成三角形 (在二维中) 或三棱锥 (在三维中) 的工作在计算几何中相对简单.

4.3 XFEM 离散方程的建立[23]

下面以裂纹问题为例, 推导 XFEM 的离散方程.

根据 (32) 式, 对线性静力学问题, 离散弱形式为

$$\int_{\Omega^h} \boldsymbol{\sigma} \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon}^h \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega^h} \boldsymbol{b}\cdot\delta\boldsymbol{u}^h \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Gamma_t} \bar{\boldsymbol{t}}\cdot\delta\boldsymbol{u}^h \mathrm{d}\Gamma, \quad \forall\delta\boldsymbol{u}^h \in U_0^h \tag{36}$$

其中, $\boldsymbol{u}^h \in U^h$、$\delta\boldsymbol{u}^h \in U_0^h$ 分别为 XFEM 的逼近试探函数和检验函数, 线弹性本构关系为 $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}:\boldsymbol{\varepsilon}$, 其中 $\boldsymbol{D}$ 是各向同性线弹性材料的本构矩阵 (平面应力或平面应变). 有限元区域为 $\Omega^h = \cup_{e=1}^{m}\Omega_e^h$, 其中 Ω_e^h 为某个单元或单元的子划分, 裂纹沿着这些单元或子剖分的边. 从弱形式出发, Belytschko 和 Black[69] 证明不连续离散逼近在裂纹表面满足面力自由条件.

将 XFEM 的试探函数和检验函数代入上述方程, 并利用结点变分的任意性, 可得离散线性方程组为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f} \tag{37}$$

其中, $\boldsymbol{d}$ 是结点未知向量, $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 分别为总体刚度矩阵和外力向量. $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 先逐个单元计算, 再按通常步骤进行组装. 单元层次上的 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 分别为

$$\boldsymbol{K}_{ij}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{ij}^{uu} & \boldsymbol{K}_{ij}^{ua} & \boldsymbol{K}_{ij}^{ub} \\ \boldsymbol{K}_{ij}^{au} & \boldsymbol{K}_{ij}^{aa} & \boldsymbol{K}_{ij}^{ab} \\ \boldsymbol{K}_{ij}^{bu} & \boldsymbol{K}_{ij}^{ba} & \boldsymbol{K}_{ij}^{bb} \end{bmatrix} \tag{38a}$$

$$\boldsymbol{f}_i^e = \{\boldsymbol{f}_i^u \quad \boldsymbol{f}_i^a \quad \boldsymbol{f}_i^{b^1} \quad \boldsymbol{f}_i^{b^2} \quad \boldsymbol{f}_i^{b^3} \quad \boldsymbol{f}_i^{b^4}\} \tag{38b}$$

其中, 式 (38) 中的子矩阵和子向量分别为

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{rs} = \int_{\Omega_e^h} (\boldsymbol{B}_i^r)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_j^s \mathrm{d}\Omega \quad (r,s = u,a,b) \tag{39a}$$

$$f_i^u = \int_{\partial\Gamma_t\cap\partial\Omega_e^h} N_i\bar{\boldsymbol{t}}\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_e^h} N_i\boldsymbol{b}\mathrm{d}\Omega \tag{39b}$$

$$f_i^a = \int_{\partial\Gamma_t\cap\partial\Omega_e^h} N_i H\bar{\boldsymbol{t}}\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_e^h} N_i H\boldsymbol{b}\mathrm{d}\Omega \tag{39c}$$

$$f_i^{b^\alpha} = \int_{\partial\Gamma_t\cap\partial\Omega_e^h} N_i\Psi_\alpha\bar{\boldsymbol{t}}\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_e^h} N_i\Psi_\alpha\boldsymbol{b}\mathrm{d}\Omega \quad (\alpha = 1\sim 4) \tag{39d}$$

在上述公式中, N_i 是标准有限元形状函数, 它定义在单元结点上 ($i = 1, n_e$), 其中 n_e 是有限单元中结点数目. 二维弹性问题中每个结点的自由度数目 $n_d = 2$, 集合 K_Γ 中的结点在每一个空间维上具有一个改进自由度, 而集合 K_Λ 中的结点在每一个空间维上具有四个改进自由度. 关于结点集 K_Γ 及 K_Λ, 已在 4.2.1 节定义.

在 (39) 式中 $\boldsymbol{B}_i^u$、$\boldsymbol{B}_i^a$ 和 $\boldsymbol{B}_i^b$ 分别为形状函数导数矩阵, 它们由下式给出

$$\boldsymbol{B}_i^u = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \tag{40a}$$

$$\boldsymbol{B}_i^a = \begin{bmatrix} (N_iH)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_iH)_{,y} \\ (N_iH)_{,y} & (N_iH)_{,x} \end{bmatrix} \tag{40b}$$

$$\boldsymbol{B}_i^b = [\boldsymbol{B}_i^{b^1} \quad \boldsymbol{B}_i^{b^2} \quad \boldsymbol{B}_i^{b^3} \quad \boldsymbol{B}_i^{b^4}] \tag{40c}$$

$$\boldsymbol{B}_i^{b^\alpha} = \begin{bmatrix} (N_i\Psi_\alpha)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i\Psi_\alpha)_{,y} \\ (N_i\Psi_\alpha)_{,y} & (N_i\Psi_\alpha)_{,x} \end{bmatrix} \quad (\alpha = 1\sim 4) \tag{40d}$$

关于裂纹问题改进函数引入后改进单元与常规单元之间的协调性更加复杂, 目前尚未见文献报道.

至此, 建立了用 XFEM 求解裂纹问题的方程系统. 对于夹杂或孔洞问题, 由于改进函数相对简单, 可仿照本节步骤导得.

5 扩展有限元的若干应用

自从 2000 年正式提出 XFEM 术语以来, 该法已广泛应用于固体、复杂流体、复杂传热、相变等领域的许多不连续问题中. 从固体力学角度, 这些工作大体上可分为在计算断裂力学中的应用、含孔洞和夹杂问题中的应用, 以及其它非固体力学问题中的应用. 下面予以简要介绍.

5.1 XFEM 在计算断裂力学中的应用

可以说目前 XFEM 的研究和应用, 大多数集中在裂纹问题. Karihaloo 和 Xiao[70] 对该法在静态和扩展裂纹问题中的应用做了评述, 并与早先提出的广义有限元法 (GFEM, 又称 PU-FEM)[28] 进行了比较. CFEM 是 GFEM 和 XFEM 的共有成分, 因此, 这两种方法实质上都是有限元理论的扩展和应用. XFEM 与 GFEM 能以很高精度求解 CFEM 难

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

以求解的复杂区域上的工程问题. GFEM 容许 P-自适应, 采用解析解或给定边值问题的数值解改进有限元空间, 可用较粗糙或实际中能够接受的网格获得足够精确的数值解; 与 GFEM 不同, XFEM 将目光集中在对结点的改进上, 以模拟所关心的内边界 (裂纹和夹杂), 并不完全依赖于已知的封闭形式解, 因而 XFEM 比 GFEM 具有更大的灵活性. Sukumar 等 [23,71], Huang 等 [58,59] 系统地阐述了用 XFEM 求解裂纹问题的每一个细节.

Sukumar 等 [71] 用 XFEM 对任意材料细观结构准静态裂纹扩展问题进行了模拟, 细观结构在规则网格上进行计算, 并提出了一种新的约束 Delaunay 三角化算法构筑细观结构的初始有限元网格. Nagashima 等 [72] 采用 XFEM 研究了双材料界面裂纹问题的应力强度因子的计算. Sukumar 等 [73] 把 XFEM 用于研究三维裂纹问题, 采用单位分解概念, 在 CFEM 的逼近中增加不连续函数和二维裂纹的裂尖渐近场, 以解决裂纹存在问题. Stolarska 等 [74] 把 LSM 和 XFEM 结合起来研究裂纹扩展问题, LSM 用于表示裂纹和裂尖位置, XFEM 用于计算应力和位移, 以确定裂纹扩展率. Daux 等 [22] 利用 XFEM 研究了任意源自孔洞的分支和交叉裂纹, 根据不连续几何特征的相互作用, 对逼近空间进行了改进. Moes 等 [75,76] 利用 XFEM 研究了非共面三维裂纹扩展问题, 其中不但使用 Heaviside 阶跃函数表征裂纹, 而且引入了分支函数表征裂纹波前以改善方法的精度. 结合 FMM, Sukumar 等 [60] 用 XFEM 研究了三维疲劳裂纹扩展问题, 数值结果与理论相吻合. 随后, 他们又用相同方法、算法 [77] 对多个共面裂纹进行模拟, 不需用户干预及网格重构, 就可实现对裂纹合并及疲劳扩展的模拟. Dolbow 等 [78] 利用 XFEM 研究了界面带有摩擦接触裂纹的扩展问题, 并将得出的数值结果与解析解或实验结果做了比较. Chessa 等 [79] 通过扩展应变法改善了扩展有限元自由度和标准有限元自由度混合出现时单元的性能. Dolbow 等 [80] 利用 XFEM 求解了板的断裂问题, 为了得到混合型应力强度因子, 他们在 Mindlin-Reissner 框架内提出了一种恰当形式的相互作用积分. Dolbow 和 Gosz[81] 用 XFEM 研究了功能梯度材料中的混合型应力强度因子, 对相互作用能积分的计算发现, 在任何情形下, XFEM 均能给出非常满意的结果. Dolbow 和 Nadeau[82] 将 XFEM 应用于细观结构材料断裂的有效特性分析中, 降低了细观结构分析时对网格重构的要求.

基于 Dugdale[83] 和 Barenblatt[84] 对粘着裂纹的理论研究, Wells 和 Slugs[85] 首先利用 XFEM 求解粘着裂纹问题, 但他们将裂纹端部限制在单元的边上. Moes 和 Belytschko[86] 在三角形单元上利用 XFEM 模拟粘着裂纹, 如果某单元被裂纹完全分割, 则用阶跃函数改进; 如果裂尖位于单元内部, 就用分支函数改进. Zi 和 Belytschko[87] 提出了一种新的 XFEM 法, 仅用一种改进函数就可处理包括裂纹端部的整个裂纹, 该法已用于线性三结点三角形单元和二次六结点三角形单元, 为了保证粘着裂纹的光滑闭合, 使垂直于裂尖的应力投影与材料的强度强迫相等.

由于具有较高收敛性、很少出现自锁且能模拟曲线边界, Stazi 等 [88] 用高阶 (含二阶) 扩展有限单元研究了曲线裂纹问题, 并用例题进行了验证和比较. Iarve[89] 利用特殊种类的单位分解, 即用 B- 样条基函数代替 Heaviside 阶跃函数, 可以在扩展有限单元上直接进行标准 Gauss 求积, 在单元上积分时不再需进行子分解. Mariani 和 Perego[90] 在 XFEM 中引入高阶位移不连续性, 研究了准脆性材料中准静态粘着裂纹的传播, 其有效性通过 I 型和混合型数值试验给出了评定.

XFEM 还被用于数值求解与薄膜有关的裂纹问题. Huang 等 [91] 提出了一个基础为黏性层的弹性薄膜内槽型裂纹的二维模型, 并用 XFEM 在相对粗糙网格上计算位移场和应力强度因子; 他们 [58] 还利用 XFEM 求解了具有任意奇异性的不连续问题 —— 弹性薄膜 / 弹性基础结构中的裂纹问题, 奇异性是由于两种材料弹性不匹配参数决定的, 他们证明 XFEM 在粗糙网格上非常有效. Liang 等 [92] 通过引入一个搭接模型 (shear lag model), 以使 XFEM 在粗糙网格上能处理弹性薄膜 / 弹性基础结构中的多裂纹演化问题; 他们 [93] 还提出了一个能近似三维断裂过程的二维搭接模型, 利用 XFEM 在相对粗糙且不变的网格上模拟移动裂纹.

5.2 XFEM 在孔洞和夹杂类问题中的应用

Moes 等 [19] 利用 XFEM 进行细观结构的多尺度分析, 他们认为, 虽然计算中网格不需与物理表面一致, 但仍需要细到足以捕捉这些表面的几何特征; Sukumar 等 [56] 在 XFEM 中采用水平集描述孔洞和夹杂, 研究了二维线弹性静力学问题. Patzak 和 Jirasek[94] 将 XFEM 应用于非局部连续损伤力学中, 通过引入能准确捕捉局部化应变概貌的特殊形状函数, 在非常粗糙的网格上改进标准的位移逼近.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

5.3 XFEM 在其它问题中的应用

XFEM 还被用于固体力学以外的不连续问题. 借助于 XFEM, 并通过定义径向基函数作为隐式界面, Belytschko 等[95] 处理了结构化有限元网格中的内部特征, 例如, 材料界面、滑动界面和裂纹. Chessa 等[96] 利用三角形单元的 XFEM 研究了多维 Stefan(相变) 问题, 模拟了相界面和单元内温度梯度的不连续性, 并用实例展示了该法的精度和有效性. Ji 等[97] 则利用 XFEM, 通过杂交数值方法在固定网格上模拟剧烈变化相界面的演化. Wagner 等[98] 用 XFEM 模拟粒子在流体中的运动. Chessa 和 Telytschko[99] 将 XFEM 用于两相不相融合的流体问题中, 使得这种界面跟踪法共有界面捕捉法的许多优点. 基于 XFEM, Wagner 等[100] 发展了一种数值模拟流体中粒子悬浮问题的方法: 对于流过一个粒子的流动采用 Stokes 流体解进行改进; 对于两个粒子间的流动, 采用润滑理论解进行改进. Merle 等[101] 将 XFEM 应用于具有移动热源和相边界的热问题中, 该法能捕捉热源附近的高度局部化和瞬态解或材料界面.

6 XFEM 及其应用研究展望

XFEM 的理论表明, 它与 CFEM 一样具有很强的适用性, 可用于数值求解任意不连续问题, 却不需要在不连续处进行网格剖分或重构. 虽然在该法提出以来的短短几年间就已取得了大量成果, 但在笔者看来, 仍有以下方面的工作有待开展.

6.1 XFEM 自身的研究

目前应用于扩展有限元中的单元大多是简单的线性单元 (三结点三角形单元和四结点四边形单元), 有少量对六结点三角形单元的研究, 但对于最常用的八结点等参数元中扩展有限元的研究尚未见报道, 这部分应该是最具研究价值和应用前景的. 对其中所涉及的 LSM 和不连续处的积分技术, 以及改进单元与常规单元间的协调问题, 也需一并进行深入仔细的研究. 对于三维问题, 相应地应研究二十结点等参数单元的扩展有限元法.

6.2 XFEM 在非均匀介质中的应用

诸如功能梯度材料、岩石等非均匀材料中的裂纹等缺陷力学的数值分析, 特别是其中的裂纹扩展问题, 难度相当大. 利用 XFEM 适用于任何不连续问题的优势, 从细观力学角度可以很方便地研究这类材料的力学特性, 通过更简单的途径解决其中存在裂纹、孔洞等缺陷时的力学响应. 该法也可直接应用于多相材料组成的复合材料问题中.

6.3 XFEM 在非线性固体力学问题中的应用

非线性固体力学问题大体上分为 3 种: 材料非线性、几何非线性和边界非线性问题, 下面分别予以讨论.

对于弱不连续问题, XFEM 可以直接用于非线性材料中. 对于强不连续问题, 如果获得了解析解的基本成分, 在对 XFEM 改进函数做相应改变后, 该法仍可用来有效地解决非线性材料问题.

XFEM 降低了 CFEM 在处理不连续问题时对网格的过分要求, 同时表明它在解决其它种类问题时, 与 CFEM 存在同样的缺陷, 几何非线性问题就是其中最典型的一种, 特别当变形极大时. 对于几何非线性问题, 由于单元的剧烈变形, 原有 (初始) 单元的插值精度严重恶化, XFEM 的插值精度也就随之降低. 对于这类问题的 CFEM, 可以通过采用与单元形状无关的形状函数予以解决[102,103]. 但对于相应的 XFEM, 无疑需要进一步的研究. 无网格法由于摆脱了单元概念的束缚, 在这一点上有自己的优势, 但它不在 CFEM 框架内, 因而丧失了 CFEM 所具有的众多优点.

以接触为代表的边界非线性问题实际上与裂纹问题是相伴出现的. 在复杂应力状态下, 裂纹因表面张开而表现为断裂力学问题, 也可能因闭合而表现为接触力学问题, 只是接触问题还有其它的表现形式, 如两个物体间的接触等. 关于 XFEM 在这方面的应用, 有些作者已做了一些研究, 但他们仅局限于粘结裂纹. 裂纹面在复杂应力作用下是张开还是闭合, 严格地说属于一个优化问题, 如何借助于 XFEM, 在较粗糙的网格上解决这类问题, 也是计算力学中的一个难点.

6.4 XFEM 在其他问题中的应用

XFEM 还有望用于复杂流体、相变、复杂传热等领域的复杂不连续问题, 以及诸如岩石与复杂流体、风沙动力学、生物流固耦合等复杂多相介质的流固耦合分析中.

参 考 文 献

1 Ortiz M, Leroy Y, Needleman A. A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1987, 190: 3647~3672

2 Belytschko T, Fish J, Engelmann B E. A finite element with

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

embedded localization zones. *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 70: 59~89

3 Dvorkin E N, Cuitino A M, Gioia G. Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1990, 30: 541~564

4 Lotfi H R, Sheng P B. Embedded representations of fracture in concrete with mixed finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995, 38: 1307~1325

5 Simo J C, Oliver J, Armero F. An analysis of strong discontinuities induced by strain softening in rate-independent in elastic solids. *Computational Mechanics*, 1993, 12: 277~296

6 Simo J C, Oliver J. Modeling strong discontinuities in solid mechanics by means of strain softening constitutive equations. In: Mang H, Bicanic N, de Borst R, eds. Computational Modeling of Concrete Structures. Pineridge: Swansea, 1994. 363~372

7 Armero F, Garikipati K. An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, 33: 2863~2885

8 Sluys L J, Berabds A H. Discontinuous failure analysis for model-I and model-II localization problems. *International Journal of Solids and Structures*, 1998, 35: 4257~4274

9 Larsson R, Runesson K. Element-embedded localization band based on regularized displacement discontinuity. ASCE*Journal of Engineering Mechanics*, 1996, 12: 402~411

10 Larsson R, Steinmann P, Runesson K. Finite element embedded localization band for finite strain plasticity based on a regularized strong discontinuity. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 1999, 4: 171~194

11 Regueiro R A, Borja R I. Plane strain finite element analysis of pressure sensitive plasticity with strong discontinuity. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38: 3647~3672

12 Bolzon G, Corigliano A. Finite elements with embedded displacement discontinuity: a generalized variable formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 49: 1227~1266

13 Borja R. A finite element model for strain localization analysis of strongly discontinuous fields based on standard Galerkin approximation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 190: 1529~1549

14 Jirasek M. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 188: 307~330

15 Xu X P, Needleman A. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1994, 42: 1397~1434

16 Camacho G T, Ortiz M. Computational modeling of impact damage in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, 33: 2899~2938

17 Hollister S J, Kikuchi N. Homogenization theory and digital imaging: a basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue. *Biotechnology and Bioengineering*, 1994, 94: 586~596

18 Zohdi T, Feucht M, Gross D, Wriggers P. A description of macroscopic damage through microstructural relaxation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, 143: 493~506

19 Moes N, Cloirec M, Cartraud P, Remacle J F. A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, 192: 3163~3177

20 Ghosh S, Lee K, Moorthy S. Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and Voronoi cell finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 1997, 32: 27~62

21 Moes N, Dolbow J, Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 46: 131~150

22 Daux C, Moes N, Dolbow J, Sukumar N, Belytschko T. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 48: 1741~1760

23 Sukumar N, Prevost J-H. Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method. Part I: Computer implementation. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, 40: 7513~7537

24 Melenk J M, Bubska I. The partition of the unity finite element method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139: 289~314

25 Duarte C A, Oden J T. An H-P adaptive method using clouds. *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139: 237~262

26 Babuska I, Melenk J M. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 1997, 40: 727~758

27 Babuska I, Caloz G, Osborn J. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. SIAM *Journal on Numerical Analysis*, 1994, 31: 945~981

28 Melenk J M. On generalized finite element methods: [PhD dissertation]. University of Maryland, 1995

29 Li L X, Sun J S, Sakamoto H. Application of the modified infinite element method to two-dimensional transient acoustic radiation. *Applied Acoustics*, 2003, 64: 55~70

30 Li L X, Sun J S, Sakamoto H. On the virtual acoustical source in mapped infinite element. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 261: 945~951

31 Li L X, Sun J S, Sakamoto H. A modified infinite element method for acoustic radiation. *Journal of Computational Acoustics*, 2002, 10: 113~121

32 Li L X , Sun, J S, Sakamoto H. A generalized infinite el-

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

ement for acoustic radiation. ASME *Journal of Vibration and Acoustics*, 2005, 127

33 Babuska I, Suri M. The p and h-p versions of the finite element method, basic principles and properties. SIAM *Review*, 1994, 36: 578~632

34 Franke R. Scattered data interpolation: test of some methods. *Mathematical Computation*, 1982, 38: 181~200

35 Schaback R. Creating surfaces from scattered data using radial basis functions. In: Daehlen M, Lyche T, Schumaker L L, eds. Mathematical Methods in CAGD III. La Vergne: Vanderbilt University Press, 1995. 1~21

36 Shepard D S. A two-dimensional interpolation function for irregularly spaced data. In: ACM ed. Proceedings of 23rd National Conference. Princeton, NJ: Brandon/Systems Press, 1968. 517~524

37 McLain D H. Drawing contours from arbitrary data points. *Computational Journal*, 1974, 17: 318~324

38 Lancaster P, Salkauskas K. Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematical Computation*, 1994, 37: 229~256

39 Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 1992, 10: 307~318

40 Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37: 229~256

41 Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. A new implementation of the element-free Galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1994, 113: 397~414

42 Belytschko T, Gu L, Lu Y Y. Fracture and crack growth by element-free Galerkin methods. *Modeling Simulation of Material Science and Engineering*, 1994, 2: 519~534

43 Oden J T, Duarte A. hp clouds-a meshless method to solve boundary value problems. Technical report TICAM Report 95-05, TICAM, The University of Texas at Austin, Austin, TX 78712, 1995

44 Kansa E J. Multiquadrics--a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—I surface approximations and partial derivative estimates. *Computational Mathematics Application*, 1990, 19: 127~145

45 Kansa E J. Multiquadrics—a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic partial differential equations. *Computational Mathematics Application*, 1990, 19: 147~161

46 Monaghan J J. An introduction to SPH. *Computational Physics Communications*, 1988, 48: 89~96

47 Liu W K, Jun S, Li S, Adee J, Belytschko T. Reproducing kernel particle methods for structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995, 38: 1655~1679

48 Liu W K, Jun S, Li S, Zhang F F. Reproducing kernel particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1995, 20: 1081~1106

49 Liu W K, Adee J, Jun S. Reproducing kernel particle methods for elastic and plastic problems. In: Benson D J, Asaro R A, eds. Advanced Computational Methods for Material Modeling, AMD 180 and PVP 268. New York: ASME Press, 1993. 175~190

50 Liszka T, Orkisz J. The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. *Computers & Structures*, 1980, 11: 83~95

51 Duarte A. A review of some meshless methods to solve partial differential equations. Technical Report TICAM Report 95-06, TICAM, The University of Texas ay Tustin, Austin, TX 78712, 1995

52 Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 1988, 79: 12~49

53 Chop D L. Some improvements of the fast marching method. SIAM *Journal on Scientific Computing*, 2001, 23: 230~244

54 Sethian J A. Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Version, and Materials Science. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999

55 Barth T J, Sethian J A. Numerical schemes for the Hamilton-Jacobi and level set equations on triangulated domain. *Journal of Computational Physics*, 1998, 145: 1~40

56 Sukumar N, Chopp D L, Moes N, Belytschko T. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 190: 6183~6200

57 Dolbow J, Moes N, Belytschko T. Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2000, 36: 235~260

58 Huang R, Prevost J H, Huang Z Y, Suo Z. Channel-cracking of thin films with the extended finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 2003, 70: 2513~2526

59 Huang R, Sukumar N, Prevost J-H. Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method. Part II: numerical applications. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, 40: 7539~7552

60 Sukumar N, Chopp D L, Moran B. Extended finite element method and fast marching method for three dimensional fatigue crack propagation. *Engineering Fracture Mechanics*, 2003, 70: 29~48

61 Fleming M, Chu Y A, Moran B, Belytschko T. Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40: 1483~1504

62 Zak A R, Williams M L. Crack point singularities at a bi-material interface. *Journal of Applied Mechanics*, 1963, 30: 142~143

63 Bogy D B. On the plane elastostatic problem of a loaded crack terminating at a material interface. *Journal of Applied Mechanics*, 1971, 38: 911~918

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

64 Cook T S, Erdogan F. Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the crack. *International Journal of Engineering Science*, 1972, 10: 677∼697

65 Chen D H. A crack normal to and terminating at a bimaterial interface. *Engineering Fracture Mechanics*, 1994, 49: 517∼532

66 Dunders J. Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges. *Journal of Applied Mechanics*, 1969, 36: 650∼652

67 Beuth J L. Cracking of thin bonded films in residual tension. *International Journal of Solids and Structures*, 1992, 29: 1657∼1675

68 Rashid M M, Gullett P M. On a finite element method with variable element topology. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 190: 1509∼1527

69 Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 45: 601∼620

70 Karihaloo B L, Xiao Q Z. Modeling of stationary and growing cracks in FE framework without remeshing: a state-of-the-art review. *Computers & Structures*, 2003, 81: 119∼129

71 Sukumar N, Srolovitz D J, Baker T J, Prevost J-H. Brittle fracture in polycrystalline microstructures with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 2003, 56: 2015∼2037

72 Nagashima T, Omoto Y, Tani S. Stress intensity factor analysis of interface cracks using X-FEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 56: 1151∼1173

73 Sukumar N, Moes N, Moran B, Belytschko T. Extended finite element method for three-dimensional crack modeling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 48: 1549∼1570

74 Stolarska M, Chopp D L, Moes N, Belytschko T. Modeling crack growth by level sets in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 51: 943∼960

75 Moes N, Gravouil A, Belytschko T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part I: Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 53: 2549∼2568

76 Gravouil A, Moes N, Belytschko T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part II: Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 53: 2569∼2586

77 Chopp D L, Sukumar N. Fatigue crack propagation of multiple coplanar cracks with the coupled extended finite element/fast marching method. *International Journal of Engineering Science*, 2003, 41: 845∼869

78 Dolbow J, Moes N, Belytschko T. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 190: 6825∼6846

79 Chessa J, Wang H, Belytschko T. On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 2003, 57: 1015∼1038

80 Dolbow J, Moes N, Telytschko T. Modeling fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, 37: 7161∼7183

81 Dolbow J E, Gosz M. On the computation of mixed-mode stress intensity factors in functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39: 2557∼2574

82 Dolbow J E, Nadeau J C. On the use of effective properties for the fracture analysis of microstructured materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 2002, 69: 1607∼1634

83 Dugdale D S. Yielding of steel of sheets containing slits. *Journal of Mechanics and Solids*, 1960, 8: 100∼108

84 Barenblatt G I. The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, 1962, 7: 55∼129

85 Wells G N, Sluys L J. A new method for modeling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50: 2667∼82

86 Moes N, Belytschko T. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 2002, 69: 813∼833

87 Zi G, Belytschko T. New crack-tip element for XFEM and applications to cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 57: 2221∼2240

88 Stazi F L, Budyn E, Chessa J, Telytschko T. An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks. *Computational Mechanics*, 2003, 31: 38∼48

89 Iarve E V. Mesh independent modeling of cracks by using higher order shape functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 56: 869∼882

90 Mariani S, Perego U. Extended finite element method for quasi-brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 58: 103∼126

91 Huang R, Prevost J H, Suo Z. Loss of constraint on fracture in thin film structures due to creep. *Acta Materialia*, 2002, 50: 4137∼4148

92 Liang J, Huang R, Prevost J H, Suo Z. Evolving crack patterns in thin film with the extended finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, 40: 2343∼2354

93 Liang J, Huang R, Prevost J H, Suo Z. Thin film cracking modulated by underlayer creep. *Experimental Mechanics*, 2003, 43: 269∼279

94 Patzak B, Jirasek M. Process zone resolution by extended finite elements. *Engineering Fracture Mechanics*, 2003, 70: 957∼977

95 Belytschko T, Parimi C, Moes N, Sukumar N, Usui S. Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 56: 609∼635

96 Chessa J, Smolinski P, Brlytschko T. The extended finite

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

element method (XFEM) for solidification problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 53: 1959~1977

97 Ji H, Chopp D, Dolbow J E. A hybrid extended finite element/level set method for modeling phase transformations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 54: 1209~1233

98 Wagner G J, Moes N, Liu W K, Belytschko T. The extended finite element method for rigid particles in Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 51: 293~313

99 Chessa J, Belytschko T. An extended finite element method for two-phase fluids. ASME *Journal of Applied Mechanics*, 2003, 70: 10~17

100 Wagner G J, Ghosal S, Liu W K. Particle flow simulations using lubrication theory solution enrichment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 56: 1261~1289

101 Merle R, Dolbow J. Solving thermal and phase change problems with the eXtended finite element method. *Computational Mechanics*, 2002, 28: 339~350

102 Li L X, Kunimatsu S, Han X P, Xu S Q. The analysis of interpolation precision of quadrilateral elements. *Finite elements in Analysis and Design*, 2004, 41: 91~108

103 Li L X, Han X P, Xu S Q. Study on the degeneration of quadrilateral element to triangular element. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2004, 20: 671~679

THE EXTENDED FINITE ELEMENT METHOD AND ITS APPLICATIONS —— A REVIEW*

LI Luxian† WANG Tiejun

State Key Laboratory for the Strength and Vibration of Mechanical Structures
Department of Engineering Mechanics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China

Abstract The extended finite element method (XFEM) originally proposed in 1999 is very powerful for discontinuous problems in mechanics, such as crack growth, complex fluid, interface, and so on. The major difference between the XFEM and the conventional finite element method (CFEM) is that the mesh in XFEM is independent of the internal geometry and physical interfaces, such that meshing and re-meshing difficulties in discontinuous problems can be overcome. Based on the partition of unity concept, the XFEM relaxes the prohibitive requirements for mesh density by improving the shape functions with the basic knowledge of discontinuous problems. The XFEM retains all advantages of the CFEM, such as the single-field variational principle, symmetric banded and sparse system matrices, the ease of application to non-linear problems, anisotropic materials and arbitrary geometries. This paper presents an overview and comments on the XFEM, and is organized as follows. The partition of unity method (PUM) and Level Set Method (LSM) are briefly introduced in sections 2 and 3, respectively. Basic theory, implementation procedures and formulations of the XFEM are described in detail in sections 4 and 5, together with correction to several inaccurated points in literature. The future investigations on XFEM are finally recommended in section 6.

Keywords finite element method (FEM), extended finite element method (XFEM), partition of unity method (PUM), level set method (LSM), discontinuous problem, crack/inclusion/void

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10125212, 10472090) and MDE Fund for Cross Century Talents and Key Projects.

† E-mail: luxianli@mail.xjtu.edu.cn

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net