

钢筋混凝土的杂交交错网格物质点有限元法研究

The Hybrid Staggered Grid Finite Element Material Point Method (HSGFEMP) for Reinforced Concrete

期刊：	中国科学: 物理学 力学 天文学
稿件ID：	SSPMA-2022-0186.R2
稿件栏目：	论文
作者提交日期：	2022-06-16
参与作者列表：	阚镭, 孙梓贤, 张雄, 崔潇骁, 周旭
关键词：	物质点法, 交错网格, 钢筋混凝土
英文关键词：	material point method, staggered grid, reinforced concrete
学科领域：	计算固体力学
注意：以下文件由作者提交以供同行评审, 但不能转换为PDF. 您必须在线查看这些文件.	
矢量图.rar	



钢筋混凝土的杂交交错网格物质点有限元法研究

阚镭¹, 孙梓贤¹, 张雄^{1*}, 周旭², 崔潇骁²

1. 清华大学航天航空学院, 北京 100084

2. 北京特种工程设计研究院, 北京 100028

* 联系人, E-mail: xzhang@tsinghua.edu.cn

收稿日期: ; 接受日期: ;

国家自然科学基金(编号: 12172192)

摘要 研究能有效模拟钢筋混凝土结构在爆炸和冲击载荷作用下的响应与破坏行为的数值算法具有重要意义。物质点法 (MPM) 是模拟固体大变形和断裂破坏等极端问题的有效算法, 杂交物质点有限元法 (HFEMP) 通过在物质点法中引入有限元杆单元, 有效地提高了模拟钢筋混凝土的计算效率。但与物质点法相同, HFEMP 也存在跨网格误差、精度和稳定性低等问题。本文将交错网格物质点法的格心积分思想引入 HFEMP, 利用辅助网格进行物质点和杆单元的物理量更新映射和网格格心的物理量重构, 发展了具有更高精度的杂交交错网格物质点有限元法 (HSGFEMP)。通过研究格心积分下杆单元尺寸与背景网格尺寸之比对计算结果的影响, 验证了算法的正确性和有效性。通过实际的钢筋混凝土侵彻算例验证了 HSGFEMP 的实用性以及相对 HFEMP 具有更高的精度和计算效率。

关键词 物质点法, 交错网格, 钢筋混凝土**PACS:** 02.70.-c, 46.15.-x, 45.50.Tn, 46.35.+z

钢筋混凝土材料作为建筑结构的主要材料之一, 广泛应用于大坝、建筑、防护工程等结构中。上世纪70年代以来, 建筑结构遭受恐怖袭击、工业事故的破坏事件不断发生, 这些破坏通常由高速冲击和高能爆炸载荷产生。因此研究钢筋混凝土结构在爆炸和冲击载荷下的响应与破坏具有重要意义。一些学者通过实验对此类问题进行了研究, 如司强等[1]研究了内衬钢管钢筋混凝土柱在侧向冲击试验中的冲击力时程曲线与破坏形态; 荣誉等[2]通过实验研究了大口径弹高速冲击下钢筋混凝土靶

板的破坏模式和弹坑尺寸; 赵向军等[3]利用光测法研究了爆炸载荷作用下C35钢筋混凝土介质中的动态裂纹扩展速度; 孙运轮等[4]进行了飞机机身撞击核工程钢筋混凝土墙体模型的缩比试验研究。实验研究能得到钢筋混凝土结构毁伤的真实结果, 但具有成本与危险性高以及测量难度大的缺点。由于涉及复杂载荷与材料破坏, 对这一过程进行理论分析也较为困难。

随着计算机的计算效率和可计算规模的提升, 数值模拟已成为当前钢筋混凝土结构毁伤问题的

引用格式: 阚镭, 孙梓贤, 张雄, 周旭, 崔潇骁. 钢筋混凝土的杂交交错网格物质点有限元法研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, . . . , doi:

Lei Kan, Zixian Sun, Xiong Zhang, Xu Zhou, Xiaoxiao Cui. Hybrid Staggered Grid Finite Element Material Point Method (HSGFEMP) for Reinforced Concrete (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, . . . , doi:

重要研究手段, 具有成本低、数据采集和后处理方便、可重复性好等诸多优点。当前大多数针对钢筋混凝土结构的研究都是采用有限元法。有限元法 (Finite Element Method, FEM) 以其高精度、高计算效率、适用性广的特点成为了至今最为应用的固体模拟方法[5-9]。杨广栋等人[5]通过节点固接实现钢筋梁单元、混凝土拉氏单元间的相互作用, 研究了爆炸载荷下隧道的毁伤过程和破坏模式; 何鲁哲等人[6]采用AUTODYN显式有限元软件分析了横向效应增强型弹丸倾彻钢筋混凝土靶板的毁伤效果; 彭航等[7]研究了钢筋混凝土柱在冲击载荷作用下的崩落响应。通过数值模拟能够得到钢筋混凝土结构的动态破坏过程和机理, 尤其内部的裂纹萌生与扩展往往是试验难以观察到的。但传统有限元法对网格的依赖性很强, 在处理爆炸毁伤问题时容易发生网格畸变[10]。同时有限元常采用侵蚀算法[8]模拟结构的侵彻破坏, 会导致质量、动量、内能的不守恒。通过引入间断加强形函数的扩展有限元方法 (eXtended Finite Element Method, XFEM) [9]避免了裂纹必须经过单元边界这一限制条件, 但仍存在难以模拟裂纹的萌生, 只能处理较少数量裂纹的问题, 在冲击侵彻这类含大量裂纹萌生的问题中实用性不高。

物质点法 (Material Point Method, MPM) 是由Sulsky等人[11]提出的一种采用拉格朗日质点和欧拉网格双重描述的无网格法。物质点法不存在网格畸变问题, 且易于描述材料的断裂破坏, 在分析结构大变形和破坏问题时具有诸多优势, 被广泛地应用于冲击和爆炸问题的研究中。Hu和Chen[12]利用MPM研究了混凝土墙的爆炸毁伤效应; 马上和张雄等[10]将MPM应用于超高速碰撞问题; 廉艳平和张雄等[13]基于MPM研究了爆轰驱动下飞片运动问题; 王宇新和顾元宪等[14]采用MPM研究了飞片冲击混凝土问题。标准MPM在求解钢筋混凝土毁伤问题时, 同时用质点离散钢筋和混凝土, 但由于钢筋和混凝土之间巨大的尺寸差异导致MPM需要非常细的质点和背景网格, 从而使整体计算规模过于庞大。针对这一问题, 廉艳平和张雄等人[15]通过在MPM中引入了有限元杆单元, 提出了杂交物

质点有限元法 (Hybrid Finite Element Material Point Method, HFEMP), 分别用杆单元离散钢筋, 用质点离散混凝土, 二者统一在背景网格上更新动量方程, 实现了杆单元和物质点的自然耦合。通过杆单元模拟钢筋避免了钢筋直径方向上的尺寸对质点和背景网格间距的限制, 显著地提高了计算效率, 成为求解钢筋混凝土结构大变形问题的有力工具。

但物质点法存在形函数导数不连续引起的跨网格噪声、空间积分精度低和空间收敛性损失等缺陷。为了消除这些缺陷, Bardenhagen[16]等人利用彼得洛夫-伽辽金法, 为质点定义支撑域来修改形函数, 建立了在单元边界也具有连续导数的形函数, 有效减少了跨网格带来的数值噪声; Sadeghirad等人[17]将物质点的形状始终当成平行六面体来处理, 改变形函数形式, 发展了CPDI (Convected Particle Domain Interpolation) 算法; Steffen等人[18]证明了高阶光滑的形函数能有效减弱跨网格噪声引起的积分误差, 采用高阶的二次B样条基函数来构建形函数, 发展了B样条物质点法 (B-SplineMPM, BSMPM); 梁勇和张雄等[19]从改进积分方式的角度提出了交错网格物质点法 (Staggered Grid Material Point Method, SGMP), 通过引入交错网格改善了空间物理场重构和映射方案, 实现了背景网格的格心积分, 在较少增加时间成本的情况下消除了跨网格误差。阚镭和张雄等[20]分析了不同应力更新方案下SGMP的能量误差, 进而给出最适宜的应力更新格式, 同时提出SGMP的一种接触算法使之成功应用于实际工程模拟。SGMP相较于标准MPM有更高的计算精度和更好的稳定性, 提升了MPM的整体算法性能, 同时兼顾了计算效率。由于HFEMP是基于MPM的方法, 仍采用质点积分, 同样存在跨网格误差带来的精度、稳定性降低等问题。本文将SGMP的格心积分思想引入HFEMP, 提出了针对钢筋混凝土问题的杂交交错网格物质点有限元法 (Hybrid Staggered Grid Finite Element Material Point Method, HSGFEMP), 消除了跨网格误差并相较于HFEMP具有更高的精度。

本文的第1、2节分别介绍了HFEMP和SGMP的

基本思想和算法构建, 第3节提出了杂交交错网格物质点有限元法 (HSGFEMP) 的算法格式和具体实现方案, 研究了HSGFEMP中杆单元尺寸与网格尺寸之比对计算结果的影响, 最后第4节通过数值算例研究了HSGFEMP模拟钢筋混凝土板的具体效果, 并与HFEMP进行了对比。

1 杂交物质点有限元法

杂交物质点有限元法(HFEMP)中分别用物质点离散混凝土, 用杆单元离散钢筋, 通过物质点法和有限元法的杂交耦合求解, 实现了钢筋混凝土的有效模拟。

物质点法[11,21]将连续体离散成一组粒子(称为物质点或质点), 并且在物质运动区域建立背景网格, 其中质点携带了所有的物质信息, 其运动代表了物质的变形和运动, 背景网格不携带任何物质信息, 仅用于计算空间导数和求解动量方程(如图1)。

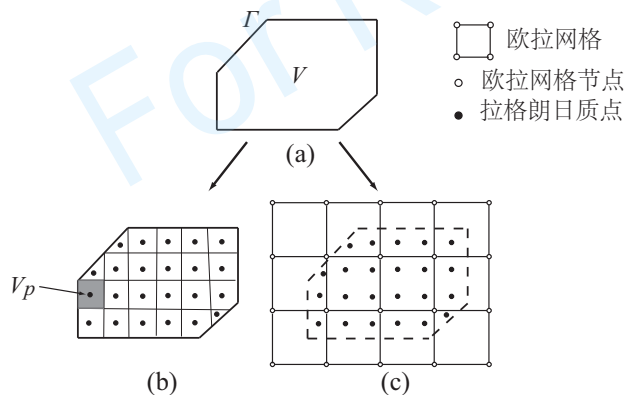


图1 物质点法示意图

Figure 1 Diagram of Material Point Method

HFEMP的空间计算域离散如图2所示, 其中物质点(实心原点)用于离散混凝土, 一维杆单元用于离散钢筋。物质点和杆单元共同在背景网格上通过拉格朗日弱形式更新动量方程, 即

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_i \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho b_i \delta u_i \, d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{t}_i \delta u_i \, d\Gamma = 0 \quad (1)$$

式中 ρ 为密度场, 下标 i 和 j 分别表示物理量的空间分量且采用爱因斯坦求和约定, u_i 为位移, δu_i 为虚位移, b_i 为体力, σ_{ij} 为柯西应力张量, Γ_i 为自然边界, \bar{t}_i 为边界力。

利用背景网格对位移进行插值, 代入上式后可得到离散形式的动量方程, 即

$$\dot{p}_i^I = f_i^{I,int} + f_i^{I,ext}, \quad \forall I \notin \Gamma_u \quad (2)$$

其中上标 I 表示该物理量为背景网格节点量, 分量形式的节点动量的变化率 \dot{p}_i^I 、节点内力 $f_i^{I,int}$ 和节点外力 $f_i^{I,ext}$ 分别为

$$f_i^{I,int} = - \int_{\Omega} N_j^I \sigma_{ij} \, d\Omega \quad (3)$$

$$f_i^{I,ext} = \int_{\Omega} \rho b_i N^I \, d\Omega + \int_{\Gamma_i} N^I \bar{t}_i \, d\Gamma \quad (4)$$

$$\dot{p}_i^I = m^I \ddot{u}_i^I = m^I a_i^I \quad (5)$$

其中 N^I 为节点 I 的形函数, a_i^I 为分量形式的节点 I 的加速度, 节点质量为

$$m^I = \int_{\Omega} \rho N^I \, d\Omega \quad (6)$$

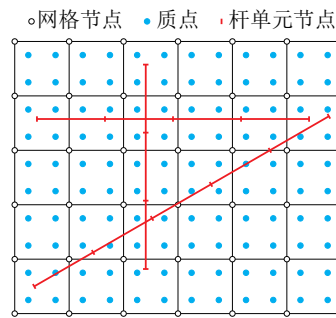


图2 杂交物质点有限元法的空间离散

Figure 2 Space discretization of HFEMP

HFEMP采用与MPM一致的计算框架, 即混凝土和钢筋的物质信息分别储存在物质点和杆单元上, 具备拉格朗日属性, 背景网格不存储任何信息, 只用于动量方程的求解。HFEMP的四个步骤分别为: (1) 根据质点和杆单元物理量计算背景网格的物理量; (2) 背景网格动量方程的求解; (3) 将背景网格物理量映射回物质点和杆单元中, 更新质点和单元物理量; (4) 背景网格恢复为初始状态。

1.1 计算背景网格物理量

背景网格的物理量(质量、动量和节点力)来源于混凝土质点和钢筋杆单元两部分的贡献。节点质量可表示为

$$m^I = \sum_{p=1}^{n_p} N_p^I m_p + \sum_{r=1}^{n_r} N_r^I m_r \quad (7)$$

式中 n_p 表示物质点总数, $N_p^I = N^I(\mathbf{x}_p)$ 为节点 I 的形函数在物质点当前位置 \mathbf{x}_p 处的值, n_r 表示杆单元节点总数, $N_r^I = N^I(\mathbf{x}_r)$ 为节点 I 的形函数在杆单元节点当前位置 \mathbf{x}_r 处的值。 m_p 为物质点的质量, 杆单元节点质量 m_r 由杆单元密度计算得到, 即

$$m_r = \frac{1}{2} \rho_e l_e A \quad (8)$$

式中 ρ_e 为杆单元的单元密度, 存储于单元格心, l_e 和 A 分别为杆单元长度和横截面积。

由于杆单元的速度存储于杆单元节点, 背景网格节点动量为

$$p_i^I = \sum_{p=1}^{n_p} N_p^I m_p v_{ip} + \sum_{r=1}^{n_r} N_r^I m_r v_{ir} \quad (9)$$

杆单元是一维模型, 其单元内只存储轴向正应力, 单元的节点内力为

$$f_{ri}^{\text{int}} = \sum_{e=1}^{n_e} \Lambda_{re} A \sigma_e n_{ei} \quad (10)$$

其中 σ_e 为单元 e 的轴向应力, n_{ei} 表示单元 e 的方向余弦, n_e 为杆单元总数。如果节点 r 与单元 e 不相连, $\Lambda_{re} = 0$, 如果节点位于单元起始端, $\Lambda_{re} = 1$, 如果节点位于单元末端, $\Lambda_{re} = -1$ 。单元的方向余弦 n_{ei} 通过其两端节点坐标计算, 即

$$n_{ei} = (x_{ri} - x_{si})/l_e \quad (11)$$

其中 x_{ri} 表示单元末端节点的当前位置, x_{si} 表示单元起始端节点的当前位置。得到杆单元节点力以后, 背景网格节点内力为

$$f_i^{\text{int}} = - \sum_{p=1}^{n_p} V_p N_{p,j}^I \sigma_{ijp} + \sum_{r=1}^{n_r} N_r^I f_{ri}^{\text{int}} \quad (12)$$

在计算外力时同样需要额外考虑施加在杆单元上的外力 f_{ri}^{ext} 。如果杆单元外力是节点力, 那么可直接积分到背景网格中去; 如果为施加在单元上的分布力, 则类似内力的计算, 首先将其转换为杆单元节点外力。最终得到节点外力为

$$f_i^{\text{ext}} = \sum_{p=1}^{n_p} (m_p N_p^I b_{ip} + N_p^I \bar{t}_{ip} h^{-1} V_p) + \sum_{r=1}^{n_r} N_r^I f_{ri}^{\text{ext}} \quad (13)$$

1.2 背景网格的动量更新

钢筋混凝土受冲击爆炸载荷作用的问题属于瞬态动力学响应问题, 通常采用较小的时间步长来捕捉物理量的高频变化, 因此适合选择单步计算量很小的显式积分格式。HFEMP选择中心差分法的蛙跳格式进行动量方程的时间积分, 蛙跳格式具有二阶时间精度。

在 t^k 时刻, 首先由节点力计算加速度

$$a_i^{I,k} = \frac{1}{m^I} (f_i^{\text{int},k} + f_i^{\text{ext},k}) \quad (14)$$

然后利用节点加速度, 计算节点在 $t^{k+1/2}$ 时刻的速度和 t^{k+1} 时刻的位移, 即

$$\begin{aligned} v_i^{I,k+1/2} &= v_i^{I,k-1/2} + a_i^{I,k} \Delta t^k \\ u_i^{I,k+1} &= u_i^{I,k} + v_i^{I,k+1/2} \Delta t^{k+1/2} \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\Delta t^{k+1/2} = t^{k+1} - t^k \quad (16)$$

$$\Delta t^k = t^{k+1/2} - t^{k-1/2} = \frac{1}{2} (\Delta t^{k-1/2} + \Delta t^{k+1/2}) \quad (17)$$

HFEMP在计算过程中需要动态更新临界时间步长,

$$\Delta t_{\text{cr}} = \min \left(\min_c \frac{l_c}{\max_p (c_p + |\mathbf{v}_p|)}, \min_e \frac{l_e}{c_e + |\mathbf{v}_e|} \right) \quad (18)$$

式中 l_c 为背景网格单元 c 的特征尺寸, 对于HFEMP采用的均匀规则背景网格, l_c 可取为网格单元边长 d_c , l_e 为杆单元长度。 c_p 、 $|\mathbf{v}_p|$ 、 c_e 和 $|\mathbf{v}_e|$ 分别为质点 p 的声速和速度大小以及单元 e 的声速和格心速度大小。

1.3 质点和杆单元物理量更新

完成背景网格动量更新后, 可根据网格节点的加速度和速度分别更新物质点和杆单元的速度和位置, 以及应变、应力等物理量。

对于物质点, 其速度与位置通过背景网格速度和加速度更新, 即

$$v_{ip}^{k+1/2} = v_{ip}^{k-1/2} + \sum_{l=1}^{n_a} N_p^{l,k} a_i^{l,k} \Delta t \quad (19)$$

$$x_{ip}^{k+1} = x_{ip}^k + \sum_{l=1}^{n_a} N_p^{l,k} v_i^{l,k+1/2} \Delta t \quad (20)$$

物质点的应力和应变则通过由背景网格节点速度计算得到的物质点的应变率和旋率联合本构方程更新, 即

$$\dot{\varepsilon}_{ijp} = \sum_{l=1}^{n_a} \frac{1}{2} (N_{p,j}^l v_i^l + N_{p,i}^l v_j^l) \quad (21)$$

$$\dot{W}_{ijp} = \sum_{l=1}^{n_a} \frac{1}{2} (N_{p,j}^l v_i^l - N_{p,i}^l v_j^l) \quad (22)$$

其中 ε_{ij} 和 W_{ij} 分别为应变张量和旋量张量。

对于杆单元, 则首先更新杆单元节点的位置和速度

$$v_{ir}^{k+1/2} = v_{ir}^{k-1/2} + \sum_{l=1}^{n_a} N_r^{l,k} a_i^{l,k} \Delta t \quad (23)$$

$$x_{ir}^{k+1} = x_{ir}^k + \sum_{l=1}^{n_a} N_r^{l,k} v_i^{l,k+1/2} \Delta t \quad (24)$$

式中 n_a 表示网格节点总数。杆单元的应力更新方式与物质点不同, 是直接由单元轴向拉伸变形更新, 在根据方程(24)更新杆单元节点的位置后, 杆单元的轴向应变增量为

$$\Delta \varepsilon_e^{k+1} = (l_e^{k+1} - l_e^k) / l_e^k \quad (25)$$

根据应变增量 $\Delta \varepsilon_e^{k+1}$ 和本构方程, 可计算得到应力增量 $\Delta \sigma_e^{k+1}$, 然后更新单元应力

$$\sigma_e^{k+1} = \sigma_e^k + \Delta \sigma_e^{k+1} \quad (26)$$

在物质点法中, 质点的应力可在计算步开始的时候更新, 也可以在计算步结束时更新,

这两种方法分别被称作USF格式 (Update-Stress-First) 和USL格式 (Update-Stress-Last)。MUSL (Modified Update-Stress-Last) 格式是对USL格式的一种改进。Bardenhagen[22]证明了USL格式具有较强的数值耗散, 而USF具有一定的能量守恒特性。对应于物质点的三种应力更新格式, HFEMP也存在三种实现方案, 如图3所示。

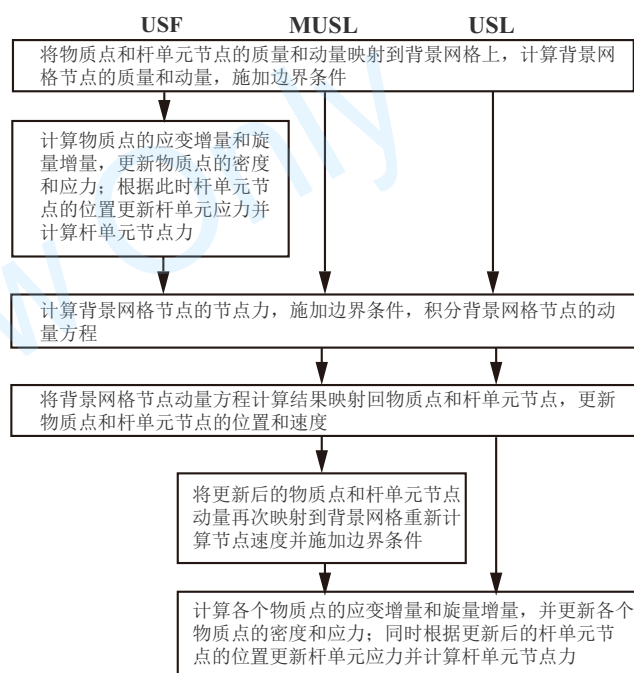


图3 HFEMP的计算流程

Figure 3 Flow Chart of the HFEMP

2 交错网格物质点法

物质点法采用的质点积分, 会导致积分精度和数值稳定性下降, 并且还会产生跨网格误差。为了高效地消除跨网格误差, 交错网格物质点法[19, 20]通过引入一种新颖的空间物理场重构和映射方案, 通过交错网格重构格心物理量, 并实现了背景网格的格心积分, 从而代替了原质点积分方案, 提高了算法的精度和稳定性。交错网格物质点法并未改变物质点法的计算框架, 依旧包含四个步骤: (1) 根据质点物理量计算背景网格的物理量; (2) 背景网格动量方程的求解; (3) 将背景网格物理量映射回物质点, 更新质点物理量; (4) 背

景网格恢复为初始状态。交错网格物质点法的步骤(2)和步骤(4)与物质点法完全相同。

在步骤(1)中,背景网格的物理量重构通过格心积分计算,节点质量、节点动量和节点力分别为

$$m^I = \sum_{c=1}^{n_c} N_c^I m_c \quad (27)$$

$$p_i^I = \sum_{c=1}^{n_c} N_c^I p_{ic} \quad (28)$$

$$f_i^{I,int} = - \sum_{c=1}^{n_c} V_c N_c^I \sigma_{ijc} \quad (29)$$

$$f_i^{I,ext} = \sum_{c=1}^{n_c} (m_c N_c^I b_{ic} + N_c^I \bar{t}_{ic} h^{-1} V_c) \quad (30)$$

其中下标 c 表示格心量, n_c 是背景网格的单元总数, $m_c = \rho_c V_c$, V_c 为单元体积, N_c^I 是节点 I 的形函数在格心处的值。对于三维八节点单元采用的三线性形函数, N_c^I 恒等于 $1/8$ 。

背景网格的格心量需要通过物质点上的物理量重构,为此将背景网格在每个方向上移动其单元边长的一半构建辅助网格,如图4所示。辅助网格的节点就是背景网格的格心,可在辅助网格中根据物质点所携带的物理量计算辅助网格节点(即背景网格格心)的积分量,即

$$m_c = \sum_{p=1}^{n_p} N_{cp} m_p \quad (31)$$

$$p_{ic} = \sum_{p=1}^{n_p} N_{cp} m_p v_{ip} \quad (32)$$

$$\sigma_{ijc} V_c = \sum_{p=1}^{n_p} N_{cp} \sigma_{ijp} V_p \quad (33)$$

$$m_c b_{ic} = \sum_{p=1}^{n_p} N_{cp} m_p b_{ip} \quad (34)$$

其中 $N_{cp} = N_c(\mathbf{x}_p)$ 是辅助网格节点 c 的形函数在质点 \mathbf{x}_p 处的值。

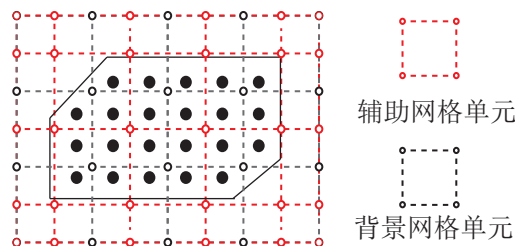


图4 SGMP中的辅助网格

Figure 4 The Auxiliary Grid in the SGMP

在步骤(3)中,质点信息的更新方式与步骤(1)相协调,即首先将背景网格的更新信息映射到单元格心,然后再根据格心量插值计算质点更新。格心速度、格心加速度和质点加速度为

$$v_{ic} = \sum_{I=1}^8 N_c^I v_i^I \quad (35)$$

$$a_{ic} = \sum_{I=1}^8 N_c^I a_i^I \quad (36)$$

$$a_{ip} = \sum_{c=1}^{n_c} N_{cp} a_{ic} \quad (37)$$

格心应变率和旋率为

$$\dot{\epsilon}_{ijc} = \sum_{I=1}^{n_a} \frac{1}{2} (N_{c,j}^I v_i^I + N_{c,i}^I v_j^I) \quad (38)$$

$$\dot{W}_{ijc} = \sum_{I=1}^{n_a} \frac{1}{2} (N_{c,j}^I v_i^I - N_{c,i}^I v_j^I) \quad (39)$$

质点的应变率和旋率则根据辅助网格插值得到

$$\dot{\epsilon}_{ijp} = \sum_{c=1}^{n_c} N_{cp} \dot{\epsilon}_{ijc} \quad (40)$$

$$\dot{W}_{ijp} = \sum_{c=1}^{n_c} N_{cp} \dot{W}_{ijc} \quad (41)$$

综上,交错网格物质点法的辅助网格起到了物质点与背景网格信息交换过程的中转站作用。通过引入格心积分,SGMP具有更优的收敛性和稳定性,同时消除了跨网格误差,在计算中能选取更大的时间步长,保证了计算效率[20]。

3 杂交交错网格物质点有限元法

为了消除HFEMP中的跨网格误差,本文

将SGMP的格心积分思想引入HFEMP, 提出杂交交错网格物质点有限元法 (HSGFEMP)。

3.1 算法思想

由于SGMP只改变了物质点法中背景网格的积分方案和质点物理量的更新映射方案, 其空间离散不变, 因此HSGFEMP的空间离散仍然如图2所示。为了保持SGMP的优势, 节点质量、动量和节点力依旧采用格心积分计算, 而在格心量的重构中则需要同时考虑质点和杆单元的贡献。对于节点质量和节点力, 格心质量和动量根据辅助网格计算, 即

$$m_c = \sum_{p=1}^{n_p} N_{cp} m_p + \sum_{r=1}^{n_r} N_{cr} m_r \quad (42)$$

$$p_{ic} = \sum_{p=1}^{n_p} N_{cp} m_p v_{ip} + \sum_{r=1}^{n_r} N_{cr} m_r v_{ir} \quad (43)$$

其中 N_{cr} 表示辅助网格节点 c 的形函数在杆单元节点 r 处的值。然后再利用格心积分, 计算背景网格质量和动量, 即方程(27)和(28)。

节点力的计算分为两个部分, 物质点的应力和体力依旧根据方程(33)和(34)映射到格心, 而杆单元的轴向应力先通过方程(10)积分到节点上, 然后映射到格心上, 即

$$f_{ic}^{int} = \sum_{r=1}^{n_r} N_{cr} f_{ir}^{int} \quad (44)$$

$$f_{ic}^{ext} = \sum_{r=1}^{n_r} N_{cr} f_{ir}^{ext} \quad (45)$$

其中 f_{ic}^{int} 和 f_{ic}^{ext} 指杆单元节点映射到格心的内力和外力。然后根据格心的物质点应力和杆单元节点力计算背景网格节点力, 即

$$f_i^{l,int} = - \sum_{c=1}^{n_c} V_c N_{c,j}^l \sigma_{ijc} + \sum_{c=1}^{n_c} N_c^l f_{ic}^{int} \quad (46)$$

$$f_i^{l,ext} = \sum_{c=1}^{n_c} (m_c N_c^l b_{ic} + N_c^l \bar{t}_{ic} h^{-1} V_c + N_c^l f_{ic}^{ext}) \quad (47)$$

采用蛙跳格式对动量方程进行时间积分, 背景网格更新后的位移和速度需要映射到质点和杆单元上并以此更新质点和杆单元的应力。在SGMP中,

背景网格节点的位移和速度增量是先映射到单元格心, 再通过辅助网格, 映射回物质点, 这样的映射方式能保障质点间位移的连续性。同样地为了保证物质点与杆单元节点间位移的连续性, 使二者不出现质点穿透杆单元的现象, 杆单元节点的速度和位置更新也需要与质点一致, 根据辅助网格进行映射, 即

$$v_{ir}^{k+1/2} = v_{ir}^{k-1/2} + \sum_{c=1}^{n_c} N_{cr}^k a_{ic}^k \Delta t \quad (48)$$

$$x_{ir}^{k+1} = x_{ir}^k + \sum_{c=1}^{n_c} N_{cr}^k v_{ic}^{k+1/2} \Delta t \quad (49)$$

杆单元的应力仍然直接由方程(25)~(26), 通过单元轴向拉伸变形进行更新。

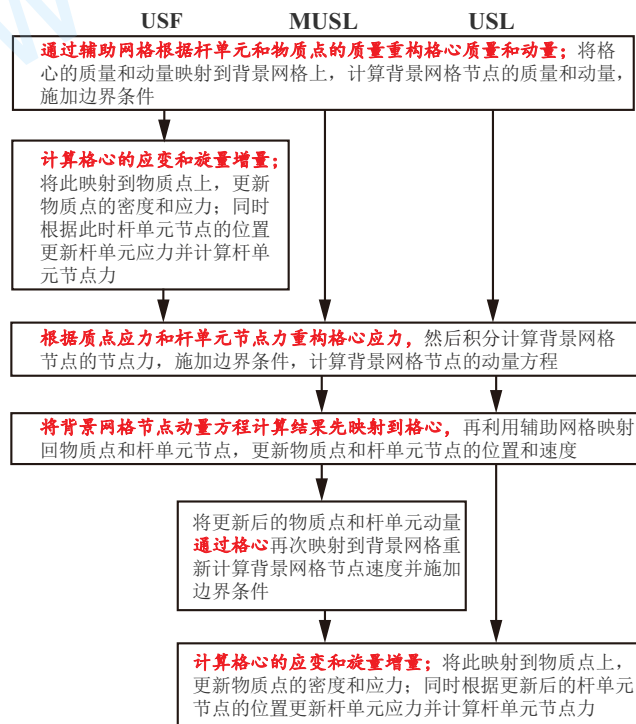


图5 HSGFEMP计算流程
Figure 5 Flow Chart of the HSGFEMP

HSGFEMP的具体实现流程如图5所示。在流程图中, HSGFEMP相对于HFEMP的改动被加粗显示。可见HSGFEMP的改动在于改变了杆单元节点和背景网格节点之间的信息传递方式。利用辅助网格作为信息传递中介, 可成功地将物质点和杆单元

耦合在一起求解, 既保证了高精度的格心积分, 又能确保杆单元和固体的无相对滑移。

3.2 算法分析

在HFEMP的文章中, 廉艳平和张雄等人已经证明杆单元尺寸与背景网格尺寸之间的大小关系将影响计算结果[15]。当杆单元尺寸与背景网格节点间距的比值大于2时, 杆单元完全等价于FEM的杆单元; 当比值小于2时, 杆单元的计算结果与FEM不等。

对于HSGFEMP, 以单层二维网格下的一维杆单元为例, 研究不同网格尺寸与杆单元尺寸之比对计算结果的影响。如图6所示, 杆单元节点用 r 表示, 根据顺序从左到右依次增加, 杆单元节点 r 所在的单元和格心都用 c_r 表示, 而该网格单元的四个节点分别记为 I_r^1 、 I_r^2 、 I_r^3 和 I_r^4 。图6给出了三种不同的网格尺寸与杆单元尺寸之比的网格设置, 其中工况1的杆单元尺寸是背景网格单元尺寸的2倍, 工况2中二者相同, 工况3中杆单元尺寸是网格尺寸的3倍。

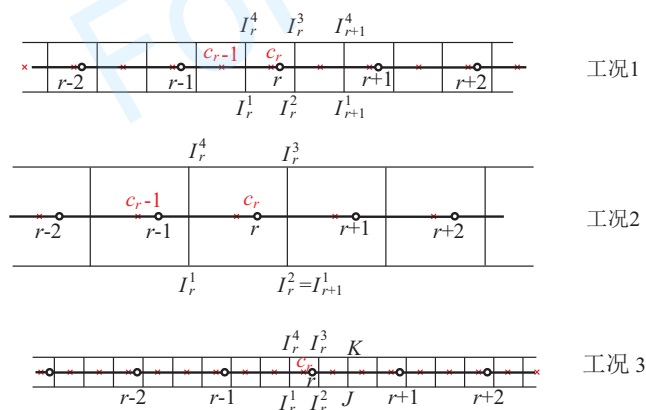


图6 网格尺寸与杆单元尺寸之比对计算的影响

Figure 6 Influence of the Ratio of the Mesh Size to Rod Element size

在HFEMP中, 工况1的杆单元与有限元杆单元解相同。而在HSGFEMP中, 根据方程(48)和(36), 工况1的杆单元节点 r 的加速度与周围两个背景网格单元节点 I_r^1 、 I_r^2 、 I_r^3 、 I_r^4 、 I_{r+1}^1 和 I_{r+1}^4 的加速度均有关。根据背景网格物理量的计算方程(42)~(47), 杆单元节点 r 的加速度是与杆单元节点 $r-1$ 和 $r+1$ 的物

理量信息有关的, 而在有限元中, 单元节点加速度的计算不会受到其他节点的节点力和节点质量的影响, 因此工况1不能保证HSGFEMP中杆单元的计算结果与有限元相同。由此可见, 如果网格节点上的节点力和节点质量受到多个杆单元节点的贡献, 经过映射以后杆单元节点的加速度也会受其他杆单元节点的影响。因此要使HSGFEMP中杆单元与有限元的杆单元解相同, 背景网格节点应只受到一个杆单元节点的影响。

对于上述一维问题, 我们发现其充分条件是计算背景网格节点物理量的形函数的支撑域小于等于杆单元的单元长度。HFEMP的背景网格节点形函数为 $\sum_r N_r^i$, 其支撑域为网格尺寸的两倍; 而HSGFEMP的背景网格节点形函数为 $\sum_c \sum_r N_c^i N_{cr}$, 其支撑域为网格尺寸的三倍。因此在HFEMP中杆单元与FEM杆单元的解相同的最小杆单元尺寸与背景网格尺寸之比为2 (这与廉艳平等人[15]结论一致), 而在HSGFEMP中这一比例为3。工况3可验证这一结论, 其中杆单元节点 r 的加速度由背景网格节点 I_r^1 、 I_r^2 、 I_r^3 、 I_r^4 、 J 和 K 的加速度插值得到。由于这些网格节点上的力和动量仅由杆单元节点 r 计算得到, 因此杆单元节点 r 的加速度与有限元杆单元中的节点加速度相同。上述分析说明当杆单元尺寸和网格尺寸之比大于3时, HSGFEMP中的杆单元模拟钢筋是有效的, 我们称能得到杆单元有限元解的最小杆单元长度为杆单元的协调尺寸, HSGFEMP的杆单元协调尺寸为3。

进一步分析, 我们发现HSGFEMP与FEM二者中杆单元的差别在于积分方式。由于HSGFEMP的动量方程在背景网格上求解, 所以空间的离散分辨率由网格尺寸决定, 而当杆单元的分辨率大于空间网格分辨率时, 网格的离散精度不能满足杆单元离散精度的要求, 此时杆单元上的高分辨率的信息无法完全被低分辨率的空间网格所捕捉, 在信息传递过程中出现损失。杆单元的有限元解对应于满足其分辨率精度的解, 而HSGFEMP中杆单元解则对应于通过网格“滤波”以后的解。所以高分辨率的杆单元无法在低分辨率网格上得到满足其分辨率的解; 而低分辨率的杆单元能够在高分辨率的背景网

格上得到满足其分辨率的解。

因此, 在HSGFEMP中当杆单元尺寸小于其协调尺寸时, 并非HSGFEMP的计算结果错误, 而是此时HSGFEMP只能得到杆单元在低分辨率的网格限制下的低精度的解; 相反, 当杆单元尺寸远大于其协调尺寸时, 虽然杆单元虽然能够得到满足其分辨率要求的解, 但是杆单元分辨率较低, 浪费了背景网格的求解能力。故令杆单元达到其协调尺寸附近能够在有限的计算资源下达到最高的计算分辨率。

对于钢筋的大变形模拟, 由于钢筋主要承载拉伸载荷, 单元尺寸的伸长不会影响其求解分辨率。但如果在少数情况下单元尺寸减小至低于其协调尺寸, 杆单元求解精度会有所降低。另外, HFEMP中的跨网格误差来自于节点力方程(12)的第一项物质点对节点力的贡献项中不连续的形函数导数, 而该方程第二项杆单元节点力的贡献项中没有形函数导数。因此无论是在HFEMP还是HSGFEMP中, 杆单元的相关计算中均不存在跨网格误差。而HFESGMP中通过格心积分, 消除了来自物质点部分的跨网格误差。

4 数值算例

本节采用HSGFEMP对一维杆单元拉伸问题和钢筋混凝土板的侵彻问题进行了数值模拟。通过对一维杆单元拉伸问题的模拟, 验证了HSGFEMP算法的正确性和有效性; 而后通过具体的钢筋混凝土侵彻算例研究HSGFEMP在实际问题中的应用效果。

4.1 一维杆单元拉伸

采用一维杆单元拉伸问题[15]对HSGFEMP方法进行验证, 该问题的物理模型、杆单元离散模型以及有限元等效模型如图7所示。一维弹性杆的左端固定, 右端施加恒定外力 $F = 10000\text{N}$, 杆长 $L = 0.4\text{m}$, 横截面积 $A = 0.785\text{m}^2$, 密度 $\rho = 8.9 \times 10^3\text{kg/m}^3$, 弹性模量 $E = 1.17 \times 10^{11}\text{Pa}$ 。

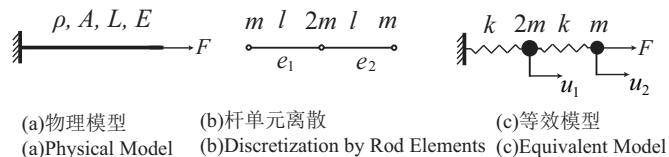


图7 一维杆拉伸

Figure 7 1D Rod Vibration

为了简便, 将杆用两个杆单元离散, 分别记为单元 e_1 和 e_2 , 单元长度 $l = L/2$, 节点质量 $m = \rho Al/2$ 。如图7(b), 左端的杆单元节点施加固定边界条件, 最右端的杆单元节点上施加外力 F 。本问题为一维拉伸的动态响应问题, 如果采用有限元杆单元在同样的离散条件下用线性形函数求解该问题, 上述模型可等效为图7(c)所示的弹簧质量振动系统, 弹簧刚度为 $k = EA/l$ 。可得两个杆单元的轴向应力的有限元解为

$$\sigma_{e1} = \frac{u_1}{l}E, \quad \sigma_{e2} = \frac{u_2 - u_1}{l}E \quad (50)$$

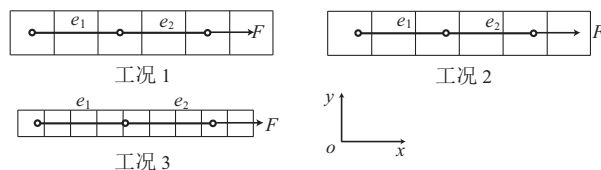


图8 一维杆拉伸算例中背景网格设置

Figure 8 Background Grid Setting of 1D Rod Vibration

本算例中网格的设置如图8所示, 其中工况1中网格单元尺寸为 $d_1 = l/2 = 0.1\text{m}$, 三个杆单元节点均处于单元中心; 工况2中单元尺寸 $d_2 = d_1 = 0.1\text{m}$, 但杆相对于工况1向x轴正方向移动了 $\frac{1}{2}d_2$, 使得杆单元节点不再处于单元格心; 工况3中的网格尺寸为 $d_3 = 0.06\text{m}$ 。这三种工况的设计既可以反映出杆单元节点在单元内相对位置对杆单元计算结果的影响, 也可以测试杆单元和网格尺寸间的大小关系对计算的影响。

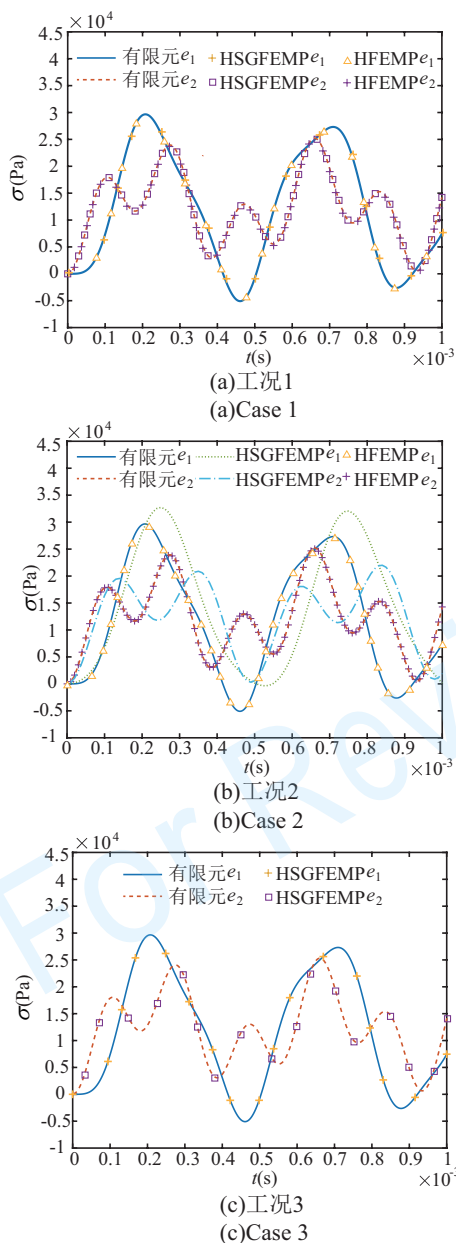


图9 杆单元应力变化曲线
Figure 9 Axial Stress Curves of Rod Elements

图9为工况1、工况2和工况3下杆单元 e_1 和 e_2 中应力变化曲线图。图9(a)为工况1的应力曲线，杆单元尺寸为HFEM的协调尺寸，但是小于HSGFEM的协调尺寸。HFEM得到了与有限元解完全一致的杆单元应力。对于HSGFEM，虽然工况1中杆单元尺寸没有达到协调尺寸，但是由于此时杆单元节点在网格格心，所以HSGFEM退

化为HFEM，也能得到杆单元的有限元解。而图9(b)的工况2中杆单元节点不再处于单元格心，因此其应力曲线中HSGFEM的单元应力与有限元解有明显的差别。工况1和工况2的模拟结果对比说明HSGFEM中杆单元的协调尺寸大于2。而HSGFEM中当杆单元尺寸小于其协调尺寸时，计算结果与杆单元相对于背景网格的位置有关。在图9(c)所示的工况3中，HSGFEM的杆单元得到杆单元的有限元解，这与前面的理论分析相吻合。

本算例比较了在不同的网格尺寸和杆单元相对位置时，一维杆动态振动的单元应力的模拟结果与有限元结果，计算结果表明HSGFEM能有效模拟钢筋混凝土中的钢筋，并且其杆单元协调尺寸为3。

4.2 钢筋混凝土板的侵彻问题

混凝土是水泥作为胶凝材料，砂石作为集料，通过与一定比例的水搅拌而成的材料。目前常用的混凝土本构包括Holmquist-Johnson-Cook (HJC) 本构[23]、RHT本构[24]以及混凝土损伤模型[25]等。HJC本构是应变率相关的本构，其将混凝土大变形过程中的孔洞坍塌所产生的效应引入了强度模型中，能够很好地描述混凝土材料在高应变率、高应力下的大变形和破坏行为。因此本文采用HJC模型模拟混凝土。

本问题根据Hanchak等人[26]开展的卵形弹丸冲击钢筋混凝土的实验，利用HSGFEM模拟以验证该方法的有效性。在实验中，弹丸的几何形状以及钢筋混凝土板的尺寸和钢筋布置情况如图10所示，其中图(a)中的卵形子弹的弹头直径为25.4mm，曲径比为3，弹身为高101.6mm的圆柱体。在图10(b)的钢筋混凝土板中，靶板正面为610mm的正方形，厚度为178mm，其厚度方向布置有三层等间距为76.2mm的钢筋，而每层钢筋则由两个方向各7根钢筋垂直交错排列而成，钢筋的直径为5.59mm，钢筋轴心之间的间距为76.2mm。在子弹侵彻钢筋混凝土靶板的实验中弹丸侵彻靶板的位置都选在没有钢筋处。

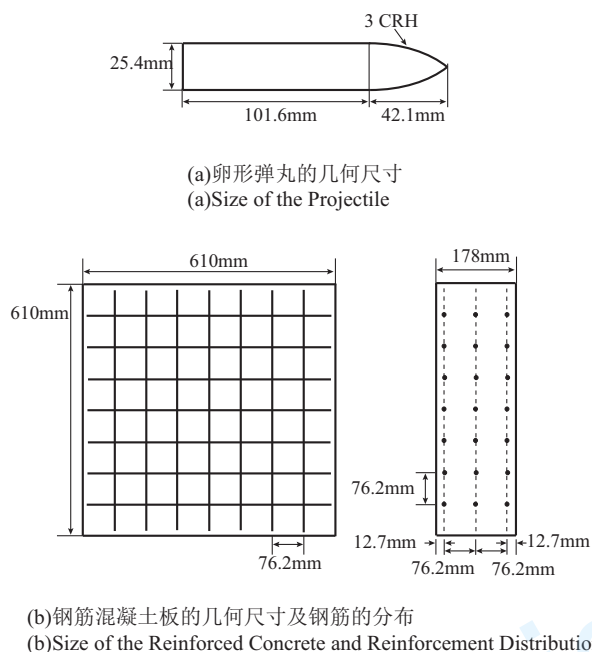


图 10 弹丸与钢筋混凝土的尺寸
Figure 10 Size of The Projectile and the Reinforced Concrete

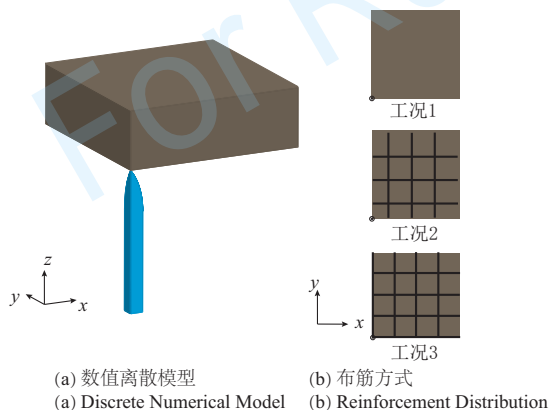


图 11 数值模型
Figure 11 Numerical Model

利用对称性建立1/4数值离散模型如图11(a)所示, 在对称面 $x = 0$ 和 $y = 0$ 设置对称边界。本算例中设置11(b)所示的三种钢筋分布情况, 实线表示钢筋, 其余为混凝土板。左下角(0,0)处为弹丸侵彻的位置。工况1为混凝土靶板, 工况2为实验所采用的钢筋混凝土板, 工况3将工况2中的钢筋移动了一段距离, 使得弹丸恰好冲击到钢筋上。模拟中分别采用网格尺寸为 $h = 4\text{mm}$ 和 $h = 2\text{mm}$, 而杆单元的

尺寸取为其协调尺寸。

在本问题中, 根据实验[26]对材料的介绍, 卵形钢弹体的材料为VASCOMAX-T250钢, 其密度为 $\rho = 8.020 \times 10^3 \text{kg/m}^3$, 屈服强度 $\sigma_y = 1720 \text{GPa}$, 因此在模拟中设置弹体为理想弹塑性材料, 其弹性模量设置为 $E = 2.124 \times 10^5 \text{MPa}$, 泊松比为 $\nu = 0.3$ 。采用前面介绍的HJC模型模拟混凝土, 混凝土的密度为 $\rho = 2.44 \times 10^3 \text{kg/m}^3$, 比热为 $654 \text{J}/(\text{Kg} \cdot \text{K})$, 其余参数见表1和表2。钢筋设置为理想弹塑性模型, 其密度为 $\rho = 7.5 \times 10^3 \text{kg/m}^3$, 弹性模量为 $E = 2.10 \times 10^5 \text{MPa}$, 屈服强度为 $\sigma_y = 235 \text{GPa}$, 塑性失效应变设置为0.26[15]。设置弹丸的初始速度为 749m/s , 实验测得此时弹丸穿过钢筋混凝土板后的剩余速度为 615m/s 。

表 1 混凝土的HJC强度和损伤参数[23]

Table 1 Concrete Parameters of the Strength and Damage Model in HJC[23]

A	B	N	C	f'_c (GPa)	
0.79	1.60	0.61	0.007	48	
S_{max}	G (GPa)	T (GPa)	D_1	D_2	ϵ_{fmin}
7.0	14.86	4	0.04	1.0	0.01

表 2 混凝土的HJC状态方程参数[23]

Table 2 Concrete Parameters of the Equation of State in HJC[23]

P_{crush} (MPa)	μ_{crush}	K_1 (GPa)	
16	0.001	85	
K_3 (GPa)	P_{lock} (GPa)	μ_{lock}	K_2 (GPa)
208	0.80	0.10	-171

图12的左列和右列分别显示了不同工况下子弹侵彻完成后钢筋混凝土板上的损伤云图的俯视图和三维视图。其中损伤定义为HJC混凝土本构中的损伤因子 D , 即等效塑性应变引起的损伤和塑性体积应变引起的损伤之和, 其表达式为

$$D = \sum \frac{\Delta \epsilon_p + \Delta \mu_p}{\epsilon_p^f + \mu_p^f} \quad (51)$$

其中 $\Delta\varepsilon_p$ 和 $\Delta\mu_p$ 为一个拉氏步内的等效塑性应变增量和塑性体积应变增量, $\varepsilon_p^f + \mu_p^f$ 是在压力 p 下破碎的塑性应变。

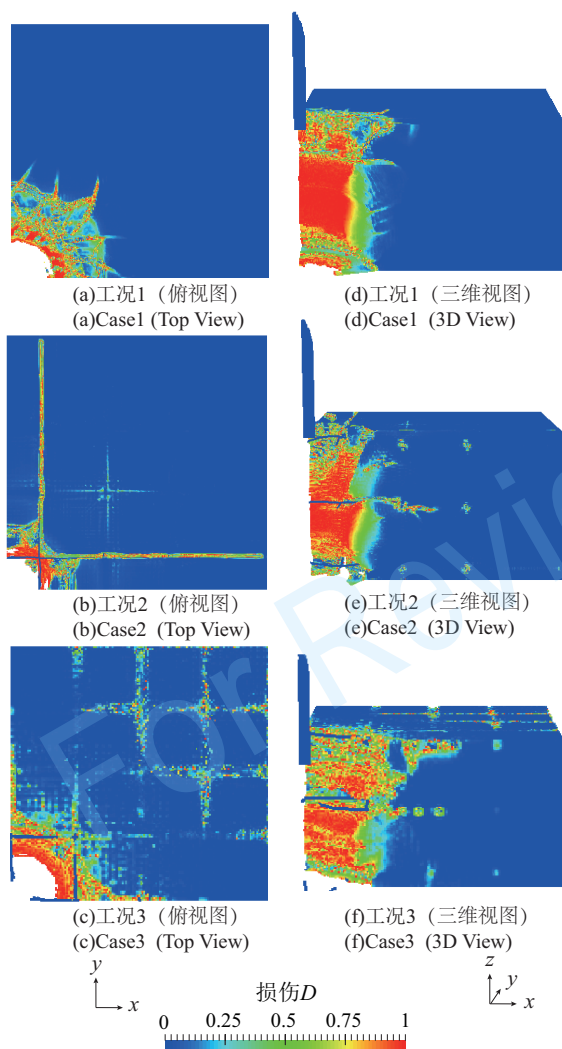


图 12 不同工况的损伤云图
Figure 12 Damage Contour in Different Cases

从图中可以看出三种工况下钢筋混凝土板都被弹丸击穿, 其中工况1由于没有钢筋, 其损伤集中于弹丸侵彻的部分, 而工况2中应力波沿钢筋和混凝土传播。一方面, 由于钢筋的刚度远大于混凝土, 钢筋对应力波起阻挡作用, 使得能量更集中于局部混凝土, 因此弹丸的侵彻孔洞明显减小。另一方面, 钢筋上的应力波也会影响其周边的混凝土, 使得钢筋附近的混凝土产生损伤。而工况3中弹丸

直接与钢筋发生碰撞, 钢筋上的载荷更大, 使得钢筋附近的混凝土损伤更加明显。通过三维视图我们还发现工况3中由于弹丸直接冲击到了钢筋, 造成了钢筋的断裂, 故弹丸的速度损失明显高于前两种工况。

表3和表4分别记录了不同工况和不同网格尺寸下HSGFEMP和HFEMP模拟结果中的弹丸的剩余速度。工况2和实验设置相同, 从剩余速度来看, 高分辨率的网格模拟的结果均更接近实验。HSGFEMP在 $h = 2\text{mm}$ 下的剩余弹速为594m/s, 相对于实验结果, 误差为3.4%, 而HFEMP在相同的网格尺寸下的模拟结果为561m/s, 误差为8.8%, 因此在钢筋混凝土的模拟上HSGFEMP具有更高的精度。同时发现HSGFEMP和HFEMP的结果中工况1的剩余弹速均略小于工况2, 这可能也由于钢筋对应力波的阻挡作用令损伤主要集中于局部混凝土, 弹丸的能量损失相应更小。这一现象也说明如果弹丸没有击中钢筋, 钢筋不能提升混凝土的抗侵彻能力。而如果弹丸击中钢筋(工况3), HSGFEMP和HFEMP都模拟得到了相对于工况1明显降低的剩余弹速, 这说明此时钢筋能明显增强钢筋混凝土的抗侵彻能力。

表 3 HSGFEMP在不同工况下的剩余弹速 (m/s)

网格尺寸	工况1	工况2	工况3
$h = 4\text{mm}$	560	561	526
$h = 2\text{mm}$	590	594	564

表 4 HFEMP在不同工况下的剩余弹速 (m/s)

网格尺寸	工况1	工况2	工况3
$h = 4\text{mm}$	526	527	457
$h = 2\text{mm}$	543	547	489

本算例可测试HFEMP和HSGFEMP的计算效率。分别采用不同的CFL数进行模拟后发现对于HFEMP和HSGFEMP, 当CFL数分别大于0.8和1.6以后剩余弹速会明显降低。因此在上述最大CFL数下分别采用HFEMP和HSGFEMP进行模

拟, 得到的模拟总耗时如表5所示。从表中可得, 综合来看相比HFEMP, HSGFEMP的计算效率提升了30%以上。

表 5 HFEMP和HSGFEMP的计算总时长 (s)

Table 5 Total Calculation Time of HFEMP and HSGFEMP (s)

网格尺寸	HFEMP	HSGFEMP	HSGFEMP效率提升
$h = 4\text{mm}$	3049	2269	34.4%
$h = 2\text{mm}$	36518	26399	38.3%

综上, 本算例通过对比HSGFEMP、HFEMP和实验结果中的剩余弹速, 验证了HSGFEMP比HFEMP具有更高的精度和计算效率, 并且能有效地在实际问题中模拟钢筋混凝土材料。同时通过对不同工况下HSGFEMP模拟结果的对比, 表明钢筋对混凝土抗侵彻能力的增强主要通过钢筋本身对弹丸的阻挡作用, 而当弹丸未击中钢筋时, 钢筋无法提升混凝土的抗侵彻能力。

5 讨论与总结

本文将交错网格物质点法的格心积分思想引

入杂交物质点有限元法中, 发展了杂交交错网格物质点有限元法 (HSGFEMP)。HSGFEMP不仅继承了HFEMP能够避免在钢筋直径方向上的空间离散从而极大地提高了整体计算效率的特点, 还通过格心积分, 提高了算法的整体稳定性和精度, 是模拟钢筋混凝土的更有效的算法。通过理论分析, 研究了网格尺寸与杆单元尺寸之比对计算结果的影响, 发现由于耦合算法的离散精度由网格尺寸决定, 当杆单元尺寸大于其协调尺寸时, 网格的分辨率高于杆单元, 可以精确得到与有限元杆单元一致的解; 而当杆单元尺寸小于其协调尺寸时, 网格分辨率不足以捕捉杆单元的完整信息, 从而导致杆单元计算结果与其有限元解存在差异。理论分析得出HSGFEMP的杆单元协调尺寸为网格尺寸的3倍。最后利用一维杆轴向振动问题验证了HSGFEMP的杆单元计算效果和杆单元协调尺寸。而后采用钢筋混凝土板靶板的弹丸侵彻问题验证了HSGFEMP模拟钢筋混凝土实际问题的效果, 同时表明相比于HFEMP, HSGFEMP具有更高的精度和计算效率, 是钢筋混凝土模拟的更有效算法。

参考文献

- 1 Si Q, Wang R. Dynamic behaviors of a hollow reinforced concrete column with an inner octagon steel tube under lateral impact (in Chinese). *Explosion Shock Waves*, 2019, 39: 85–94 [司强, 王蕊. 冲击荷载下内衬八边形钢管空心钢筋混凝土柱的动力响应. *爆炸与冲击*, 2019, 39: 85–94]
- 2 Rong Y, Ren H L, Xu X Z. Experimental and mesoscale numerical investigation on the failure behavior of reinforced concrete under projectile-impact loading (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2021, 51: 259–271 [荣誉, 任会兰, 许香照. 弹体高速冲击荷载下钢筋混凝土的破坏行为实验与微观数值模拟. *中国科学: 技术科学*, 2021, 51: 259–271]
- 3 Zhao X J, Xiao C. Experimental Investigation of reinforced concrete medium crack growth rate under explosion impact load (in Chinese). *Chinese Journal of Explosives & Propellants*, 2013, 36: 55–58, 81 [赵向军, 肖川. 爆炸冲击荷载作用下钢筋混凝土介质裂纹扩展速度的实验研究. *火炸药学报*, 2013, 36: 55–58, 81]
- 4 Sun Y L, Wang Y G, Luo S, et al. Experimental studies on the aircraft fuselage impacting a reinforced concrete wall model in nuclear engineering (in Chinese). *Journal of Vibration and Shock*, 2021, 40: 41–49 [孙运轮, 王友刚, 罗胜, 等. 飞机机身撞击核工程钢筋混凝土墙体模型试验研究. *振动与冲击*, 2021, 40: 41–49]
- 5 Yang G D, Wang G H, Li Q, et al. Dynamic response and damage patterns of underwater tunnel subjected to blast loads (in Chinese). *Journal of Vibration and Shock*, 2022, 41: 150–158 [杨广栋, 王高辉, 李麒, 等. 爆炸冲击下水底隧道的动态响应及毁伤模式研究. *振动与冲击*, 2022, 41: 150–158]
- 6 He L Z, Yu Q B, Guo Z R, et al. Influence of block on terminal effect of PELE penetrating reinforced concrete target (in Chinese). *Journal of Ordnance Equipment Engineering*, 2019, 40: 5–10 [何鲁哲, 余庆波, 郭至荣, 等. 弹体材料对PELE侵彻钢筋混凝土靶板影响. *兵器装备工程学报*, 2019, 40: 5–10]
- 7 Peng H, Yao W J, Tao Z, et al. Analysis of caving response of reinforced Concrete Column Under Impact Load (in Chinese). *Journal of Ordnance*

- Equipment Engineering, 2021, 42: 111–115 [彭航, 姚文进, 陶正, 等. 钢筋混凝土柱在冲击载荷下崩落响应分析. 兵器装备工程学报, 2021, 42: 111–115]
- 8 Schwer L E, Day J. Computational techniques for penetration of concrete and steel targets by oblique impact of deformable projectiles. Nuclear Engineering & Design, 1991, 125: 215–238
- 9 Moës N, Dolbow J, Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 46: 131–150
- 10 Ma S, Zhang X, Qiu X M. Three-dimensional material point method for hypervelocity impact (in Chinese). Explosion Shock Waves, 2006, 26: 273–278 [马上, 张雄, 邱信明. 超高速碰撞问题的三维物质点法. 爆炸与冲击, 2006, 26: 273–278]
- 11 Sulsky D, Chen Z, Schreyer H L. A particle method for history-dependent materials. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, 118: 179–196
- 12 Hu W, Zhen C. Model-based simulation of the synergistic effects of blast and fragmentation on a concrete wall using the mpm. International Journal of Impact Engineering, 2006, 32: 2066–2096
- 13 Lian Y P, Zhang X, Zhou X, Ma S, Zhao Y L. Numerical simulation of explosively driven metal by material point method. International Journal of Impact Engineering, 2011, 38: 238–246
- 14 Wang Y X, Gu Y X, Sun M. Application of material point method to shock load problems (in Chinese). Engineering Mechanics, 2006, 23: 46–51 [王宇新, 顾元宪, 孙明. 无网格MPM法在冲击载荷问题中的应用. 工程力学, 2006, 23: 46–51]
- 15 Lian Y P, Zhang X, Zhou X, et al. A femp method and its application in modeling dynamic response of reinforced concrete subjected to impact loading. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 2011, 200: 1659–1670
- 16 Bardenhagen S G, Kober E M. The generalized interpolation material point method. CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2004, 5: 477–495
- 17 Sadeghirad A, Brannon R M, Burghardt J. A convected particle domain interpolation technique to extend applicability of the material point method for problems involving massive deformations. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011, 86: 1435–1456
- 18 Steffen M, Wallstedt P C, Guilkey J E, et al. Examination and analysis of implementation choices within the material point method (MPM). CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2008, 31: 107–127
- 19 Liang Y, Zhang X, Liu Y. An efficient staggered grid material point method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2019, 352: 85–109
- 20 Kan L, Liang Y, Zhang X. A critical assessment and contact algorithm for the staggered grid material point method. International Journal of Mechanics and Materials in Design, 2021, 17: 743–766
- 21 张雄, 廉艳平, 刘岩, 周旭. 物质点法. 北京: 清华大学出版社, 2013
- 22 Bardenhagen S G. Energy conservation error in the material point method for solid mechanics. Journal of Computational Physics, 2002, 180: 383–403
- 23 Holmquist T, Johnson G, Cook W. A computational constitutive model for concrete subjected to large strains, high strain rates, and high pressures. In: 14th International Symposium on Ballistics. Quebec, Canada: Canadian Defence Preparedness Association, 1993. 591–600
- 24 AUTODYN-3D Version 4.2 User's Manual. Century Dynamics, Inc., 2001
- 25 Malvar L, Crawford J, Wesevich J, et al. A plasticity concrete material model for dyna3d. Int. J. Impact Eng, 1997, 19: 847–873
- 26 Hanchak S, Forrestal M, Young E, et al. Perforation of concrete slabs with 48 mpa (7ksi) and 140 mpa (20ksi) unconfined compressive strengths. Int. J. Impact Eng, 1992, 12: 1–7

Hybrid Staggered Grid Finite Element Material Point Method (HSGFEMP) for Reinforced Concrete

Lei Kan¹, Zixian Sun¹, Xiong Zhang^{1*}, Xu Zhou² & Xiaoxiao Cui²

1. School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, P R China;

2. Beijing Special Engineering Design and Research Institute, Beijing 100028, P R China

It is of great significance to study numerical algorithms to simulate the response of reinforced concrete (RC) under explosion and impact loads. The material point method (MPM) is effective for simulating extreme problems such as fracture and large solid deformation, and the hybrid finite element material point method (HFEMP) improves the overall calculation efficiency in simulating RC by introducing the bar element of FEM to the MPM. However, similar to the MPM, the HFEMP also suffers several defects caused by the particle quadrature, including cell crossing noise, low accuracy, and low stability. Therefore, this paper develops a hybrid staggered grid finite element material point method (HSGFEMP) with higher accuracy by introducing the cell-center quadrature from the staggered material point method (SGMP) to the HFEMP. An auxiliary grid is generated to reconstruct variables at cell centers and map the updating variables at the particles and bar elements. When employing cell-center quadrature, the influence on the calculation result from the ratio between the size of the bar element and the grid element is also studied. Numerical examples verify that the HSGFEMP is more effective and accurate than the HFEMP in modeling the RC.

material point method, staggered grid, reinforced concrete

PACS: 02.70.-c, 46.15.-x, 45.50.Tn, 46.35.+z

doi: