

文章编号: 1007-4708(2008)05-0595-07

# 质点积分无单元伽辽金法及其在金属挤压过程中的应用

潘小飞, 张雄\*, 陆明万

(清华大学 航天航空学院, 北京 100084)

**摘要:**无单元伽辽金法需要在背景网格上积分, 计算量大。节点积分无单元伽辽金法把对求解域的积分转化为对节点的求和, 效率高, 但因零能模态不受控制而产生不稳定现象, 需要采取一定的稳定化方案。本文采用应力点思想, 通过 Newton-Cotes 法计算积分, 建立了质点积分无单元伽辽金法, 并通过小变形弹性静力学问题说明了该方法具有良好的稳定性, 且计算效率远高于无单元伽辽金法。最后本文将质点积分无单元伽辽金法成功地应用于三维金属挤压成型过程的数值模拟, 显示了该方法在分析此类问题时的优势和潜力。

**关键词:**无网格法; 无单元伽辽金法; 节点积分; 金属成型

**中图分类号:** O3      **文献标识码:** A

## 1 引言

无单元伽辽金法 EFG (Element Free Galerkin Method)<sup>[1-3]</sup> 采用背景网格覆盖求解域, 将对求解域的积分化为对各背景格子的积分之和, 然后在每个格子中使用高斯积分。EFG 具有良好的稳定性, 但由于无网格近似函数不是多项式, 需要采用较高阶的高斯积分, 计算量很大。Beissel 等<sup>[4]</sup> 采用节点积分方案来代替 EFG 中背景网格的积分, 提出了节点积分无单元伽辽金法 NIEFG (Nodal Integration of the Element-Free Galerkin Method)。与有限元中的单点高斯积分类似, 节点积分无单元伽辽金法也会出现因零能模态不受控制而产生的不稳定现象。Beissel 等建议将平衡方程残差的平方引入到伽辽金弱形式中以消除节点积分的不稳定性。与背景网格积分相比, 节点积分可以大幅度提高伽辽金无网格方法的计算效率, 但是也显著降低了计算精度。在伽辽金弱形式中引入稳定项虽然可以有效地消除节点积分的不稳定性, 但对于不存在零能模态的问题, 稳定项将降低解的精度。

Chen 等<sup>[5]</sup> 提出用光滑应变稳定化的方法来消除节点积分的不稳定性。该方法通过节点邻域内应变的加权平均来计算该节点的应变值, 可有效地消除零能模态导致的不稳定性, 提高了节点积分的精度和稳定性。但是这种方法在计算刚度矩阵的时候需要在各节点子域的边界上进行积分, 增加了节点积分的计算量。

Dyka 等<sup>[6,7]</sup> 提出了应力点的概念, 通过引入应力点来消除 SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) 中出现的拉应力不稳定现象。张雄<sup>[8]</sup> 等在配点法中除节点外又引入了一组辅助点 (类似于应力点), 利用最小二乘法消除平衡方程在节点和辅助点处的残差, 建立了高效稳定的无网格法——最小二乘无网格法。Belytschko 等<sup>[9,10]</sup> 将应力点思想引入到节点积分中, 发现引入应力点可以明显提高节点积分的精度和稳定性。

本文将求解域用一组节点离散, 利用 MLS 近似在域内建立近似函数, 并基于伽辽金法建立求解方程。为了避免使用背景网格积分, 除了节点外, 又按一定规则引入了一组辅助点, 通过 Newton-Cotes 法进行积分。节点和辅助点均携带有质量、应力等物质信息, 因此统称为质点, 并将该方法称为质点积分无单元伽辽金法 PIEFG (Particle Integration of Element Free Galerkin Method)。本方法的积分仅在质点上进行, 其效率远高于 EFG 法。数值算例表明, 本方法具有很好的稳定性和精度, 在大变形等强非线性问题中具有良好的应用前景。

收稿日期: 2006-05-10; 修改稿收到日期: 2006-09-25.

基金项目: 国家自然科学基金 (10172052) 和新世纪优秀人才支持计划资助项目.

作者简介: 潘小飞, 男, 博士生;

张雄\* (1966-), 男, 教授, 博士生导师  
(E-mail: xzhang@tsinghua.edu.cn);

陆明万 (1963-), 男, 教授, 博士生导师.

金属加工成型过程中涉及到材料、几何和边界条件的高度非线性。采用有限元模拟金属成型过程时会因网格畸变而导致计算精度下降或计算过程异常终止。无网格法的近似函数不依赖于网格，在模拟金属加工成型过程方面有很大的优势。目前采用无网格方法研究金属加工成型过程还处于起步阶段，其中 RKPM<sup>[5,11,12]</sup> (Reproducing Kernel Particle Method) 是最主要的一种方法。本文将质点积分无单元伽辽金法应用于三维金属挤压成型的数值模拟中，结果表明质点积分无单元伽辽金法在金属加工成型数值模拟方面具有良好的应用前景。

## 2 无单元伽辽金法的控制方程

无网格法基于一组布置在求解域中的离散节点  $x_I (I = 1, 2, \dots, n)$  来建立近似函数。MLS 近似函数可以写为

$$u(x) = Nd \tag{1}$$

式中

$$u(x) = [u(x), v(x)]^T \tag{2}$$

$$d = [u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n]^T \tag{3}$$

$$N = [N_1(x), N_2(x), \dots, N_n(x)] \tag{4}$$

$$N_I(x) = \text{diag}(N_I(x), N_I(x)) \tag{5}$$

MLS 形函数  $N_I(x)$  的具体表达式可以参见有关文献。MLS 中常用的权函数有 Gaussian 函数、指数函数和样条函数等。本文采用的权函数为

$$w_I(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3, & 0 < r < \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3, & \frac{1}{2} < r < 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \tag{6}$$

式中  $r = \|x_I - x\| / d_{\max}$ ， $d_{\max}$  是节点  $x$  的影响域半径，本文采用矩形影响域。

小变形静力问题的伽辽金变分方程为

$$\delta \int_{\Omega} (b - u \cdot \text{div} \sigma) d\Omega - \int_{\Gamma} u \cdot t d\Gamma = 0 \tag{7}$$

式中  $b$  为域  $\Omega$  中给定的体力， $t$  为给定面力的边界， $\sigma$  为  $\Omega$  上给定的面力。将无网格近似函数  $u(x)$  代入式(7) 得到 EFG 的求解方程：

$$Kd = P, \quad K = \int_{\Omega} B^T DB d\Omega \tag{8,9}$$

$$P = \int_{\Omega} N^T b d\Omega + \int_{\Gamma} N^T t d\Gamma \tag{10}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$D = \frac{E_0}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \text{ (平面应力)} \tag{12}$$

EFG 格式与有限元法的格式非常相似，但在有限元法中积分是在有限元网格上进行的，而在 EFG 中积分是在背景网格上进行的。无网格法的近似函数一般不再是多项式，难以用高斯积分精确计算矩阵  $K$  和  $P$ ，因此 EFG 不得不使用较高阶的高斯积分和较细的背景网格，计算量很大。

## 3 质点积分方案

Beissel 等<sup>[4]</sup> 提出的节点积分方案效率很高，但与有限元单点高斯积分类似，节点积分也会因零能模态不受控制而产生不稳定现象。为了解决这一问题，本文除节点以外，又按照一定的规则引入了一组辅助点。

引入辅助点的方法有多种。例如，可以采用计算几何中的 Voronoi 图技术，以节点为生成点建立 Voronoi 图，把 Voronoi 多边形的顶点取为辅助点，如图 1(a) 所示。本文采用有限元网格来生成节点和辅助点。对于平面问题，将求解域离散为四边形网格；对于三维问题，将求解域离散为六面体网格。将有限元网格的节点取为无网格法的节点，将有限元网格的形心取为辅助点，如图 1(b) 所示。

节点和辅助点均携带了质量和应力等物质信息，因此统称为质点。各质点所代表的面积  $q_I$  可以通过 2 阶 Newton-Cotes 积分来得到，即将各单元面积  $A_j$  (或体积  $V_j$ ) 的 2/3 赋给位于该单元形心的辅助点，而将单元面积  $A_j$  (或体积  $V_j$ ) 的 1/3 均分

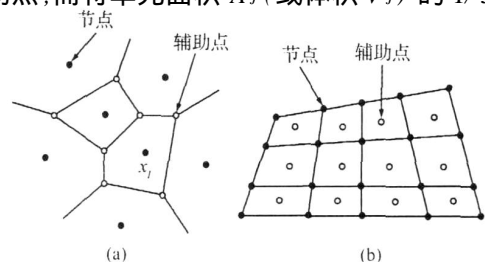


图 1 质点布置示意图  
Fig. 1 Particle distribution

给该单元的各节点,对于二维问题有:

$$q_I = \begin{cases} n_I A_I / 12, & x_I \text{ 为节点} \\ 2A_I / 3, & x_I \text{ 为辅助点} \end{cases} \quad (13)$$

对于三维问题有:

$$q_I = \begin{cases} n_I V_I / 24, & x_I \text{ 为节点} \\ 2V_I / 3, & x_I \text{ 为辅助点} \end{cases} \quad (14)$$

式中  $n_I$  为与节点  $x_I$  相联的有限单元的总数。式 (10) 的第 2 项是将边界上的给定面力转化为节点力。有限元法中式 (10) 的边界力只会转换到边界节点上,而在 EFG 中,由于 MLS 形函数  $N(x)$  不象有限元那样具有函数的性质,边界力一般也会转换到内部节点上。在进行边界积分时,可以将边界单元的长度  $L_I$  均分给该单元的两个节点上,即边界节点所代表的长度  $q_I$  为

$$q_I = \frac{n_I}{2} L_I / 2 \quad (15)$$

式中  $n_I$  为边界单元的总数。

采用质点积分方案后,任意函数  $f(x)$  在域中的积分可以近似地表示为该函数在各质点  $x_I$  处的值  $f(x_I)$  乘以该质点所代表的面积  $q_I$  的和。利用质点积分方案可将式 (9) 和式 (10) 改写为

$$K = \sum_{I=1}^{n_p} q_I B(x_I)^T D B(x_I) \quad (16)$$

$$P = \sum_{I=1}^{n_p} q_I N(x_I)^T b(x_I) + \sum_{I=1}^{n_s} q_I N(x_I)^T \bar{t} \quad (17)$$

式中  $n_p$  为域内的质点(包括节点和辅助点)总数,  $n_s$  为边界上的节点总数。

### 4 非线性动力学问题

取初始构形为参考构形,非线性动力学问题的伽辽金弱形式为

$$\int_0 (\mathbf{F}^T : \mathbf{P} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}_0 + \int_0 \mathbf{u} \cdot \ddot{\mathbf{u}}) d - \int_0 \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{t}}_0 d = 0 \quad (18)$$

式中  $\mathbf{P}$  为名义应力张量,  $\mathbf{b}_0$  为域  $0$  内单位体积上的体力,  $0$  为初始构形中给定的面力边界,  $\dot{\mathbf{t}}_0$  为  $0$  上给定的面力载荷,  $\mathbf{F}$  为变形梯度张量:

$$\mathbf{F} = \mathbf{x} \nabla_0 \quad (19)$$

式中  $\nabla_0$  为初始构形下的梯度算子,  $\mathbf{x}$  为空间坐标。将无网格近似函数 (1) 代入到式 (18), 得到系

统的运动方程:

$$M \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}^{\text{int}} = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (20)$$

其中

$$M_{IJ} = \int_0 N_I(\mathbf{X}) N_J(\mathbf{X}) \text{Id} \quad (21)$$

$$\mathbf{f}_J^{\text{int}} = \int_0 (\nabla_0 N_J(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{P} d \quad (22)$$

$$\mathbf{f}_J^{\text{ext}} = \int_0 \mathbf{b}_0 N_J(\mathbf{X}) d + \int_0 \dot{\mathbf{t}}_0 N_J(\mathbf{X}) d \quad (23)$$

分别为各节点的质量矩阵、内力向量和外力向量,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵,  $\mathbf{X}$  为物质坐标。

利用质点积分可以将节点质量矩阵、内力向量和外力向量计算格式改写为

$$M_{IJ} = \sum_{k=1}^{n_p} q_I q_J N_I(\mathbf{X}_k) N_J(\mathbf{X}_k) \quad (24)$$

$$\mathbf{f}_J^{\text{int}} = \sum_{k=1}^{n_p} q_I (\nabla_0 N_J(\mathbf{X}_k)) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{X}_k) \quad (25)$$

$$\mathbf{f}_J^{\text{ext}} = \sum_{k=1}^{n_p} q_I \mathbf{b}_0(\mathbf{X}_k) N_J(\mathbf{X}_k) + \sum_{k=1}^{n_s} q_I \dot{\mathbf{t}}_0(\mathbf{X}_k) N_J(\mathbf{X}_k) \quad (26)$$

金属加工成型过程中应力增量的描述是基于欧拉坐标的,应力对时间的导数和现时构形下的速度梯度相关,可以采用链式求导法则将其转化到初始构形下

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial X_m} \frac{\partial X_m}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial X_m} F_{mj}^{-1} \quad (27)$$

金属加工成型过程中涉及到材料、物理和边界条件的高度非线性,显式时间积分不需要组装切线刚度阵,也不需要切线刚度阵求逆,在分析金属加工成型中有很大的优势。在拉格朗日描述下采用显式时间积分的流程为

(1) 初始化

(a) 生成各质点占有的体积  $q_I$ 。金属加工成型过程中,接触条件采用罚函数施加,一般采用节点力的形式而非压强的形式,所以不需要生成边界节点的面积;

(b) 搜索各质点的影响节点,计算出各质点的形函数  $N(X_I)$  及其一阶导数  $N_{,J}(X_I)$ ;

(c) 分别按照式 (24) ~ 式 (26) 生成节点质量矩阵  $M_{IJ}$ , 计算 0 时刻的内力  $f_J^{\text{int}}$  和外力  $f_J^{\text{ext}}$  得到 0 时刻的加速  $a_0$ ;

(2) 对时间步循环

(a) 判断金属和模具之间有无发生接触,若发生接触,采用罚函数施加接触条件,把接触力当作

外力  $f_n^{int}$  施加到金属表面;

(b) 对所有质点循环

i. 计算质点的变形梯度:

$$F_{n+1} = F_n + u_{n+1} \nabla_0 \quad (28)$$

ii. 计算速度梯度  $v \nabla = v \nabla_0 \cdot F^{-1}$ , 更新质点的

cauchy 应力, 然后计算名义应力  $P = J F^{-1} \cdot \cdot$ ;

iii. 计算内部节点力  $f_n^{int}$

(c) 结束对所有质点的循环

(d) 新节点加速度  $a_n = M^{-1} (f_n^{ext} - f_n^{int})$

(e) 更新节点的位移和速度:

$$v_{n+1/2} = v_{n-1/2} + a_n \quad t_n \quad (29)$$

$$u_{n+1} = u_{n-1} + v_{n+1/2} \quad t_{n+1/2} \quad (30)$$

其中  $t_{n+1/2} = \frac{(t_n + t_{n+1})}{2}$

(f) 更新节点位置  $x = x_0 + u_i N(x)_i$

(3) 结束时间循环

采用拉格朗日描述所有质点的形函数及其导数只需计算一次, 避免了像 SPH 方法那样每一步都需要搜索影响点并计算形函数而花费过多的时间。

## 5 数值算例

### 5.1 悬臂梁

端部受集中载荷作用的悬臂梁参数为  $E_0 = 1.0 \times 10^4$ ,  $\nu = 1/3$ ,  $P = 6.0$ ,  $D = 2.0$ ,  $L = 12.0$ 。梁左边按理论解给出位移边界条件, 最右端按理论解给定力边界条件, 形函数采取二次基函数, 在  $x$  方向上均布 17 个节点,  $y$  方向均匀布置 5 个节点, 节点在  $x$  和  $y$  方向的影响半径分别为节点在  $x$  和  $y$  方向上间距的 2.1 倍。图 2 比较了不同方法给出的梁的下表面的  $\sigma_{xx}$  变化曲线, 其中 EFG 法采用  $3 \times 3$  高斯积分。NIEFG 的应力出现了很大的震荡, 而 EFG 法和 PIEFG 的结果与精确解吻合的很好。

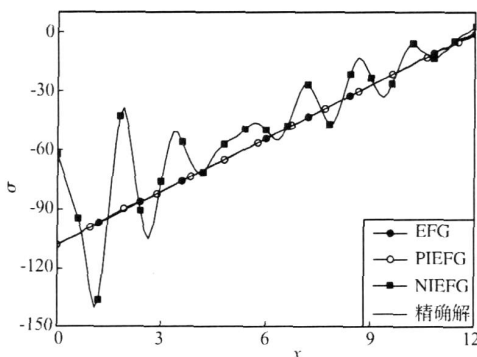


图 2 悬臂梁下表面  $\sigma_{xx}$  变化图

Fig. 2 Stress  $\sigma_{xx}$  along the bottom surface of the beam

表 1 Scale 对计算结果的影响

Tab. 1 Numerical results obtained by EFG, PIEFG and NIEFG with different value of scale

| Scale    |       | EFG   |       |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|
| $Lu$ (%) | 0.010 | 0.015 | 0.033 | 0.034 |
| $L$ (%)  | 0.949 | 0.610 | 0.795 | 0.594 |
| Scale    |       | PIEFG |       |       |
| $Lu$ (%) | 0.200 | 0.029 | 0.157 | 0.061 |
| $L$ (%)  | 1.751 | 0.961 | 1.995 | 1.31  |
| Scale    |       | NIEFG |       |       |
| $Lu$ (%) | 8.38  | 10.9  | 10.9  | 10.5  |
| $L$ (%)  | 45.7  | 11.8  | 11.8  | 12.3  |

表 2 EFG、NIEFG 和 PIEFG 的精度及效率比较

Tab. 2 Comparison on accuracy and efficiency between EFG, NIEFG and PIEFG

|          | EFG(2 $\times$ 2) | EFG(3 $\times$ 3) | NIEFG | PIEFG |
|----------|-------------------|-------------------|-------|-------|
| Time(s)  | 4.0               | 9.0               | 1.1   | 1.7   |
| $Lu$ (%) | 0.003             | 0.002             | 0.489 | 0.003 |
| $L$ (%)  | 0.232             | 0.118             | 2.549 | 0.220 |

为了进一步分析质点积分无单元法的稳定性, 定义节点影响域半径和节点间距的比值为 scale, 改变 scale 的值, 考察 scale 的变化对 EFG、PIEFG 和 NIEFG 的计算结果的影响, 结果列入表 1 中, 其中位移和应力的误差定义参考文献[1]。

由表 1 可以看出, scale 对 NIEFG 的影响最大, PIEFG 次之, 对 EFG 的影响最小。PIEFG 的应力精度很接近 EFG, 但是 PIEFG 的求解效率远高于  $3 \times 3$  高斯积分的 EFG 方法。表 2 比较了 EFG、NIEFG 和 PIEFG 集成刚度矩阵花费的时间以及它们的精度。计算中采用二次基函数, 求解域用  $81 \times 21$  均匀点离散, scale 取 2.4。EFG 的高斯积分方案分别采取  $2 \times 2$  以及  $3 \times 3$ 。从表中可以看出, 集成刚度矩阵花费的时间 EFG( $3 \times 3$ )、EFG( $2 \times 2$ )、NIEFG 和 PIEFG 比例基本为 9 4 1 2, 与其积分点数相关联。NIEFG 只需在节点上积分, 效率最高, 但精度却大幅度地下降。二维情况下 PIEFG 积分点大概为 NIEFG 的 2 倍, 但是精度有了很大的提高, 与  $2 \times 2$  的 EFG 精度相当, 而时间却只需要它的 1/2, 对于三维问题, 时间只有它的 1/4; PIEFG 的精度相对  $3 \times 3$  的 EFG 法精度并没有减弱太多, 所需时间为后者的 2/9, 而对于三维情况, 时间只需要后者的 2/27。

### 5.2 金属材料的正向挤压

金属材料的挤压成型是金属加工成型中常用的一种工艺。首先考虑一个正向挤压问题, 边长  $L = 3$  m 的立方体铜以  $v = 20$  m/s 的速度挤压到一

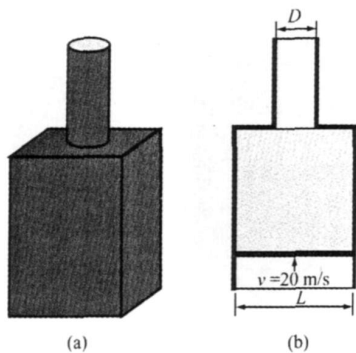


图 3 挤压成型  
Fig. 3 Extrusion forming

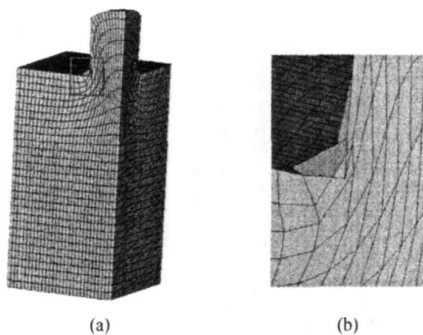


图 4 LS-DYNA 全积分计算结果  
Fig. 4 Results obtained by LS-DYNA with full integration

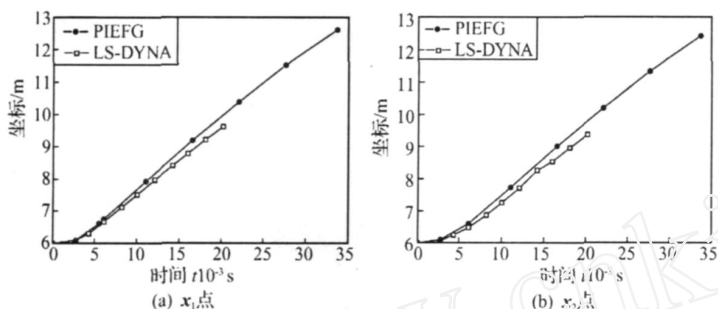


图 5 挤压过程中各点坐标 z 随时间变化曲线  
Fig. 5 The coordinate vs. time at points  $x_1$  and  $x_2$  during the extrusion process

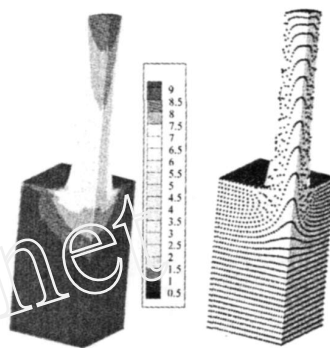


图 6 等效塑性应变和节点分布图  
Fig. 6 The equivalent plastic strain and node distribution

个直径  $D = 1.0 \text{ m}$  的圆形筒中,忽略铜立方体和周围的壳体以及圆柱壳体之间摩擦。图 3(a) 是模具的外观图,图 3(b) 是模具以及铜材料的剖面图。采用带硬化的弹塑性材料模型<sup>[13]</sup>,弹性模量  $E = 1.17 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ,泊松比  $\nu = 0.35$ ,密度  $\rho = 8930 \text{ kg/m}^3$ ,屈服模量  $\sigma_0 = 0.157 \times 10^9 \text{ Pa}$ ,硬化模量  $E_p = 0.425 \times 10^9 \text{ Pa}$ 。

采用有限元软件 LS-DYNA 计算。由于对称性,取材料的 1/4 分析,三个方向都均布 30 个网格。采用完全积分计算,当  $t = 0.012 \text{ s}$  时由于网格畸变太严重,使得单元体积变为负值而导致计算终止。图 4 是最后的变形图,其中图 4(b) 是图 4(a) 中方框部分的放大。从图中可以看出,有限元网格出现了明显的畸变甚至穿透。LS-DYNA 采用单点高斯积分没有导致计算终止,但是会因为网格畸变而使计算结果不可信。

无网格法的形函数不依赖于网格,计算过程中不会出现网格畸变的情况,因此无网格法相对于有限元在计算大变形问题上有很大的优势。图 5 比较

了完全拉格朗日描述的 PIEFG 和单点高斯积分 LS-DYNA 的计算结果。在 PIEFG 中,金属材料在  $x$ 、 $y$  和  $z$  三个方向都用 31 个节点均匀离散,一共 29791 个节点,附加质点为 27000 个。图 5(a) 是点  $x_1(0.0, 0.0, 6.0)$  在变形过程中  $z$  坐标的变化曲线,图 5(b) 是点  $x_2(1.5, 1.5, 6.0)$  在变形过程中  $z$  坐标的变化曲线。采用 PIEFG 可以快速计算到  $t = 0.034 \text{ s}$ 。单点高斯积分 LS-DYNA 计算到  $t = 0.020 \text{ s}$  时网格已经出现了畸变穿透,此后的计算结果已不可信,需要重分网格。

图 6 分别给出了采用 PIEFG 计算到  $t = 0.034 \text{ s}$  时的等效塑性应变图和节点分布图。

### 5.3 金属材料的反向挤压

金属加工成型中另一种常用的工艺是反向挤压,如图 7 所示,外径  $D = 2 \text{ m}$  的刚性圆柱壳以  $v = 50 \text{ m/s}$  的速度向下挤压一个边长  $L = 3.0 \text{ m}$  的铜质立方体,忽略立方体和周围壳体以及圆柱壳体之间的摩擦。图 7(a) 是模具的外观图,图 7(b) 是模具以及材料的剖面图。铜的材料参数与 5.2 节相同。

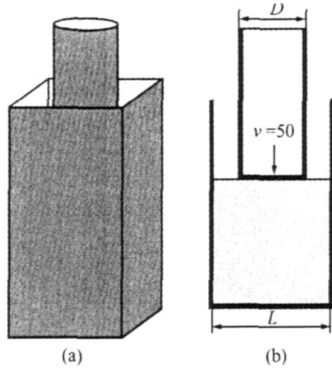


图 7 金属材料挤压成型  
Fig. 7 Intrusion forming

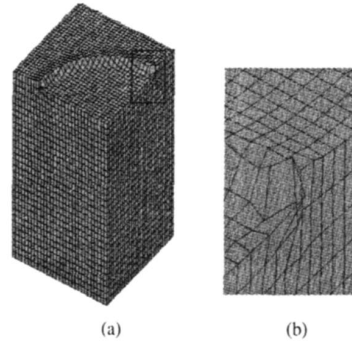


图 8 最终变形  
Fig. 8 Final configuration

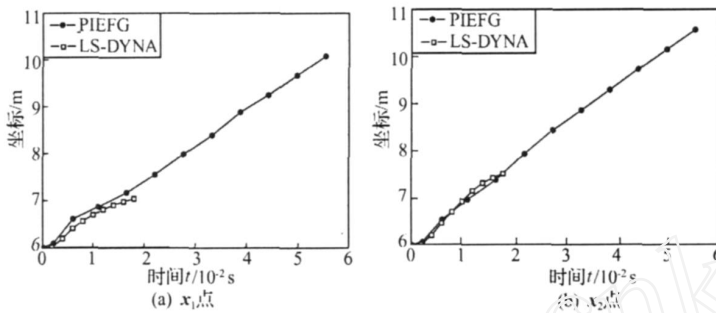


图 9 挤压过程中各点  $z$  坐标随时间变化曲线  
Fig. 9 The  $z$  coordinate vs. time at points  $x_1$  and  $x_2$  during the intrusion process

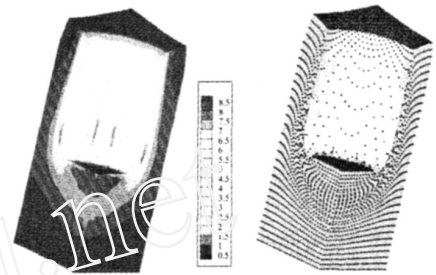


图 10 等效塑性应变和节点分布图  
Fig. 10 The equivalent plastic strain and node distribution

首先采用有限元软件 LS-DYNA 计算。由于对称性,只取材料的 1/4 分析,三个方向都均布 30 个网格。LS-DYNA 采用完全高斯积分计算到  $t = 0.001$  s 时由于网格严重畸变导致单元体积变成了负值,使得计算终止。图 8 是最后的变形图,其中图 8(b) 是图 8(a) 中方框部分的放大。从图中可以看出,有限元网格出现了明显的畸变甚至穿透。

图 9 比较了 LS-DYNA 采用单点高斯积分和完全拉格朗日描述的 PIEFG 计算的结果。在 PIEFG 中,金属材料在  $x$ 、 $y$  和  $z$  三个方向都用 31 个节点均匀离散,一共 29791 个节点,附加质点为 27000 个。图 9(a) 是点  $x_1$  (0 时刻坐标为 (1.5, 1.5, 6.0)) 在变形过程中  $z$  坐标的变化曲线,图 9(b) 是点  $x_2$  (0 时刻坐标为 (3.0, 3.0, 6.0)) 在变形过程中  $z$  坐标的变化曲线。采用 PIEFG 可以快速计算到  $t = 0.053$  s。单点高斯积分 LS-DYNA 计算到  $t = 0.018$  s 时网格已经出现了畸变穿透,此后的计算结果不可信,需要重画网格。

图 10 分别给出了采用 PIEFG 计算得到的  $t = 0.053$  s 时的等效塑性应变图和节点分布图。

## 6 结论

本文建立了质点积分无单元伽辽金法,并将其应用于金属挤压成型模拟中。算例表明该方法很好地克服了节点积分无单元伽辽金法的不稳定性问题,并且精度有了很大的提高。PIEFG 的计算效率远高于  $3 \times 3$  高斯积分的 EFG 法。金属挤压成型算例表明质点积分无单元伽辽金法在处理这类大变形问题时相对于有限元法具有很大的优势,在金属成型领域中具有良好的应用前景。

## 参考文献(References):

- [1] 张雄,刘 岩. 无网格方法[M]. 清华大学出版社.
- [2] BEL YTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element free Galerkin methods[J]. *Int J Numer Methods Engrg*, 1994, **37**:229-256.
- [3] BEL YTSCHKO T, KRONGAUZ Y, ORGAN D. Meshless methods: An overview and recent developments[J]. *Comput Mech Engrg*, 1996, **139**:3-47.
- [4] BEISSEL S, BEL YTSCHKO T. Nodal integration of the element-free method[J]. *Comput Methods apply Mech Engrg*, 1996, **139**:49-74.

- [5] CHEN J S, PAN C, WU C T. A Lagrangian reproducing kernel particle method for metal forming analysis[J]. *Comput Mech*, 1998, **22**:289-307.
- [6] DYKA C T, INGEL R P. Addressing Tension Instability in SHP Method[J]. *Naval Research Laboratory*, 1994.
- [7] DYKA C T, INGEL R P. An approach for tensile instability in smoothed particle hydrodynamics [J]. *Comput Struct*, 1994, **57**:573-580.
- [8] ZHANG X, LIU X H, SONG K Z, et al. Least-square collocation meshless method [J]. *Int J Num Meth Engrg*, 2001, **51** (9) : 1089-1100. Mc Graw-Hill, 1987.
- [9] BEL YTSCHKO T, XIAO S P. Stability analysis of particle methods with corrected derivatives[J]. *Comput Math Appl*, 2002, **43**:329-350.
- [10] RABCZUK T, BEL YTSCHKO T, XIAO S P. Stable particle methods based on Lagrangian Kernels[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2004, **193**:1035-1063.
- [11] JUN S, LIU W K, BEL YTSCHKO T. Explicit reproducing kernel particle methods for large deformation problems [J]. *Int J Numer Methods Engrg*, 1998, **41**:137-166. Belytschko T, Xiao S P. Stability analysis of particle methods with corrected derivatives [J]. *Comput Math Appl*, 2002, **43**:329-350.
- [12] 崔青玲,刘相华,王国栋,等. 板坯稳态立轧过程的 RKPM 无网格法数值模拟[J]. *机械工程学报*, 2005, **41** (5) : 84-88. (CUI Q, LIU X, WANG G, et al. Simulation of 3D Steady State edge slab rolling by the RKPM mesh less method[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2005, **41** (5) : 84-88. (in Chinese))
- [13] *Livermore Software Technology Corporation* [M]. *LS-DYNA Theoretical Manual*, 1987.

## Particle integration of element free galerkin method and its application in metal extrusion simulation

PAN Xiao-fei, ZHANG Xiong\*, LU Ming-wan

(School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract :** Element Free Galerkin(EFG) method is very computationally intensive due to the requirement of elegant background cell quadratures. Nodal Integration of Element Free Galerkin (NIEFG) method converts the background cell quadrature into nodal integration, so that it is much more efficient than EFG. However, the existence of zero energy modes in NIEFG results in instability, and some stabilization scheme should be used to stabilize the method which may introduce significant extra errors. Based on the idea of stress points and Newton-Cotes integration, a particle integration of element free Galerkin (PIEFG) method is proposed in this paper. Numerical example of linear elasticity shows that the PIEFG is pretty stable and much more efficient than EFG. Furthermore, PIEFG is extended to the simulation of metal extrusion problems, which shows that PIEFG is very promising in metal extrusion simulation.

**Key words :** meshless methods; element free galerkin; nodal integration; particle integration; metal extrusion